Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Отчёт по задаче

Выполнил студент 431 группы

Макаров Илья

5 декабря 2025 г.

Содержание

Постановка

$$\boxed{\text{Задача:}\quad -y'' + py = f, \qquad y'(0) = y'(1) = 0, p \geq 0}$$

$$\text{Схема:}\quad \begin{cases} \frac{-y_{k+1}+2y_k-y_{k-1}}{h^2} + p_k y_k = f_k, \\ y_0 = y_1, \\ y_{N-1} = y_N, \end{cases} \qquad h = \frac{1}{N-1}, \quad k \in \{1, \ldots, N-1\}$$

$$A_h = \begin{pmatrix} \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{pmatrix} \text{(без учета } p_h)$$

Сеточная норма $\|y_h\|_h^2 = (y_h, y_h)_h = \sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k^2\, h$ согласована с $\|y(x)\|^2_{L_2(0,1)} = \int_0^1 y^2(x)\, dx$

Аппроксимация на решении

$$\blacktriangle: \; y(x_k \pm h) = y(x_k) \pm h y'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) \pm \frac{h^3}{6} y^{(3)}(x_k) + O(h^4)$$

Внутренние точки:

$$\frac{-y(x_{k+1}) + 2y(x_k) - y(x_{k-1})}{h^2} = -y''(x_k) + O(h^2)$$

Тогда

$$r_k = \left| -y''(x_k) + O(h^2) + p(x_k) y(x_k) - f(x_k) \right| = O(h^2)$$

Граничные условия:

$$\left| \frac{y\left(\frac{h}{2}\right) - y\left(-\frac{h}{2}\right)}{h} \right| = \left| \frac{y(0) + \frac{h}{2} y'(0) + \frac{h^2}{8} y''(0) + O(h^3)}{h} - \frac{y(0) - \frac{h}{2} y'(0) + \frac{h^2}{8} y''(0) + O(h^3)}{h} \right| = \left| y'(0) + O(h^2) \right| = O(h^2)$$

аналогично для $y_{N-1} = y_N$

$\boxed{\text{Получили 2-ой порядок аппроксимации}}$ $\blacksquare$

Устойчивость

Примечание. *Для линейной задачи достаточно доказать, что*

$$\exists\ C, h_0 :\ \|y_h^1 - y_h^2\|_h \leq C\|f_h^1 - f_h^2\|_h \quad \textit{при } h < h_0$$

$$\blacktriangle :\ (A_h + pI)y_h = f_h$$

Собственные значения матрицы A_h:

$$\lambda^{(m)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi(m-1)}{2(N-1)} \geq 0, \quad m = 1, \ldots, N-1$$

1) $\boxed{p \equiv \text{const} > 0 \text{ - устойчива}}$

$$\lambda(A_h + pI) = \lambda(A_h) + p \Rightarrow \lambda_{\min}(A_h + pI) = \lambda_{\min}(A_h) + p$$

$$\lambda_{\min}(A_h) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \lambda_{\min}(A_h + pI) = p$$

$$\|(A_h + pI)^{-1}\|_2 = \frac{1}{p}$$

$$\text{т.е.} \quad \|y_h\|_h^2 \leq \|(A_h + pI)^{-1}\|_2\, \|f_h\|_h^2 \leq \frac{1}{p}\, \|f_h\|_h^2$$

2) $\boxed{\text{при } p \equiv 0 \text{ - неустойчива}}$

Если взять ξ — собственный вектор для A_h отвечающий $\lambda = 0$ и $f_h = 0$ то $y_h = C\xi$ является решением $\forall$ C $\Rightarrow$ устойчивости нет $\blacksquare$

Сходимость

$\boxed{\text{По теореме Филиппова получаем сходимость с порядком 2}}$

Теорема Филиппова

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *операторы L, l и L^h, l^h — линейные*
2. *решение u дифференциальной задачи существует и единственно*
3. *разностная схема аппроксимирует на решении дифференциальную задачу с порядком p*
4. *разностная схема устойчива*

Тогда решение разностной схемы u_h сходится к решению u дифференциальной задачи с порядком не ниже p

Метод Фурье для решения систем

Пусть требуется найти решение системы линейных уравнений $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ при условии, что известны все собственные вектора и собственные числа матрицы A:

$$A\mathbf{y}^{(n)} = \lambda_n \mathbf{y}^{(n)},\ n = 1, \ldots, M,$$

и $\mathbf{y}^{(n)}$ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^M$.

Основная идея метода состоит в формальном разложении решения $\mathbf{y}$ по собственным векторам $\mathbf{y} = \sum_{n=1}^{M} c_n \mathbf{y}^{(n)}$, определении коэффициентов c_n в данном представлении и последующем восстановлении вектора $\mathbf{y}$.

Так как проблема нахождения собственных векторов и собственных значений существенно сложнее решения системы линейных уравнений, то данный метод позволяет эффективно находить вектор $\mathbf{y}$, если все собственные вектора и собственные числа заданы аналитически, и система собственных векторов образует в пространстве решений ортонормированный базис относительно которого скалярное произведение: $(\mathbf{y}^{(n)}, \mathbf{y}^{(m)})_h = \delta_m^n$. В этом случае коэффициенты c_m могут быть найдены по явной формуле. Действительно,

$$A\Big(\sum_{n=1}^{M} c_n \mathbf{y}^{(n)}\Big) = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{M} c_n \lambda_n \mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{b}.$$

Умножим данное равенство скалярно на $\mathbf{y}^{(m)}$ для $m = 1, \ldots, M$. С учетом ортонормированности базиса получим

$$\Big(\sum_{n=1}^{M} \lambda_n c_n \mathbf{y}^{(n)}, \mathbf{y}^{(m)}\Big)_h = (\mathbf{b}, \mathbf{y}^{(m)})_h \quad \Rightarrow \quad c_m \lambda_m = (\mathbf{b}, \mathbf{y}^{(m)})_h.$$

Отсюда имеем $c_m = d_m / \lambda_m$, где величины $d_m = (\mathbf{b}, \mathbf{y}^{(m)})_h$ являются коэффициентами в разложении вектора $\mathbf{b} = \sum_{m=1}^{M} d_m \mathbf{y}^{(m)}$.

Примечание. *Если $p(x) \equiv 0$, то необходимо и достаточно, чтобы собственный вектор, который отвечает $\lambda = 0$, был ортогонален правой части, т.е. $(b, 1)_h = 0$*

Метод прогонки

Пусть требуется найти решение системы уравнений $A\mathbf{y} = \mathbf{f}$, где $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_N)^T$ — вектор неизвестных, $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_N)^T$ — заданный вектор правых частей, A — квадратная $(N+1) \times (N+1)$ матрица:

$$\begin{pmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & c_1 & -b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & c_2 & -b_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_{N-2} & c_{N-2} & -b_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_{N-1} & c_{N-1} & -b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_N & c_N \end{pmatrix}.$$

Для решения системы сначала рекуррентно вычисляются прогоночные коэффициенты α_k, β_k:

$$\alpha_1 = b_0/c_0, \quad \alpha_{k+1} = \frac{b_k}{c_k - a_k\alpha_k},$$
$$\beta_1 = f_0/c_0, \quad \beta_{k+1} = \frac{f_k + a_k\beta_k}{c_k - a_k\alpha_k},$$

где k последовательно принимает значения $1, 2, \ldots, N-1$.

Затем вычисляется y_N:

$$y_N = \frac{f_N + a_N\beta_N}{c_N - a_N\alpha_N}.$$

И, наконец, рекуррентно определяются остальные компоненты вектора неизвестных:

$$y_k = \alpha_{k+1}y_{k+1} + \beta_{k+1}, \quad k = N-1, N-2, \ldots, 0.$$

Полученные соотношения называют формулами правой прогонки.

Теорема. *Достаточные условия корректности и устойчивости метода прогонки Пусть коэффициенты системы действительны и удовлетворяют условиям:* c_0, c_N, a_k, c_k, b_k *при* $k = 1, 2, \ldots, N-1$ *отличны от нуля и*

$$|c_k| \geq |a_k| + |b_k|, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$|c_0| \geq |b_0|, \quad |c_N| \geq |a_N|,$$

причем хотя бы одно из неравенств является строгим. Тогда для формул метода прогонки справедливы неравенства:

$$c_k - a_k\alpha_k \neq 0, \quad |\alpha_k| \leq 1, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

гарантирующие корректность и устойчивость метода.

Примеры

Список функций

$$\boxed{-y''(x) + p(x)\,y(x) = f(x)}$$

$$p_1(x) = 1, \qquad f_1(x) = 1, \qquad y_1(x) = 1.$$

$$p_2(x) = 1, \qquad f_2(x) = (\pi^2 + 1)\cos(\pi x), \qquad y_2(x) = \cos(\pi x)$$

$$p_3(x) = 1 + x^2,$$
$$f_3(x) = \pi^2 \cos(\pi x) + 2\pi^2 \cos(2\pi x) + (1 + x^2)\Big(\cos(\pi x) + \tfrac{1}{2}\cos(2\pi x)\Big),$$
$$y_3(x) = \cos(\pi x) + \tfrac{1}{2}\cos(2\pi x)$$

$$p_4(x) = \tfrac{1}{2} + x,$$
$$f_4(x) = \big(-2 + 8x - \tfrac{1}{2}x^2 - 6x^3 - \tfrac{5}{2}x^4 + x^5\big)e^x,$$
$$y_4(x) = x^2(1 - x)^2 e^x$$

$$p_5(x) = 1,$$
$$f_5(x) = \big(-2 + 8x - \tfrac{1}{2}x^2 - 6x^3 - \tfrac{5}{2}x^4 + x^5\big)e^x + (-x + \tfrac{1}{2})\,x^2(1 - x)^2 e^x,$$
$$y_5(x) = x^2(1 - x)^2 e^x$$

Графики метода Фурье

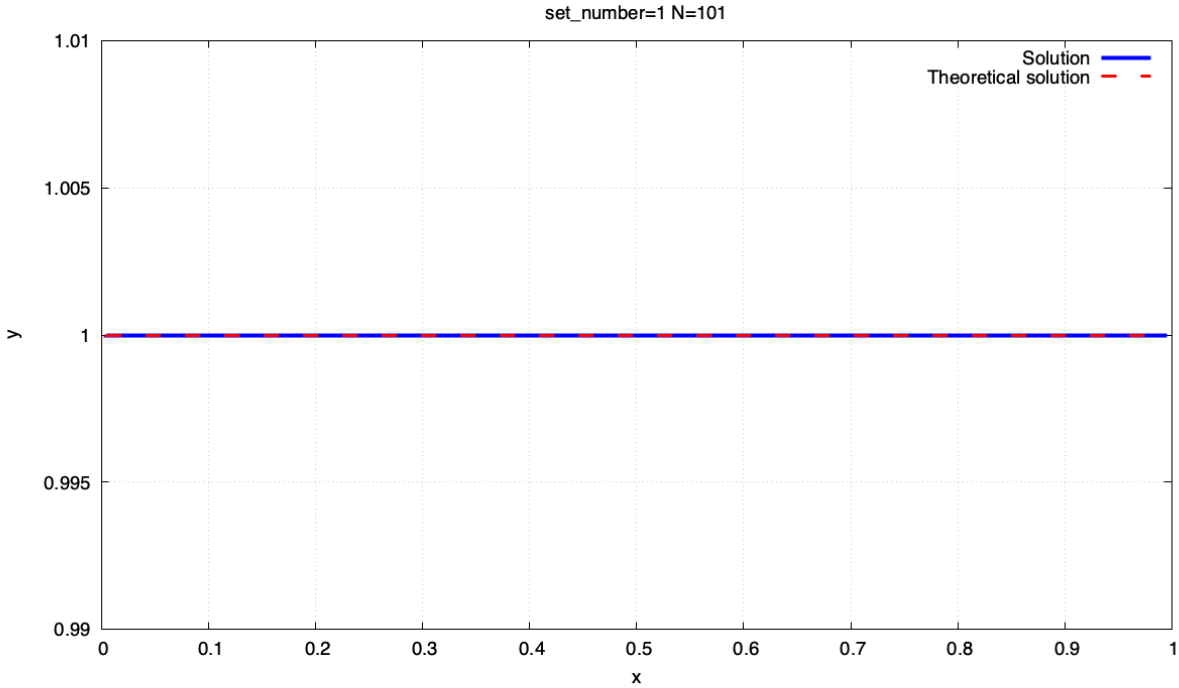

Рис. 1: $y_1(x)$

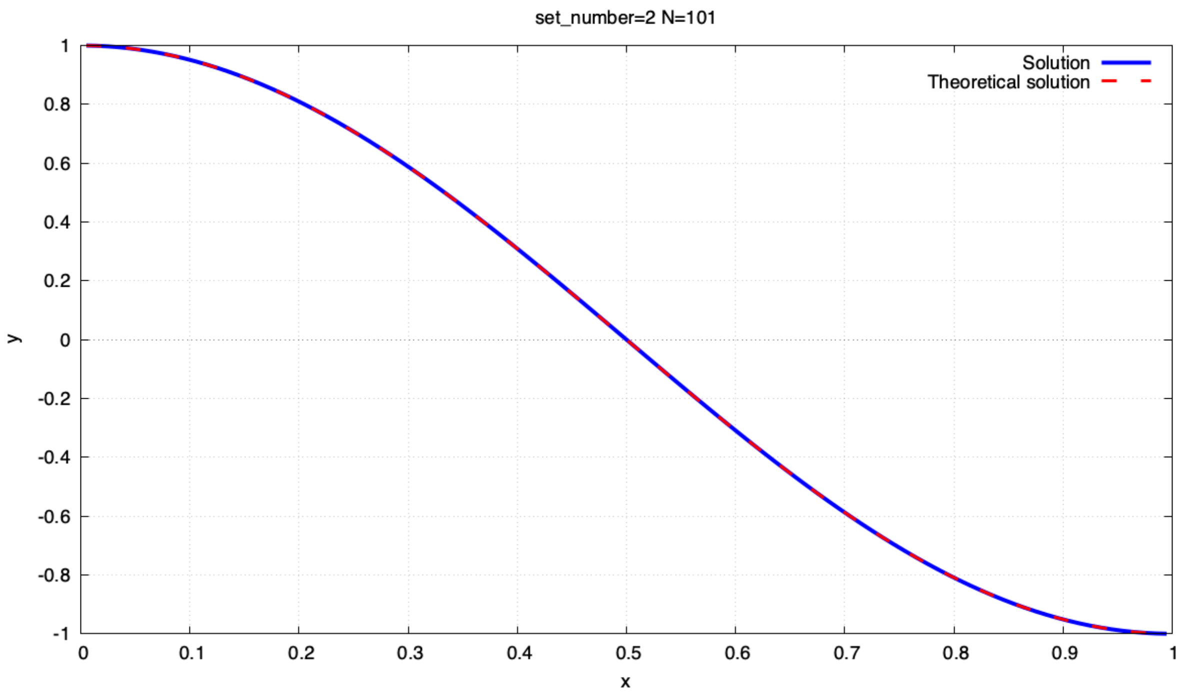

Рис. 2: $y_2(x)$

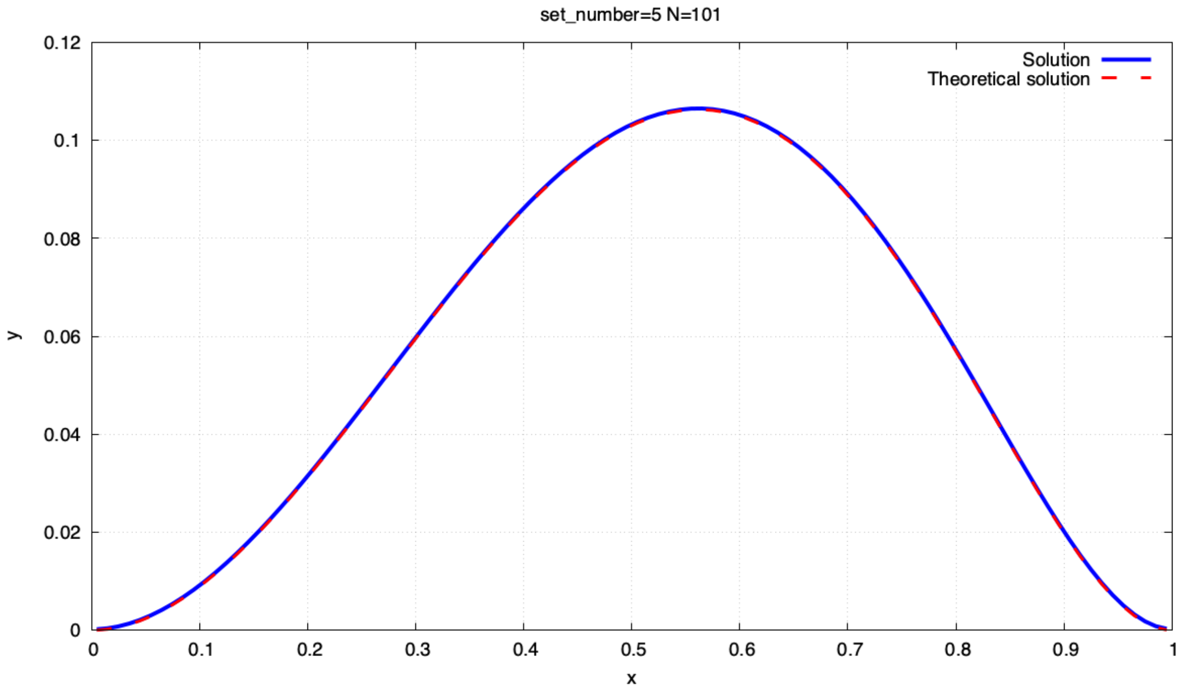

Рис. 3: $y_5(x)$

Графики метода прогонки

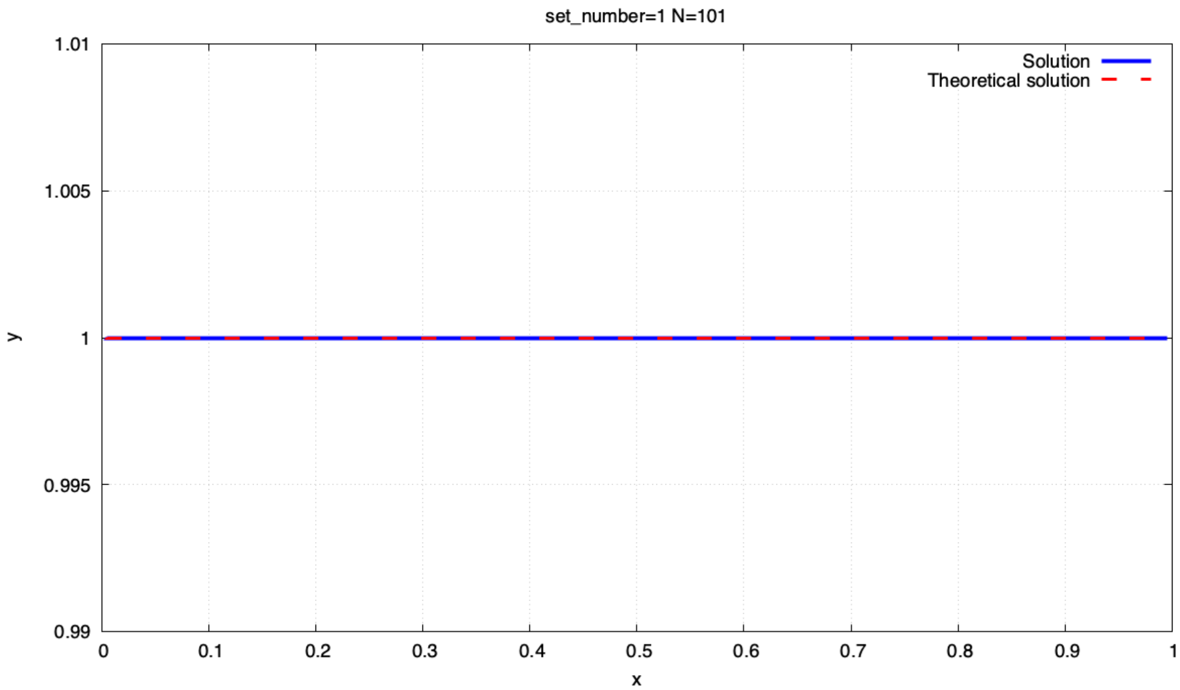

Рис. 4: $y_1(x)$

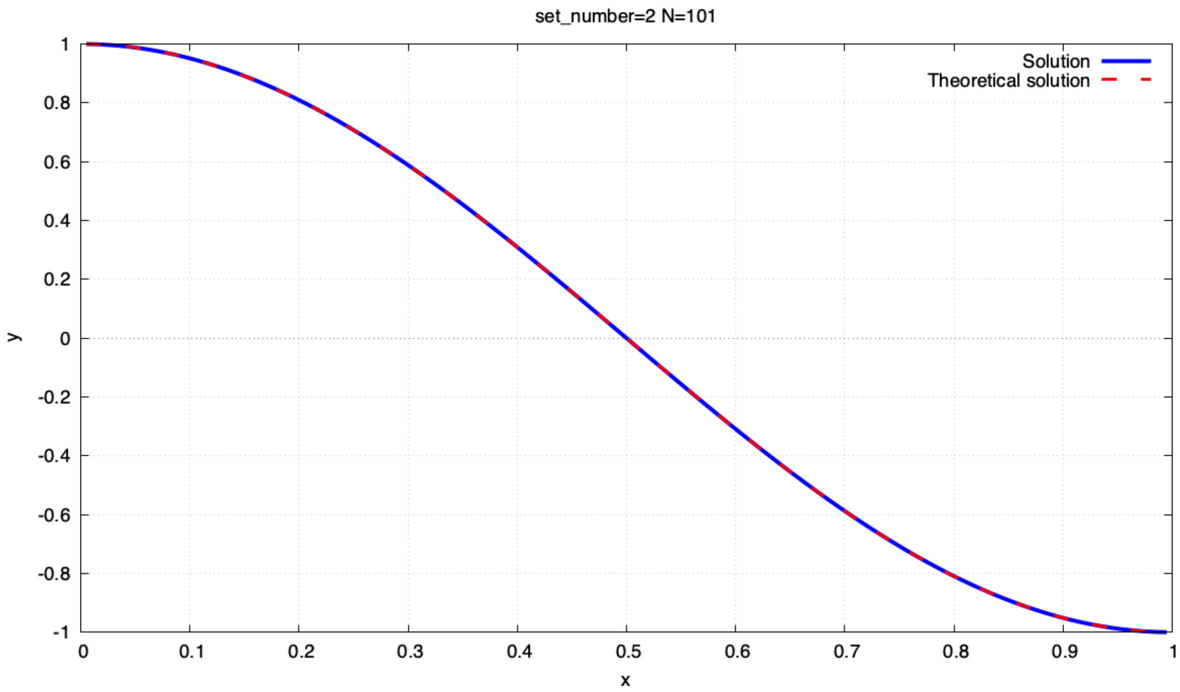

Рис. 5: $y_2(x)$

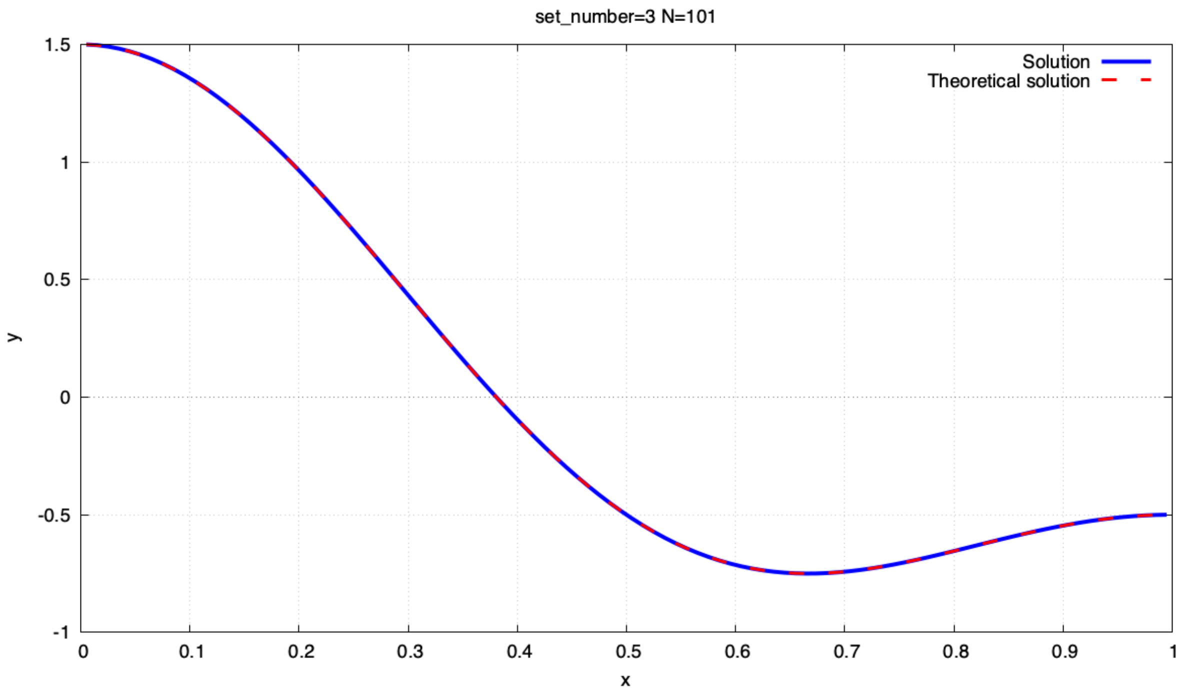

Рис. 6: $y_3(x)$

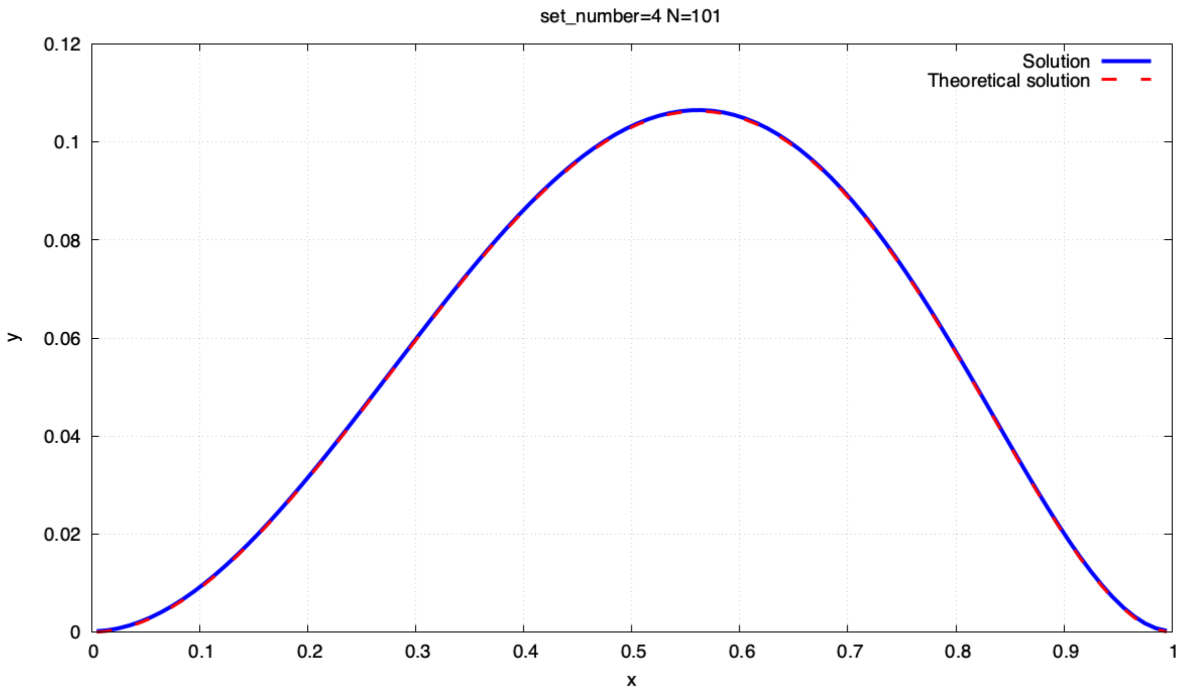

Рис. 7: $y_4(x)$

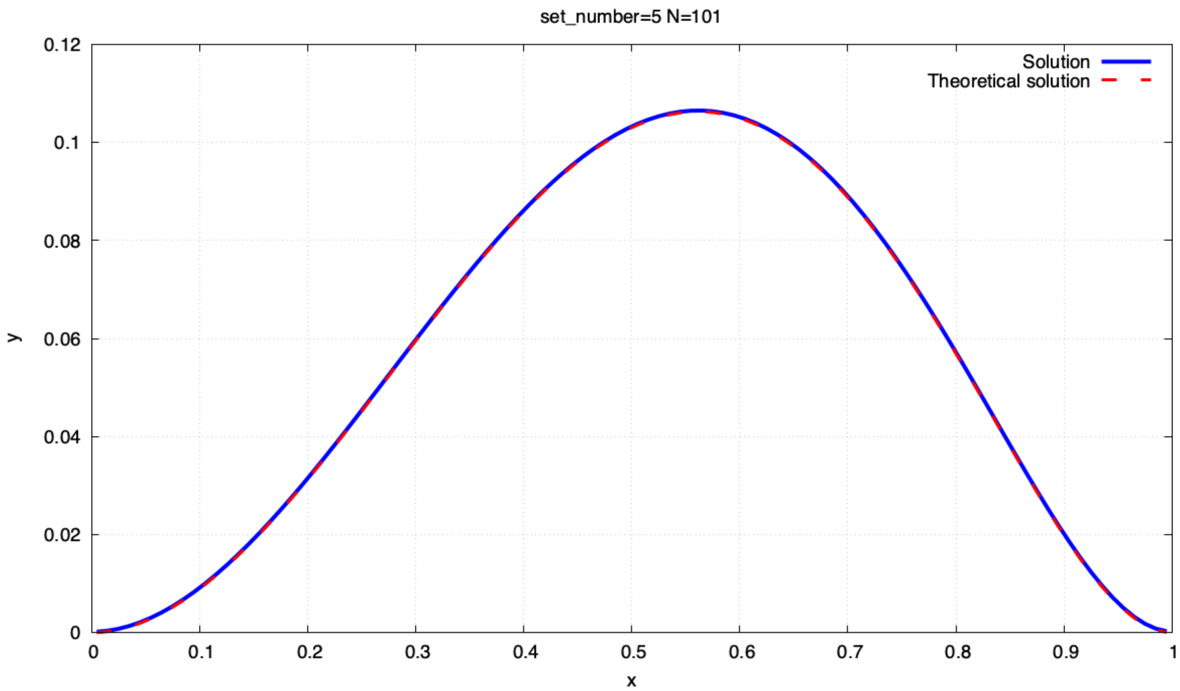

Рис. 8: $y_5(x)$