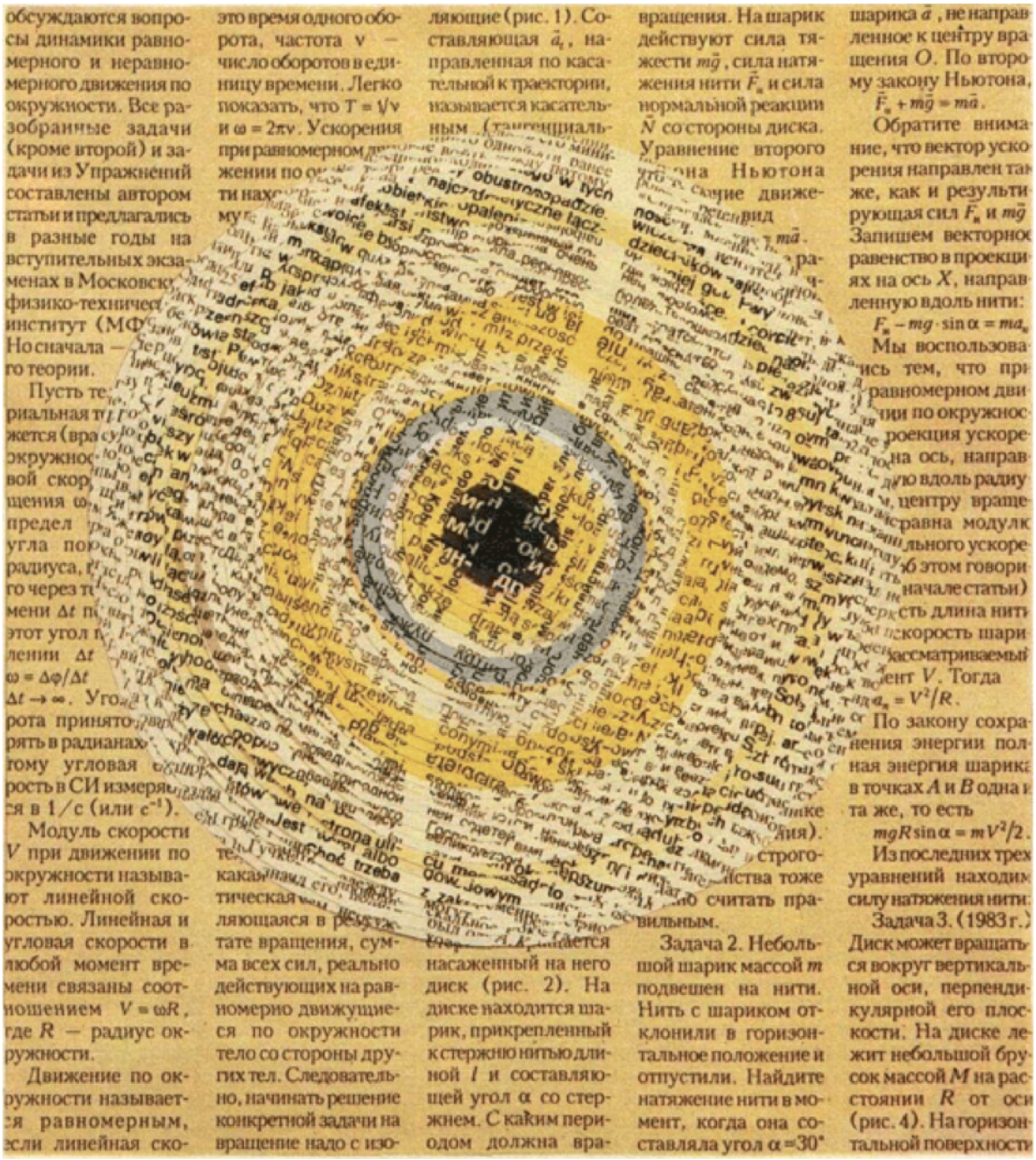
ISSN 0130-2221

НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ

1994·№6

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма

А.КИРИЛЛОВ

Пролог

ЗАДАЧИ на геометрические построения — один из самых популярных в школьной математике.

Почти в каждом математическом кружке разбираются такие задачи. Это, конечно, не случайно. История геометрических построений насхитывает несколько тысяч лет, и уже древние греки достигли здбоь большого искусста. В качестве примера можно привести задачу Аполлония: *построить окружность, касающуюся трех данных окружностей.*

Многим, вероятно, известны три знаменитые задачи древности, оказавшнеся неразрешимыми: *о кваратуре круга, трисекции угла и удвоении куба.*

Но, пожалуй, самой красивой является задача о построении правильных многоугольников. Собственно говоря, это не одна задача, а целая серня задач: *для каждого натурального числа $n \geq 3$ требуется с помощью циркуля и линейкы построить правильный n-угольник*

Для некоторых значений nэта задача совеем простая (например, для $n=$ 3, 4, 6, 8, 12); для других — посложнее ($n=$ 5, 10, 15; ниже мы расскажем, как построить десятиугольник и пятиугольник); для третьих — очень сложная ($n=$ 17 или 257). Наконец существуют такие значения n, для которых эта задача вообще неразрешима (например, $n=$ 7, 9, 11).

Выпишем подряд несколько натуральных чисел, начиная $n=$ 3, отметим красным цветом те числа n, для которых можно построить правильный n-угольних циркулем и линейкой:

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48...

Рис. 1: Необходимые числа

Есть ли какая-нибудь закономерность в распределении «красных» и «черных» чисел? Оказывается, есть; но найти ее довольно трудно. Эта закономерность имеет арифметическую природу; чтобы се описать, нам придется временно оставить геометрию и заняться элементами теории чисел — высшего раздела арифиетики.

Функция Эйлера

Важной арифметической характристекой числа nявляется количество чисел, меньших nи взанино простых с n. Одним из первых это заметил знаменитый математик XVIII века Леонард Эйлер. Он препложил для этого количества обозначение $\phi(n)$, и с тех пор функция $n \to \phi(n)$ известна, под именем «функции Эйлера». Например, для $n=$ 10 имеется четыре числа, меньших десяти и взаимно простых с ним: 1, 3, 7 и 9; так что $\phi(10) = 4$.

Функция ϕ облалает многими интересными свойствами. Одно из них было открыто еще самим Эйлером: для любых двух взаимно простых чисел m и nсправедливо равенство:

$$\phi(mn) = \phi(m)\phi(n). \qquad (1)$$

Кроме того, легко проверить, что *если p — простое число, то $\phi(p) = p-1$, $\phi(p^2) = p^2 - p$, и вообще*

$$\phi(p^m) = p^{m-1}(p-1). \qquad (2)$$

Эти свойства позволяют легко вычислять функцию Эйлера для небольших значений n. Например,

$$\phi(10) = \phi(2) \cdot \phi(5) = 1 \cdot 4 = 4,$$

$$\phi(100) = \phi(4) \cdot \phi(25) = 2 \cdot 20 = 40.$$

Мы приводим адесь значения функции Эйлера для nот 1 до 42 (см. таблицы 1, *а* и *б*).

Сравните эти таблицы с приведенным выше рядом «красных» и «черных» чисел. Не правда ли, связь между «цветом» чисел nи значением $\phi(n)$ уже легко утодывается? Мы видим, что если правильный n-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки, то соответствующее значение функции $\phi(n)$ является степенью двойки. Оказывается, это условие является необходимым и достаточным для возможности построення правильного n-угольника.

В настоящей статье мы не сможем строго доказать это. Однако мы приведем достаточно простые и убедительные соображения в пользу этого факта. Аналогичные соображения применимы и ко многим другим задачам на построение — например, к залаче о трисекции угла.

Что значит «построить»?

Вопрос о точной постановке задач на построение циркулем и линейкой уже обсуждался на страницах «Кванта». Мы не будем здесь еще раз предостерегать читателей от неправильного употребления математических инструментов. Скажем лишь, что окончательное решение задачи на построение должно быть (хотя бы в принципе) записываемо в виде цепочки элементарных операций, напоминающей систему команд, отдаваемых электронной вычислительной машине.

Таблица 1, а

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\phi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8

Таблица 1, б

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$\phi(n)$	12	10	22	8	20	12	24	12	28	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24	16	40	12

[0]Эта статья впервые была опубликована в "Кванте"№ 7 за 1977 год.