1. **Постановка задачи**

Эллиптическая краевая задача для функции определяется дифференциальным уравнением



Заданным в некоторой области Ω с границей и краевыми условиями



1. **Вариационная постановка Галеркина**

Введём гильбертово пространство .

Запишем невязку в виде:



и потребуем, чтобы она была ортогональна, в смысле скалярного произведения пространства H0 , некоторому пространству пробных функций, т.е.:

 ,

где .

Перепишем уравнение в виде:



Для понижения требования к гладкости функции решения преобразуем полученное выражение, при помощи формулы Грина



т.к.то значение  на границе S1 равно 0, поэтому  следует исключить из уравнения.

Получаем вариационное уравнение вида:



1. **Построение дискретного аналога в МКЭ**

Рассмотрим построение для эллиптической задачи.

В пространствах  и  выделим соответственно конечномерные подпространства  и , которые их аппроксимируют. Определим подпространства как линейные пространства, натянутые на базисные функции . Заменим функцию  аппроксимирующей ее функцией , а функцию  - функцией .

Получим аппроксимацию уравнения Галеркина:



Поскольку любая функция  может быть представлена в виде линейной комбинации

,

вариационное уравнение эквивалентно следующей системе уравнений:

, 

где  - количество базисных функций, образующих пространства  и .

 может быть представлено в виде:



Получим СЛАУ для компонент  вектора весов :

, 

СЛАУ имеет размерность n, из которых  компонент вектора весов

 фиксированы и определены из первого краевого условия  для  , т.е.

СЛАУ может быть записана в матричном виде:

, где:





Компоненты матрицы А имеют следующие определения:

 -матрица жесткости

Для эффективности решения задачи, будем использовать метод поэлементной

сборки матрицы А. Сначала будут вычисляться вклады от каждого конечного элементав соответствующие компоненты глобальной матрицы А. Вклады этого элемента можно рассматривать как матрицы жесткости  и матрицы массы:

 -матрица жесткости

1. **Выбор базиса**

Так как вклады будем складывать по элементам функции будем выбирать с конечным носителем. Выберем их так, чтобы каждая принимала значение 1 только в своем узле и 0 во всех других.

Рассмотрим невырожденный тетраэдр имеющий вершины

Введем на нем линейные функции вида:



Такие, что каждая из функций  равна единице в вершине и 0 во всех остальных точках.



Откуда следует



Что позволяет однозначно определить все базисные функции.

Представим их как произведение одномерных квадратичных функций. Для определения квадратичной функции нужно 3 точки. Значит всего на элементе будет 9 точек.

1. **Сборка локальных матриц**

Локальные матрицы будем вычислять по формуле







Также определим матрицу 

Тогда локальный вектор правой части можно вычислить как

где вектор составленный из значений правой части в узлах элемента.

1. **Сборка глобальной матрицы**

Матрица хранится в разряженном формате. Сначала формируются массивы ig, jg. Размерность ig равна количеству узлов. Для этого формируется список смежности узлов с учетом симметричности портрета. Для каждого узла заносятся номера узлов соединенных с ним ребром, при этом номера сортируются по возрастанию. Далее проходим по всем элементам списка считаем общее количество смежный узлов и в i-тую компоненту положим количество узлов + количество в предыдущей. Jg имеет размерность равную общему количеству узлов в ig. Теперь перепишем последовательно все вершины из списка (для каждой вершины все смежные).

Далее собираем глобальную матрицу с помощью глобальной и локальной нумерации. Решаем систему методом ЛОС с не полной LU факторизацией.