

М347. Двое играют в такую игру. Первый загадывает два числа от 1 до 25, а второй должен их угадать. Он может назвать любые два числа от 1 до 25 и узнать у первого сколько из названных им чисел - 0, 1 или 2 - совпадают с загаданными. За какое минимальное число вопросов он сможет наверняка определить загаданные числа?

| Ответ | Загаданы числа |
|-------|----------------|
| 1 . 1 | $2i . 25$ |
| 1 . 0 | $2i - 1 . 23$ |
| 1 . 0 | $2i - 1 . 23$ |
| 0 . 1 | $2i - 1 . 24$ |
| 0 . 0 | $2i - 1 . 25$ |

Таблица 1

Многие читатели успешно справились с определением загаданных чисел за 14 вопросов. Покажем, что всегда можно определить загаданные числа не более чем за 13 вопросов. Называя пары $(1, 2), (3, 4), \dots, (21, 22)$, мы используем 11 вопросов; при этом возможны следующие 4 случая:

- а) после какого-то вопроса получен ответ "2";
- б) на все вопросы получены ответы "0d";
- в) на какие-то два вопроса - i -й и j -й - получены ответы "1";
- г) только на один i -й вопрос получен ответ "1 на остальные вопросы - "0"(невнимательное рассмотрение этого случая многих заставило считать, что нельзя гарантировать определение загаданных чисел из 13 вопросов).

Укажем дальнейшие действия отгадывающего в каждом из этих случаев.

- а) После ответа "2"загаданные числа определены.
- б) Загаданы два числа из чисел 23,24,25. Задаем вопрос (23,24). Если ответ "2 то эти числа и загаданы, если ответ "1 то вопросом (23,22) определим, какое из чисел - 23 или 23 - загадано наряду с числом 25.
- в) Числа в i паре $(2i, 23), (2i, 23)$ при всех возможных ответах определяют загаданные числа. В самом деле, ответ "2"на первый или второй вопрос не требует пояснений. Для других комбинаций ответов на эти два вопроса мы сообщаем загаданные числа (легко проверяется, что другого мнения о том, какие числа загаданы, не может быть)-см. таблицу 1

Итак, мы показали, что за 13 вопросов всегда можно определить загаданные числа; естественно, как следует из решения, иногда хватает и меньшего количества вопросов.

Для завершения решения докажем, что нельзя гарантировать определение загаданных чисел за 12 вопросов. После 11 вопросов все ответы могут быть "0"; при этом всегда существуют три числа, не включенные в вопросы. Если двенадцатый вопрос не содержит ни одно из этих трех чисел, то ответ "0"позволит любым двум из них быть загаданными. Если же в двенадцатый вопрос входит одно или два из этих трех чисел, то после ответа "1"также нельзя однозначно указать загаданные числа.

Ю. Лысов