Национальная научно-образовательная корпорация ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

по дисциплине

«Вычислительная математика»

Вариант № 8

Выполнил:

Студент группы P3210

Мальков Павел Александрович

Преподаватель:

Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург, 2024

Цель работы

Изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

Задание

Часть 1.

1. Отделить корни заданного нелинейного уравнения графически (вид уравнения представлен в табл. 6)
2. Определить интервалы изоляции корней.
3. Уточнить корни нелинейного уравнения (см. табл. 6) с точностью $\epsilon = 10^{-2}$.
4. Используемые методы для уточнения каждого из 3-х корней многочлена представлены в таблице 7.
5. Вычисления оформить в виде таблиц (1-5), в зависимости от заданного метода. Для всех значений в таблице удержать 3 знака после запятой.
   - 5.1 Для метода половинного деления заполнить таблицу 1.
   - 5.2 Для метода хорд заполнить таблицу 2.
   - 5.3 Для метода Ньютона заполнить таблицу 3.
   - 5.4 Для метода секущих заполнить таблицу 4.
   - 5.5 Для метода простой итерации заполнить таблицу 5. Проверить условие сходимости метода на выбранном интервале.
6. Заполненные таблицы отобразить в отчете.

Вид нелинейного уравнения для вычислительной реализации:

$$3x^3 + 1,7x^2 - 15,42x + 6,89 = 0$$

Выбор метода для вычислительной реализации задачи:

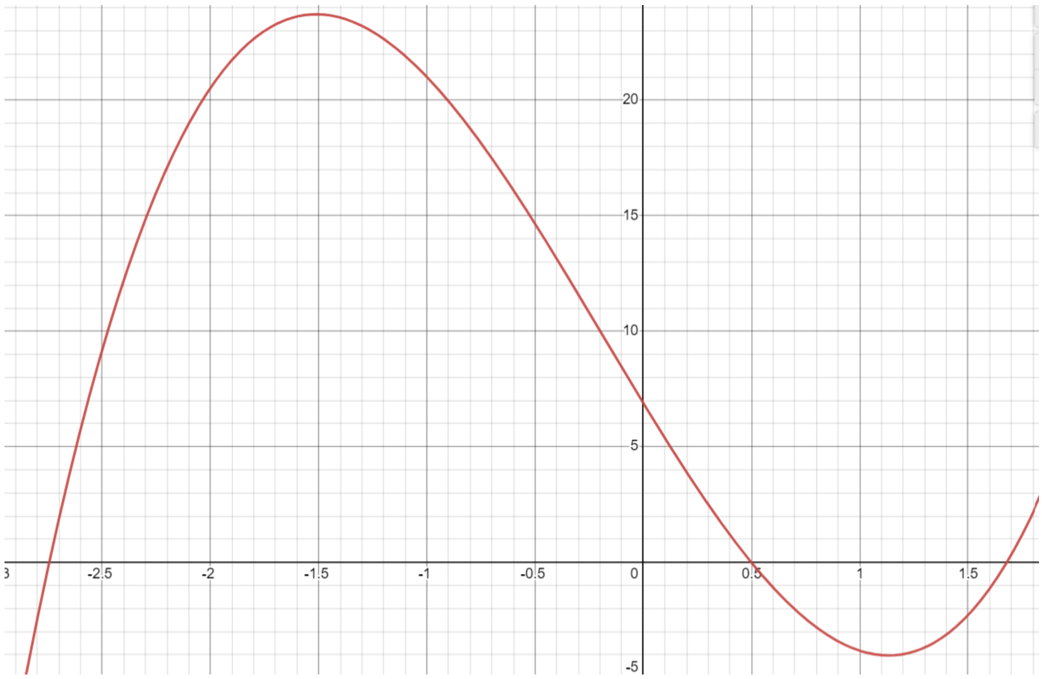
Номер варианта	Крайний правый корень	Крайний левый корень	Центральный корень
8	Метод простой итерации	Метод хорд	Метод Ньютона

Выполнение первой части

Точки пересечения:

$X_1 = -2.744 \; X_2 = 0.498 \; X_3 = 1.679$

График функции:



Метод для правого корня

преобразуем уравнение $f\ (x) = 0$ к равносильному (при $\lambda \neq 0$) $\lambda f(x) = 0$

$f(\mathrm{x}) = 3x^3 + 1{,}7x^2 - 15{,}42x + 6{,}89$

$\mathrm{x} = \mathrm{x} + \lambda f x$

$\varphi(\mathrm{x}) = x + \lambda f(x),$

$\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(\mathrm{x})$

$f'(\mathrm{x}) = 9x^2 + 3{,}4x - 15{,}42$

$f(1{,}5) = 9 \cdot (1{,}5)^2 + 3{,}4 \cdot (1{,}5) - 15{,}42 = 9{,}93$

$f(2) = 9 \cdot 4 + 3{,}4 \cdot 2 - 15{,}42 = 27{,}38$

Так как $f[a,b] > 0$, то рассматриваем:

$$\lambda = -\frac{1}{\max|\mathrm{f'x}\,|} = -\frac{1}{27{,}38} = -0{,}0365$$

Подставим: $\phi(x) = x$ -0,0365$\cdot$ $(3x^3 + 1{,}7x^2 - 15{,}42x + 6{,}89) =$

$1{,}56283x - 0{,}1095x^3 - 0{,}06205x^2 - 0{,}251485$

$\phi'(x)$ =$1{,}5628 - 0{,}3285x^2 - 0{,}1241x^1$

Проверим точки:

$\phi'(1{,}5) = 0.637327 < 1$

$\phi'(2) = 0{,}0006 < 1$

Сходится

$x_0 = 1{,}5$

$x_1 = 1{,}348$

$x_2 = 1{,}476$

$f(x_2) = -2{,}520$

...

$f(x) = 3x^3 + 1{,}7x^2 - 15{,}42x + 6{,}89$

$\phi(x) = 1{,}56283x - 0{,}1095x^3 - 0{,}06205x^2 - 0{,}251485$

Номер	x_i	x_{i+1}	$\phi(x_{i+1})$	$f(x_{i+1})$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$
0	1,5	1,584	1,6332	-1,347	0,0584
1	1,584	1,6332	1,66	-0,6906	0,0492
2	1,6332	1,66	1,671	-0.3	0,0268
3	1,66	1,671	1,6758	-0,1325	0,01
4	1,671	1,6758	1,6787	-0,058	0,0048

Таблица 2: Уточнение корня уравнения методом простой итерации

$x \approx -1{,}6787$

2. **Метод хорд для левого корня**

Возьму за изолированный интервал [-3, -2.5]

$f(x) = 3x^3 + 1{,}7x^2 - 15{,}42x + 6{,}89$

Вычисление будем производить по формуле:

$$x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

Номер	a	b	x	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$\lvert x_{i+1} - x_i\rvert$
0	-3	-2.5	-2.71136	-12.55	9,19	1,39921	
1	-3	-2.71136	-2,74031	-12.55	1,39921	0,17797	0,02895
2	-3	-2,74031	-2,74394	-12.55	0,17797	0,02213	0,00363
3	-3	-2,74394	-2,74439	-12.55	0,02213		0,00045

Таблица 3: Уточнение корня уравнения методом хорд

$x \approx -2.74439$

3. Находим центральный корень

Возьму изолированный интервал [0.4,0.6]

$f(x) = 3x^3 + 1.7x^2 - 15.42x + 6.89$

Найдём производные:

$f'(x) = 9x^2 + 3.4x - 15.42;$

$f''(x) = 18x + 3.4;$

$f(0.4) = 1.186;$ $f(0.6) = -1.102$

$f'(0.4) = -12.62;$ $f'(0.6) = -10{,}14$

$f''(0.4) = 10.6;$ $f''(0.6) = 14{,}2$

Знаки сохраняются.

Выполняется условие $f(a_0) \cdot f'(a_0) > 0 | \Rightarrow x_0 = a_0 = 0.4$

Номер	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	0.4	1.186	-12.62	0.49398	0.09398
1	0.49398	0.049273	-11.54432	0.4982	0.00427
2	0.4982	0,0000915	-11.49167	0.4982	0

$x \approx 0.4982$

Выполнение второй части

Задание:

1. Отделить корни заданной системы нелинейных уравнений графически (вид системы представлен в табл. 8).
2. Используя указанный метод, решить систему нелинейных уравнений с точностью до 0,01.
3. Для метода простой итерации проверить условие сходимости метода.
4. Подробные вычисления привести в отчете.

Система нелинейных уравнений для вычислительной реализации:

$tg\, x \cdot y = x^2 \quad 0.8x^2 + 2y^2 = 1$

Система имеет не более двух решений, это видно по графику. Решения в точках x_1, x_2. Выразим:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{y}{\cos^2 x} - 2x & tg\,x \\ 1{,}6x & 4y \end{vmatrix} \quad I \text{ приб } (0{,}5; 0{,}5)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{y}{\cos^2 x} - 2x & tg\,x \\ 1{,}6x & 4y \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} tg(x)y - x^2 \\ 0{,}8x^2 + 2y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$1)\ \begin{cases} -0{,}35078\Delta x + 0{,}5463\Delta y = -0{,}02315 \\ 0{,}8\Delta x + 2\Delta y = 0{,}3 \end{cases}$$

$\Delta x = 0{,}185 \quad \Delta y = 0{,}076$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + 0{,}185 = 0{,}685 \\ y_1 = y_0 + 0{,}076 = 0{,}576 \end{cases} \qquad (0{,}685; 0{,}576) \to \text{в исх}$$

$$2)\ \begin{cases} -0{,}40936\Delta x + 0{,}81697\Delta y = -0{,}00135 \\ 1{,}096\Delta x + 2{,}304\Delta y = -0{,}03893 \end{cases}$$

$\Delta x = -0{,}016 \quad \Delta y = -0{,}009$

$$\begin{cases} x_2 = 0{,}669 \\ y_2 = 0{,}567 \end{cases} \qquad (0{,}669; 0{,}567$$

$$3)\ \begin{cases} 0{,}416573\Delta x + 0{,}790628\Delta y = -0{,}00072 \\ 1{,}0704\Delta x + 2{,}268\Delta y = -0{,}00103 \end{cases} \qquad \begin{matrix} |x_{i+1} - x_i| < \varepsilon \\ |y_{i+1} - y_i| < \varepsilon \end{matrix}$$

$\Delta x = -0{,}08 \quad \Delta y = 0{,}003$

$$\begin{cases} x = 0{,}661 \\ y = 0{,}579 \end{cases}$$

Ответ: $(0{,}661 ; 0{,}579)$

Программная реализация задачи

Задачи для нелинейных:

1. Все численные методы (см. табл. 9) должны быть реализованы в виде отдельных подпрограмм/методов/классов.
2. Пользователь выбирает уравнение, корень/корни которого требуется вычислить (3-5 функций, в том числе и трансцендентные), из тех, которые предлагает программа.
3. Предусмотреть ввод исходных данных (границы интервала/начальное приближение к корню и погрешность вычисления) из файла или с клавиатуры по выбору конечного пользователя.
4. Выполнить верификацию исходных данных. Необходимо анализировать наличие корня на введенном интервале.Если на интервале несколько корней или они отсутствуют – выдавать соответствующее сообщение. Программа должна реагировать на некорректные введенные данные.
5. Для методов, требующих начальное приближение к корню (методы Ньютона, секущих, хорд с фиксированнымконцом, простой итерации), выбор начального приближения x0(a или b) вычислять в программе.
6. Для метода простой итерации проверять достаточное условие сходимости метода на введенном интервале.
7. Предусмотреть вывод результатов (найденный корень уравнения, значение функции в корне, число итераций) вфайл или на экран по выбору конечного пользователя.

Мой код: