Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«Национальный исследовательский университет ИТМО»**
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №6
по информатике

# Работа с системой компьютерной вёрстки TEX

Вариант: 22

Выполнил: Арсеньев Денис Егорович
Группа: P3114
Преподаватель: Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург
2022г.

(тут, конечно, нам повезло: разность квадратов $(2n+1)^2 - 4n(n+1)$ равна 1.
$\leq \frac{i}{(2\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n})\ (2n+2n)} = \frac{1}{16n\sqrt{n}}$.

Заметим, что и эта оценка очень точная. Но убедиться в этом (и вообще исследовать поведение функции с многими радикалами) лучше уже не с помощью алгебраических преобразований, а средствами анализа - заменить переменную n на h 1/n и вопспользоваться формулой Тейлора $\sqrt{1+h} - 1 + h/2 - h^2/8 + ...$ (См. [6].)

### Заменим плюс на минус

Мы уже говорили о пользе симметрии в геометрических задачах. Своего рода симметрией в алгебре является замена плюса на минус.

Так, если какое-либо выражение от $\sqrt{d}$ равно $p+q\sqrt{d}$ и мы всюду в этом выражении заменим $\sqrt{d}$ на $-\sqrt{d}$, то естественно ожидать, что новое выражение окажется равным сопряженному числу $p-q\sqrt{d}$. Мы будем пользоваться таким очевидным частным случаем этого свойства (a и b - рациональны, $\sqrt{d}$ - нет):

$$(a+b\sqrt{d})^n = p+q\sqrt{d} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a-b\sqrt{d})^n = p-q\sqrt{d}.$$

**5.** *Доказать, что уравнение*

$$(x+y\sqrt{5})^4 + (z+t\sqrt{5})^4 = 2+\sqrt{5} \tag{4}$$

*не имеет решений в рациональных числах $x$, $y$, $z$, $t$.*

Можно, конечно, найти отдельно сумму членов левой части, не содержащих $\sqrt{5}$ (она должна быть равна 2), и отдельно — коэффициент при $\sqrt{5}$ (он должен равняться 1). Но что делать с полученной громаздкой системой, неясно. Вместо этого воспользуемся (4) и заменим плюс перед $\sqrt{5}$ на минус!

$$(x-y\sqrt{5})^4 + (z-t\sqrt{5})^4 = 2-\sqrt{5}$$

Слева стоит неотрицательное число, справа — отрицательное.

**6.** *Доказать, что существует бесконечно много пар (x; y) натуральных чисел, для которых $x^2$ отличается от $2y^2$ на 1:*

$$|x^2 - 2y^2| = 1 \tag{5}$$

Несколько таких пар с небольшим (x; y) легко найти подбором: это (1; 2), (3;2), (7,5), (17,12),...(рис. 1). Как продолжить этот набор? Можно ли записать общую формулу для этих решений?



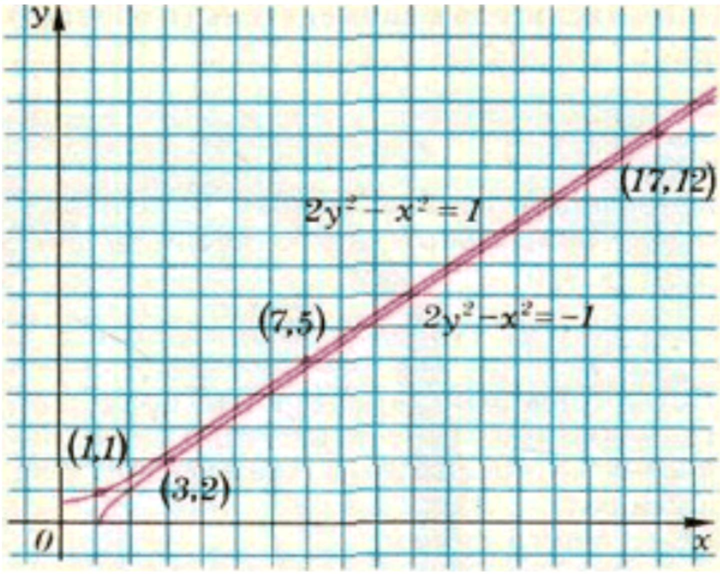


**Рис. 1. Проходят ли эти гиперболы через бесконечное число узлов клетчатой бумаги?**

Найти ответы на эти вопросы нам поможет число $1+\sqrt{2}$. Закономерность, позволяющая получать все новые и новые решения (x; y), указана в таблице:

| n | $(1+\sqrt{2})^n$ | $x_n$ | $y_n$ | $(x_n)^2 - 2(y_n)^2$ | $(1-\sqrt{2})^n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $1+\sqrt{2}$ | 1 | 1 | $1-2=-1$ | $1-\sqrt{2}$ |
| 2 | $3+2\sqrt{2}$ | 3 | 2 | $9-8=1$ | $3-2\sqrt{2}$ |
| 3 | $7+5\sqrt{2}$ | 7 | 5 | $49-50=-1$ | $7-5\sqrt{2}$ |
| 4 | $17+12\sqrt{2}$ | 17 | 12 | $289-288=1$ | $17-12\sqrt{2}$ |
| 5 | $41+29\sqrt{2}$ | 41 | 29 | $1681-1682=-1$ | $41-29\sqrt{2}$ |
| .. | ... | .. | .. | .... | ..... |

**Какой будет шестая строчка?**

Видно, что коэффициенты $x_n$, $y_n$ в числе

$$x_n + y_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^n$$

будут давать нужную пару. Доказать это поможет колонка таблицы из сопряженных чисел (мы снова применяем (4)):

$$x_n - y_n\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^n$$

Перемножив два последних равенства, получим

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n =$$
$$= ((1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}))^n = (-1)^n,$$

и интересующее нас выражение попеременно равно то 1, то -1. Складывая и вычитая эти же два равенства, мы получим явное выражение для $x_n$ и $y_n$:

$$x_n = ((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n)/2$$
$$y_n = ((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n)/2\sqrt{2}.$$