



И нформатика



Учебный год 2022/2023.



- Кандидат технических наук.
- Стаж преподавания — 11 лет.
- Доцент факультета ПИиКТ.
- Ответственный за аспирантуру по факультету ПИиКТ.
- Стаж в IT-индустрии — 17 лет.
- Lead RPA Engineer в CustomerTimes.
- Область научных интересов: RPA, речевые технологии, новые технологии в IT-сфере.





Будет отдельная ссылка на Yandex.Форму.

- ФИО.
- Группа.
- Электронный адрес (почта).
- Цель поступления на вашу образовательную программу (специальность).
- Ваши ожидания от курса «Информатика».
- Какие языки программирования вы изучали в школе?
- Какие языки программирования вы изучали самостоятельно?
- Изучали ли вы ранее систему компьютерной вёрстки TeX и системы счисления Бергмана, Цекендорфа и др.?



Лекции (раз в две недели):

- Посещать обязательно (почти).
- При себе иметь ручку.

Лабораторные занятия (раз в две недели):

- Выполняются дома, защищаются в университете.*
- Выполняются строго последовательно.
- При сильно несвоевременной сдаче – штраф.

Контроль усвоения знаний:

- Аннотации (желательно по тематике последней лекции).
- 2 рубежных тестирования в ЦДО.
- Экзамен.
- Поощрение неординарных решений.
- Бонусы за обнаруженные ошибки.





Диапазон баллов	Оценка
[0; 60)	2F
[60;67]	3E
(67;74]	3D
(74;83]	4C
(83;90]	4B
(90;100]	5A

Важно: личностные качества составляют 10% от оценки!

- Основы теории информации
- Представление чисел в ЭВМ
- Основы языка Python для обработки данных
- Основы форматов и языков разметки документов
- Основы регулярных выражений
- Полезные навыки работы с офисными пакетами
- Работа с системами вёрстки текста
- Программное обеспечение профессионального программиста



Требования к слушателям: освоенный школьный курс информатики.



Полезные примеры:

- <https://missing.csail.mit.edu/about/>
- <https://compscicenter.ru/courses/practical-minimum/2020-autumn/>



Онлайн-курс «Информатика для втузов»

<https://openedu.ru/course/ITMOUniversity/COMTEC/>

Черновик методического пособия «Информатика»

https://vk.com/doc-31201840_566998093

Старое методическое пособие с лабораторными работами

<https://books.ifmo.ru/file/pdf/2464.pdf>

Телеграм-канал:

https://t.me/balakshin_students



Лабораторная работа №1 (Перевод чисел между различными системами счисления) может быть засчитана из онлайн-курса с понижающим коэффициентом 0,6.

Лабораторная работа №2 (Основы арифметического кодирования) может быть засчитана из онлайн-курса с понижающим коэффициентом 0,8.

Лабораторная работа №6 (Вёрстка документов в системе TeX. Подготовка шаблонов для формирования отчётов, курсовых и дипломных работ) может быть засчитана из онлайн-курса с понижающим коэффициентом 0,6.



Список IT-ориентированных новостных ресурсов

3dnews.ru, 4pda.ru, android.com, betanews.com, blogs.intel.com, cam.ac.uk, cnews.ru, computerworld.com, dailymtechinfo.org, datbase.ru, discovery.com, extremetech.com, gizmodo.com, habrahabr.ru, hi-news.ru, hitech.vesti.ru, iksmedia.ru, it-news-world.ru, it-top.ru, it-world.ru, it.tut.by, itc.ua, itnews.com.ua, itupdate.ru, itworld.com, mobiledevice.ru, news-it.net, news.softpedia.com, novostiit.net, osp.ru, overclockers.ru, research.ibm.com, sciencedaily.com, sciencemag.org, singularityhub.com, thehackernews.com, theverge.com, thg.ru, usenix.org, wired.co.uk ...



Информатика – дисциплина, изучающая свойства и структуру информации, закономерности ее создания, преобразования, накопления, передачи и использования.

Англ: informatics = information technology + computer science + information theory

Важные даты

- 1956 – появление термина «информатика» (нем. Informatik, Штейнбух)
- 1968 – первое упоминание в СССР (информология, Харкевич)
- 197X – информатика стала отдельной наукой
- 4 декабря – день российской информатики



Международный стандарт ISO/IEC 2382:2015

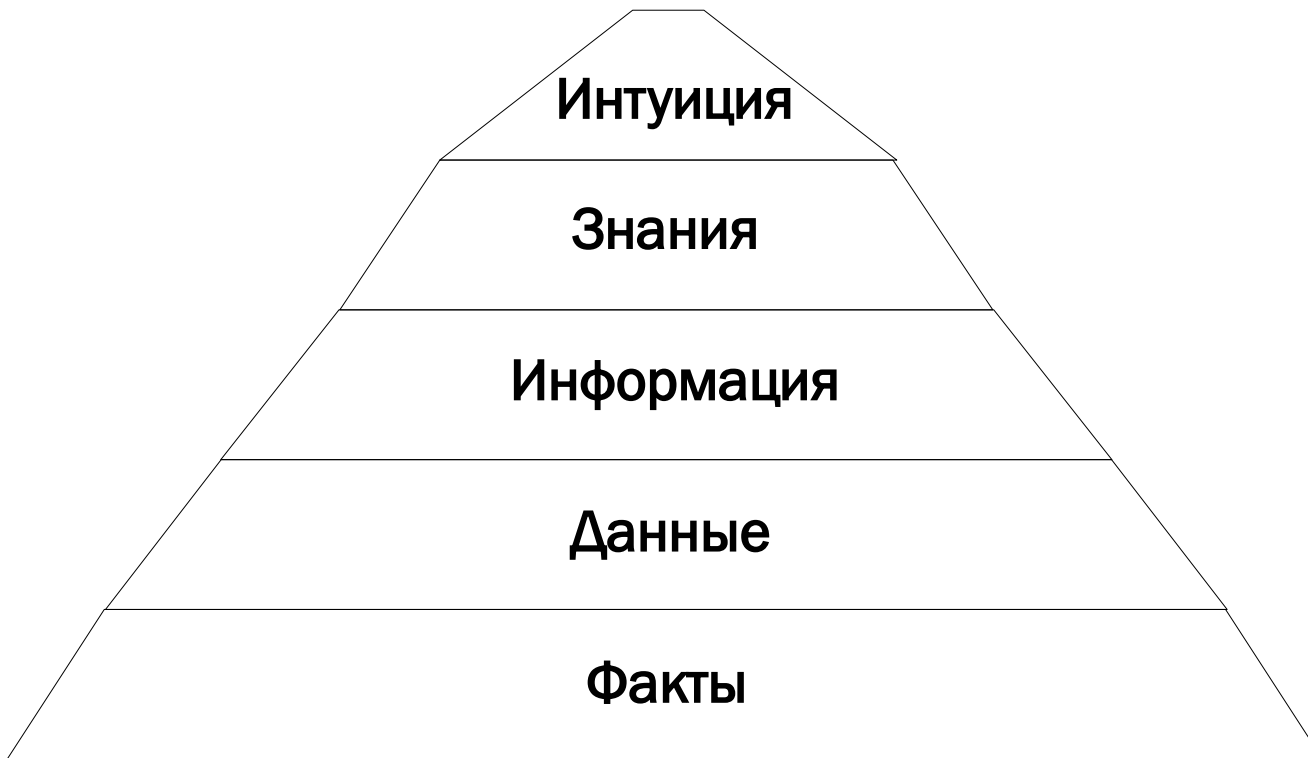
«Information technology – Vocabulary» (вольный пересказ):

Информация – знания относительно фактов, событий, вещей, идей и понятий.

Данные – форма представления информации в виде, пригодном для передачи или обработки.

- Что есть предмет информатики: информация или данные?
- Как измерить информацию? Как измерить данные?
Пример: «Байкал — самое глубокое озеро Земли».

Терминология: информация и данные (2)





Количество информации \equiv информационная энтропия – это численная мера непредсказуемости информации. Количество информации в некотором объекте определяется непредсказуемостью состояния, в котором находится этот объект.

Пусть $i(s)$ — функция для измерения количеств информации в объекте s , состоящем из n независимых частей s_k , где k изменяется от 1 до n . Тогда **свойства меры количества информации $i(s)$** таковы:

- Неотрицательность: $i(s) \geq 0$.
- Принцип предопределённости: если об объекте уже все известно, то $i(s) = 0$.
- Аддитивность: $i(s) = \sum i(s_k)$ по всем k .
- Монотонность: $i(s)$ монотонна при монотонном изменении вероятностей.



- **Классическое определение** (существует только n равновозможных исходов эксперимента, из них m исходов приведут к событию A)

$$p(A) = m/n$$

- **Статистическое определение** (в результате проведённых n экспериментов события A возникло m раз)

$$p(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

- **Свойства вероятности**

$$0 \leq p(A) \leq 1,$$

сумма вероятностей всех возможных несовместных событий равна 1

Мера количества информации по Хартли



Система S может находиться в одном из N равновероятных состояний. Вероятность каждого из состояний $p = 1/N$. Передадим сообщение о выпавшем состоянии S , используя двоичное сообщение длины d :

$$2^d \geq N \rightarrow d \geq \log_2 N$$

Значит, для однозначного описания системы требуется $\log_2 N$ бит. По определению Хартли, количество информации в системе S равно

$$i_H(s) = \log_x N = -\log_x p.$$



Ральф Хартли
(1880–1970)

Единицы измерения количества информации:

$$i_H = (\text{lb } N \text{ бит} = \text{lb } N \text{ Шн} = \text{lb } N \text{ Sh}) = \log_3 N \text{ трит} = (\lg N \text{ харт} = \lg N \text{ Hart} = \lg N \text{ дит}) = \ln N \text{ нат}$$

Какова этимология названий единиц измерения? Сколько дит содержится в 33 битах?

Ответ 1: (bit \rightarrow binary digit), (dit \rightarrow decimal digit), (Шн \rightarrow Шеннон), (харт \rightarrow Хартли) и т. д.

Ответ 2: т. к. $33 \text{ бит} = \log_2 N$, то $\log_{10} N = x \text{ дит}$, отсюда найдём x через N : $x = \log_{10} 2^{33} \approx 9,9 \text{ дит}$.



Пример 1. Ведущий загадывает число от 1 до 64. Какое количество вопросов типа «да-нет» понадобится, чтобы гарантировано угадать число?

- Первый вопрос: «Загаданное число меньше 32?». Ответ: «Да».
- Второй вопрос: «Загаданное число меньше 16?». Ответ: «Нет».
- ...
- Шестой вопрос (в худшем случае) точно приведёт к верному ответу.
- Значит, в соответствии с мерой Хартли в загадке ведущего содержится ровно $\log_2 64 = 6$ бит непредсказуемости (т. е. информации).

Пример 2. Ведущий держит за спиной ферзя и собирается поставить его на произвольную клетку доски. Насколько непредсказуемо его решение?

- Всего на доске 8×8 клеток, а цвет ферзя может быть белым или чёрным, т. е. всего возможно $8 \times 8 \times 2 = 128$ равновероятных состояний.
- Значит, количество информации по Хартли равно $\log_2 128 = 7$ бит.



Экспериментатор одновременно подбрасывает монету (М) и кидает игральную кость (К).
Какое количество информации содержится в эксперименте (Э)?

Аддитивность:

$$i(\text{Э}) = i(\text{М}) + i(\text{К}) \Rightarrow i(12 \text{ исходов}) = i(2 \text{ исхода}) + i(6 \text{ исходов}): \log_x 12 = \log_x 2 + \log_x 6$$

Неотрицательность:

Функция $\log_x N$ неотрицательно при любом $x > 1$ и $N \geq 1$.

Монотонность:

С увеличением $p(\text{М})$ или $p(\text{К})$ функция $i(\text{Э})$ монотонно возрастает.

Принцип предопределённости:

При наличии всегда только одного исхода (монета и кость с магнитом) количество информации равно нулю: $\log_x 1 + \log_x 1 = 0$.

Мера количества информации по Шеннону



Мера Хартли подходит лишь для систем с равновероятными состояниями. Если состояния системы S не равновероятны, используют меру Шеннона:

$$i(S) = - \sum_{i=1}^N p_i \cdot \log_2 p_i,$$

где N – число состояний системы,
 p_i – вероятность того, что система S находится в состоянии i (сумма всех p_i равна 1).



Клод Шеннон
(1916–2001)

Формула Хартли является частным случаем формулы Шеннона!

Пример 1. Количество информации в акте подбрасывания обычной монеты по формуле Хартли равно $\log_2 2 = 1$ бит. По формуле Шеннона получим то же: $i_{s1} = -0,5 \cdot \log_2 0,5 - 0,5 \cdot \log_2 0,5 = 1$ бит.

Пример 2. При подбрасывании монеты со смещённым центром тяжести количество непредсказуемости становится меньше: $i_{s2} = -0,75 \cdot \log_2 0,75 - 0,25 \cdot \log_2 0,25 \approx 0,8$ бит.



Шулер наугад вытаскивает одну карту из стопки, содержащей 9 известных ему карт: 3 джокера, 3 туза, 1 король, 1 дама и 1 валет. Какое количество информации для шулера содержится в этом событии s ?

Вероятность вытащить $\left\{ \begin{array}{l} \text{джокера} \\ \text{туза} \\ \text{короля} \\ \text{даму} \\ \text{валета} \end{array} \right\}$ равна $\left\{ \begin{array}{l} 3/9 = 1/3 \\ 3/9 = 1/3 \\ 1/9 \\ 1/9 \\ 1/9 \end{array} \right.$

Количество информации, выраженное в тритах, равно:

$$\begin{aligned} i(s) &= -\left(\frac{1}{3} \cdot \log_3 \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \log_3 \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \cdot \log_3 \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot \log_3 \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot \log_3 \frac{1}{9}\right) = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 1\frac{1}{3} \approx \log_3 5 \text{ vs } \log_3 14 \end{aligned}$$



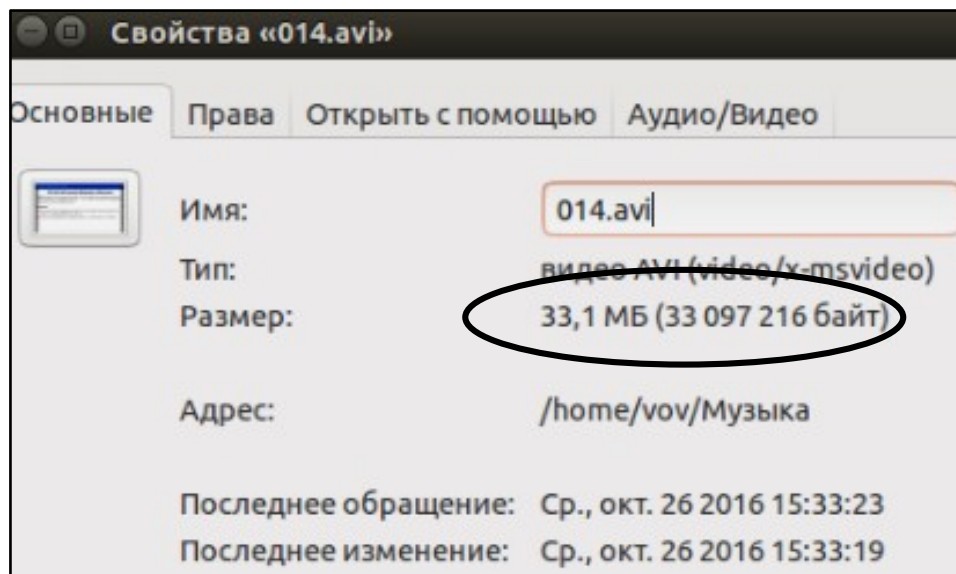
Задача. Монета имеет смещённый центр тяжести. Вероятность выпадения «орла» – 0,25, вероятность выпадения «решки» – 0,75. Какое количество информации содержится в одном подбрасывании?

Решение

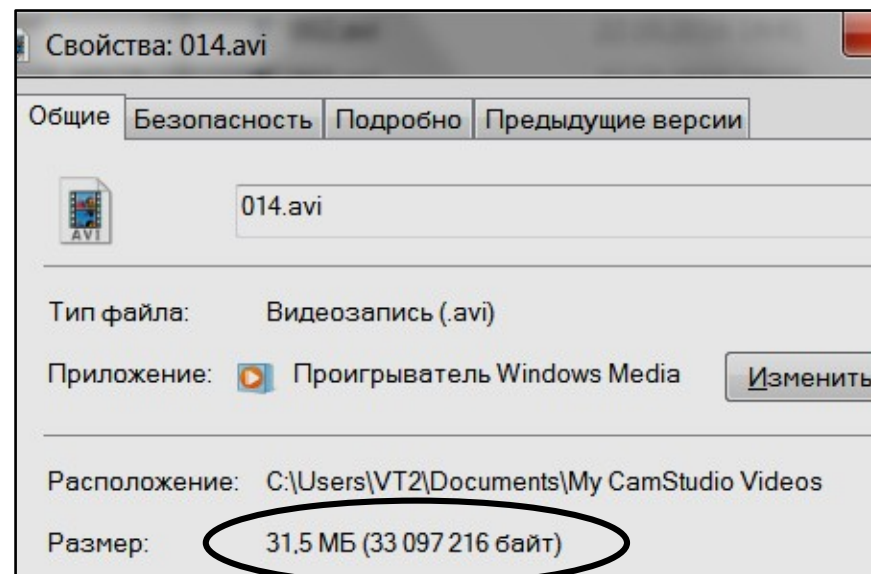
- Пусть монета была подброшена N раз ($N \rightarrow \infty$), из которых «решка» выпала M раз, «орёл» — K раз (очевидно, что $N = M + K$).
- Количество информации в N подбрасываниях: $i_N = M * i(\text{«решка»}) + K * i(\text{«орёл»})$.
- Тогда среднее количество информации в одном подбрасывании:
$$i_1 = i_N / N = (M/N) * i(\text{«решка»}) + (K/N) * i(\text{«орёл»}) = p(\text{«решка»}) * i(\text{«решка»}) + p(\text{«орёл»}) * i(\text{«орёл»}).$$
- Подставив формулу Шеннона для i , окончательно получим:
$$i_1 = -p(\text{«решка»}) * \log_x p(\text{«решка»}) - p(\text{«орёл»}) * \log_x p(\text{«орёл»}) \approx 0,8 \text{ бит.}$$

Приставки для единиц измерения количества информации/данных: проблема

Linux Ubuntu 14



Microsoft Windows 7



33 097 216 байт — это 33,1 МБ или 31,5 МБ?

Приставки для единиц измерения количества информации/данных: решение

1. **IEEE 1541-2002** – Институт инженеров по электротехнике и радиоэлектронике.
2. **ISO/IEC 80000-13:2008** – Международная организация по стандартизации.
3. **ГОСТ IEC 60027-2-2015** – Международная электротехническая комиссия.

Приставки единиц СИ	Новые двоичные префиксы	$\Delta, \%$
килобайт (кВ) = 10^3 байт	кибибайт (КиВ, КиБ) = 2^{10} байт	2
мегабайт (МВ) = 10^6 байт	мебибайт (МиВ, МиБ) = 2^{20} байт	5
гигабайт (ГВ) = 10^9 байт	гибибайт (ГиВ, ГиБ) = 2^{30} байт	7
терабайт (ТВ) = 10^{12} байт	тебибайт (ТиВ, ТиБ) = 2^{40} байт	10

Краткое обозначение битов и байтов: b = bit = бит, В = Б = байт

$1024 \text{ В} = 1024 \text{ Б} = 8192 \text{ b} = 8192 \text{ бит} = 8 \text{ Кибит} = 1 \text{ КиБ} = 1 \text{ КиВ}$

Приставки для единиц измерения количества информации/данных: детали



Полное произношение названий приставок

3 КиБ = «три кибибайта» = «три килобинарных (kilobinary) байта».

7 Гибит = «семь гибибитов» = «семь гигабинарных (gigabinary) битов».

Сложившаяся практика использования приставок

Объем памяти (HDD, RAM, Cache): 512 KiB = 524 288 bytes.

Скорость передачи данных: 512 kbps = 512 000 bps = 512 000 бит/с.

Типовая задача

Сколько мегабит содержится в двух гигабинарных байтах?

$$2 \text{ ГиБ} = 2 \cdot 2^{30} \text{ Б} = 16 \cdot 2^{30} \text{ бит} = \frac{16 \cdot 2^{30}}{1000000} \text{ Мбит} \approx 17180 \text{ Мбит (округл.)}$$

Приставки для единиц измерения количества информации/данных: пример



Device Name

albert-VirtualBox >

Memory

975,0 MiB

Processor

AMD® Ryzen 5 4500u with radeon graphics × 12

Graphics

llvmpipe (LLVM 11.0.0, 256 bits)

Disk Capacity

48,3 GB

OS Name

Ubuntu 20.10



Унарная система счисления

Основной недостаток — отсутствие нуля

Полезная и интересная ссылка:

<https://ancientcivilizationsworld.com/number-systems/>

Системы счисления: историческая справка (2)

Основание	Кто и как использовал	
нет	Австралийские племена	3=два-один, 4=два-два, 5=два-два-один, 6=два-два-два, 7=много
5	Африканские племена	
12	Тибетцы, нигерийцы	
20	Индейцы Майя, кельты	
60	Вавилоняне, шумеры	
10	5 век (Индия) 16 век (Европа) 17 век (Россия)	


$$X = 2017,042 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 7 \cdot 1 + 4/100 + 2/1000$$

$$X_{(q)} = x_{n-1} x_{n-2} \dots x_1 x_0, x_{-1} x_{-2} \dots x_{-m}$$

$X_{(q)}$ — запись числа в системе счисления с основанием q ;

x_i — натуральные числа меньше q , т.е. цифры;

n — число разрядов целой части;

m — число разрядов дробной части.

$$X_{(q)} = x_{n-1}q^{n-1} + x_{n-2}q^{n-2} + \dots + x_1q^1 + x_0q^0 + x_{-1}q^{-1} + x_{-2}q^{-2} + \dots + x_{-m}q^{-m}$$

$$X_{(q)} = \sum_{i=-m}^{n-1} x_i \cdot q^i$$

ПРИМЕРЫ: $123_{(4)} = 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 3$ (если основание СС не указано => 10-ричная СС)

$$456,78_{(10)} = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}$$

Перевод из одной СС в другую. Пример 1



$$231_{(10)} = ABC_{(10)} = \dots HGFE_{(8)} = \dots + H \cdot 8^3 + G \cdot 8^2 + F \cdot 8 + E, \text{ при натуральных } H, G, F, E < 8.$$

Как найти E, F, G, H?

Решение: $(\dots + H \cdot 8^3 + G \cdot 8^2 + F \cdot 8 + E) / 8 = \dots + H \cdot 8^2 + G \cdot 8^1 + F$ (плюс остаток E)
 $\Rightarrow (\dots HGFE_{(8)}) / 8 = \dots HGF_{(8)}$ (с остатком E)

Номер шага (i)	0	1	2	3	4	...
Частное от деления на 8	231	28	3	0	0	0
Остаток от деления на 8	0	7	4	3	0	0

Ответ: E=7, F=4, G=3, H=0.

$$231_{(10)} = 347_{(8)}$$

Перевод из одной СС в другую. Пример 2



Задача: $231_{(10)} = ?_{(2)}$

Ход решения →

Ответ: $231_{(10)} = 11100111_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 231 \div 2 = 115 \text{ remainder } 1 \\ 115 \div 2 = 57 \text{ remainder } 1 \\ 57 \div 2 = 28 \text{ remainder } 1 \\ 28 \div 2 = 14 \text{ remainder } 0 \\ 14 \div 2 = 7 \text{ remainder } 0 \\ 7 \div 2 = 3 \text{ remainder } 1 \\ 3 \div 2 = 1 \text{ remainder } 1 \\ 1 \div 2 = 0 \text{ remainder } 1 \end{array}$$

Arrows indicate reading the remainders from bottom to top to form the binary number 11100111.

Перевод из одной СС в другую. Пример 3



Задача: $0,15_{(10)} = ?_{(3)} = 0,ABCD..._{(3)} = A/3^1 + B/3^2 + C/3^3 + D/3^4 + \dots$

Решение: $(A/3^1 + B/3^2 + C/3^3 + D/3^4 + \dots) * 3 = A * 3^0 + (B/3^1 + C/3^2 + D/3^3 + \dots)$

$$\Rightarrow 3 * 0,ABCD..._{(3)} = A,BCD..._{(3)}$$

Номер шага (i)	0	1	2	3	4	5	...
Целая часть после умножения дробной части на 3	0	0	1	1	0	0	...
Дробная часть после умножения на 3	0,15	0,45	0,35	0,05	0,15	0,45	...

Ответ: $0,15_{(10)} = 0,011001100..._{(3)} = 0,(0110)_{(3)}$

Перевод из одной СС в другую. Пример 4



Задача: $0,8125_{(10)} = ?_{(2)}$

Ход решения →

0	, 8125 2
1	, 625 2
1	, 25 2
0	, 5 2
1	0

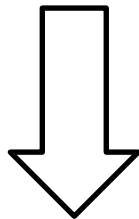
Ответ: $0,8125_{(10)} = 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2} + 1 * 2^{-4} = 0,1101_{(2)}$

Перевод из одной СС в другую. Пример 5



$$231_{(10)} = 11100111_{(2)}$$

$$0,8125_{(10)} = 0,1101_{(2)}$$



$$231,8125_{(10)} = 11100111,1101_{(2)}$$



Перевод из СС с основанием 2 в СС с основанием 4

Сложный путь: 1) СС-2 \rightarrow СС-10: $10100_{(2)} = 20_{(10)}$
2) СС-10 \rightarrow СС-4: $20_{(10)} = 110_{(4)} \Rightarrow 10100_{(2)} = 110_{(4)}$

Примечание: «СС- N » означает «система счисления с основанием N »

Простой путь:

$$\begin{aligned} & x_{i+1}2^{i+1} + x_i2^i + \dots + x_32^3 + x_22^2 + x_12^1 + x_02^0 \\ & \quad \Downarrow \\ & x_{2k+1}2^{2k+1} + x_{2k}2^{2k} + \dots + x_32^{2*1+1} + x_22^{2*1} + x_12^1 + x_02^0 \\ & \quad \Downarrow \\ & 2^{2k}(x_{2k+1}2^1 + x_{2k}) + \dots + 2^2(x_32^1 + x_2) + 2^0(x_12^1 + x_0) \\ & \quad \Downarrow \\ & 4^k(x_{2k+1}2^1 + x_{2k}) + \dots + 4^1(x_32^1 + x_2) + 4^0(x_12^1 + x_0) \end{aligned}$$

Преобразование из СС-2 в СС-2^k и обратно



Двоичная <-> Четверичная	Двоичная <-> Восьмеричная	Двоичная <-> Шестнадцатеричная
00 <-> 0	000 <-> 0	0000 <-> 0
01 <-> 1	001 <-> 1	0001 <-> 1
10 <-> 2	010 <-> 2	0010 <-> 2
11 <-> 3	011 <-> 3	0011 <-> 3
	100 <-> 4	...
	101 <-> 5	1101 <-> D
	110 <-> 6	1110 <-> E
	111 <-> 7	1111 <-> F

Пример: $1111110001,1110001_{(2)} = 0011\ 1111\ 0001,1110\ 0010_{(2)} = 3F1,E2_{(16)}$



Из $CC-N$ в $CC-N^k$

- дополнить число, записанное в CC с основанием N , незначащими нулями так, чтобы количество цифр было кратно k ;
- разбить полученное число на группы по k цифр, начиная от нуля;
- заменить каждую такую группу эквивалентным числом, записанным в CC с основанием N^k .

Задача: $1020101_{(3)} = ?_{(27)}$

Решение: $1020101_{(3)} = 001\ 020\ 101_{(3)} = 16A?_{(27)}$

Из $CC-N^k$ в $CC-N$

- заменить каждую цифру числа, записанного в CC с основанием N^k , эквивалентным набором из k цифр CC с основанием N .

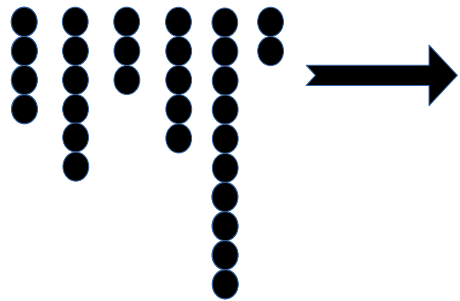
Задача: $2345_{(125)} = ?_{(5)}$

Решение: $2345_{(125)} = 002\ 003\ 004\ 010_{(5)} = 2003004010_{(5)}$



Задача. Робинзон Крузо нашёл на острове 60 камней. Сколько прошедших дней можно ими закодировать в разных СС?

Пример СС-10:



463502-й день из 999999 возможных,
где $999999 = 10^6 - 1$



Пример СС-60:

0 камней = 0 дней

1 камень = 1 день

2 камня = 2 дня

...

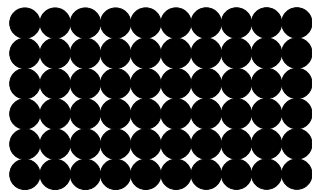
60 камней = 60 дней



1 день








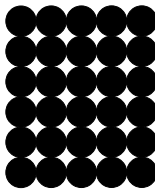




2 дня



60 дней



60 камней = $29 \cdot 30 + 29 =$
= 899 дней

 0	 0	0 дней
 0	 1	1 день
 0	 29	29 дней
 30	 0	30 дней
 60	 1	61 день



Пример СС-20:

0 камней \neq 0 дней
 1 камень = 0 дней
 2 камня = 1 день
 или 20 дней
 или 400 дней

...

60 камней =
 = $19 \cdot 400 +$
 + $19 \cdot 20 + 19 =$
 = 7999 дней

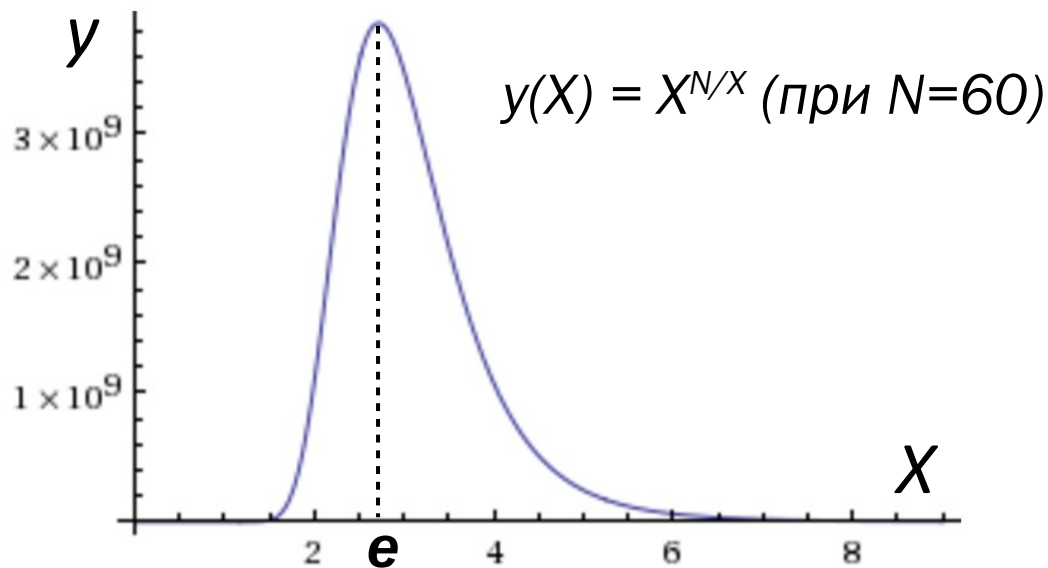
● 0	● 0	● 0	0 дней
● 0	● 0	●● 1	1 день
● 0	● 0	●●●●●●●●●●●●●●●●●● 19	19 дней
● 0	●● 20	● 0	20 дней
●● 400	●● 20	●● 1	421 день

Возможные варианты в других СС:

2^{30} , 3^{20} , 4^{15} , 5^{12} , 6^{10} , **7^8** , **8^7** , **9^6** , 10^6 , **11^5** , 12^5 , ..., 20^3 , ..., 30^2 , ..., 60^1



Если взять N камней, а за основание СС принять число X , то получится N/X разрядов, которыми можно закодировать $y = X^{N/X}$ дней (для простоты полагаем, что количество разрядов может быть нецелым).



Вывод: оптимальная система счисления имеет основание $e=2,7183....$



Оптимальный — это означает лучший по какому-либо критерию.

~~Самый оптимальный~~

~~Наиболее оптимальный~~

<https://www.quora.com/Is-the-phrase-most-optimal-grammatically-correct>

<https://forum.wordreference.com/threads/the-most-optimal-way.3508002/>

Каким может быть основание позиционной СС?



$$X_{(q)} = \sum_{k=-m}^{n-1} d_k \cdot q^k$$

m — количество цифр справа от запятой,
 n — количество цифр слева от запятой,
 d_k — цифра числа, стоящая на k -й позиции,
 q — основание системы счисления.

Пример: $789,13_{10} = 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$

Что если q отрицательно? иррационально? переменным?



Любое действительное число можно представить в виде

$$x = \sum_{k=-m}^{n-1} d_k \cdot z^k, \quad \text{где } d_k \in \{0,1\}, z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

m — количество цифр справа от запятой, n — количество цифр слева от запятой, d_k — цифра числа, стоящая на k -й позиции, z — число золотой пропорции. Запись числа x в системе Бергмана имеет вид: $x_{(B)} = d_{n-1} \dots d_2 d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} d_{-3} \dots d_{-m} (B)$

$$2_{(10)} = 10,01_{(B)} = z^1 + z^{-2}$$

$$3_{(10)} = 11,01_{(B)} = z^1 + z^0 + z^{-2}$$

$$3_{(10)} = 100,01_{(B)} = z^2 + z^{-2}$$

Чтобы исключить неоднозначность, используют запись с наибольшим количеством разрядов, т. е. $3_{(10)} = 100,01_{(B)}$

Применение: запись иррациональных чисел конечным числом цифр: $10_{(B)} = 1,618033998\dots$,

контроль арифметических операций, коррекция ошибок, самосинхронизация кодовых последовательностей при передаче по каналу связи.



Джорж
Бергман
(р. 1943)

Примеры использования системы счисления Бергмана


$$z^5 := 1.618033988749895^5 := \cdot \cdot 11.090169943749476\mathbb{I}$$

$$z^4 := 1.618033988749895^4 := \cdot \cdot 6.854101966249686\mathbb{I}$$

$$z^3 := 1.618033988749895^3 := \cdot \cdot 4.23606797749979\mathbb{I}$$

$$z^2 := 1.618033988749895^2 := \cdot \cdot 2.618033988749895\mathbb{I}$$

$$z^1 := 1.618033988749895^1 := \cdot \cdot 1.618033988749895\mathbb{I}$$

$$z^0 := 1.618033988749895^0 := \cdot \cdot 1.0\mathbb{I}$$

$$z^{(-1)} := 1.618033988749895^{(-1)} := \cdot \cdot 0.6180339887498948\mathbb{I}$$

$$z^{(-2)} := 1.618033988749895^{(-2)} := \cdot \cdot 0.38196601125010515\mathbb{I}$$


$$z^{(-3)} := 1.618033988749895^{(-3)} := \cdot \cdot 0.23606797749978967\mathbb{I}$$

$$z^{(-4)} := 1.618033988749895^{(-4)} := \cdot \cdot 0.14589803375031543\mathbb{I}$$

$$z^{(-5)} := 1.618033988749895^{(-5)} := \cdot \cdot 0.09016994374947422\mathbb{I}$$

$$z^{(-6)} := 1.618033988749895^{(-6)} := \cdot \cdot 0.0557280900008412\mathbb{I}$$

Примеры использования системы счисления Бергмана (2)


$$\begin{aligned} 16 &= 11.090169943749476 + 4.23606797749979 + \\ &+ 0.6180339887498948 + 0.0557280900008412 = \\ &= z^5 + z^3 + z^{-1} + z^{-6} = 101000.100001_{(B)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 &= 6.854101966249686 + 0.14589803375031543 = \\ &= z^4 + z^{-4} = 10000.0001_{(B)} \end{aligned}$$

Система счисления Цекендорфа (фибоначчиева СС)



Любое целое число можно представить в виде

$$x = \sum_{k=1}^n d_k F_k, \text{ где } d_k \in \{0,1\}, \text{ а } F_k - \text{ числа Фибоначчи (ЧФ)}$$



Эдуард
Цекендорф
(1901–1983)

n — количество цифр в записи числа, d_k — цифра числа, стоящая на k -й позиции, каждое ЧФ есть сумма двух предыдущих ЧФ: $F_i = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$, где $i = 0, 1, \dots$. Запись числа x в системе Цекендорфа будет иметь вид $x_{(Ц)} = d_n d_{n-1} \dots d_{1(Ц)}$

Проблема неуникальности: $16 = 8+5+2+1 = 13+3$, т.е. $16 = 11011_{(Ц)} = 100100_{(Ц)}$. Чтобы исключить неоднозначность, введён запрет на использование двух единиц подряд: т. е. $16_{(10)} = 100100_{(Ц)}$, а запись $11011_{(Ц)}$ считается ошибочной!

Применение: минимизация числа зёрен маиса в счётах у инков, кодирование данных с маркером завершения «11».



Любое целое число можно представить в виде

$$x = \sum_{k=1}^n d_k k!, \quad \text{где } 0 \leq d_k \leq k, \quad k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k.$$

n — количество цифр в записи числа,

d_k — цифра числа, стоящая на k -й позиции,

Запись числа x в факториальной системе счисления будет иметь вид:

$$x_{(\Phi)} = d_n d_{n-1} \dots d_{1(\Phi)}.$$

Примеры: $310_{(\Phi)} = 3 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1! = 20_{(10)}$

$$\begin{aligned} 106_{(10)} &= d_5 \cdot 5! + d_4 \cdot 4! + d_3 \cdot 3! + d_2 \cdot 2! + d_1 \cdot 1! = \dots \text{подбор } d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 \dots = \\ &= 0 \cdot 5! + 4 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 0 \cdot 1! = 4120_{(\Phi)} \end{aligned}$$



Дано: $x = d_4 d_3 d_2 d_{1(\Phi)} = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) d_4 + (1 \cdot 2 \cdot 3) d_3 + (1 \cdot 2) d_2 + (1) d_1$.

- 1) $(x \operatorname{div} 2) = (3 \cdot 4) d_4 + (3) d_3 + d_2$ (и остаток, равный d_1).
- 2) $(x \operatorname{div} 2) \operatorname{div} 3 = (4) d_4 + d_3$ (и остаток, равный d_2).
- 3) $((x \operatorname{div} 2) \operatorname{div} 3) \operatorname{div} 4 = d_4$ (и остаток, равный d_3).
- 4) $((((x \operatorname{div} 2) \operatorname{div} 3) \operatorname{div} 4) \operatorname{div} 5 = 0$ (и остаток, равный d_4).

Примечание: « $A \operatorname{div} B$ » означает целочисленное деление A на B .

« $A \operatorname{mod} B$ » означает остаток от деления A на B .

Пример: $106_{(10)} = ?_{(\Phi)}$

$$1) 106 \operatorname{div} 2 = 53, d_1 = 106 \operatorname{mod} 2 = 0$$

$$2) 53 \operatorname{div} 3 = 17, d_2 = 53 \operatorname{mod} 3 = 2$$

$$3) 17 \operatorname{div} 4 = 4, d_3 = 17 \operatorname{mod} 4 = 1$$

$$4) 4 \operatorname{div} 5 = 0, d_4 = 4 \operatorname{mod} 5 = 4$$

$$x_{(\Phi)} = d_4 d_3 d_2 d_{1(\Phi)} = 4120_{(\Phi)}$$



Проблема: как упорядочить перестановки букв АБВ: 1-АБВ, 2-АВБ, 3-ВБА, 4-ВАБ, 5-БАВ, 6-БВА.

Пример. Пусть имеется $n=5$ чисел (1,2,3,4,5) и нужно найти все их перестановки. Известно, что всего существует $n! = 5! = 120$ таких перестановок. Как найти перестановку, если задан её номер k ?

Решение. Найдём 21-ю перестановку ($k = 21$). Переведём k в факториальную систему:
 $21 = 3 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 1 \cdot 1! = 311_{(ф)}$. Дополним его до $(n-1)$ разрядов: $311_{(ф)} \rightarrow 0311_{(ф)}$.

Расставим символы по местам:

0) имеется 5 свободных позиций для цифр (_ _ _ _ _)

1) **справа** от «5» есть 0 меньших цифр (_ _ _ _ 5)

2) **справа** от «4» есть 3 меньшие цифры (4 _ _ _ 5)

3) **справа** от «3» есть 1 меньшая цифра (4 _ 3 _ 5)

4) **справа** от «2» есть 1 меньшая цифра (4 2 3 _ 5)



ОТВЕТ: 42315

Значение k	0	1	2	3	...	21	...	119
k-я перестановка	12345	21345	13245	23145	...	42315	...	54321



СС с отрицательным основанием или цифрами

1. **Нега-позиционные** (с отрицательным основанием). Примеры в нега-десятичной СС:

- $123_{(-10)} = 1 \cdot (-10)^2 + 2 \cdot (-10)^1 + 3 \cdot (-10)^0 = 100 - 20 + 3 = 83_{(10)}$
- $58_{(-10)} = 5 \cdot (-10)^1 + 8 \cdot (-10)^0 = -50 + 8 = -42_{(10)}$

Числа с чётным количеством цифр — отрицательные.

2. **Симметричные** (с отрицательными цифрами). Например, в симметричной пятеричной СС вместо привычных цифр $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ используются $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$:

- $\overline{20210}_{(5C)} = (2) \cdot 5^4 + (0) \cdot 5^3 + (-2) \cdot 5^2 + (1) \cdot 5^1 + (0) \cdot 5^0 = 1250 - 50 + 5 = 1205_{(10)}$
- $\overline{20210}_{(5C)} = (-2) \cdot 5^4 + (0) \cdot 5^3 + (2) \cdot 5^2 + (-1) \cdot 5^1 + (0) \cdot 5^0 = -1250 + 50 - 5 = -1205_{(10)}$

Симметричные СС определены только для нечётных оснований!

Применение. В негапозиционных и симметричных СС не требуется специального знака для обозначения отрицательных чисел. Это позволяет использовать их для представления отрицательных чисел в компьютерах.