

基于非线性约束最优化算法的无人机纯方位无源定位模型

2022/9/18

摘要

本文首先依据无人机圆形编队的几何关系，将接收信号无人机的 α_1, α_2 作为参数建立纯方位无源定位模型。对编队无人机调整位置进行遍历，并利用暴力算法给出了无人机圆形编队调整方案，并将该定位模型与调整方案向不同的无人机编队进行推广。

考虑以“发射信号的不同无人机组合”为区别，将问题一中的(1)问题拆分成4种大情况，每个大情况中的2种小情况进行分析。首先建立统一的极坐标系，对每一种小情况内的边角关系列出方程组，利用平面几何中的正弦定理、余弦定理以及相关的几何性质对接收信号无人机位置的求解。求解后对每一个结果进行合并归类，逐步建立起以无人机之间相对位置为判断条件的，以接受无人机角度信息为参数的纯方位定位模型。答案见方程组(1)(2)(3)。

并在问题一(2)中采用数学分析原理的相关知识，进一步证明问题(1)中无人机数量的缺陷与不完备性，阐述最优的发射信号无人机数量，求出具有完备性的最优发射信号无人机数量选取。求出了还需要2架无人机发射信号，可以实现无人机的有效定位。

问题一(3)中，对上述问题(1)(2)的结果进行整合，通过无人机纯方位无源定位模型，分析实际圆形编队中的边角关系，依据该理论建立含限制条件的非线性最优化问题。结合题目中要求的最终编队状态，使用全搜索算法，逐步逼近直至最终求出最优的调整方案。最终的调整总距离 $d = 52.082630$ 米。

问题二中，分析无人机锥形编队的几何关系，对问题一中提出的纯方位无源定位模型进行重构，做出合理的实际假设，建立极坐标系，并再次对“发射信号的不同无人机组合”进行分类讨论，同样利用相关定理对接收信号无人机位置进行求解。并证明最小发射信号无人机的数量，求出最优的发射信号无人机选取方案。并基于搜索算法，同样建立起非线性优化问题，并求解。利用解出的结果，设计成无人机的位置调整方案。

关键字：暴力遍历算法，非线性最优化，最小二乘法

1 问题的重述

无人机集群在遂行编队飞行时,为保持编队队形,采用纯方位无源定位的方法调整无人机的位置,建立精度高,速度快的数学模型以确定并调整无人机位置是一个重要课题。

问题 1 10 架无人机组成的圆形编队,其中 9 架无人机(编号 $F1 \sim F9$)均匀分布在某一圆周上,另 1 架无人机(编号 $F0$)位于圆心。无人机均保持在同一高度上飞行。

(1) 位于圆心的无人机($F0$)和编队中另 2 架无人机发射信号,其余位置有偏差的无人机被动接收信号。当发射信号的无人机位置无偏差且编号已知时,建立被动接收信号无人机的定位模型。

(2) 某位置略有偏差的无人机接收到编号为 $F0$ 和 $F1$ 的无人机发射的信号,另接收到编队中若干编号未知的无人机发射的信号。若发射信号的无人机位置无偏差,除 $F0$ 和 $F1$ 外,还需要几架无人机发射信号,才能实现无人机的有效定位?

(3) 按编队要求,1 架无人机位于圆心,另 9 架无人机均匀分布在半径为 100 m 的圆周上。当初始时刻无人机的位置略有偏差时,请给出合理的无人机位置调整方案,即通过多次调整,每次选择编号为 $F0$ 的无人机和圆周上最多 3 架无人机遂行发射信号,其余无人机根据接收到的方向信息,调整到理想位置(每次调整的时间忽略不计),使得 9 架无人机最终均匀分布在某个圆周上。利用给出的数据,仅根据接收到的方向信息来调整无人机的位置,请给出具体的调整方案。

问题 2 实际飞行中,无人机集群也可以是其他编队队形,例如锥形编队队形(直线上相邻两架无人机的间距相等,如 50 m)。仍考虑纯方位无源定位的情形,设计无人机位置调整方案。

2 模型假设

1. 假设所有无人机所处的外界环境保持稳定且适宜无人机进行飞行动作。
2. 假设所有无人机不受外界电磁干扰,各无人机接收与发射的信号无失真。
3. 假设所有无人机始终保持在同一高度上飞行。
4. 假设各无人机之间互不影响,调整位置时准确且无误,并忽略调整的时间。

3 符号说明

符号	意义	单位
α_1	接受的角度信息1	弧度(rad)
α_2	接受的角度信息2	弧度(rad)
α_3	接受的角度信息3	弧度(rad)
β	发射信号无人机的角坐标	弧度(rad)
ρ	发射信号无人机的距离坐标	米(m)
r	圆的半径	米(m)
$F0 \sim F15$	对应各个无人机的名称	
n	发射机之间的距离单位	个
d	调整无人机的距离和	米(m)

注: α_1 与 α_2 的取法为以接收信号的无人机为圆心的逆时针方向分别取为 α_1 , α_2 , 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ 。 β 的取法为发射无人机与正半轴所成的优角(小于 180°)。发射机表示发射信号的无人机,接收机表示接受信号的无人机。

4 问题分析

4.1 问题一分析

问题一中包含了三个小问，实质上讨论的都是建立在被动接受信号无人机的定位模型之上。

问题一(1)旨在建立被动接受信号无人机的定位模型，当已知角度信息 α_1 ， α_2 和 α_3 时通过在无人机 $K0$ 处建立以 $K0$ 到 $K1$ 方向为正方向的极坐标系，对一共4种发射信号的无人机相对位置进行分类讨论，使用包括接收机在内的一共4个无人机的几何关系建立一系列方程组，使用正弦定理与余弦定理求解出其余略有偏差的无人机的位置信息。

问题一(2)需要确定额外无人机的数量，利用问题(1)中求解出的定位模型，证明出仅选取3架无人机发射信号的不完备性，即存在无法涵盖的无人机位置。求出不同数量无人机发射信号时的有效性，从而解出最好的无人机选取方法。

问题一(3)则在前两问基础上再进一步考虑调整的方案，使用表格中给出的位置数据，使用设计的调整算法使得经过多次调整后9架无人机处于 $K0$ 为圆心，100m为半径得圆周上。最优的调整方案应满足总调整次数较少，单次调整幅度较低，最终位置误差较小。将问题(3)转化成非线性最优化问题，或采用随机搜索的数值逼近方法，利用接受到的 α_1 ， α_2 和 α_3 角度信息确定最优位置，对其余无人机进行调整，使最终结果靠近理想状态。

4.2 问题二分析

问题二中需要建立面对锥形编队队形的纯方位无源定位模型，总体的建立与调整方案与问题一中圆形编队模型类似，同样需要建立坐标系，求解处各个无人机的理想位置信息，并且计算出无人机的实际位置信息，使整个锥形编队处于理想的编队队形。

5 问题一模型建立与求解

5.1 问题(1)模型的建立与求解

5.1.1 问题(1)模型的建立

本题中需要以接受信号的 α_1 , α_2 和 α_3 角度信息对被观测无人机的位置进行求解, 可以不失一般性的建立以 F_0 无人机为原点, F_0 指向 F_1 的方向为正半轴的极坐标系。该圆的半径不妨设为 r 。经过分析可知, 该定位模型的建立应以几何学为基础, 只需给定 α_1 , α_2 和 α_3 的角度信息最终得出被测无人机的相关位置信息。并通过分析可得在圆周上选取的2架无人机会存在4种情况。分别是两架无人机间间隔为0(架)、间隔为1、间隔为2、间隔为3。这是因为理想状态下9架无人机组成正九边形, 由几何关系可知间隔为4的情形可以转换为间隔为3的情况(见图1)。图中4种不同颜色的连线表征为圆周不同无人机的组合, 因此 F_1 与 F_6 的组合可以相似的转换为间隔为3的 F_1 与 F_5 组合。

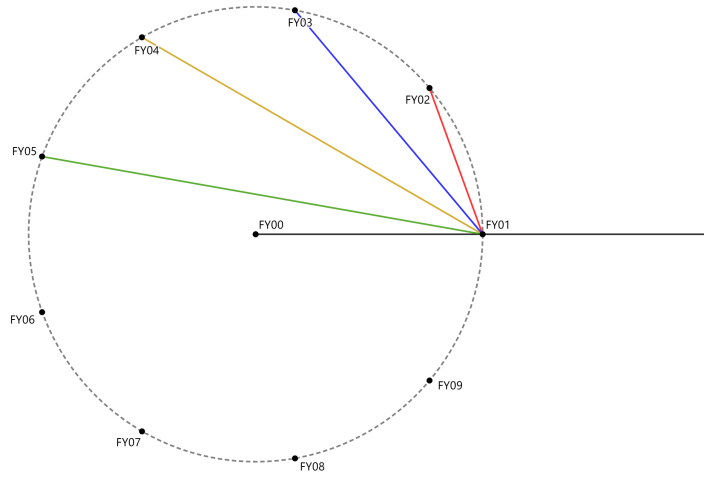


图1

选取 F_1 与 F_2 时不存在向无人机之间发射信号的情况, 间隔为1、2、3时均有可能向无人机之间发射信号的可能。例如 F_1 , F_3 以及 F_0 共同向 F_2 发射信号, 此时所产生的三角形角度关系则截然不同。因此更深入地讲, 可以将选取 F_1 与 F_2 归为一类, 因为只有可能向外即 $F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9$ 发射信号, 将其余地归为一类。

5.1.2 问题一(1)模型的求解

(i) 下面将举例求解以 F_0 、 F_1 、 F_2 组合发射信号, 对其余无人机求解的方法。

已知 α_1 , α_2 , 并且 $F_1(r, 0)$, $F_2(r, \beta)$ 。利用余弦定理即可求解出角 a 的表达式, 即可求解出接受信号的无人机 F_8' 的极坐标(见图2)。由几何关系可列出一下方程组: ($\angle F_2 F_1 F_8$ 简写为 F_{218})

$$\begin{cases} \frac{r}{\sin \angle F_{218}} = \frac{l}{\sin \angle F_{208}} \\ \angle F_{218} + \angle F_{208} + \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\pi - \beta}{2} = 2\pi. \\ l = 2r \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{cases}$$

求解过程中先得

$$\angle F_{218} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\beta}{2} - (\angle F_{208} + \alpha_1 + \alpha_2)$$

左右同取sin函数，利用sin函数的和角公式，则

$$\sin \angle F218 = \cos\left(\frac{\beta}{2} - \alpha_1 - \alpha_2 - \angle F208\right) \quad (*)$$

将两角的关系等式

$$\frac{r}{\sin \angle F218} = \frac{l}{\sin \angle F208}, \text{ 将之代入} (*)$$

我们可以得到 $\tan \alpha_2$ 相应的数值。最终的结果为 $F8'(\rho, \theta)$ 。其中

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\left(\frac{\cos \beta \cdot \tan \alpha_2 - \sin \beta}{1 - \cos \beta - \sin \beta \cdot \tan \alpha_2}\right) \\ \rho &= \frac{r}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \theta) \\ \beta &= 40^\circ \end{aligned} \quad (1)$$

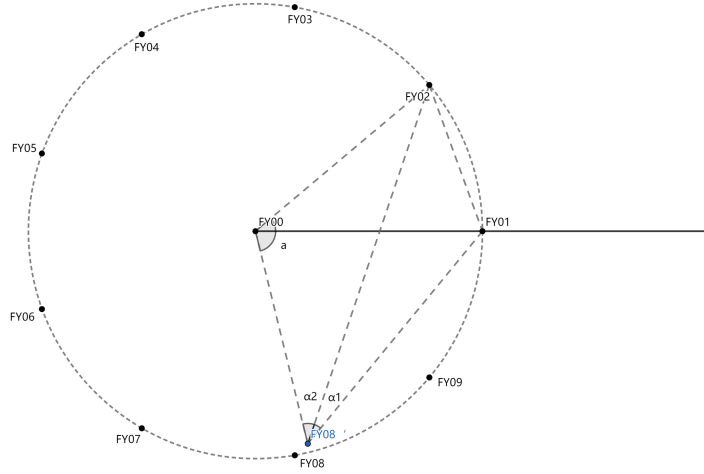


图2

(ii)下面将求解 $F1$ 分别与 $F3, F4, F5$ 组合发射信号的情形。

当向外发射信号时，例如 $F1, F4$ 确定 $F8'$ 的位置时，此时 β 角为钝角（见图3），最终可以求解得

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\left(\frac{\cos \beta \cdot \tan \alpha_2 - \sin \beta}{1 - \cos \beta - \sin \beta \cdot \tan \alpha_2}\right) \\ \rho &= \frac{r}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \theta) \\ \beta &= n \cdot 40^\circ, \quad n \in \{2, 3, 4\} \end{aligned} \quad (2)$$

当向内发射信号时，例如 $F1, F4$ 确定 $F3'$ 的位置时，此时 θ 处于角 β 的内部（见图4），最终可以求解得

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\left(\frac{\sin \beta + \cos \beta \cdot \tan \alpha_1}{1 - \cos \beta - \sin \beta \cdot \tan \alpha_1}\right) \\ \rho &= \frac{r}{\sin \alpha_2} \cdot \sin(\alpha_2 + \theta) \\ \beta &= n \cdot 40^\circ, \quad n \in \{2, 3, 4\} \end{aligned} \quad (3)$$

求解中的等式组(1)(2)(3)为不同情况下的三种位置信息转换方程，利用这三种方程组，就可以利用接收到的 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 三种信息计算出接收机的极坐标位置信息，从而实现了纯方位无人机的定位。

5.2 问题(2)的求解：完备的无人机选取

此问题中需要选取圆周上几架无人机可以利用问题(1)中建立的定位模型，定位出其余位置略有偏差的无人机的位置。例如当选取 $F0, F1, F2$ 无人机发射信号时，可能无法使用问题(1)中求解出的方程组(1)的位置通式得出 $F6$ 无人机的位置。此时则需要额外的无人机发射信号，利用新产生的 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 信息求解。

在问题(1)中，分情况解出了通解的符号式子。在增加圆周上1架无人机发射信号时，观察可知，当 θ 不存在，即 $1 - \cos \beta - \sin \beta \cdot \tan \alpha_2$ 为0使得 \arctan 的值不存在。在这种情况下可以算出

$$\alpha_2 = \frac{\beta}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

在圆周选取两架，共4种不同的无人机选取方案下，由于 θ 与除 $F1$ 外另一架无人机的选取有关，则 θ 为一个定值，可知接收机所接收的角度信号 $2\alpha_2 = \beta$ 的可能性存在，并大概率出现在无人机 $F0$ 处于另外两架中间的情形下。因为 θ 无法得出，从而导致了无人机定位失败，此时必然需要一架额外的无人机发射信号以保证定位成功。

如下图5：

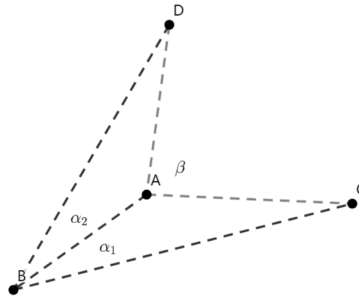


图5

图中的 $\alpha_2 = \frac{\beta}{2}$ 可能发生，就会导致点B的角坐标无法求解，也就是B的定位失败。

接下来考虑添加一架圆周上的无人机发射信号能否将所有可能性包含在内并可解以定位其余无人机。利用反证法，证明除 $FY00$ 和 $FY01$ 外只需增加2个无人机发射信号，即可实现无人机的准确定位。

假设增加2个无人机发射信号仍然会存在无法解出其余位置的情况。当在圆周上任取三架无人机时，其中有三组发射的组合，无法解出其余位置则说明选取后的三种发射组合每一种都存在 $\alpha_2 = \frac{\beta}{2}$ 。假设其中一组的角度信息为 α_1, α_2 ，另一组为 α'_1, α'_2 ，并定义对应的 β 与 β' （如图6）。例如：

$$\begin{aligned} \beta &= \angle F102, \quad \beta' = \angle F104 \\ \alpha_1 &= \angle F170, \quad \alpha_2 = \angle F470 \\ \alpha'_1 &= \angle F270, \quad \alpha'_2 = \angle F470 \\ \alpha_2 &= \alpha'_2. \end{aligned}$$

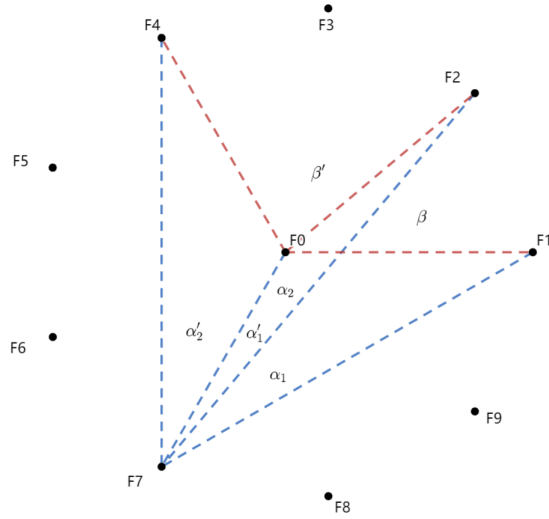


图6

按照假设，则有

$$\begin{cases} \alpha_2 = \beta \\ \alpha'_2 = \beta' \\ \alpha_2 = \alpha'_2 \end{cases}$$

根据图6，两种组合其中有一个角度信息重合， $\alpha'_1 = \alpha_2$ 。

因上述方程组不可能成立，与证明假设同时成立相互矛盾，因此假设不成立，即

$$\alpha_2 \neq \frac{\beta}{2}, \forall \text{不同发射组合所生成的} \alpha_1, \alpha_2 \text{信息.}$$

即增加2个无人机发射信号不会存在无法解出其余位置信息的情况，即任意增加2个无人机发射信号可以对其余所有无人机位置进行求解。

下面考虑额外选取数量超过2的情况。例如额外选取 $F2, F3, F4$ 进行信号的发射，此时一共由6种不同的信号发射组合，其中包含了上述所考虑的三种。（额外选取 $F2, F3$ 时的三种组合）而在之前的证明中，证明了额外选取 $F2, F3$ 时可以实现其余无人机的定位。更进一步，选取2架的方案比选取3架的方案少发射了3组信号，可以使用资源更少，而达到相同的目标，所以选取2架的方案更优。同理选取2架的方案比选取更多无人机的方案更优。

所以问题(2)中还需要两架无人机发射信号，以达到无人机有效定位的实现。

5.3 问题(3)的求解

本问题中，不仅需要利用(1)(2)中构建的无源定位模型对所有无人机进行位置的确定，还需要更进一步确定定位后的调整方案，使最终总体的调整难度要较低。

利用geogebra描绘初始状态的无人机编队位置如下图7：（蓝色为无人机）

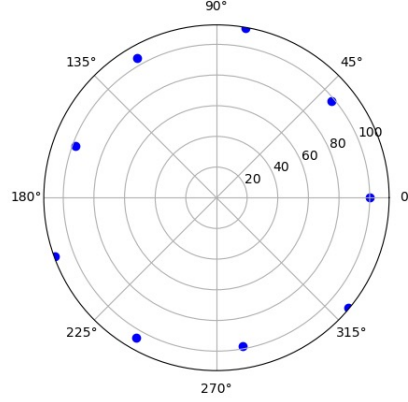


图7

首先依据题目(1)相同地，建立极坐标系。根据题目所要求可知，调整后最终需要所有无人机均匀地分布在半径为100m的圆周上。即所有相邻无人机之间间隔40度，所有无人机距离圆心无人机距离为100m。而分析题目中表1所给出的数据发现，无人机FY00, FY01的相对位置正确，距离为100m，也就是说该圆周已确定。因此当无人机FY00, FY01确定时，所有无人机的理想位置均已知，移动无人机FY01就会连锁地导致其余无人机的理想位置发生变化。所以本题对无人机位置调整方案的求解可以转化为在一系列限制条件下，对无人机FY01位置的求解。因此在一定的限制条件下，列出非线性的约束方程组，使用暴力算法求解出目标函数即FY01的最优位置，再将其余无人机沿直线移动到最优位置上即可。

在求解问题(1)时，可知所有无人机的极坐标位置信息均可由所接收到的位置信息即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 求解得出，因此各个无人机的移动前后的极坐标均可通过不同的角度信号求出。另最终编队状态唯一，为所有无人机均匀地分布在半径为100m的圆周上，不会产生无人机位置偏差的情况。所以目标函数可以设置为求所有无人机调整时所飞行的距离和的最小值，即

$$\min d = \sum_{i=1}^9 \sqrt{r^2 + \rho_i^2 - 2r\rho_i \cdot \cos \Delta\theta_i}$$

因为最终编队的相对位置确定，即每个相邻的无人机之间与圆心无人机连线组成的圆心角固定为40°，且最终的理想状态下各个无人机距离圆心无人机FY00的距离为100m。定义 θ_i 为无人机编号为FY0i本身位置的角坐标， $\Delta\theta_i$ 为某一无人机调整前后位置与圆心无人机连线所成的角度，同时定义 θ'_i 为调整后，理想编队状态下的无人机角坐标， ρ 为无人机调整前到F0的距离， ρ' 为调整后到F0的距离。则上述的文字可表述为

$$\begin{aligned}
\rho' &= 100m \\
\theta'_{i+1} - \theta'_i &= 40^\circ \\
\theta'_i &= \theta_i + \Delta\theta_i, \quad i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\
\theta_9 - \theta_1 &= 40^\circ \\
\theta'_9 &= \theta_9 + \Delta\theta_9
\end{aligned}$$

则该优化问题可表示为

$$\begin{aligned}
\text{Minimise} \quad & d = \sum_{i=1}^9 \sqrt{r^2 + \rho_i^2 - 2r\rho_i \cdot \cos \Delta\theta_i} \\
\text{s.t} \quad & \rho' = 100m \\
& \theta'_{i+1} - \theta'_i = 40^\circ \\
& \theta'_i = \theta_i + \Delta\theta_i, \quad i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\
& \theta_9 - \theta_1 = 40^\circ \\
& \theta'_9 = \theta_9 + \Delta\theta_9
\end{aligned}$$

其中，限制条件可表示为

$$A\Delta\theta = b$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \theta_{i+1} - \theta_i - 40^\circ \\ \vdots \end{pmatrix}$$

将该优化问题利用MATLAB中的optimization工具包求解，最后求解出结果。

每个无人机移动的信息如下表：

无人机编号	θ_i 的移动角度/度	移动距离/米
FY01	2.81247324225734e-07	0
FY02	-0.0999997187526758	2.00744921022749
FY03	-0.209999718752676	12.0062673660278
FY04	0.250000281247324	5.01995072827991
FY05	0.140000281247324	2.01457467470591
FY06	0.0400002812473243	12.0002274487071
FY07	-0.0699997187526758	5.00156699828755
FY08	-0.169999718752676	2.02145328832454
FY09	-0.279999718752676	12.0111397208718

表中正的 θ_i 的移动角度，为逆时针调整FY0*i*的位置，负数则相反。

最终求解出的总移动距离约为 $d = 52.082630$ 米。

6 问题二模型的建立与求解

6.1 问题二模型的建立

本题目将题目一中的圆形编队拓展为锥形编队，在保持高度不变的情况下，首先可以建立极坐标系。建系时以无人机FY15为直角坐标系原点坐标为(0,0)，以初始编队状态下的F15与F11连线，垂直该连线方向确定极坐标正半轴（如图8）。

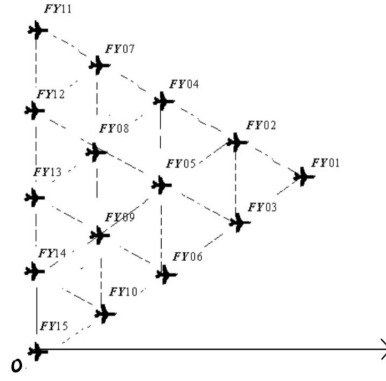


图8

建立坐标系后，参考问题一(1)中所建立的无人机无源定位模型，延续使用发射信号无人机与接受信号无人机的定义，即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的定义。我们可以知道，无人机的定位必须依靠所接收到的 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 角度信息，以及正确的距离关系，例如半径 r 的长度。在本题中，使用纯方位无源定位模型则也必须已知某无人机之间的长度关系，即使用纯方位无源定位模型时必须存在无偏的无人机。下面对。

6.1.1 锥形队列定位模型的建立

当发射信号的无人机位置无偏差时，通过之前所建立的直角坐标系，计算出定位模型的通解。每次选择编号为FY15的无人机和另外两架无人机遂行发射信号，其余无人机接受信号。假设发射信号的无人机位置无偏差且编号已知，对锥形队列的纯方位无源定位模型进行建立。

其中确定三架无偏的无人机选取另外一架无人机可能会出现的情况如下：

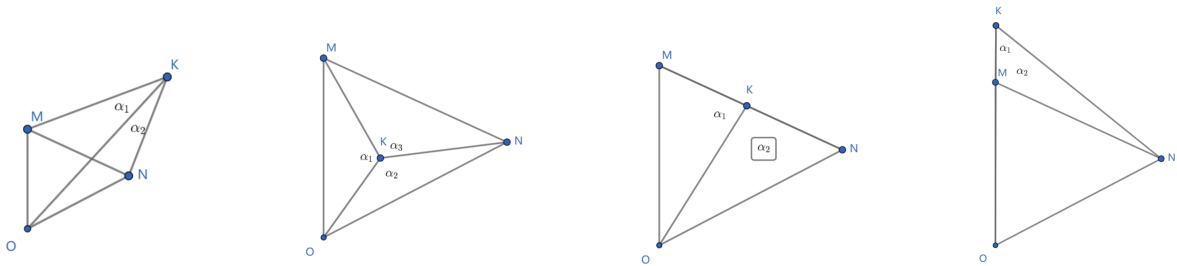


图9

图中的O为坐标原点也就是FY15，M点与N点表示发射信号的无偏无人机，K点表示接受信号的无人机。当前的目标即是求解K点的相关坐标信息，利用三角函数的相关定理，就可以通过解三角形的方式求解。解出的前两个情况结果为

$$\tan \angle ONK = \frac{OM \cdot \sin(2\alpha_1 + \angle MON) \cdot \sin \alpha_2}{ON \cdot \sin \alpha_1 + OM \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \angle MON)}$$

$$OK = \frac{ON}{\sin \alpha_2} \cdot \cos \angle ONK \quad (4)$$

其中因为O,M,N的位置处于理想位置，则可以根据无人机的编号计算出OM,ON的长度以及角度 $\angle MON$ 。

此外，当接收机K与OM共线时，如第三第四种情况，则需要分更细的情况进行讨论。求解出的结果如下

$$OK = \frac{OM}{\sin \alpha_2} \cdot \sin(\alpha_2 + \frac{\pi}{3}) \text{ 或 } \frac{OM}{\sin \alpha_1} \cdot \sin(\alpha_1 + \frac{\pi}{3}) \quad (5)$$

其中K的相应角坐标与M的角坐标相同。 α_1 与 α_2 的选取是根据K与OM的相对位置而决定，当K处于OM内部时选取 α_1 ，处于外部时选取 α_2 。分析可知当K与ON共线时则类似。

当接收机K与MN共线时，求解出的结果为

$$\begin{aligned} \tan \angle ONK &= -\frac{OM \cdot \sin(2\alpha_1 + \angle MON) \cdot \sin \alpha_2}{ON \cdot \sin \alpha_1 + OM \sin \alpha_2 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \angle MON)} \\ OK &= \frac{ON}{\sin \alpha_2} \cdot \sin \angle ONK \end{aligned} \quad (6)$$

至此则接受机的极坐标可以通过 α_1, α_2 求出，则锥形编队的无源定位模型建立完成。

6.1.2 锥形队列完备的定位选取

接下来需要求出除让FY15发射信号外，还需多少架无人机发射信号才能保证对其余的所有无人机进行定位。首先，接收机获得的 α_1, α_2 信息若其中一个为0或 π 或同时为0或 π 则表示接收机K与OM,ON共线，此时可以代入共线情况(5)方程组下求解。若角度信息 α_1, α_2 都不等于0或 π ，则可归类为不共线情况(4)号方程组下，对K的位置进行求解。

现在我们考虑在(4)方程组下，当 α_1, α_2 都不为0或 π 时，有无可能存在无解的情况。

要证明无解存在，即证明

$$ON \cdot \sin \alpha_1 + OM \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \angle MON) = 0 \text{ 存在。}$$

因无法通过分析代数的方式判断该等式能否成立，故考虑采用大量数值逼近的手段判断该方程的解(α_1, α_2)能否成立。其中 $\angle MON$ 可以确定为有限种情况，所以将ON,OM和 α_1, α_2 以足够小的步长进行整个范围的遍历，查看0解的存在性，即可判断能否使用三架无人机实现其余无人机的定位。经过分析可以知道， $\sin \alpha_1$ 与 $\sin \alpha_2$ 是同号的，因为接收信号无人机处于等边三角形的内部，对于任意发射信号无人机的组合，故无论其为锐角或钝角，它的sin已知为非负，该表述一直是正确可证的。另外，由三角形的相关公理， $\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \angle MON)$ 也一定处于(0, 2π)之间。所以 $\tan \angle ONK$ 中的分母不存在等于0的情况，即该tan值存在。

经过程序运行与分析，在锥形编队中，仅需3架无人机即可实现其余无人机的定位。

6.1.3 锥形队列无人机位置调整方案

上文中证明了在无人机锥形编队下，加上原点无人机一共3架即可对其余的无人机位置进行定位，从而实现调整。

因与问题一(3)类似，无人机编队的最终状态已知，则需要将当前无人机编队状态向最终状态调整。在假设中包括原点的三架无人机处在正确位置上，此时同样可以仅考虑一个无人机点的位置，从而在计算出其余无人机的位置，并使用直接调整的方式将无人机沿直线调整到理想位置上。即可同样仿照问题一(3)中的非线性优化问题，可以列出目标方程，

$$\min d = \sum_{i=1}^{14} (p_i - p'_i)$$

并可以根据几何关系以及最后的理想编队位置找出相对应的限制条件，即为由已知的三个无偏点生成的特定 $\Delta\theta$ 准许范围，且每一个无人机对应以个 $\Delta\theta_i$ 。并以此方程组组成矩阵 A ，最后利用问题一(3)的MATLAB最优化算法求解出答案。解出的 $\Delta\theta_i, \Delta d$ 即为最后每一个无人机所要移动的角度与距离，最后使每一个无人机沿直线移动到计算出的位置上，此时就是该调整方案的最优解，使所有无人机总移动距离最短的调整方案。

7 模型优缺点分析

在问题一中所使用的纯方位无源定位模型实际上是一个利用角度信息定位的模型，每次通过3架无人机对另外一架无人机发射信号，从而计算出位置未知的无人机的相对位置。在建立了定位模型后，发现该模型存在一定的优势与劣势。

7.1 模型优势

纯方位无源定位模型可以仅根据不同无人机之间发射信号的角度信息，来实现无人机的定位，可以应用于实际中无人机之间的定位系统。对比其他依赖于坐标系距离的定位系统，无源定位模型所需的参数较少，且参数的获得较易。如可直接从接收信号的方向获取 α_1, α_2 参数。另一方面，该定位模型的速度较快，仅涉及到简单的代数运算。

7.2 模型劣势

在问题的求解中，可以明显地感受到所有的定位都必需存在一定数量的位置无偏的无人机进行信号发射。因此当所有无人机的位置都有偏差时，或仅有1或2架无人机位置无偏时，则该模型无法对其余无人机进行定位。又或者仅对3架无人机所组成的编队进行位置调整，则无法获得足够的角度信息参数，定位无法实现。

参考文献

- [1] 王元昊，曾红，数学基本问题的MATLAB解法. 北京：化学工业出版社，2019.8
- [2] 吴建国，汪名杰，李虎军，数学建模案例精编. 北京：中国水利书店出版社，2005

8 附录

问题一(3)的最优化求解代码如下（见支撑材料文件夹：问题一(3)的求解 pb13opt.m）

```
1      clear , clc ;
2      format long
3      syms dt1 dt2 dt3 dt4 dt5 dt6 dt7 dt8 dt9
4
5      dt=sym([dt1,dt2,dt3,dt4,dt5,dt6,dt7,dt8,dt9]);
6      tt=sym([0, 40.10, 80.21, 119.75, 159.86, 199.96, 240.07, 280.17,
7              320.28]);
8      ro=sym([100, 98, 112, 105, 98, 112, 105, 98, 112]);
9      ta=sym(tt/180*pi);
10     tb=double(ta);
11     A=zeros(9,9);
12     B=zeros(9,1);
13
14     dis=sym([]);
15     r=sym(100.0);
16     c=sym([]);
17     init=zeros(1,9);
18
19     for i=1:9
20         dis(i)=(r^2+ro(i)^2-2*ro(i)*r*cos(dt(i)))^(1/2);
21
22     end
23     subj=sum(dis);
24
25     for i=2:9
26         c(i)=(dt(i-1)-dt(i)-((tt(i)-tt(i-1))+40)*180/pi);
27         A(i,i-1)=1;
28         A(i,i)=-1;
29         B(i,1)=ta(i)-ta(i-1)-40/180*pi;
30     end
31     A(1,1)=-1;
32     A(1,9)=1;
33     B(1)=ta(1)-ta(9)+2*pi-40/180*pi;
34     c(1)=dt(9)-dt(1)-((360-tt(9))+40)/180*pi;
35     c=reshape(c,9,1);
36     subj=sum(dis);
37     [dt,fval]=fmincon(@fun1,init,[],[],A,B);
38     dtp=dt/pi*180;
39     % dt/pi*360
40     % dt1,dt2,dt3,dt4,dt5,dt6,dt7,dt8,dt9
```

问题二的相关证明代码如下（见支撑材料文件 searchbypoint.m）

```

1      point=[100*sqrt(3) 100;75*sqrt(3) 125;75*sqrt(3) 75;50*sqrt(3)
2          150;50*sqrt(3) 100;50*sqrt(3) 50;
3          25*sqrt(3) 175;25*sqrt(3) 125;25*sqrt(3) 75;25*sqrt(3) 25;0 200;0
4          150;0 100;0 50];
5      xk=point(:,1);          %表示的是发射信号的观测机无偏的横坐标xk
6      yk=point(:,2);          %表示的是发射信号的观测机无偏的纵坐标yk
7      a1star=-500;            便于查看下文的% 值变化a1star
8      a2star=-500;            对于在长为
9                                %100*sqrt(3)宽为的长方形当中200
10                                选取%点M
11                                选取%点N
12                                if i~=j
13                                for x=0:0.1:174
14                                for y=0:0.05:100
15                                mom=acos((xk(i)*yk(j)+xk(j)*yk(i))/(sqrt(
16                                xk(i)^2+yk(i)^2)*sqrt(xk(j)^2+yk(j)
17                                ^2)));
18                                a1=acos(((xk(i)-x)*(-x)+(yk(i)-y)*(-y))/(
19                                sqrt((xk(i)-x)^2+(yk(i)-y)^2)+(x^2+y
20                                ^2)));
21                                a2=acos(((xk(j)-x)*(-x)+(yk(j)-y)*(-y))/(
22                                sqrt((xk(j)-x)^2+(yk(j)-y)^2)+(x^2+y
23                                ^2)));
24                                if sqrt(xk(j)^2+yk(j)^2)*sin(a1)+sqrt(xk(
25                                i)^2+yk(i)^2)*sin(a2)*cos(a1+a2+mom)
26                                ==0
27                                    a1star=180*a1/pi;
28                                    a2star=180*a2/pi;
29                                end
30                                end
31                                end
32                                end
33                                end
34                                end
35                                end
36                                end
37                                end
38                                end
39                                end
40                                end
41                                end
42                                end
43                                end
44                                end
45                                end
46                                end
47                                end
48                                end
49                                end
50                                end
51                                end
52                                end
53                                end
54                                end
55                                end
56                                end
57                                end
58                                end
59                                end
60                                end
61                                end
62                                end
63                                end
64                                end
65                                end
66                                end
67                                end
68                                end
69                                end
70                                end
71                                end
72                                end
73                                end
74                                end
75                                end
76                                end
77                                end
78                                end
79                                end
80                                end
81                                end
82                                end
83                                end
84                                end
85                                end
86                                end
87                                end
88                                end
89                                end
90                                end
91                                end
92                                end
93                                end
94                                end
95                                end
96                                end
97                                end
98                                end
99                                end
100                               end
101                               end
102                               end
103                               end
104                               end
105                               end
106                               end
107                               end
108                               end
109                               end
110                               end
111                               end
112                               end
113                               end
114                               end
115                               end
116                               end
117                               end
118                               end
119                               end
120                               end
121                               end
122                               end
123                               end
124                               end
125                               end
126                               end
127                               end
128                               end
129                               end
130                               end
131                               end
132                               end
133                               end
134                               end
135                               end
136                               end
137                               end
138                               end
139                               end
140                               end
141                               end
142                               end
143                               end
144                               end
145                               end
146                               end
147                               end
148                               end
149                               end
150                               end
151                               end
152                               end
153                               end
154                               end
155                               end
156                               end
157                               end
158                               end
159                               end
160                               end
161                               end
162                               end
163                               end
164                               end
165                               end
166                               end
167                               end
168                               end
169                               end
170                               end
171                               end
172                               end
173                               end
174                               end
175                               end
176                               end
177                               end
178                               end
179                               end
180                               end
181                               end
182                               end
183                               end
184                               end
185                               end
186                               end
187                               end
188                               end
189                               end
190                               end
191                               end
192                               end
193                               end
194                               end
195                               end
196                               end
197                               end
198                               end
199                               end
200                               end
201                               end
202                               end
203                               end
204                               end
205                               end
206                               end
207                               end
208                               end
209                               end
210                               end
211                               end
212                               end
213                               end
214                               end
215                               end
216                               end
217                               end
218                               end
219                               end
220                               end
221                               end
222                               end
223                               end
224                               end
225                               end
226                               end
227                               end
228                               end
229                               end
230                               end
231                               end
232                               end
233                               end
234                               end
235                               end
236                               end
237                               end
238                               end
239                               end
240                               end
241                               end
242                               end
243                               end
244                               end
245                               end
246                               end
247                               end
248                               end
249                               end
250                               end
251                               end
252                               end
253                               end
254                               end
255                               end
256                               end
257                               end
258                               end
259                               end
260                               end
261                               end
262                               end
263                               end
264                               end
265                               end
266                               end
267                               end
268                               end
269                               end
270                               end
271                               end
272                               end
273                               end
274                               end
275                               end
276                               end
277                               end
278                               end
279                               end
280                               end
281                               end
282                               end
283                               end
284                               end
285                               end
286                               end
287                               end
288                               end
289                               end
290                               end
291                               end
292                               end
293                               end
294                               end
295                               end
296                               end
297                               end
298                               end
299                               end
300                               end
301                               end
302                               end
303                               end
304                               end
305                               end
306                               end
307                               end
308                               end
309                               end
310                               end
311                               end
312                               end
313                               end
314                               end
315                               end
316                               end
317                               end
318                               end
319                               end
320                               end
321                               end
322                               end
323                               end
324                               end
325                               end
326                               end
327                               end
328                               end
329                               end
330                               end
331                               end
332                               end
333                               end
334                               end
335                               end
336                               end
337                               end
338                               end
339                               end
340                               end
341                               end
342                               end
343                               end
344                               end
345                               end
346                               end
347                               end
348                               end
349                               end
350                               end
351                               end
352                               end
353                               end
354                               end
355                               end
356                               end
357                               end
358                               end
359                               end
360                               end
361                               end
362                               end
363                               end
364                               end
365                               end
366                               end
367                               end
368                               end
369                               end
370                               end
371                               end
372                               end
373                               end
374                               end
375                               end
376                               end
377                               end
378                               end
379                               end
380                               end
381                               end
382                               end
383                               end
384                               end
385                               end
386                               end
387                               end
388                               end
389                               end
390                               end
391                               end
392                               end
393                               end
394                               end
395                               end
396                               end
397                               end
398                               end
399                               end
400                               end
401                               end
402                               end
403                               end
404                               end
405                               end
406                               end
407                               end
408                               end
409                               end
410                               end
411                               end
412                               end
413                               end
414                               end
415                               end
416                               end
417                               end
418                               end
419                               end
420                               end
421                               end
422                               end
423                               end
424                               end
425                               end
426                               end
427                               end
428                               end
429                               end
430                               end
431                               end
432                               end
433                               end
434                               end
435                               end
436                               end
437                               end
438                               end
439                               end
440                               end
441                               end
442                               end
443                               end
444                               end
445                               end
446                               end
447                               end
448                               end
449                               end
450                               end
451                               end
452                               end
453                               end
454                               end
455                               end
456                               end
457                               end
458                               end
459                               end
460                               end
461                               end
462                               end
463                               end
464                               end
465                               end
466                               end
467                               end
468                               end
469                               end
470                               end
471                               end
472                               end
473                               end
474                               end
475                               end
476                               end
477                               end
478                               end
479                               end
480                               end
481                               end
482                               end
483                               end
484                               end
485                               end
486                               end
487                               end
488                               end
489                               end
490                               end
491                               end
492                               end
493                               end
494                               end
495                               end
496                               end
497                               end
498                               end
499                               end
500                               end
501                               end
502                               end
503                               end
504                               end
505                               end
506                               end
507                               end
508                               end
509                               end
510                               end
511                               end
512                               end
513                               end
514                               end
515                               end
516                               end
517                               end
518                               end
519                               end
520                               end
521                               end
522                               end
523                               end
524                               end
525                               end
526                               end
527                               end
528                               end
529                               end
530                               end
531                               end
532                               end
533                               end
534                               end
535                               end
536                               end
537                               end
538                               end
539                               end
540                               end
541                               end
542                               end
543                               end
544                               end
545                               end
546                               end
547                               end
548                               end
549                               end
550                               end
551                               end
552                               end
553                               end
554                               end
555                               end
556                               end
557                               end
558                               end
559                               end
560                               end
561                               end
562                               end
563                               end
564                               end
565                               end
566                               end
567                               end
568                               end
569                               end
570                               end
571                               end
572                               end
573                               end
574                               end
575                               end
576                               end
577                               end
578                               end
579                               end
580                               end
581                               end
582                               end
583                               end
584                               end
585                               end
586                               end
587                               end
588                               end
589                               end
590                               end
591                               end
592                               end
593                               end
594                               end
595                               end
596                               end
597                               end
598                               end
599                               end
600                               end
601                               end
602                               end
603                               end
604                               end
605                               end
606                               end
607                               end
608                               end
609                               end
610                               end
611                               end
612                               end
613                               end
614                               end
615                               end
616                               end
617                               end
618                               end
619                               end
620                               end
621                               end
622                               end
623                               end
624                               end
625                               end
626                               end
627                               end
628                               end
629                               end
630                               end
631                               end
632                               end
633                               end
634                               end
635                               end
636                               end
637                               end
638                               end
639                               end
640                               end
641                               end
642                               end
643                               end
644                               end
645                               end
646                               end
647                               end
648                               end
649                               end
650                               end
651                               end
652                               end
653                               end
654                               end
655                               end
656                               end
657                               end
658                               end
659                               end
660                               end
661                               end
662                               end
663                               end
664                               end
665                               end
666                               end
667                               end
668                               end
669                               end
670                               end
671                               end
672                               end
673                               end
674                               end
675                               end
676                               end
677                               end
678                               end
679                               end
680                               end
681                               end
682                               end
683                               end
684                               end
685                               end
686                               end
687                               end
688                               end
689                               end
690                               end
691                               end
692                               end
693                               end
694                               end
695                               end
696                               end
697                               end
698                               end
699                               end
700                               end
701                               end
702                               end
703                               end
704                               end
705                               end
706                               end
707                               end
708                               end
709                               end
710                               end
711                               end
712                               end
713                               end
714                               end
715                               end
716                               end
717                               end
718                               end
719                               end
720                               end
721                               end
722                               end
723                               end
724                               end
725                               end
726                               end
727                               end
728                               end
729                               end
730                               end
731                               end
732                               end
733                               end
734                               end
735                               end
736                               end
737                               end
738                               end
739                               end
740                               end
741                               end
742                               end
743                               end
744                               end
745                               end
746                               end
747                               end
748                               end
749                               end
750                               end
751                               end
752                               end
753                               end
754                               end
755                               end
756                               end
757                               end
758                               end
759                               end
760                               end
761                               end
762                               end
763                               end
764                               end
765                               end
766                               end
767                               end
768                               end
769                               end
770                               end
771                               end
772                               end
773                               end
774                               end
775                               end
776                               end
777                               end
778                               end
779                               end
780                               end
781                               end
782                               end
783                               end
784                               end
785                               end
786                               end
787                               end
788                               end
789                               end
790                               end
791                               end
792                               end
793                               end
794                               end
795                               end
796                               end
797                               end
798                               end
799                               end
800                               end
801                               end
802                               end
803                               end
804                               end
805                               end
806                               end
807                               end
808                               end
809                               end
810                               end
811                               end
812                               end
813                               end
814                               end
815                               end
816                               end
817                               end
818                               end
819                               end
820                               end
821                               end
822                               end
823                               end
824                               end
825                               end
826                               end
827                               end
828                               end
829                               end
830                               end
831                               end
832                               end
833                               end
834                               end
835                               end
836                               end
837                               end
838                               end
839                               end
840                               end
841                               end
842                               end
843                               end
844                               end
845                               end
846                               end
847                               end
848                               end
849                               end
850                               end
851                               end
852                               end
853                               end
854                               end
855                               end
856                               end
857                               end
858                               end
859                               end
860                               end
861                               end
862                               end
863                               end
864                               end
865                               end
866                               end
867                               end
868                               end
869                               end
870                               end
871                               end
872                               end
873                               end
874                               end
875                               end
876                               end
877                               end
878                               end
879                               end
880                               end
881                               end
882                               end
883                               end
884                               end
885                               end
886                               end
887                               end
888                               end
889                               end
890                               end
891                               end
892                               end
893                               end
894                               end
895                               end
896                               end
897                               end
898                               end
899                               end
900                               end
901                               end
902                               end
903                               end
904                               end
905                               end
906                               end
907                               end
908                               end
909                               end
910                               end
911                               end
912                               end
913                               end
914                               end
915                               end
916                               end
917                               end
918                               end
919                               end
920                               end
921                               end
922                               end
923                               end
924                               end
925                               end
926                               end
927                               end
928                               end
929                               end
930                               end
931                               end
932                               end
933                               end
934                               end
935                               end
936                               end
937                               end
938                               end
939                               end
940                               end
941                               end
942                               end
943                               end
944                               end
945                               end
946                               end
947                               end
948                               end
949                               end
950                               end
951                               end
952                               end
953                               end
954                               end
955                               end
956                               end
957                               end
958                               end
959                               end
960                               end
961                               end
962                               end
963                               end
964                               end
965                               end
966                               end
967                               end
968                               end
969                               end
970                               end
971                               end
972                               end
973                               end
974                               end
975                               end
976                               end
977                               end
978                               end
979                               end
980                               end
981                               end
982                               end
983                               end
984                               end
985                               end
986                               end
987                               end
988                               end
989                               end
990                               end
991                               end
992                               end
993                               end
994                               end
995                               end
996                               end
997                               end
998                               end
999                               end
1000                              end

```

模型建立及求解见支撑材料相关求解1、2。