

Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Отчёт по задаче

Выполнил студент 431 группы

Макаров Илья

14 декабря 2025 г.

Содержание

Постановка	2
Аппроксимация на решении явной схемы	2
Аппроксимация на решении неявной схемы	3
Устойчивость явной схемы	4
Устойчивость неявной схемы	5
Примеры	7
Список функций	7
Графики явной схемы	8
Графики неявной схемы	16

Постановка

Задача:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + p(t, x) u + f(t, x), \\ x &\in [0, 1], \quad t \in [0, T], \\ u_x(t, 0) &= u_x(t, 1) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x). \end{aligned}$$

Сетка: $x_k = (k - \frac{1}{2})h, \quad k = 0, \dots, N, \quad h = \frac{1}{N-1}, \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, \dots, M, \quad \tau = \frac{T}{M}$

Явная схема:

$$\begin{cases} u_k^{j+1} = u_k^j + \tau \left(\frac{u_{k+1}^j - 2u_k^j + u_{k-1}^j}{h^2} + p(t_j, x_k) u_k^j + f(t_j, x_k) \right), \\ \quad k = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1 \\ u_0^j = u_1^j, \quad u_N^j = u_{N-1}^j \\ u_k^0 = u_0(x_k), \quad k = 0, \dots, N \end{cases}$$

Условие устойчивости: $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$

Неявная схема:

$$\begin{cases} u_k^{j+1} = u_k^j + \tau \left(\frac{u_{k+1}^{j+1} - 2u_k^{j+1} + u_{k-1}^{j+1}}{h^2} + p(t_{j+1}, x_k) u_k^{j+1} + f(t_{j+1}, x_k) \right), \\ \quad k = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1 \\ u_0^j = u_1^j, \quad u_N^j = u_{N-1}^j \\ u_k^0 = u_0(x_k), \quad k = 0, \dots, N \end{cases}$$

Сеточная норма: $\|u^j\|_h^2 = \sum_{k=1}^{N-1} (u_k^j)^2 h$ согласована с $\|u(t_j, \cdot)\|_{L_2(0,1)}^2$

Аппроксимация на решении явной схемы

$$\blacktriangle: \quad u(t_j + \tau, x_k) = u(t_j, x_k) + \tau u_t(t_j, x_k) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(t_j, x_k) + O(\tau^3),$$

$$u(t_j, x_k \pm h) = u(t_j, x_k) \pm h u_x(t_j, x_k) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(t_j, x_k) \pm \frac{h^3}{6} u_{xxx}(t_j, x_k) + O(h^4)$$

Внутренние точки

Для точного решения $u(t, x)$ имеем

$$\frac{u(t_j, x_{k+1}) - 2u(t_j, x_k) + u(t_j, x_{k-1})}{h^2} = u_{xx}(t_j, x_k) + O(h^2)$$

Подставляя в явную схему и используя уравнение $u_t = u_{xx} + p u + f$, получаем:

$$\begin{aligned} r_k^j &= \left| \frac{u(t_{j+1}, x_k) - u(t_j, x_k)}{\tau} - \frac{u(t_j, x_{k+1}) - 2u(t_j, x_k) + u(t_j, x_{k-1})}{h^2} \right. \\ &\quad \left. - p(t_j, x_k) u(t_j, x_k) - f(t_j, x_k) \right| \\ &= |u_t(t_j, x_k) - u_{xx}(t_j, x_k) - p(t_j, x_k) u(t_j, x_k) - f(t_j, x_k)| + O(\tau + h^2) \\ &= O(\tau + h^2) \end{aligned}$$

Границные условия:

$$\begin{aligned} \left| \frac{u(t_j, \frac{h}{2}) - u(t_j, -\frac{h}{2})}{h} \right| &= \left| \frac{u(t_j, 0) + \frac{h}{2}u_x(t_j, 0) + \frac{h^2}{8}u_{xx}(t_j, 0) + O(h^3)}{h} \right. \\ &\quad \left. - \frac{u(t_j, 0) - \frac{h}{2}u_x(t_j, 0) + \frac{h^2}{8}u_{xx}(t_j, 0) + O(h^3)}{h} \right| = |u_x(t_j, 0) + O(h^2)| = O(h^2), \end{aligned}$$

так как $u_x(t_j, 0) = 0$

$$\text{Отсюда } \frac{u(t_j, -\frac{h}{2}) - u(t_j, \frac{h}{2})}{h} = O(h^2)$$

$$\text{Аналогично при } x = 1 : \quad \left| \frac{u(t_j, 1 + \frac{h}{2}) - u(t_j, 1 - \frac{h}{2})}{h} \right| = |u_x(t_j, 1) + O(h^2)| = O(h^2),$$

так как $u_x(t_j, 1) = 0$

Начальное условие

$$u_k^0 = u_0(x_k) \Rightarrow r_k^0 = 0.$$

Явная схема аппроксимирует задачу с порядком $O(\tau + h^2)$. ■

Аппроксимация на решении неявной схемы

$$\blacktriangle : \quad u(t_j + \tau, x_k) = u(t_j, x_k) + \tau u_t(t_j, x_k) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(t_j, x_k) + O(\tau^3),$$

$$u(t_{j+1}, x_k \pm h) = u(t_{j+1}, x_k) \pm h u_x(t_{j+1}, x_k) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(t_{j+1}, x_k) \pm \frac{h^3}{6} u_{xxx}(t_{j+1}, x_k) + O(h^4)$$

Внутренние точки

Для точного решения $u(t, x)$ имеем

$$\frac{u(t_{j+1}, x_{k+1}) - 2u(t_{j+1}, x_k) + u(t_{j+1}, x_{k-1})}{h^2} = u_{xx}(t_{j+1}, x_k) + O(h^2)$$

Подставляя в неявную схему и используя уравнение $u_t = u_{xx} + p u + f$, получаем:

$$\begin{aligned} r_k^j &= \left| \frac{u(t_{j+1}, x_k) - u(t_j, x_k)}{\tau} - \frac{u(t_{j+1}, x_{k+1}) - 2u(t_{j+1}, x_k) + u(t_{j+1}, x_{k-1})}{h^2} \right. \\ &\quad \left. - p(t_{j+1}, x_k) u(t_{j+1}, x_k) - f(t_{j+1}, x_k) \right| \\ &= |u_t(t_{j+1}, x_k) - u_{xx}(t_{j+1}, x_k) - p(t_{j+1}, x_k) u(t_{j+1}, x_k) - f(t_{j+1}, x_k)| + O(\tau + h^2) \\ &= O(\tau + h^2) \end{aligned}$$

Границные условия:

$$\left| \frac{u(t_{j+1}, \frac{h}{2}) - u(t_{j+1}, -\frac{h}{2})}{h} \right| = \left| \frac{u(t_{j+1}, 0) + \frac{h}{2}u_x(t_{j+1}, 0) + \frac{h^2}{8}u_{xx}(t_{j+1}, 0) + O(h^3)}{h} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{u(t_{j+1}, 0) - \frac{h}{2}u_x(t_{j+1}, 0) + \frac{h^2}{8}u_{xx}(t_{j+1}, 0) + O(h^3)}{h} \right| = |u_x(t_{j+1}, 0) + O(h^2)| = O(h^2), \right.$$

так как $u_x(t_{j+1}, 0) = 0$

Отсюда $\frac{u(t_{j+1}, -\frac{h}{2}) - u(t_{j+1}, \frac{h}{2})}{h} = O(h^2)$

Аналогично при $x = 1$: $\left| \frac{u(t_{j+1}, 1 + \frac{h}{2}) - u(t_{j+1}, 1 - \frac{h}{2})}{h} \right| = |u_x(t_{j+1}, 1) + O(h^2)| = O(h^2),$

так как $u_x(t_{j+1}, 1) = 0$

Начальное условие

$$u_k^0 = u_0(x_k) \Rightarrow r_k^0 = 0.$$

Неявная схема аппроксимирует задачу с порядком $O(\tau + h^2)$. ■

Устойчивость явной схемы

$$u^j = (u_0^j, u_1^j, \dots, u_N^j)^T$$

Так как задача линейная достаточно доказать, что

$$\exists C, h_0 : \|u_h\|_h \leq C \|u_h^0\|_h \quad \text{при } h < h_0$$

Обозначим дискретный оператор Лапласа Λ (с граничными условиями $u_0^j = u_1^j$, $u_N^j = u_{N-1}^j$) по формуле

$$(\Lambda v)_k = \frac{v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}}{h^2}, \quad k = 1, \dots, N-1,$$

а также оператор

$$(P^j v)_k = p(t_j, x_k) v_k, \quad k = 0, \dots, N.$$

Тогда явную схему можно записать как

$$u^{j+1} = u^j + \tau (\Lambda u^j + P^j u^j)$$

Введём оператор

$$A := I + \tau \Lambda,$$

$$u^{j+1} = (A + \tau P^j) u^j$$

Тогда:

$$u^j = (A + \tau P^{j-1})(A + \tau P^{j-2}) \cdots (A + \tau P^0) u^0$$

$$p_* := \max_{(t,x) \in [0,T] \times [0,1]} |p(t,x)|$$

$$\forall v : \|P^j v\|_h^2 = h \sum_{k=1}^{N-1} (p_k^j v_k)^2 \leq p_*^2 \|v\|_h^2$$

следовательно

$$\|P^j\|_h \leq p_* \quad \forall j.$$

При условии $\tau/h^2 \leq 1/2$ имеем $\|A\|_h \leq 1$ (очевидный факт, был на семинарах), поэтому из $u^{j+1} = (A + \tau P^j)u^j$ получаем

$$\|u^{j+1}\|_h \leq \|Au^j\|_h + \tau \|P^j u^j\|_h \leq \|u^j\|_h + \tau p_* \|u^j\|_h = (1 + \tau p_*) \|u^j\|_h.$$

Итерацией по j получаем оценку через начальные условия:

$$\boxed{\|u^j\|_h \leq (1 + \tau p_*)^j \|u^0\|_h \leq e^{p_* t_j} \|u^0\|_h}$$

Доказана устойчивость явной схемы в L_2 -согласованной норме при условии $\tau/h^2 \leq 1/2$

Устойчивость неявной схемы

Неявную схему можно записать как

$$(I - \tau \Lambda - \tau P^{j+1})u^{j+1} = u^j, \quad \boxed{u^{j+1} = (I - \tau \Lambda - \tau P^{j+1})^{-1}u^j}.$$

Как и до этого

$$p_* := \max_{(t,x) \in [0,T] \times [0,1]} |p(t,x)|, \quad \forall v : \|P^j v\|_h^2 \leq p_*^2 \|v\|_h^2.$$

Для Λ выполняется

$$(\Lambda v, v)_h \leq 0$$

Скалярно умножим уравнение схемы на u^{j+1} в $(\cdot, \cdot)_h$:

$$(u^{j+1} - u^j, u^{j+1})_h = \tau(\Lambda u^{j+1}, u^{j+1})_h + \tau(P^{j+1} u^{j+1}, u^{j+1})_h.$$

Левую часть оцениваем снизу по неравенству Коши:

$$(u^{j+1} - u^j, u^{j+1})_h = \|u^{j+1}\|_h^2 - (u^j, u^{j+1})_h \geq \|u^{j+1}\|_h^2 - \|u^j\|_h \|u^{j+1}\|_h.$$

Правую часть оцениваем сверху:

$$\tau(\Lambda u^{j+1}, u^{j+1})_h \leq 0, \quad \tau(P^{j+1} u^{j+1}, u^{j+1})_h \leq \tau p_* \|u^{j+1}\|_h^2.$$

Получаем

$$\|u^{j+1}\|_h^2 - \|u^j\|_h \|u^{j+1}\|_h \leq \tau p_* \|u^{j+1}\|_h^2.$$

Переносим и делим на $\|u^{j+1}\|_h$ (случай $\|u^{j+1}\|_h = 0$ тривиален):

$$(1 - \tau p_*) \|u^{j+1}\|_h \leq \|u^j\|_h.$$

Следовательно, при условии

$$1 - \tau p_* > 0$$

имеем одношаговую оценку

$$\|u^{j+1}\|_h \leq \frac{1}{1 - \tau p_*} \|u^j\|_h.$$

Итерацией по j :

$$\|u^j\|_h \leq (1 - \tau p_*)^{-j} \|u^0\|_h \leq \exp\left(\frac{p_*}{1 - \tau p_*} t_j\right) \|u^0\|_h$$

Доказана устойчивость неявной схемы в L_2 -согласованной норме при условии $1 - \tau p_* > 0$

Примеры

Список функций

$$\boxed{u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + p(t, x) u(t, x) + f(t, x), \\ x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \quad u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x).}$$

$$p_1(t, x) = 0, \quad f_1(t, x) = 0, \quad u_0^{(1)}(x) = \cos(\pi x), \\ u_{\text{th}}^{(1)}(t, x) = \cos(\pi x) e^{-\pi^2 t}.$$

$$p_2(t, x) = 0, \quad f_2(t, x) = 0, \quad u_0^{(2)}(x) = \cos(2\pi x), \\ u_{\text{th}}^{(2)}(t, x) = \cos(2\pi x) e^{-4\pi^2 t}.$$

$$p_3(t, x) = x + t, \quad u_0^{(3)}(x) = \cos(\pi x), \quad u_{\text{th}}^{(3)}(t, x) = e^{-t} \cos(\pi x), \\ f_3(t, x) = e^{-t} \cos(\pi x) (\pi^2 - 1 - x - t).$$

$$p_4(t, x) = 1, \quad u_0^{(4)}(x) = \cos(2\pi x), \quad u_{\text{th}}^{(4)}(t, x) = \cos(t) \cos(2\pi x), \\ f_4(t, x) = -\sin(t) \cos(2\pi x) + (4\pi^2 - 1) \cos(t) \cos(2\pi x).$$

Примечание. График реального решения сдвинут на 1 по U для наглядности. Сначала идут графики на сетке 21×1001 , где выполняется условие устойчивости явной схемы. Затем 21×501 , где не выполняется это условие

Графики явной схемы

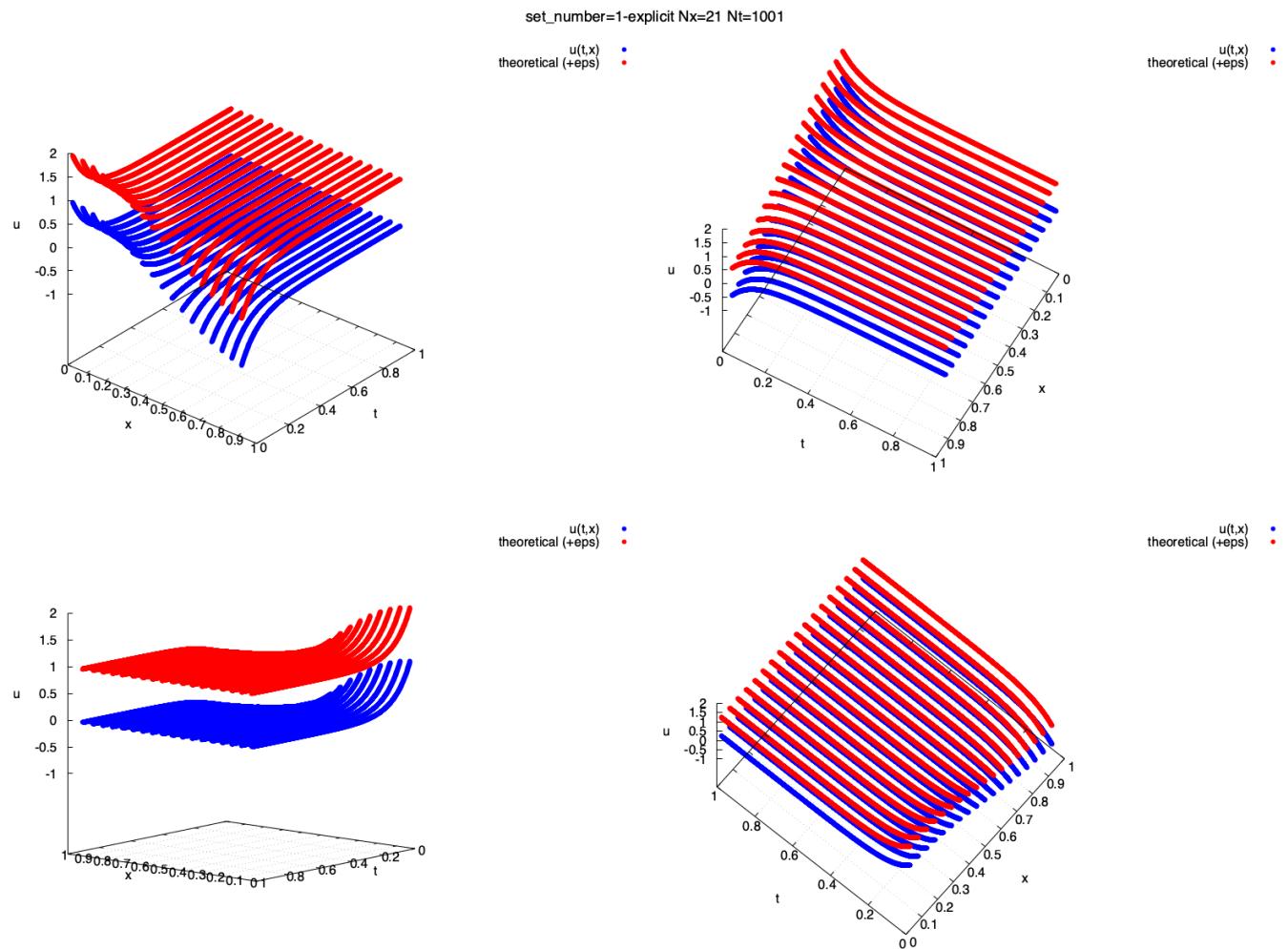


Рис. 1: $u_1(x)$

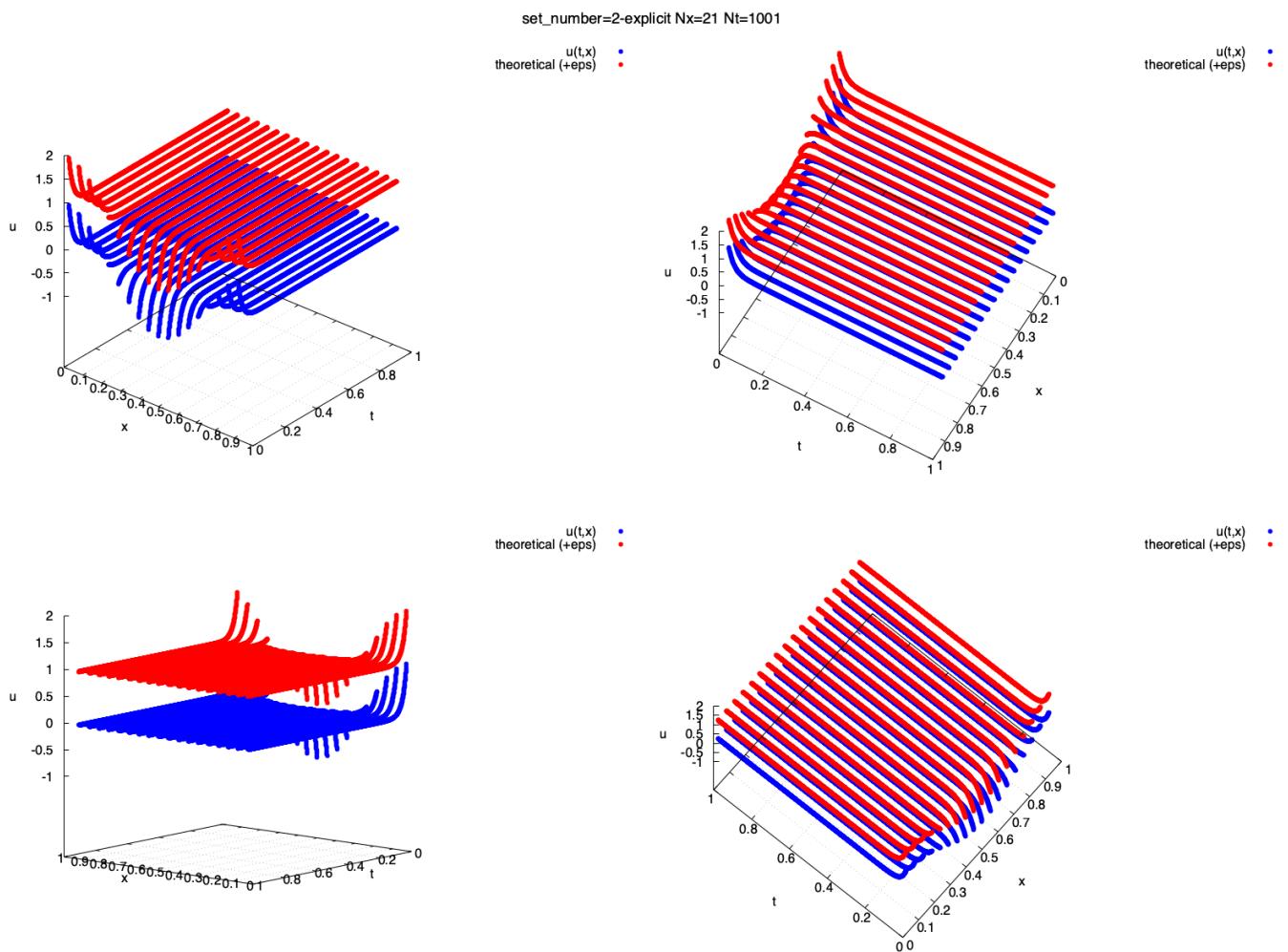


Рис. 2: $u_2(x)$

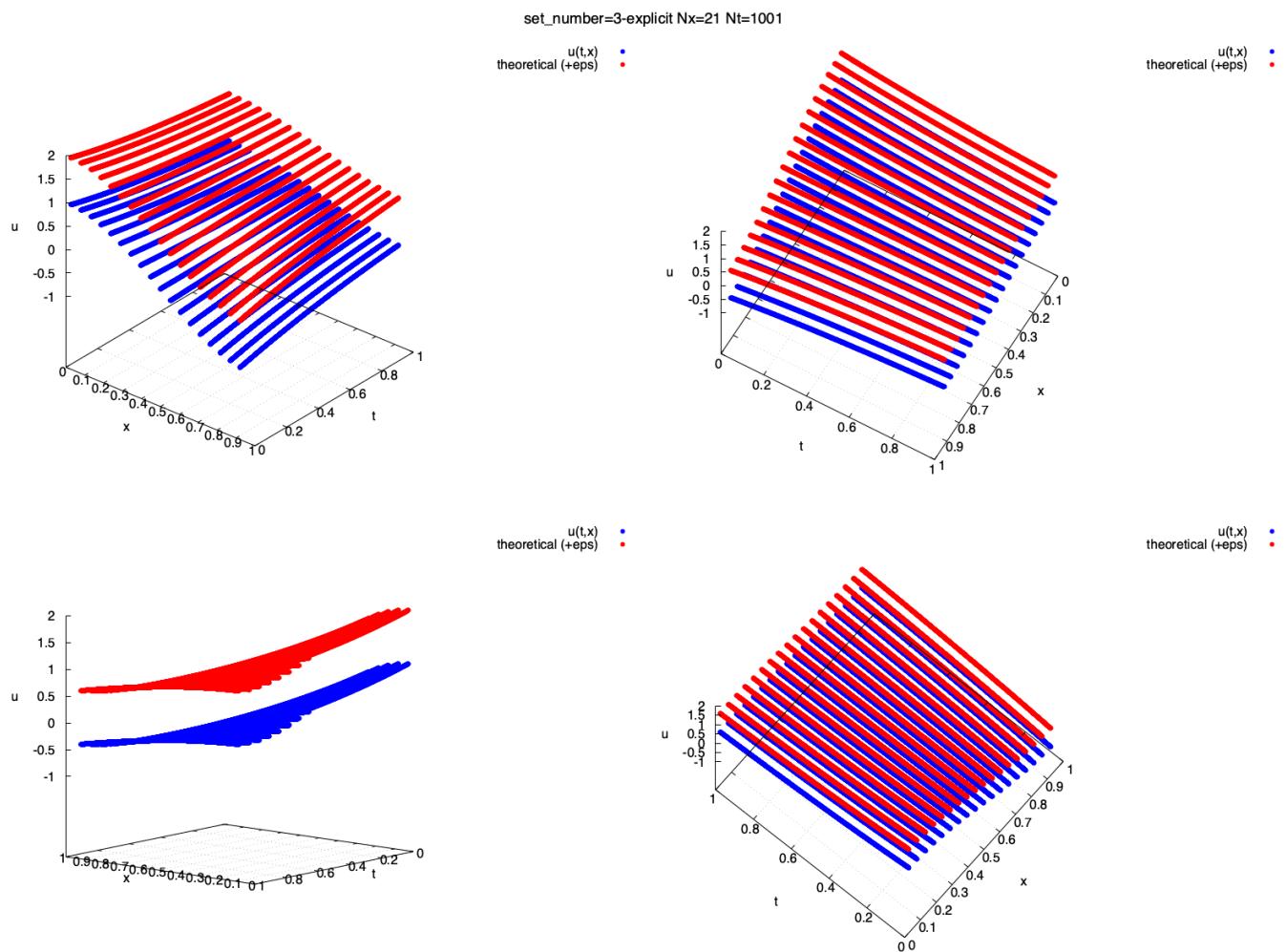


Рис. 3: $u_3(x)$

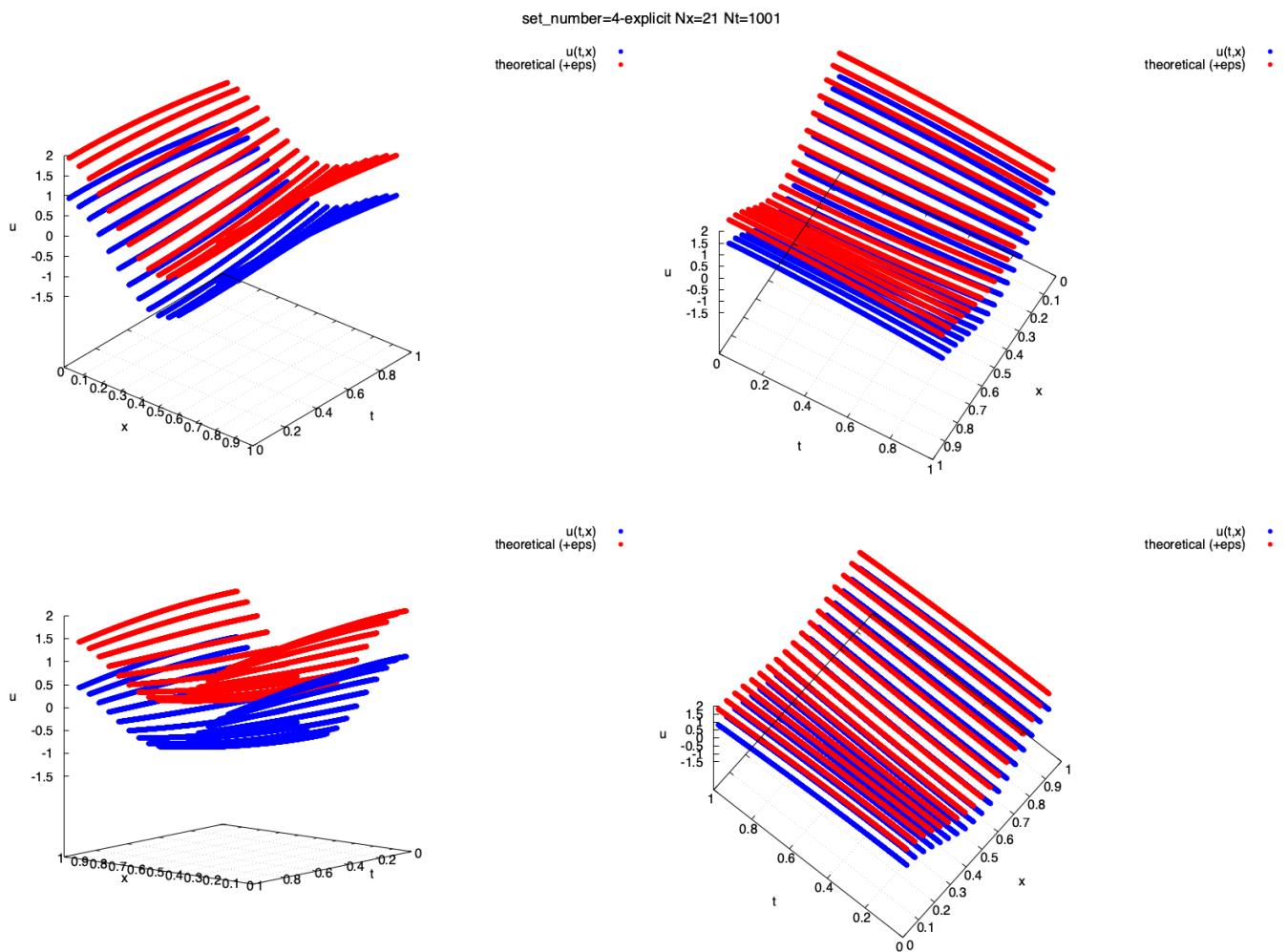


Рис. 4: $u_4(x)$

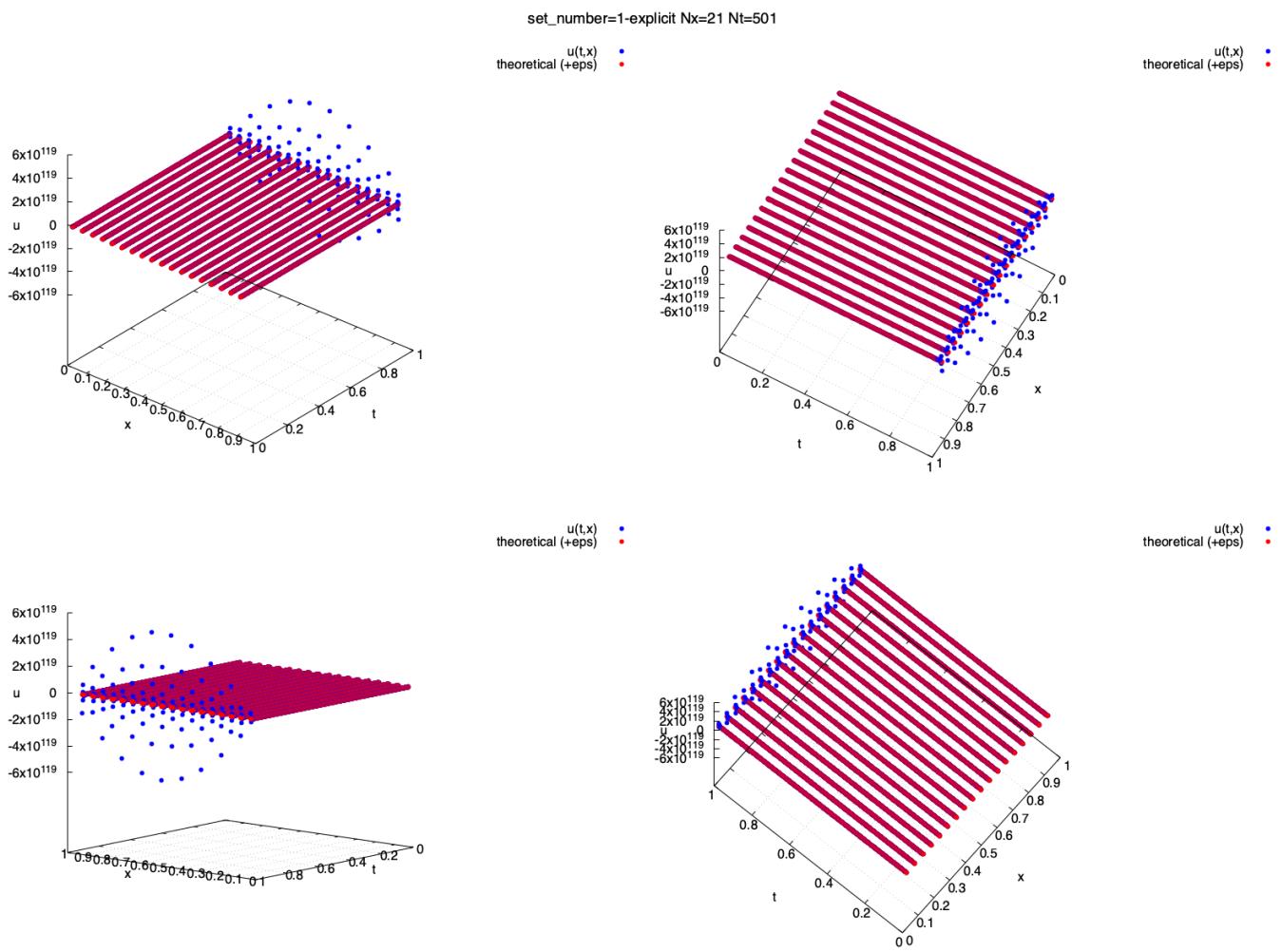


Рис. 5: $u_1(x)$

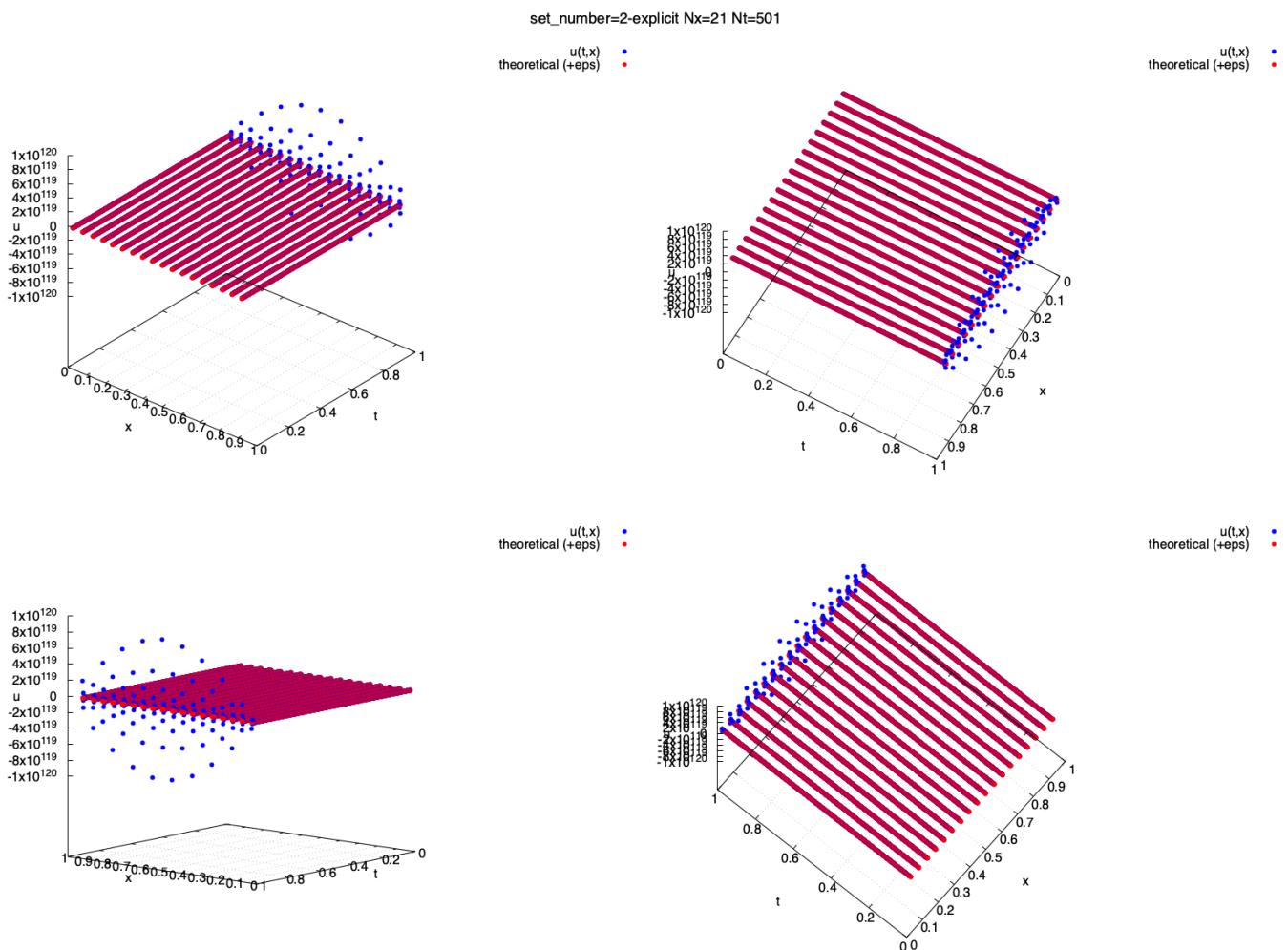


Рис. 6: $u_2(x)$

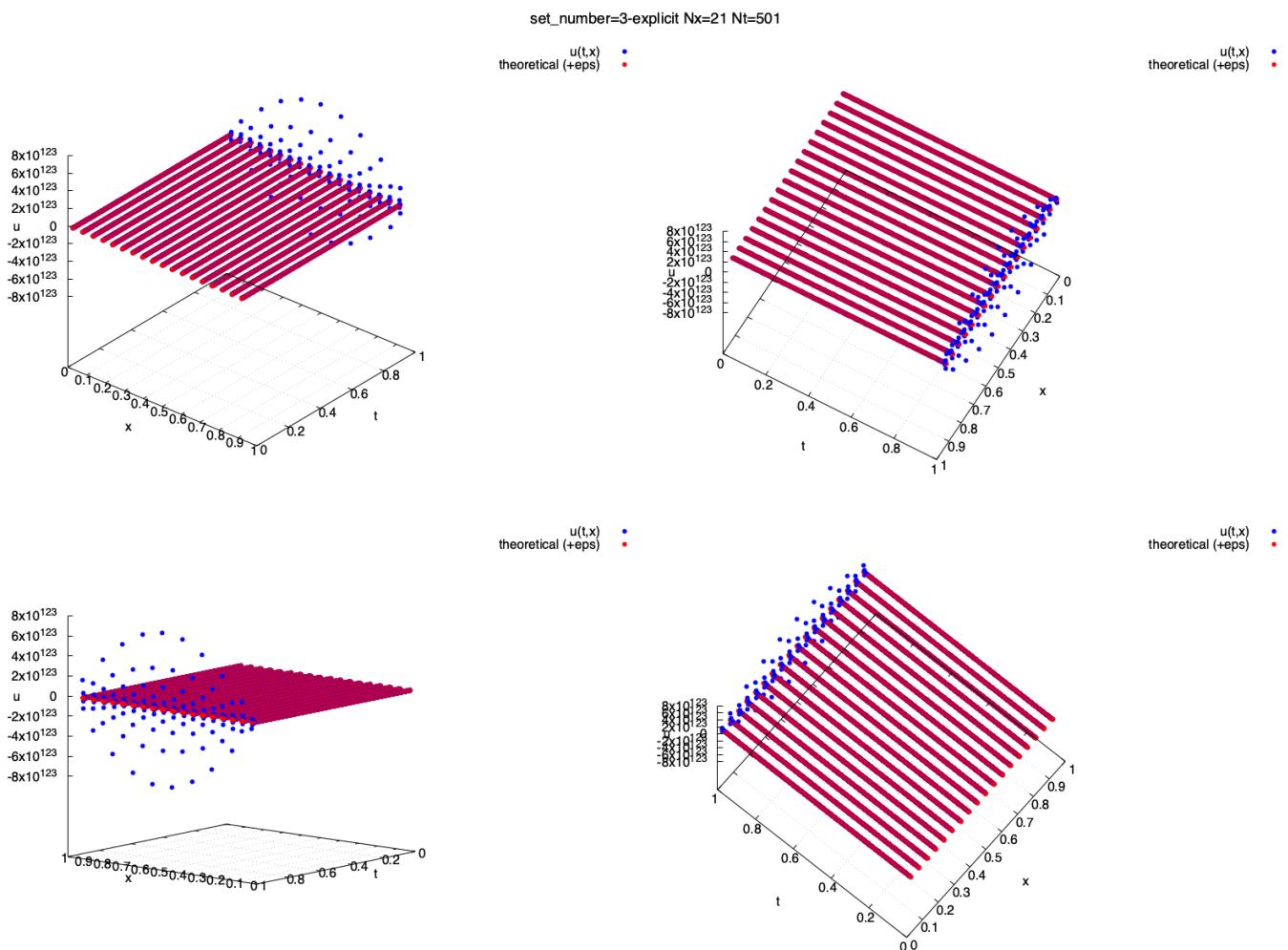


Рис. 7: $u_3(x)$

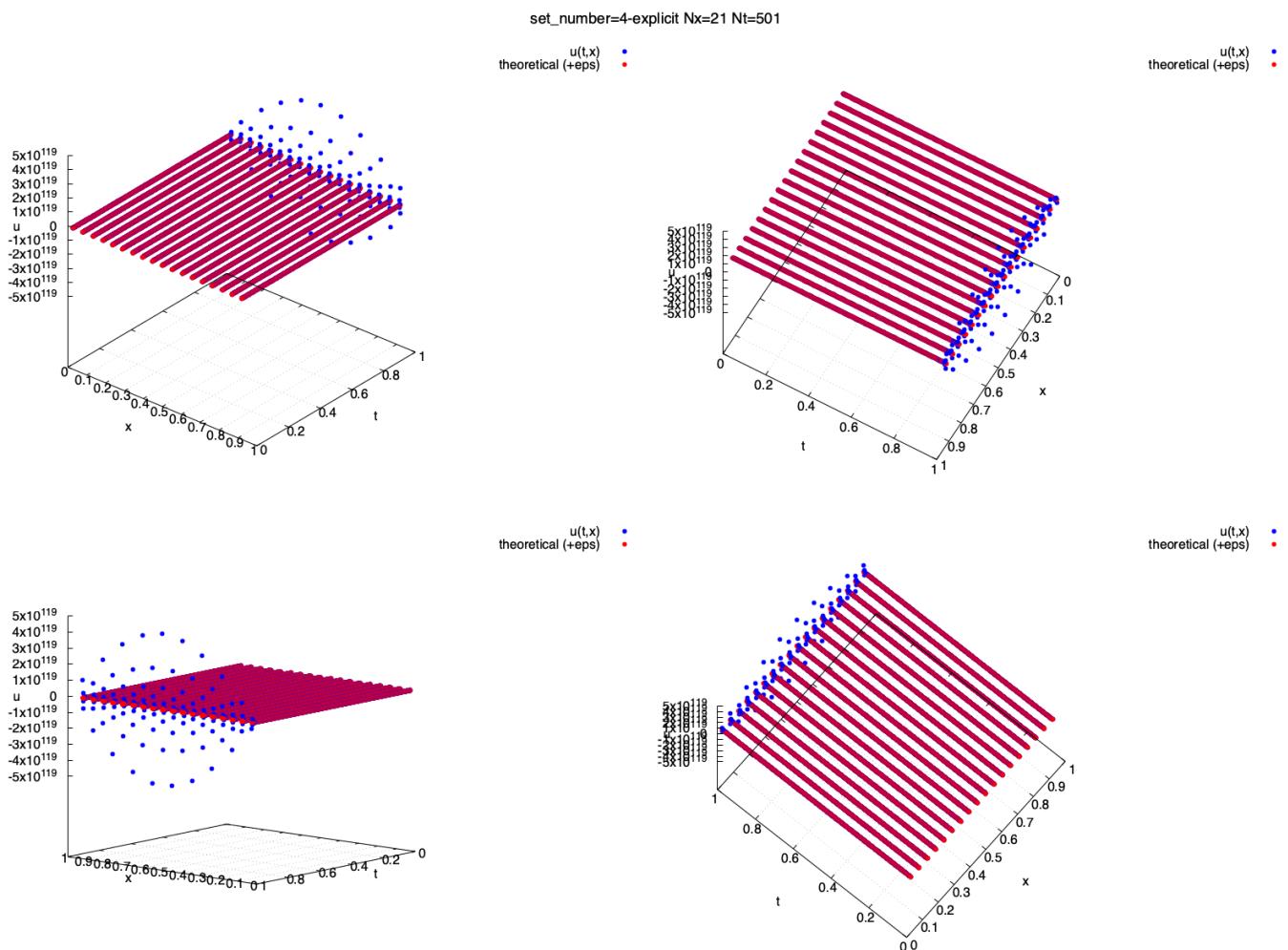


Рис. 8: $u_4(x)$

Графики неявной схемы

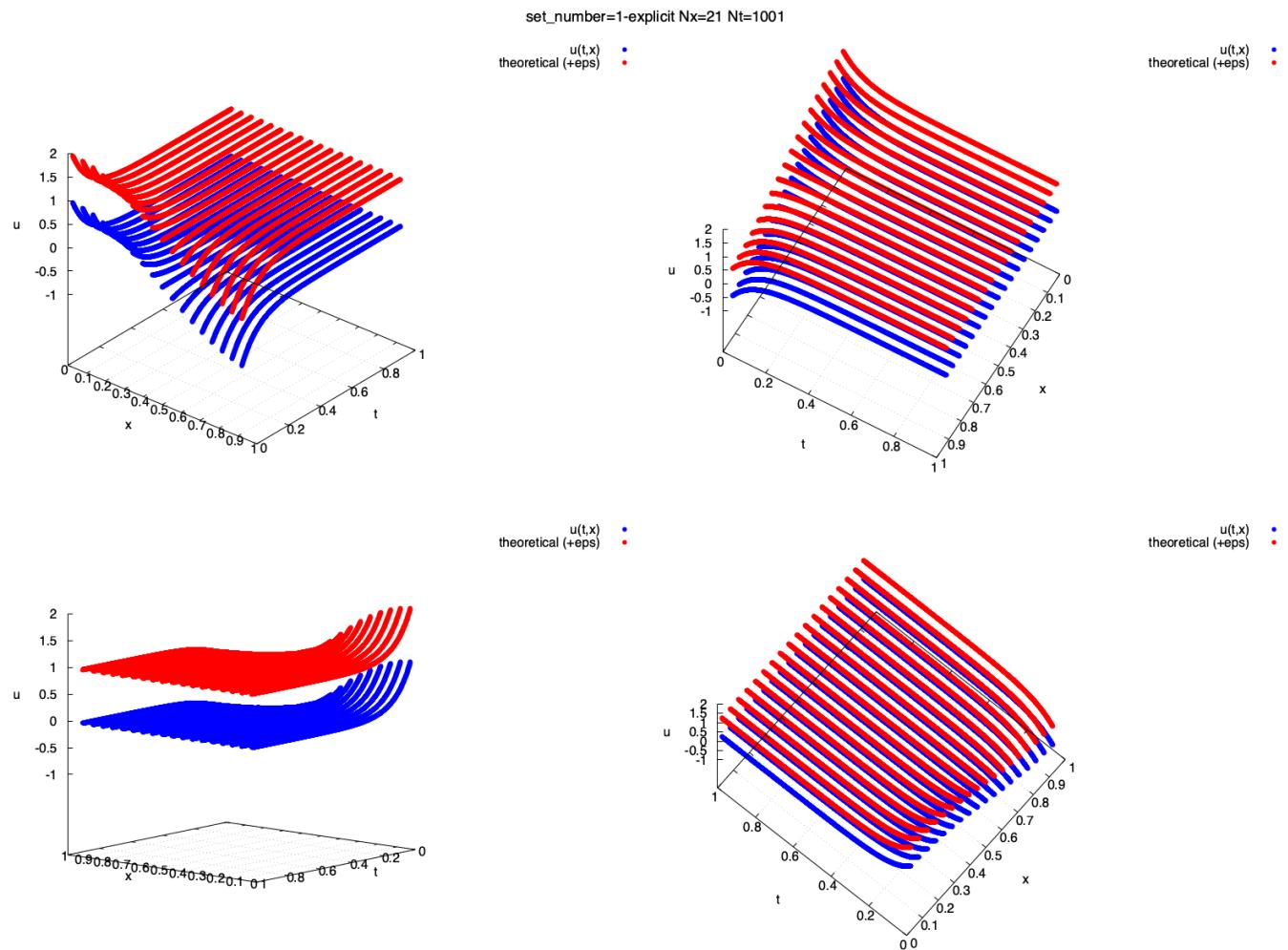


Рис. 9: $u_1(x)$

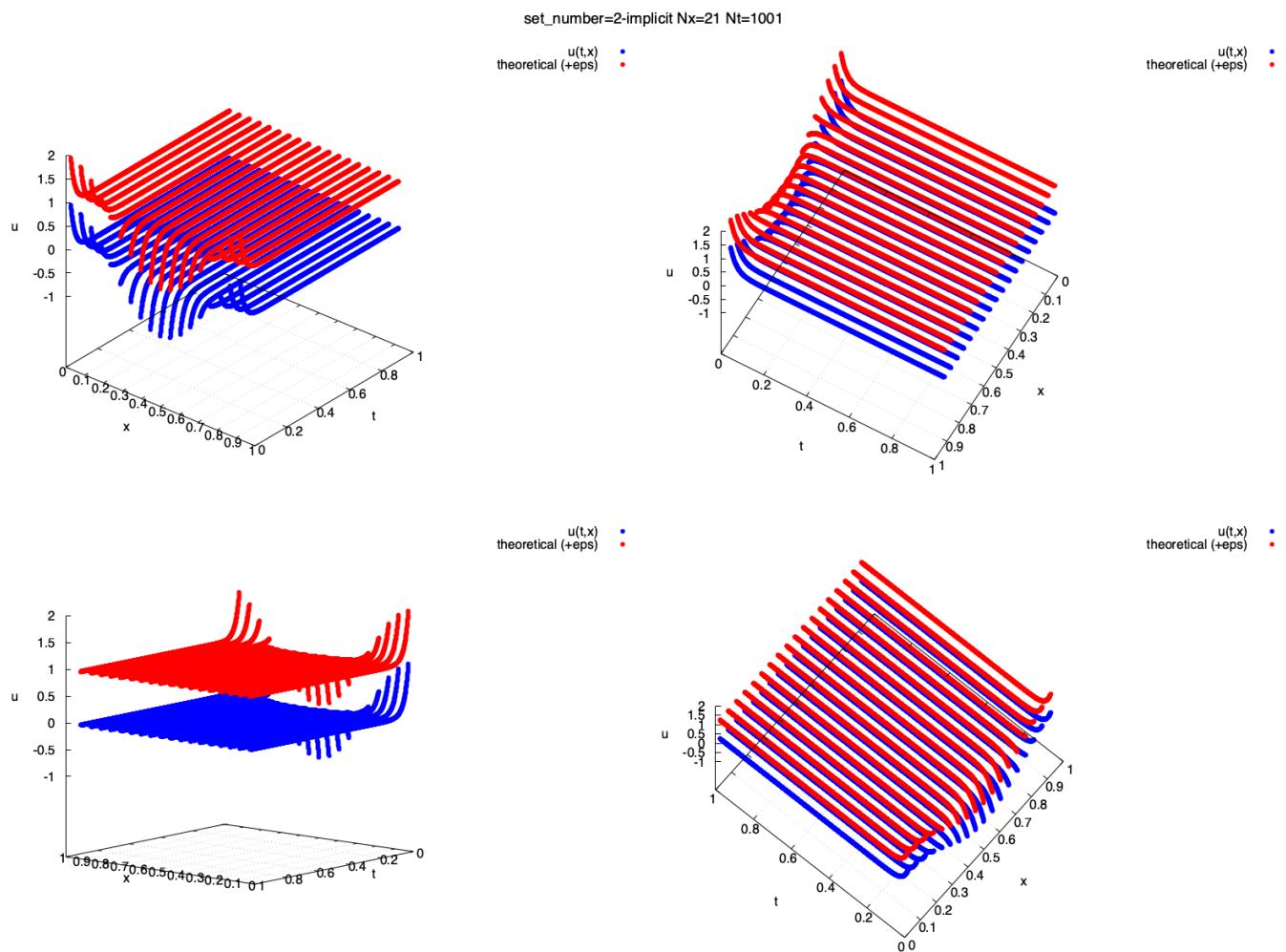


Рис. 10: $u_2(x)$

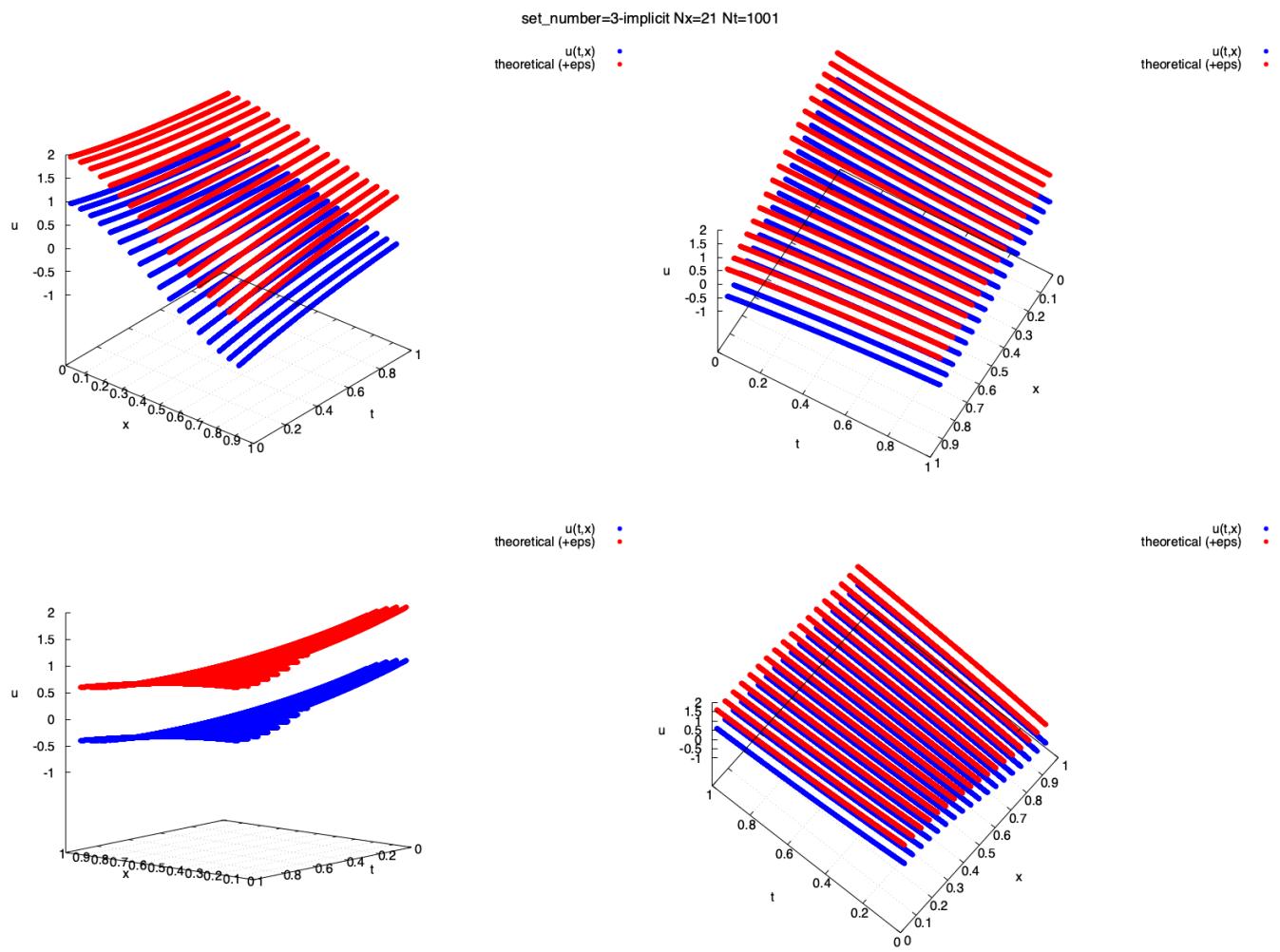


Рис. 11: $u_3(x)$

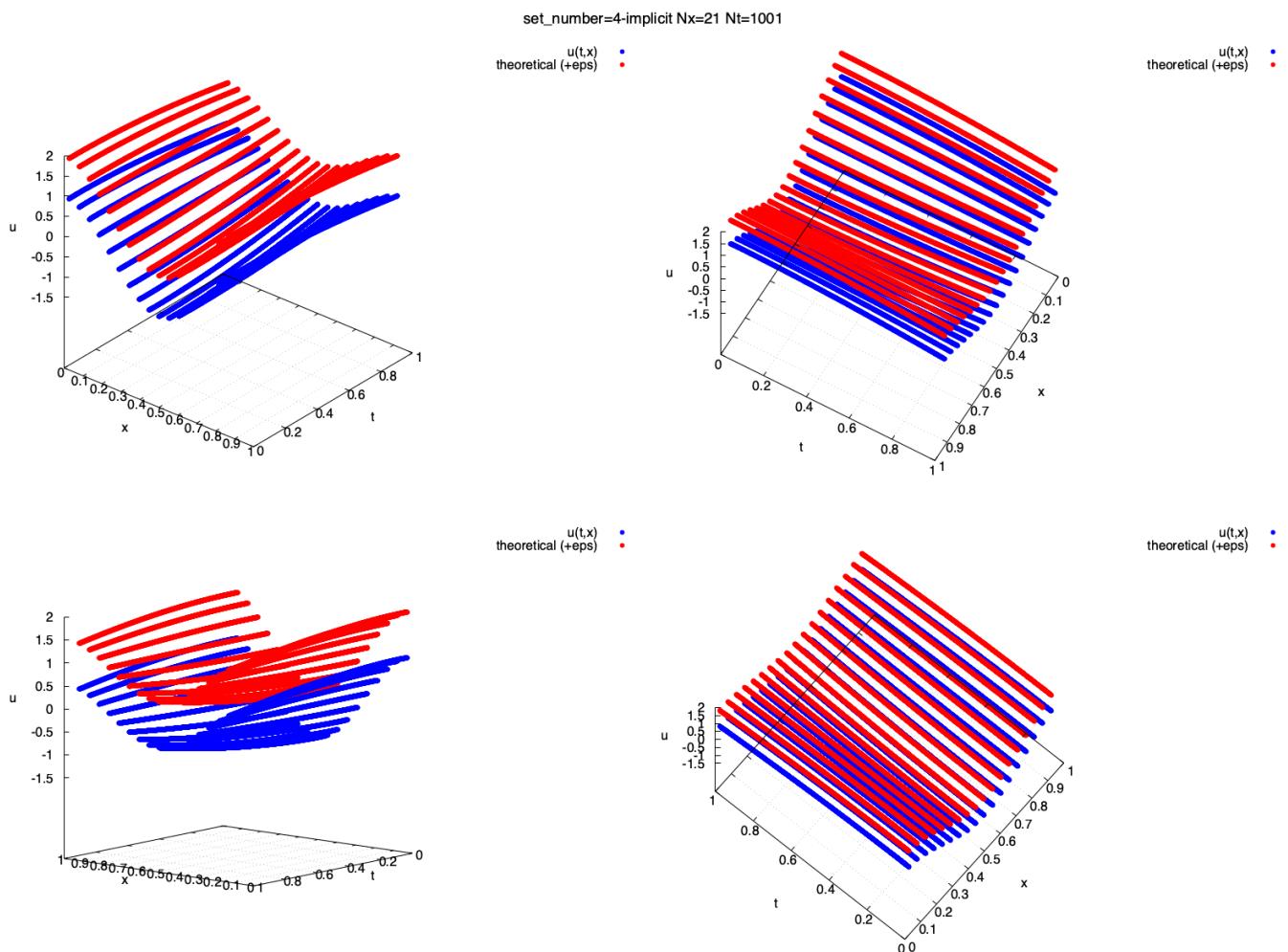


Рис. 12: $u_4(x)$

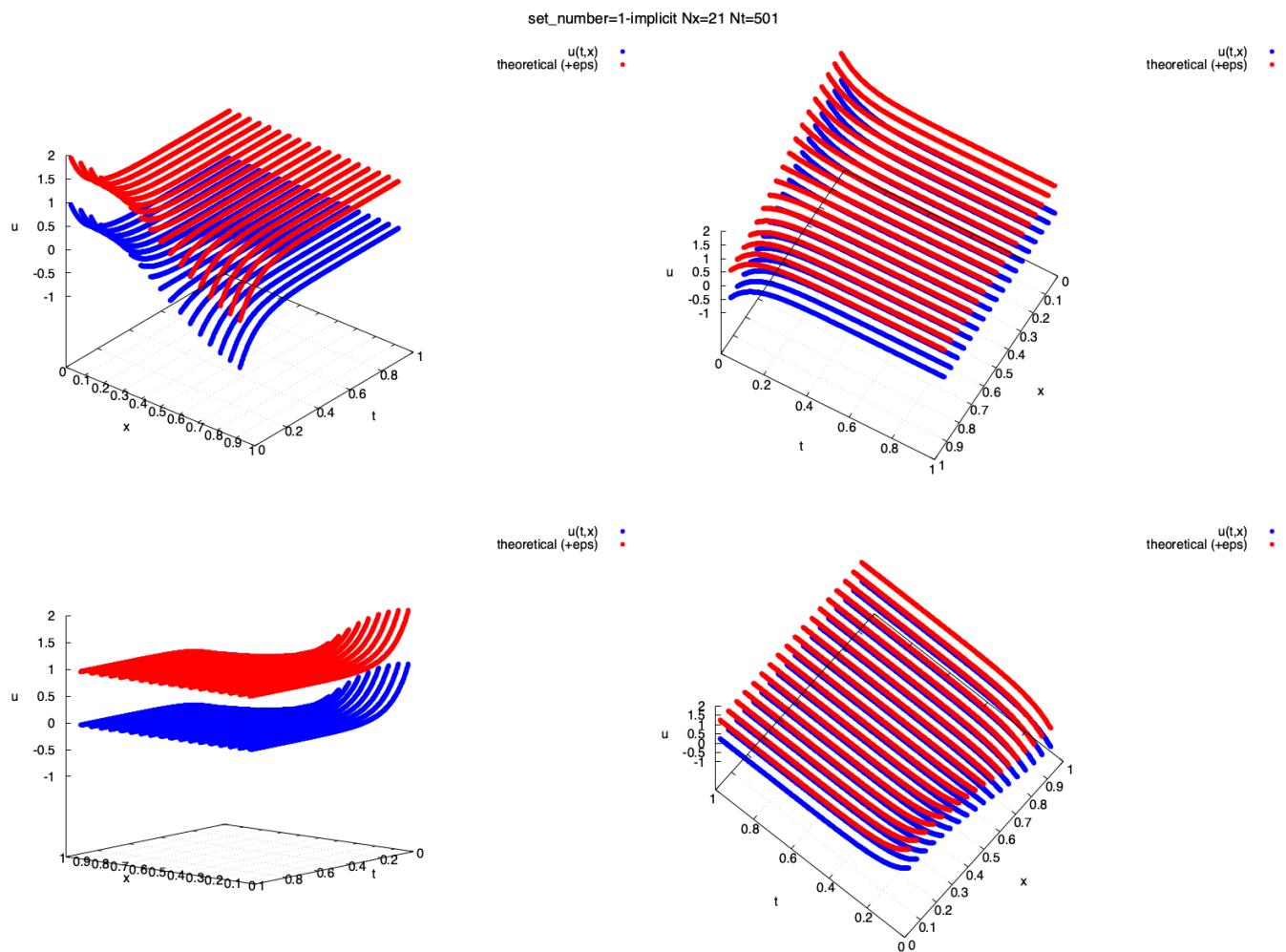


Рис. 13: $u_1(x)$

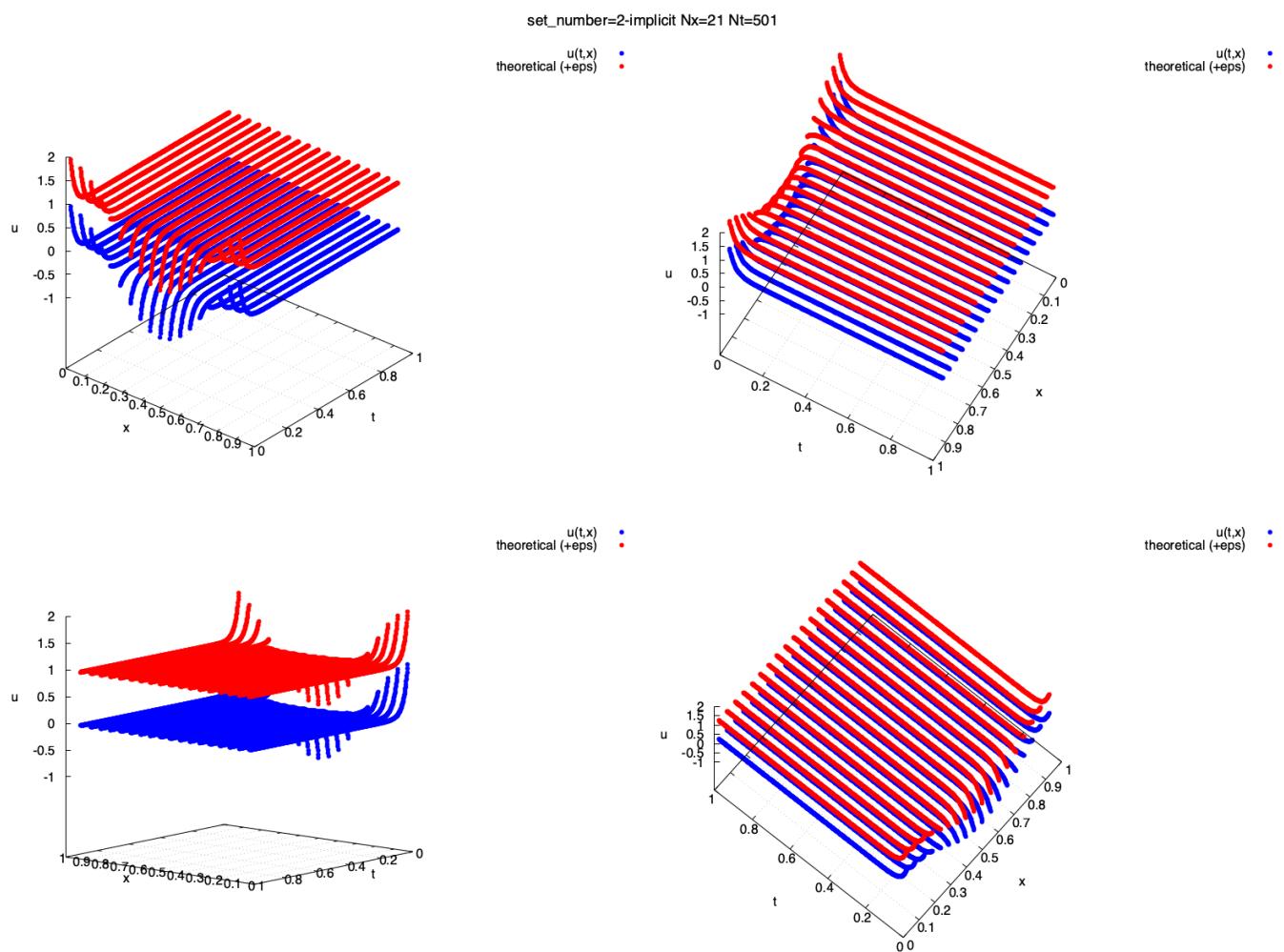


Рис. 14: $u_2(x)$

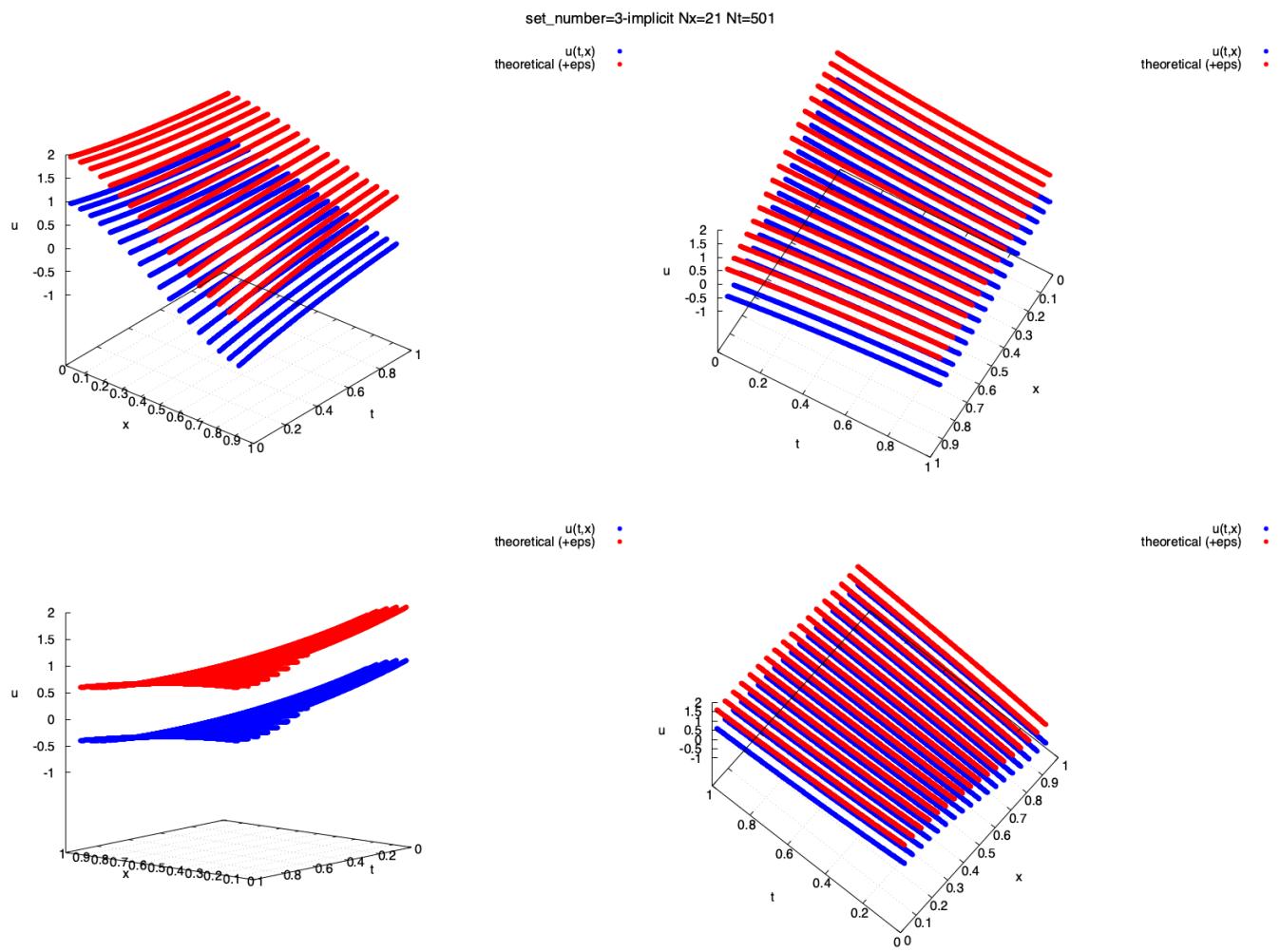


Рис. 15: $u_3(x)$

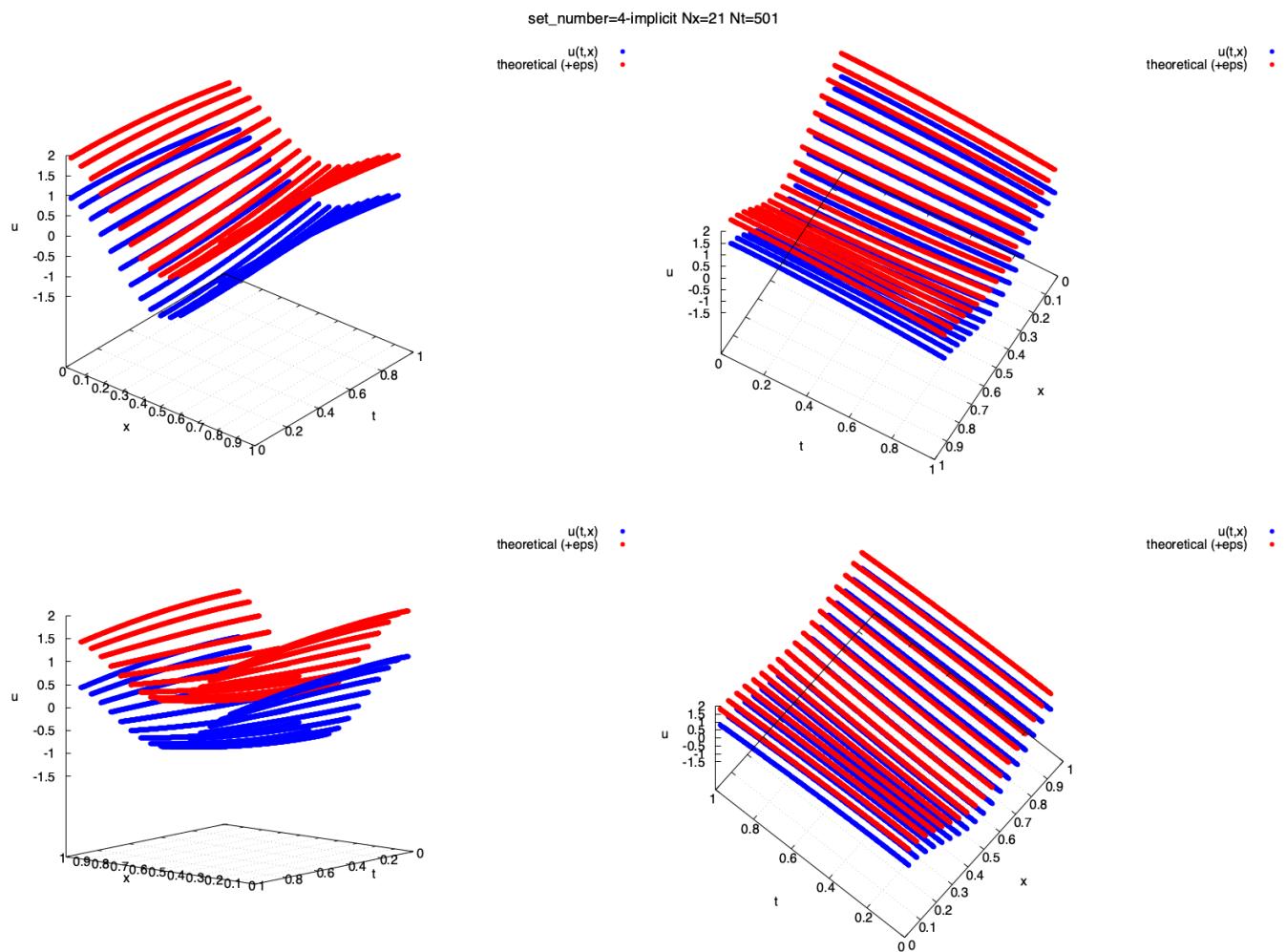


Рис. 16: $u_4(x)$