#### МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

## **'ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА'**

Вариант №22

Студент: Самарина Арина Анатольевна, Суржицкий Арсений Арсентьевич Группа Р3266

*Преподаватель:* Машина Екатерина Александровна

## 1. Цель работы

Найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов.

## 2. Порядок выполнения работы

- 1 часть: Вычислительная реализация задачи
  - 1. Сформировать таблицу табулирования заданной функции на указанном интервале

$$y = \frac{28x}{x^4 + 25}, \quad x \in [0,4], \quad h = 0,4$$

- 2. Построить линейное и квадратичное приближения по 11 точкам заданного интервала
- 3. Найти среднеквадратические отклонения для каждой аппроксимирующей функции. Ответы дать с тремя знаками после запятой
- 4. Выбрать наилучшее приближение
- 5. Построить графики заданной функции, а также полученные линейное и квадратичное приближения
- 2 часть: Программная реализация задачи
  - 1. Предусмотреть ввод исходных данных из файла/консоли (таблица y = f(x)должна содержать от 8 до 12 точек)
  - 2. Реализовать метод наименьших квадратов, исследуя все указанные функции
  - 3. Предусмотреть вывод результатов в файл/консоль: коэффициенты аппроксимирующих функций, среднеквадратичное отклонение, массивы значений  $x_i, y_i, \varphi(x_i), \varepsilon_i$
  - 4. Для линейной зависимости вычислить коэффициент корреляции Пирсона
  - 5. Программа должна отображать наилучшую аппроксимирующую функцию
  - 6. Организовать вывод графиков функций, графики должны полностью отображать весь исследуемый интервал (с запасом)
  - 7. Программа должна быть протестирована при различных наборах данных, в том числе и некорректных

2

## 3. Рабочие формулы

Аппроксимировать f(x) функцией  $\varphi(x)$ 

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

# МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Преобразуем полученную линейную систему уравнений: раскроем скобки и перенесем свободные слагаемые в правую часть выражения.

$$\begin{cases} a_0n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + \dots + a_{m-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{m-1} + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^m &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \dots + a_{m-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + \dots + a_{m-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m-1} + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} &= \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i \end{cases}$$

в матричном виде: 
$$\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^m \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n x_i^m & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} & \dots \sum_{i=1}^n x_i^{2m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ x_i \\ \dots \\ x_i \end{vmatrix}$$

Коэффициент корреляции

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$$

Среднеквадратичное отклонение

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - y_i)^2}{n}}$$

Выбор аппроксимирующей функции

$$R^{2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_{i} - \varphi_{i})^{2}}{\sum_{i=1}^{n} \varphi_{i}^{2} - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^{n} \varphi_{i})^{2}}$$

#### 4. Вычислительная часть

Сформировать таблицу табулирования функции

$$y = \frac{28x}{x^4 + 25}, \quad x \in [0,4], \quad h = 0,4$$

х	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
у	0	0.448	0.882	1.241	1.42	1.366	1.155	0.907	0.69	0.522	0.399

Построить линейное и квадратичное приближения по 11 точкам заданного интервала

## + Линейное приближения:

Для определения вида зависимости. Выбираем многочлен первой степени и строим линейную модель  $P_1(x) = ax + b$ 

Вычисляем суммы:

$$SX = \sum_{i=1}^{n} x_i = 22$$

$$SXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 61,6$$

$$SY = \sum_{i=1}^{n} y_i = 9,03$$

$$SXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 18,3728$$

Получим систему управнений для нахождения параметров a и b

$$\begin{cases} aSXX + bSX = SXY \\ aSX + bn = SY \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 61,6a + 22b = 18,3728 \\ 22a + 11b = 9,03 \end{cases}$$

Решая систему, получим значения коэффициентов:

$$a \approx 0.0178$$
  
 $b \approx 0.785$ 

Проверим правильность выбора линейной модели. Для этого вычислим значения аппроксимирующей финкции  $P_1(x) = 0.0178x + 0.785$ 

№ п.п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	0	0.4	8.0	1.2	1.6	2	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
y	0	0.448	0.882	1.241	1.42	1.366	1.155	0.907	0.69	0.522	0.399
$P_1(x) = ax + b$	0.785	0.79212	0.79924	0.80636	0.81348	0.8206	0.82772	0.83484	0.84196	0.84908	0.8562
$\varepsilon_i$	-0.785	-0.34412	0.08276	0.43464	0.60652	0.5454	0.32728	0.07216	-0.15196	-0.32708	-0.4572

Определим меру отклонения  $S = \sum_{i=1}^n {\varepsilon_i}^2 = 2.047$ 

Среднеквадратичное отклонение 
$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - y_i)^2}{n}} = 0.4314$$

## + Квадратичное приближения:

Для определения вида зависимости. Выбираем многочлен второй степени и строим линейную модель  $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 

Сумма квадратов отклонений запишется следующим образом:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - y_i)^2 \to min$$

Вычислим:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 22 
 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 193,6 
 \sum_{i=1}^{n} y_i = 9,03 
 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = 45,5008$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 61,6 
 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 648,5248 
 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 18,3728$$

Получим систему линейных управнений, решив которую, определим значения коэффициентов эмпирической формулы:

$$\begin{cases} 11a_0 + 22a_1 + 61,6a_2 = 9,03 \\ 22a_0 + 61,6a_1 + 193,6a_2 = 18,3728 \\ 61,6a_0 + 193,6a_1 + 648,5248a_2 = 45,5008 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_0 = 0.095 \\ a_1 = 1.168 \\ a_2 = -0.288 \end{cases}$$

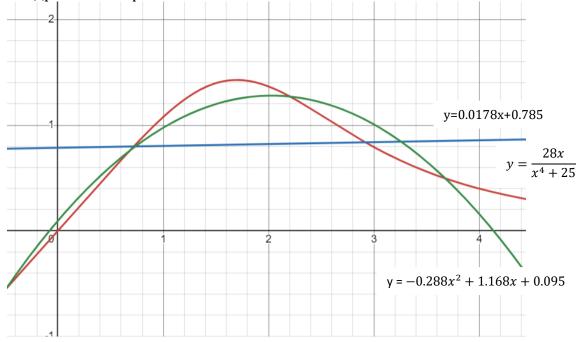
Проверим правильность выбора линейной модели. Для этого вычислим значения аппроксимирующей финкции  $P_2(x) = -0.288x^2 + 1.168x + 0.095$ 

№ п.п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
y	0	0.448	0.882	1.241	1.42	1.366	1.155	0.907	0.69	0.522	0.399
$P_2(x)=$											
$a_0 + a_1 x$											
$+ a_2 x^2$	0.095	0.51612	0.84508	1.08188	1.22652	1.279	1.23932	1.10748	0.88348	0.56732	0.159
$\varepsilon_i$	-0.095	-0.06812	0.03692	0.15912	0.19348	0.087	-0.08432	-0.20048	-0.19348	-0.04532	0.24

Определим меру отклонения  $S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = 0.229$ 

Среднеквадратичное отклонение 
$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - y_i)^2}{n}} = 0.1445$$

- Выбрать наилучшее приближение Наилучшее приближение: Квадратичное приближения
- Построить графики заданной функции, а также полученные линейное и квадратичное приближения



# 5. Листинг программы

Main.py

```
from approximation import *

def main():
    approximation()

if __name__ == "__main__":
    main()
```

#### approximation.py

```
from valida input import inpit pairs selection,
from output import output data
from sympy import symbols, Eq, solve
def approximation():
   pairs = inpit pairs selection()
   linear answer = linear approximation(pairs)
   sqr answer = sqr approximation(pairs)
   cubic answer = cubic approximation(pairs)
   log answer = log approximation(pairs)
   exp answer = exp approximation(pairs)
   gradual answer = gradual approximation(pairs)
   answers = []
       answers.append(linear answer)
        answers.append(sqr answer)
       answers.append(cubic answer)
       answers.append(log answer)
       answers.append(exp answer)
       answers.append(gradual answer)
```

```
output data(
       pairs,
       answers,
       linear answer,
       sqr answer,
       log answer,
def linear approximation(pairs):
       for pair in pairs:
            x = pair[0]
           y = pair[1]
       x \text{ svg} = s x / len(pairs)
        y svg = s y / len(pairs)
       b = (s y - s x * s xy / s xx) / (len(pairs) - s x * s x)
        compare = []
       compare sqr = 0
        for pair in pairs:
            fi.append(temp)
            e = temp - pair[1]
            temp2 = e / pair[1]
            pi.append(temp2)
            compare.append(e)
           compare sqr += e * e
        tmp bottom left = 0
        for pair in pairs:
            tmp bottom left += (pair[0] - x svg) ** 2
            tmp bottom right += (pair[1] - y svg) ** 2
```

```
S2 = (compare sqr / len(pairs)) ** 0.5
       return [S2, compare sqr, f''P1(x) = \{a\}x + \{b\}'', fi,
compare, pirson, pi, a, b]
def sqr approximation(pairs):
        for pair in pairs:
            x = pair[0]
            y = pair[1]
        eq3 = Eq(s xx * x + s xxx * y + s xxxx * z, s xxy)
        solution = solve((eq1, eq2, eq3), (x, y, z))
        a1 = try to convert to int(solution[y])
        fi = []
        compare = []
        compare sqr = 0
        for pair in pairs:
            fi.append(temp)
            temp2 = e / pair[1]
            pi.append(temp2)
            compare.append(e)
            compare sqr += e * e
        S2 = (compare sqr / len(pairs)) ** 0.5
```

```
S2,
            compare,
            a1,
            a2,
def cubic approximation(pairs):
   s xx = 0
   s xyy = 0
   s xxyy = 0
   for pair in pairs:
        x = pair[0]
       y = pair[1]
       s yy += y * y
        s xyy += x * y * y
        s xxyy += x * x * y * y
    x, y, z, w = symbols("x y z w")
   eq1 = Eq(len(pairs) * w + s x * x + s xx * y + s xxx * z,
s y)
   eq3 = Eq(s xx * w + s xxx * x + s xxxx * y + s xxyy * z,
    eq4 = Eq(s xxx * w + s xxxx * x + s xxyy * y + s xyy * z,
s xxx)
    solution = solve((eq1, eq2, eq3, eq4), (w, x, y, z))
```

```
a3 = try to convert to int(solution[w])
    a1 = try to convert to int(solution[y])
    a0 = try to convert to int(solution[z])
    fi = []
    compare = []
    compare sqr = 0
    for pair in pairs:
        temp = a3 + a2 * pair[0] + a1 * pair[0] ** 2 + a0 *
pair[0] ** 3
        fi.append(temp)
        e = temp - pair[1]
        compare.append(e)
        compare sqr += e * e
    S2 = (compare sqr / len(pairs)) ** 0.5
        compare sqr,
        fi,
        compare,
        a0,
        a1,
        a2,
        a3,
def log approximation(pairs):
            x = math.log(pair[0])
            y = pair[1]
        y svg = s y / len(pairs)
        b = (s y - s x * s xy / s xx) / (len(pairs) - s x * s x)
        compare = []
```

```
compare sqr = 0
        for pair in pairs:
            temp = a * math.log(pair[0]) + b
            fi.append(temp)
            e = temp - pair[1]
            temp2 = e / pair[1]
            pi.append(temp2)
            compare.append(e)
            compare sqr += e * e
        tmp bottom left = 0
        tmp bottom right = 0
        for pair in pairs:
            tmp top += (math.log(pair[0]) - x svg) * (pair[1] -
y svg)
            tmp bottom left += (math.log(pair[0]) - x svg) ** 2
            tmp bottom right += (pair[1] - y svg) ** 2
        pirson = tmp top / (tmp bottom left * tmp bottom right)
        S2 = (compare sqr / len(pairs)) ** 0.5
            S2,
            compare sqr,
            fi,
            compare,
def exp approximation(pairs):
        s xx = 0
            x = pair[0]
            y = math.log(pair[1])
        x svg = s x / len(pairs)
        b = (s y - s x * s xy / s xx) / (len(pairs) - s x * s x)
```

```
s xx)
        compare = []
        compare sqr = 0
        for pair in pairs:
            temp = a * pair[0] + b
            fi.append(temp)
            e = temp - math.log(pair[1])
            temp2 = e / math.log(pair[1])
            pi.append(temp2)
            compare.append(e)
            compare sqr += e * e
        tmp bottom left = 0
        for pair in pairs:
            tmp top += (pair[0] - x svg) * (math.log(pair[1]) -
y svg)
            tmp bottom left += (pair[0] - x svg) ** 2
            tmp bottom right += (math.log(pair[1]) - y svg) ** 2
        pirson = tmp top / (tmp bottom left * tmp bottom right)
        S2 = (compare sqr / len(pairs)) ** 0.5
            compare sqr,
            compare,
            pirson,
    except ZeroDivisionError:
def gradual approximation(pairs):
        for pair in pairs:
```

```
x = math.log(pair[0])
           y = math.log(pair[1])
       x_svg = s_x / len(pairs)
       y svg = s y / len(pairs)
       b = (s y - s x * s xy / s xx) / (len(pairs) - s x * s x)
/ s xx)
       compare = []
       compare sqr = 0
       for pair in pairs:
           temp = a * math.log(pair[0]) + b
           fi.append(temp)
           e = temp - math.log(pair[1])
           temp2 = e / math.log(pair[1])
           pi.append(temp2)
           compare.append(e)
           compare sqr += e * e
       tmp top = 0
       tmp bottom left = 0
       tmp bottom right = 0
       for pair in pairs:
            tmp\_top += (math.log(pair[0]) - x svg) *
(math.log(pair[1]) - y svg)
            tmp bottom left += (math.log(pair[0]) - x svg) ** 2
            tmp bottom right += (math.log(pair[1]) - y svg) ** 2
       pirson = tmp top / (tmp bottom left * tmp_bottom_right)
       S2 = (compare sqr / len(pairs)) ** 0.5
           S2,
            compare sqr,
            fi,
           compare,
           pirson,
   except ZeroDivisionError:
```

#### output.py

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def output data (
   pairs,
   answers,
   sqr answer,
   log answer,
   exp answer,
   gradual answer,
):
   input variant = choose output format()
    switch command.get(input variant, exit)(
        answers,
        sqr answer,
        log answer,
        exp answer,
        gradual answer,
       pairs,
        sqr answer,
        log answer,
        exp answer,
def choose output format():
            input variant = int(input("1) In console\n2) In
```

```
def output in console(
   answers,
   cubic answer,
   log answer,
   exp answer,
):
   print(find best method(answers))
       print(print log(log answer))
def output in file(
   answers,
   sqr answer,
   cubic answer,
   log answer,
   exp answer,
```

```
file path = os.path.join("./lb4/solutions", filename)
        if not os.path.exists("./lb4/solutions"):
            os.makedirs("./lb4/solutions")
        otput best = find best method(answers)
        with open(file path, "w") as file:
                file.write(print sqr(sqr answer))
                file.write("\n")
                file.write(print qubic(cubic answer))
                file.write("\n")
                file.write(print log(log answer))
                file.write("\n")
                file.write("\n")
                file.write(print gradual(gradual answer))
                file.write("\n")
written to the file: {file path}"
   except FileNotFoundError:
def print linear(answers):
   fi = "fi ="
        fi += f" {num},"
```

```
for num in answers[4]:
   for num in answers[6]:
   pirson = answers[5]
[answers[1]] \nS2 = {answers[0]} \n{ei} \n{pi} \n''
def print sqr(answers):
   fi = "fi ="
   for num in answers[3]:
   return f"Quadratic\n{answers[2]}\n{fi}\nS = {answers[1]}\nS2
 {answers[0]}\n{ei}\n{pi}\n'
def print qubic(answers):
        fi += f" {num},"
{answers[0]}\n{ei}\n\n"
def print log(answers):
   fi = "fi ="
   for num in answers[3]:
       ei += f" {num},"
   pirson = answers[5]
{pirson} \ = {answers[1]} \ nS2 = {answers[0]} \ n{ei} \ n'n'
def print exp(answers):
   fi = "fi ="
```

```
for num in answers[3]:
       ei += f" {num},"
   pi = "Pi ="
   for num in answers[6]:
   pirson = answers[5]
def print gradual(answers):
   fi = "fi ="
   for num in answers[4]:
   for num in answers[6]:
def find best method(answers):
   min = 999999
   for answer in answers:
            if answer[0] < min:</pre>
               min = answer[0]
                return f"Best quation is {answer[2]} with S2 =
{answer[0]}\n"
def draw grapth(
   pairs,
   sqr answer,
   log answer,
```

```
exp answer,
):
   min = 999999
   max = -999999
   x values dots = [pair[0] for pair in pairs]
   y_values_dots = [pair[1] for pair in pairs]
   for pair in pairs:
       if pair[0] <= min:</pre>
           min = pair[0]
       if pair[0] >= max:
           max = pair[0]
   x = np.linspace(min - min * 0.3, max + max * 0.3, 400)
       y values linear = linear answer[7] * x +
       y values sqr = sqr answer[6] * x**2 + sqr answer[7] * x
+ sqr answer[8]
       plt.plot(x, y values sqr, label=sqr answer[2],
           cubic answer[5] * x**3
           + cubic answer[6] * x**2
           + cubic answer[7] * x
           + cubic answer[8]
       y values log = log answer[7] * np.log(x) + log answer[8]
       plt.plot(x, y values log, label=log answer[2],
       y values exp = exp answer[7] * x + np.log(exp answer[8])
       plt.plot(x, y values exp, label=exp answer[2],
```

```
try:
    y_values_grad = gradual_answer[7] * np.log(x) +
np.log(gradual_answer[8])
    plt.plot(x, y_values_grad, label=gradual_answer[2],
color="000")
    except TypeError:
        pass

    plt.scatter(x_values_dots, y_values_dots, label="Touku",
color="red", linewidths=2)
    # Добавим заголовок и метки осей
    plt.title("График функций")
    plt.xlabel("x")
    plt.ylabel("f(x)")

# Добавим сетку
    plt.grid(True)

# Отобразим линии вспомогательных осей
    plt.axhline(0, color="black", linewidth=0.5)
    plt.axvline(0, color="black", linewidth=0.5)

# Добавим легенду
    plt.legend()

# Отобразим график
    plt.show()
```

#### valida\_input.py

```
return pairs
def pairs input hand():
   pairs = []
            temp = (
                .strip()
                .replace(",", ".")
            elif temp == ["end"] and i < 9:</pre>
            x, y = map(float, temp)
        except ValueError:
        pair = [x, y]
        pairs.append(pair)
    return pairs
def pairs input file():
   current working directory = os.path.dirname( file )
    file path = os.path.join(current working directory,
file name)
    with open (file path, "r", encoding="utf-8") as file:
        lines = file.readlines()
    if len(lines) >= 8 and len(lines) <= 12:</pre>
        pairs = []
                var = line.replace(",", ".").split(" ")
                y = try to convert to int(y)
```

```
pair = [x, y]
                pairs.append(pair)
                exit()
       exit()
   for pair in pairs:
       print(f"pair[{pair[0]}, {pair[1]}]")
   return pairs
def try to convert to int(number):
        if number float.is integer():
            return int(number float)
           return number float
   except ValueError:
        return float(number)
```

## 6. Результаты выполнения программы

## 7. Выводы

В результате выполнения данной лабораторной работой мы познакомились с аппроксимацией функции методом наименьших квадратов и реализовали их на языке программирования Python, закрепив знания.

Аппроксимация может потребоваться, например, в случае, если из эксперимента известны лишь некоторые значения функции и требуется найти неизвестное. Или же, если изначальная функция слишком сложна для регулярного использования.

Можно выделить следующие достоинства метода: расчеты довольны просты необходимо лишь найти коэффициенты, полученная функция также проста, разнообразие возможных аппроксимирующих функций.

Основным недостатком МНК является чувствительность оценок к резким выбросам, которые встречаются в исходных данных.