КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

1 Основні означення

Уявною одиницею називають число, що позначають літе-рою i (початкова літера французького слова imaginaire, що означає **уявний**), квадрат якого дорівнює -1, тобто $i^2=-1$.

Комплексним числом називають число, що має вигляд: $z=x+iy$, де x та y деякі дійсні числа, i - уявна одиниця; при цьому x називають дійсною частиною комплексного числа z і позначають $x=Re z$, y називають уявною частиною ком-плексного числа z і позначають $y=Im z$. При $x=0$ воно пе-ретворюється на суто уявне число $z=0+iy$; при $y=0$ отри-маємо число $x+i0$, яке розглядається як дійсне число x.

Два комплексних числа $z=x+iy$ та $u=a+ib$ вважаються **рівними** тоді і тільки тоді, коли рівні їх дійсні та уявні частини, тобто $z=u \Leftrightarrow x=a$ і $y=b$; $z=0 \Leftrightarrow x=0$ та $y=0$.

Комплексні числа $z=x+iy$ та $z=x-iy$, що від-різняються тільки знаком уявної частини, називаються спряженими.

Комплексне число $z=x+iy$ записане в алгебраїчній формі.

2 Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Додавання та віднімання. Розглядаючи комплексні числа $z=x+iy$ та $u=a+ib$ як многочлени, операції додавання та віднімання для комплексних чисел можна виконувати за правилами дій над многочленами:

$$z+u=(x+iy)+(a+ib)=(x+a)+i(y+b)\,;$$

$$z-u=(x+iy)-(a+iy)=(x-a)+i(y-b)\,;$$

тобто, при додаванні (відніманні) комплексних чисел окре-мо додають (віднімають) їх дійсні та уявні частини.

Множення. Перемножимо комплексні числа $u=a+ib$ та $v=c+id$ за правилами множення многочленів, замінивши i^2 на -1

$$u\cdot v=(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)\,.$$

Знайдемо добуток двох комплексно-спряжених чисел

$$z\cdot\bar{z}=(x+iy)\cdot(x-iy)=x^2-i^2y^2=x^2+y^2 .$$

Таким чином, добуток комплексно-спряжених чисел є число дійсне і не від'ємне.

Ділення. а)При діленні комплексного числа $u=a+ib$ на дійсне число g можна скористатися правилом ділення мно-гочлена на одночлен

$$u/g=(a+ib)/g=a/g+ib/g .$$

б) При діленні комплексного числа $u=a+ib$ на комплексне число $v=c+id$ можна скористатися результатом мно-ження спряжених чисел. Тому домножимо чисельник і знаменник на число, спряжене знаменнику, при цьому в знаменнику одержимо дійсне число і задача зведеться до ділення комплексного числа на дійсне; тоді залишається розділити дійсну і уявну частини добутку в чисельнику на дійсне число в знаменнику (пункт а)).

$$\frac{u}{v}=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Натуральні степені уявної одиниці.

Користуючись означенням уявної одиниці $(i^2=-1)$, знайдемо інші степені уявної одиниці:

$$\begin{array}{lll} i^1=i, & i^5=i, & i^9=i, \\ i^2=-1, & i^6=-1, & i^{10}=-1, \\ i^3=-i, & i^7=-i, & i^{11}=-i, \\ i^4=1, & i^8=1, & i^{12}=1. \end{array}$$

Як видно з приведеної таблиці, натуральні степені i приймають лише чотири різні зачення, які чергуються: $i,\quad -1,\quad -i,\quad 1.$ Тому, якщо показник степеня ви-сокий, потрібно від нього від-няти число, кратне 4.

Піднесення до натурального степеня.

Так як множення комплексних чисел підкоряється правилам дій над многочленами, то для комплексних чисел справедливі правила скороченого множення

$$(a+ib)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+i2ab\,;$$

$$(a+ib)^3=a^3+3a^2bi+3ab^2i+b^3i^3=(a^3-3ab^2)+i(3a^2b-b^3).$$

Для інших степенів потрібно користуватися формулою бінома Ньютона.

Добування квадратного кореня. Нехай потрібно добути квадратний корінь з комплексного числа *(a +ib)*.

Позначимо його значення *(x+iy)*. Піднесемо обидві частини до квадрата, одержимо систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Піднесемо обидва рівняня до квадрата і складемо.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = r, \\ x^2 - y^2 = a. \end{cases}$$

Складемо почленно обидва рівняння, а потім від пер-шого рівняння віднімемо друге, отримаємо систему:

$$\begin{cases} x^2 = (r+a)/2, \\ y^2 = (r-a)/2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{(r+a)/2}, \\ y = \pm\sqrt{(r-a)/2}. \end{cases}$$

Якщо для x вибрати знак +, то з другого рівняння системи випливає, що знак y співпадає зі знаком b, тобто *signy=signb*, і остаточно

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left[\sqrt{(r+a)/2} + i \cdot \mathrm{sign} b \cdot \sqrt{(r-a)/2}\right].$$

3 Геометричне зображення комплексних чисел

Довільному комплексному числу *z=x+iy* поставимо у відповідність точку $M(x,y)$ площини *xOy* (рис.4.1), абсциса якої дорівнює дійсній частині *x*, а ордината - уяв-ній частині комплексного числа *z*. Іноді комплексному чис-лу *z* ставлять у відповідність радіус-вектор точки *M*

$$\overline{O}\vec{M} = \{x, y\}.$$

Довжину вектора $\overline{O}\overline{M}$ називають модулем комлексного числа *z* і позначають

$$|z| = |\overline{O}\overline{M}| = r.$$

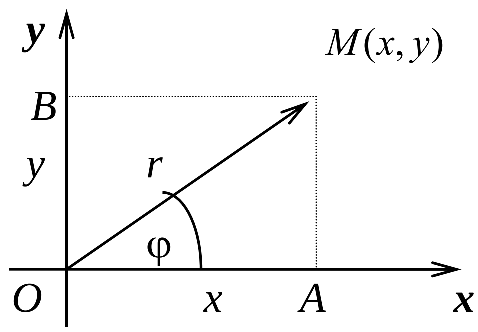

Рис. 4.1

Кут *∠AOM*, утворений віссю *Ox* та вектором $\overline{O}\overline{M}$, називають аргументом
комплексного числа *z* і позначають *Argz*. Очевидно, при *z≠0* *Argz* має безліч значень

Argz=argz+2kπ, k=0, +1, +2,...,

де *argz=φ* головне значення аргумента *z*

$-\pi < \arg z \le \pi$.

Тригонометрична форма комплексного числа.

Розглянемо прямокутний трикутник AOM. Знаючи його гіпотенузу $|OM| = r$ і гострий кут $\angle AOM=\varphi$, знайдемо кате-ти $|OA| = x$ та $|AM| = y$

$$x=r\cdot\cos\varphi; \quad y = r\cdot\sin\varphi \tag{1\#}$$

Підставимо ці значення в комплексне число $z=x+iy$, одер-жимо

$$z=x+iy=r\cdot\cos\varphi+ir\cdot\sin\varphi; \quad z=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi) \tag{2\#}$$

Це і є тригонометрична форма комплексного числа $z=x+iy$. Тут r - модуль комплексного числа, $r>0$; φ - аргумент, $-\pi<\varphi\le\pi$.

Перехід від алгебраїчної форми комплексного числа до тригонометричної і навпаки.

Нехай задано комплексне число в алгебраїчній формі $z=x+iy$. Потрібно знайти його модуль r і аргумент φ. Якщо піднести до квадрата обидві частини обох рівнянь (1#) і скласти їх, а потім друге рівняння розділити на перше, то одержимо:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad tg\varphi = y/x \tag{3\#}$$

Звідси $\varphi = arctg(y/x) + k\pi$, причому, щоб отримати го-ловне значення аргумента φ, потрібно вибрати значення $k=0$, якщо точка M, що зображає комплексне число z, зна-ходиться в першій чверті, $k=1$ для другої чверті, $k=-1$ для третьої чверті, $k=0$ для четвертої чверті.

$$\varphi = arctg(y/x) + k\pi \quad \begin{cases} k=0, & x>0, \quad y>0, \\ k=1, & x<0, \quad y>0, \\ k=-1, & x<0, \quad y<0, \\ k=0, & x>0, \quad y<0. \end{cases} \tag{4\#}$$

Можна скористатися іншою формулою для аргумента φ:

$$\varphi = \mathrm{sign}y\cdot\arccos(x/r), \tag{5\#}$$

де $\mathrm{sign}y$ - знак числа y:

$$\mathrm{sign}\, y = \begin{cases} +1, & якщо \quad y > 0, \\ -1, & якщо \quad y < 0. \end{cases} \qquad (6\#)$$

Наприклад, $z = -\sqrt{3} + i$.

Тут $x = -\sqrt{3}$, *y=1*, точка $M\left(-\sqrt{3}, 1\right)$ розташована в 2-ій чверті. За формулами (3#) і (4#) знаходимо

$r = |z| = \sqrt{3+1} = 2$; $\varphi = arctg(-1/\sqrt{3}) + 1 \cdot \pi = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$.

За формулою (5#)

$\varphi = +1 \cdot \arccos(-\sqrt{3}/2) = \pi - \arccos(\sqrt{3}/2) = 5\pi/6$.

$$z = -\sqrt{3} + i = 2\left(\cos(5\pi/6) + i \cdot \sin(5\pi/6)\right).$$

Щоб перейти від тригонометричної форми комплексного числа до алгебраїчної, достатньо скористатися формулами (1#):

$$z = 4 \cdot \left[\cos(\pi/3) + i \cdot \sin(\pi/3)\right] = 4 \cdot \left(\sqrt{3}/2 + i/2\right) = 2\sqrt{3} + i \cdot 2.$$

4 Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Нехай комплексні числа *z* та *u* задані в тригонометричній формі:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi), \quad u = p \cdot (\cos\Theta + i \cdot \sin\Theta).$$

Множення. $z \cdot u = rp \cdot \left[(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \cdot (\cos\Theta + i \cdot \sin\Theta)\right] =$

$$= rp \cdot \left[(\cos\varphi \cdot \cos\Theta - \sin\varphi \cdot \sin\Theta) + i \cdot (\sin\varphi \cdot \cos\Theta + \cos\varphi \cdot \sin\Theta)\right]$$

$$z \cdot u = rp \cdot \left[\cos(\varphi + \Theta) + i \cdot \sin(\varphi + \Theta)\right] \qquad (7\#).$$

Ділення.

$$\frac{z}{u} = \frac{r}{p} \cdot \frac{\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi}{\cos\Theta + i \cdot \sin\Theta} = \frac{r}{p} \cdot \frac{(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)(\cos\Theta - i \cdot \sin\Theta)}{\cos^2\Theta - i^2 \cdot \sin^2\Theta} =$$

$$= \frac{r}{p} \cdot \frac{(\cos\varphi \cdot \cos\Theta + \sin\varphi \cdot \sin\Theta) + i \cdot (\sin\varphi \cdot \cos\Theta - \cos\varphi \cdot \sin\Theta)}{\cos^2\Theta + \sin^2\Theta}.$$

$$z/u = (r/p) \cdot \left[\cos(\varphi - \Theta) + i \cdot \sin(\varphi - \Theta)\right] \qquad (8\#).$$

Таким чином, при множенні двох комплексних чисел їх модулі перемножаются, а аргументи додаються; при діленні модулі діляться, а аргументи віднімаються.

Піднесення комплексного числа до цілого степеня. З формули (7#) множення комплексних чисел випливає формула Муавра

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$$

Для того, щоб піднести до цілого степеня комплексне число, потрібно піднести до цього степеня його модуль, а аргумент помножити на показник степеня.

Добування кореня *n*-го степеня з комплексного числа. З формули Муавра (9#) випливає правило добування кореня n-го степеня з комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \qquad (10\#)$$

де *k=0,1,2,3, . . . , (n - 1)*. При цьому одержимо *n* різних значень кореня, які розташовані в вершинах правильного *n*-кутника, вписаного в коло радіуса *r*.

5 Показникова форма комплексного числа. Формула Ейлера

Формула Ейлера. Пізніше нами буде доведена формула

$$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi, \qquad (11\#)$$

що носить назву формули Ейлера. Користуючись нею, формулу (2#) можна записати у вигляді

$$z = r \cdot \exp(i\varphi) \qquad (12\#)$$

Дії над комплексними числами в показниковій формі. Користуючись формулою Ейлера, формули (7#) - (10#) можна записати в показниковій формі.

Нехай $z = r \cdot \exp(i\varphi)$; $u = p \cdot \exp(i\Theta)$. Тоді:

$$z \cdot u = rp \cdot \exp(i\varphi) \cdot \exp(i\Theta) = rp \cdot \exp\left[i(\varphi + \Theta)\right]. \qquad (13\#)$$

$$z/u = {(r/p) \cdot \exp(i\varphi)} \Big/ {\exp(i\Theta)} = (r/p) \cdot \exp\left[i(\varphi - \Theta)\right]. \qquad (14\#)$$

$$z^n = r^n \cdot \exp(in\varphi), \qquad (15\#)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \exp\left[i\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right]; \quad k=0,1,2,\ . \ . \ (n-1). \tag{16\#}$$