Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№3**
«Численное интегрирование»

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **5**

Преподаватель:
Машина Екатерина Алексеевна

Выполнил:
Конкин Вадим Вадимович
Группа: P3210

Санкт-Петербург, 2024 г.

Цель работы: найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

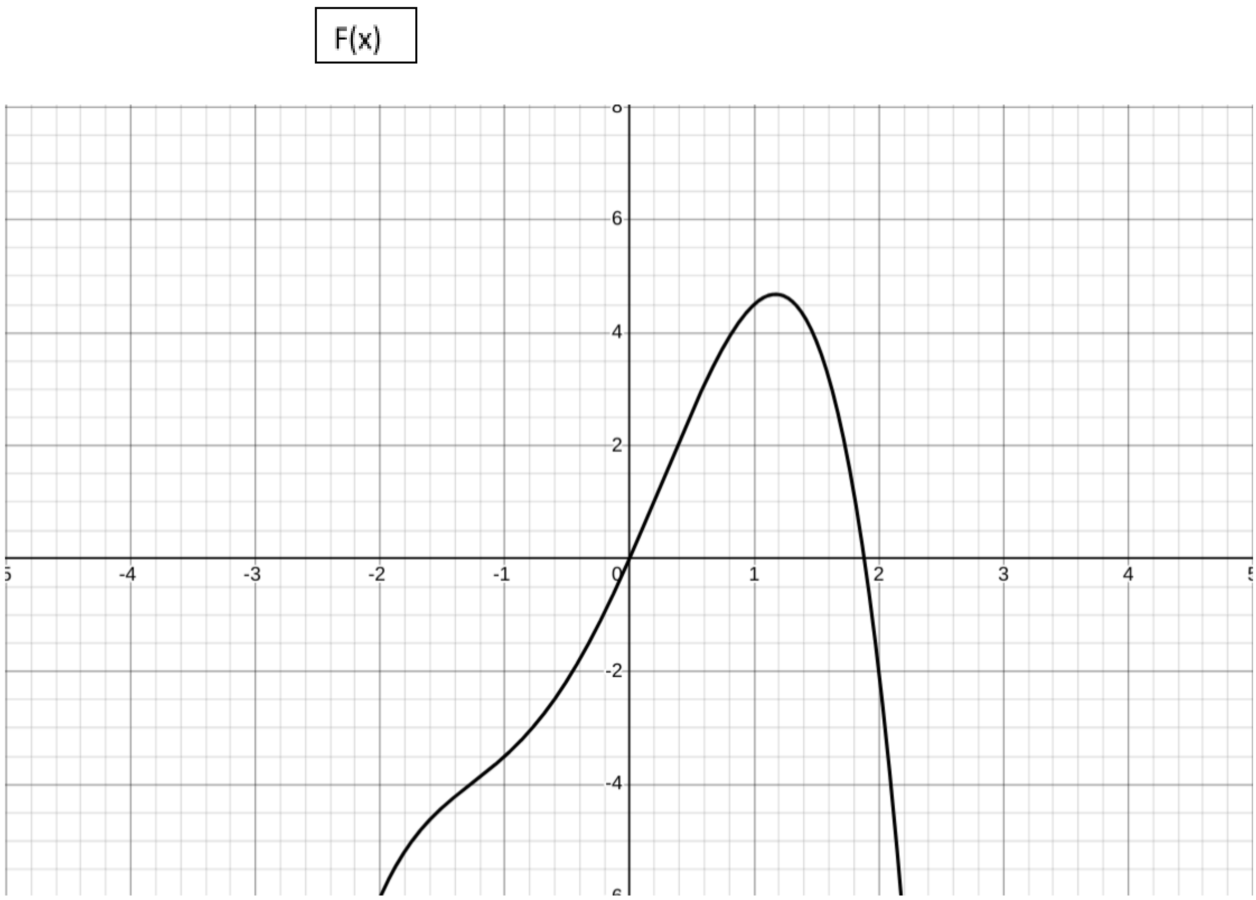
1. Вычислительная реализация задачи

1. **Вычислить интеграл**, приведенный в таблице 1, **точно:**

$$\int_2^4 \left(-2x^3 - 3x^2 + x + 5\right)dx$$

$$F(x) = -\frac{2x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + 0.5x^2 + 5x;\ F(2) = -4;\ F(4) = -164$$

$$I_{точн} = F(x) = F(4) - F(2) = -160$$



2. **Вычислить интеграл по формуле Ньютона–Котеса** при $n = 6$:

$$h = \frac{b-a}{6} = \frac{(4)-(2)}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_6^0 f(a) + c_6^1 f(a + h) + c_6^2 f(a + 2h) + c_6^3 f(a + 3h) + c_6^4 f(a + 4h) + c_6^5 f(a + 5h) + c$$

$$I_{cotes} = ((4) - (2)) \times \left(\frac{41}{840} f(2) + \frac{216}{840} f\left(\frac{7}{3}\right) + \frac{27}{840} f\left(\frac{8}{3}\right) + \frac{272}{840} f(3) + \frac{27}{840} f\left(\frac{10}{3}\right) + \frac{216}{840} f\left(\frac{11}{3}\right) + \right.$$

3. **Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона** при $n = 10$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{10} = \frac{1}{5}$$

- **Метод средних прямоугольников**:

$$I_{\text{ср.прям}} = h \sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}} = h \bullet \left(f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + f\left(a + \frac{5h}{2}\right) + f\left(a + \frac{7h}{2}\right) + f\left(a + \frac{9h}{2}\right.\right.$$

$$= 0.2(f(2 + 0.1) + f(2 + 0.3) + f(2 + 0.5) + f(2 + 0.7) + f(2 + 0.9) + f(2 + 1.1) + f(2$$

- **Метод трапеций**:

$$I_{\text{трапеция}} = h \bullet \left(\frac{y_0+y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

$$I_{\text{трапеция}} = 0.2\left(\frac{f(2)+f(4)}{2} + f(2 + 0.2) + f(2 + 0.4) + f(2 + 0.6) + f(2 + 0.8) + f(2 + 1\right.$$

- **Метод Симпсона**:

$$I_{\text{Симпсона}} = \frac{h}{3} \bullet \left(y_0 + 4\sum_{i=1}^{n-1} y_{\text{нечёт}} + 2\sum_{i=2}^{n-2} y_{\text{чёт}} + y_n\right)$$

$$I_{\text{Симпсона}} = \frac{0.2}{3}(f(2) + 4 * (f(2 + 0.2) + f(2 + 0.6) + f(2 + 1) + f(2 + 1.4) + f(2 + 1.8)) +$$

4. **Сравнить результаты с точным значением интеграла:**

Точное значение интеграла на интервале вычислено как -160

1. Для метода **Ньютона–Котеса** при $n = 6$: $I_{\text{точн}} = I_{cotes} =- 160$, **значения совпадают**.

$$R = \left|I_{\text{точн}} - I_{cotes}\right| = 0$$

2. Для метода **средних прямоугольников** при $n = 10$: $I_{\text{ср.прям}} =- 159.86$.

$$R = \left|I_{\text{точн}} - I_{\text{ср.прям}}\right| = |- 160 + 159.86| = 0.14$$

3. Для метода **трапеций** при $n = 10$: $I_{\text{трапеция}} =- 160.28$.

$$R = \left|I_{\text{точн}} - I_{\text{трапеция}}\right| = |- 160 + 160.28| = 0.28$$

4. Для метода **Симпсона** при $n = 10$: $I_{\text{точн}} = I_{\text{Симпсона}} =- 160$, **значения совпадают**.

$$R = \left|I_{\text{точн}} - I_{cotes}\right| = 0$$

5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.

1. Для метода **Ньютона–Котеса**: $R = 0 \rightarrow$ **погрешности нет.**
2. Для метода **средних прямоугольников**: $\Delta = \frac{0.14}{160} \approx 0.088\%$
3. Для метода **трапеций**: $\Delta = \frac{0.28}{160} \approx 0.175\%$
4. Для метода **Симпсона**: $R = 0 \rightarrow$ **погрешности нет.**

Как видно из результатов, все методы дали относительно малую погрешность, особенно при использовании формулы Ньютона–Котеса и Симпсона. Наилучший результат был получен при использовании формулы Ньютона–Котеса с $n = 6$ и формулы Симпсона с $n = 10$, при которых значения интеграла полностью совпали.

2. Программная реализация задачи

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены численные методы интегрирования с использованием Python. В результате работы были рассмотрены различные численные методы вычисления определенных интегралов: метод прямоугольников (левых, правых, средних), метод трапеций, метод Ньютона-Котеса и метод Симпсона.

Была реализована программа, позволяющая выбрать одну из предложенных функций, задать пределы интегрирования, точность и начальное значение числа разбиения интервала интегрирования. Написав реализации всех трех методов решения интегралов, можно сделать вывод, что самым точным и быстрым является метод Симпсона.

В ходе вычислительной реализации задачи были рассчитаны интегралы различными методами и проведено сравнение результатов с точными значениями интегралов.