

Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Дисциплина «Вычислительная математика»

Отчёт

Лабораторная работа №2

Вариант 10

Выполнил:

Коломиец Никита Сергеевич

P3208

Преподаватель:

Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург, 2024 г

Цель работы

Научиться решать нелинейные уравнения и системы нелинейных уравнений различными способами. Написать программу, которая делает это относительно функций, начальных приближений, количества итераций и точности вычисления. Вывести соответствующие графики.

Описание используемых методов

Метод Ньютона (касательных)

Идея метода: функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ заменяется касательной и в качестве приближенного значения корня $x^* = x_n$ принимается точка пересечения касательной с осью абсцисс.

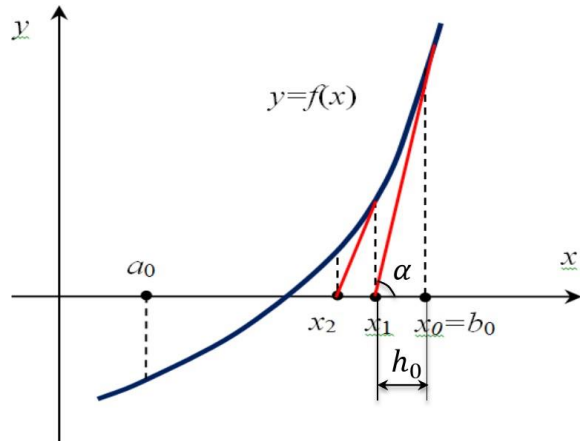
$$x_1 = x_0 - h_0$$

$$h_0 = \frac{f(x_0)}{\tan \alpha} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Рабочая формула метода:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$



Критерий окончания итерационного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad \left| \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(x_n)| \leq \varepsilon$$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Метод половинного деления

Идея метода: начальный интервал изоляции корня делим пополам, получаем начальное приближение к корню:

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

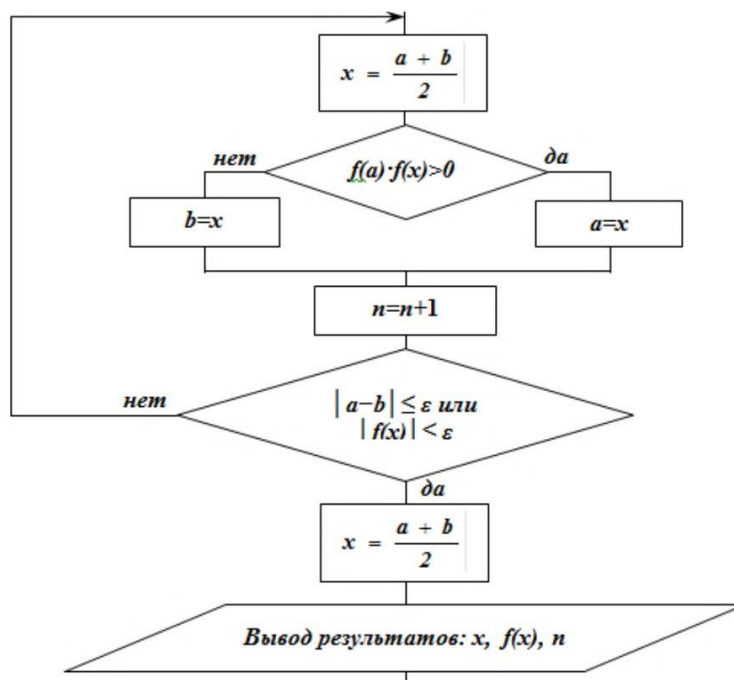
Вычисляем $f(x_0)$. В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки: $[a_0, x_0]$ либо $[x_0, b_0]$. Другую половину отрезка $[a_0, b_0]$, на которой функция $f(x)$ знак не меняет, отбрасываем. Новый интервал вновь делим пополам, получаем очередное приближение к корню: $x_1 = (a_1 + b_1)/2$. и т.д.

Рабочая формула метода: $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$

Критерий окончания итерационного процесса: $|b_n - a_n| \leq \varepsilon$ или $|f(x_n)| \leq \varepsilon$.

Приближенное значение корня: $x^* = \frac{a_n + b_n}{2}$ или $x^* = a_n$ или $x^* = b_n$

Блок-схема метода половинного деления



Метод простой итерации

Уравнение $f(x) = 0$ приведем к эквивалентному виду: $x = \varphi(x)$, выразив x из исходного уравнения.

Зная начальное приближение: $x_0 \in [a, b]$, найдем очередные приближения:

$$x_1 = \varphi(x_0) \rightarrow x_2 = \varphi(x_1) \dots$$

Рабочая формула метода: $x_{i+1} = \varphi(x_i)$

Условия сходимости метода простой итерации определяются следующей теоремой.

Теорема. Если на отрезке локализации $[a, b]$ функция $\varphi(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема и удовлетворяет неравенству:

$|\varphi'(x)| < q$, где $0 \leq q < 1$, то независимо от выбора начального приближения $x_0 \in [a, b]$ итерационная последовательность $\{x_n\}$ метода будет сходиться к корню уравнения.

Достаточное условие сходимости метода:

$|\varphi'(x)| \leq q < 1$, где q – некоторая константа (коэффициент Липшица или коэффициент сжатия)

Чем меньше q , тем выше скорость сходимости.

Критерий окончания итерационного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \text{ (при } 0 < q \leq 0,5 \text{)}$$

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q} \varepsilon \text{ (при } 0,5 < q < 1 \text{)}$$

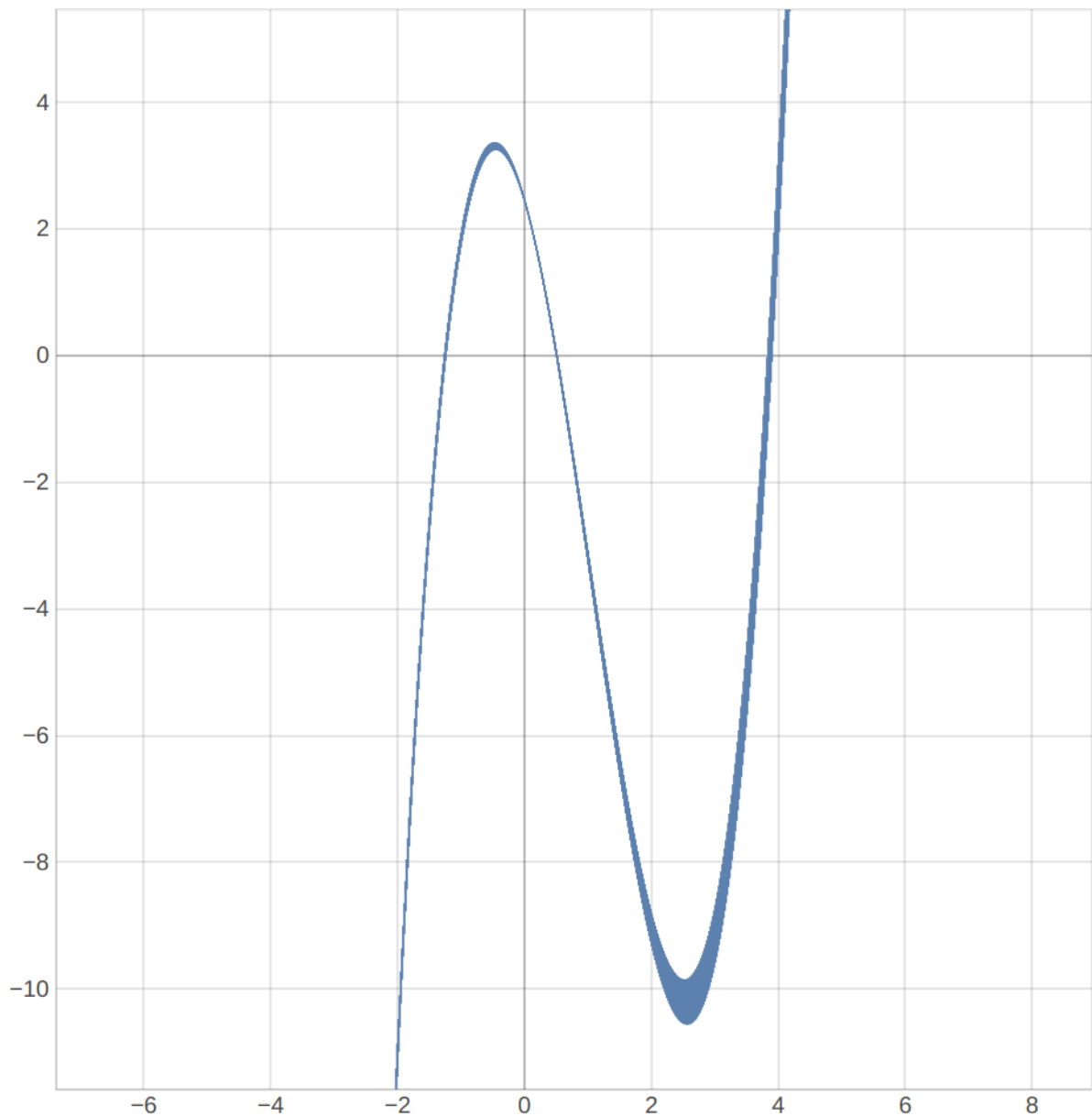
Можно ограничиться: $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$

Первая часть

Функция

$$x^3 - 3,125x^2 - 3,5x + 2,458$$

График функции



Корни

$$x_1 = -1.25$$

$$x_2 = 0.509$$

$$x_3 = 3.866$$

Поиск крайнего левого корня методом Ньютона

X:

-1.2497

f(X):

-0.0001

Количество итераций:

3

Таблица:

x_i	f(x_i)	f'(x_i)	x_{i+1}	x_{i+1} - x_i
-1.0000	1.8330	5.7500	-1.3188	0.3188
-1.3188	-0.6548	9.9600	-1.2530	0.0657
-1.2530	-0.0303	9.0418	-1.2497	0.0034

Поиск среднего корня методом половинного деления

X:

0.5078

f(X):

0.0058

Количество итераций:

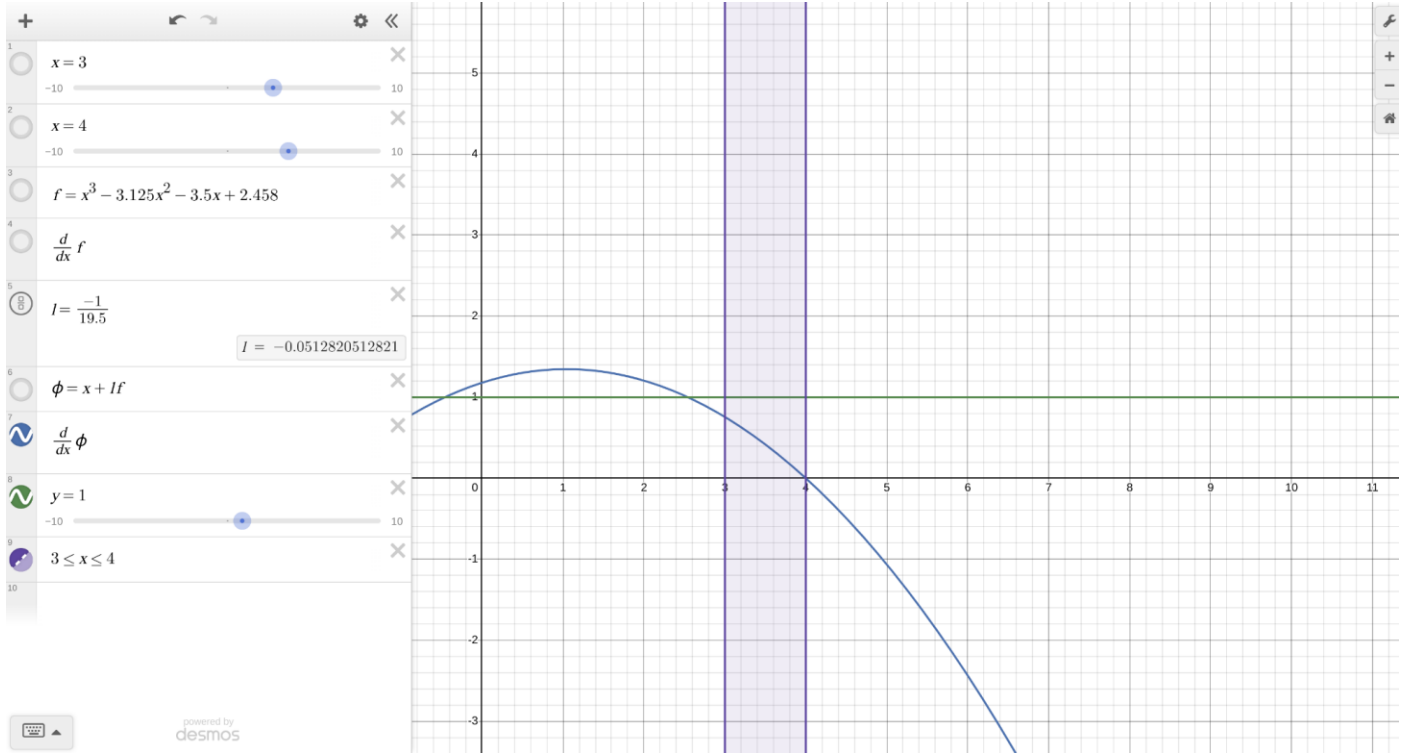
7

Таблица:

a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	a - b
0.0000	1.0000	0.5000	2.4580	-3.1670	0.0518	1.0000
0.5000	1.0000	0.7500	0.0518	-3.1670	-1.5029	0.5000
0.5000	0.7500	0.6250	0.0518	-1.5029	-0.7061	0.2500
0.5000	0.6250	0.5625	0.0518	-0.7061	-0.3215	0.1250
0.5000	0.5625	0.5313	0.0518	-0.3215	-0.1334	0.0625
0.5000	0.5313	0.5156	0.0518	-0.1334	-0.0404	0.0313
0.5000	0.5156	0.5078	0.0518	-0.0404	0.0058	0.0156

Поиск крайнего правого корня методом простых итераций

Проверка сходимости



Решение

X:

3.8659

f(X):

-0.0000

Количество итераций:

8

Таблица:

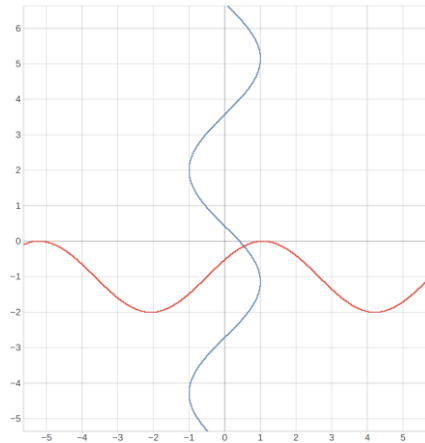
x_i	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	$ x_{i+1} - x_i $
3.0000	3.4701	-5.5317	0.4701
3.4701	3.7538	-1.8201	0.2837
3.7538	3.8471	-0.3192	0.0933
3.8471	3.8635	-0.0410	0.0164
3.8635	3.8656	-0.0049	0.0021
3.8656	3.8659	-0.0005	0.0003
3.8659	3.8659	-0.0000	0.0000

Вторая часть

Система

$$\begin{cases} \sin(x + 0,5) - y = 1 \\ \cos(y - 2) + x = 0 \end{cases}$$

График



Проверка условия сходимости метода простых итераций

$$\begin{cases} \sin(x + 0.5) - y = 1 \\ \cos(y - 2) + x = 0 \end{cases}$$

$$x \in (0; 1)$$

$$y \in (-1; 0)$$

$$\begin{cases} x = -\cos(y - 2) & \leftarrow \varphi_1(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sin(x + 0.5) - 1 & \leftarrow \varphi_2(x) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} |\varphi_1'(y)| &= |\sin(y - 2)| \leq 1 \\ |\varphi_2'(x)| &= |\cos(x + 0.5)| \leq 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{условие} \\ \text{сх-ти} \\ \text{выполнено} \end{array}$$

Поиск решения методом простых итераций

(X, Y):

(0.5477, -0.1408)

Количество итераций:

12

Векторы значений X и Y:

X	Y
-0.5403	-0.0025
0.4184	-1.0403
0.9949	-0.2054
0.5928	-0.0029
0.4188	-0.1121
0.5152	-0.2051
0.5927	-0.1504
0.5477	-0.1121
0.5153	-0.1337
0.5337	-0.1504
0.5477	-0.1408
0.5397	-0.1337

Невязки:

(0.0080, 0.0071)

Код программы

https://github.com/nkolomiika/Computational-Math-2024/tree/main/P3208/Kolomiec_367301/lab2

Вывод

В результате выполнения данной лабораторной работы были изучены методы для решения нелинейных уравнений и систем их них.

Для решения уравнений были использованы метод Ньютона, половинного деления и простых итераций. Для решения систем нелинейных уравнений был использован метод простых итераций.

Также была написана программа, реализующая все методы решений.