

# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

обсуждаются вопросы динамики равномерного и неравномерного движения по окружности. Все разобранные задачи (кроме второй) и задачи из Упражнений составлены автором статьи и предлагались в разные годы на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт (МФТИ). Носначала — теория.

Пусть тело движется по окружности с угловой скоростью  $\omega$ . За время  $\Delta t$  оно пройдет угол  $\Delta\varphi$ . Тогда  $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$ . При  $\Delta t \rightarrow \infty$  угловая скорость  $\omega$  принята за предел в радианах в секунду. Угловая скорость в СИ измеряется в  $1/\text{с}$  (или  $\text{с}^{-1}$ ).

Модуль скорости  $V$  при движении по окружности называется линейной скоростью. Линейная и угловая скорости в любой момент времени связаны соотношением  $V = \omega R$ , где  $R$  — радиус окружности.

Движение по окружности называется равномерным, если линейная скорость постоянна. Это время одного оборота, частота  $\nu$  — число оборотов в единицу времени. Легко показать, что  $T = 1/\nu$  и  $\omega = 2\pi\nu$ . Ускорения при равномерном движении по окружности направлены к центру. Их называют центростремительными. Легко показать, что  $a_c = V^2/R$ .

Вращение. На шарик действуют сила тяжести  $mg$ , сила натяжения нити  $F_n$  и сила нормальной реакции  $N$  со стороны диска. Уравнение второго закона Ньютона для шарика в направлении радиуса диска имеет вид  $F_n + N - mg \sin \alpha = m\omega^2 R$ . Залишем векторное равенство в проекциях на ось  $X$ , направленную вдоль нити:  $F_n - mg \sin \alpha = m\omega^2 R$ . Мы воспользуемся тем, что при равномерном движении по окружности проекция ускорения на ось, направленную вдоль радиуса, равна модулю центростремительного ускорения. В этом говорилось в начале статьи.)

Задача 1. Диск радиуса  $R$  вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Шарик массы  $m$  висит на нити длиной  $l$ . Найдите натяжение нити в момент, когда она составляет угол  $\alpha = 30^\circ$  с вертикалью.

Задача 2. Небольшой шарик массы  $m$  подвешен на нити. Нить с шариком отклонили в горизонтальное положение и отпустили. Найдите натяжение нити в момент, когда она составляет угол  $\alpha = 30^\circ$  с вертикалью.

Задача 3. (1983 г.) Диск может вращаться вокруг вертикальной оси, перпендикулярной его плоскости. На диске лежит небольшой брусок массы  $M$  на расстоянии  $R$  от оси (рис. 4). На горизонтальной поверхности

# О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма

А.КИРИЛЛОВ

## Пролог

**ЗАДАЧИ** на геометрические построения — один из самых популярных в школьной математике.

Почти в каждом математическом кружке разбираются такие задачи. Это, конечно, не случайно. История геометрических построений насчитывает несколько тысяч лет, и уже древние греки достигли здобой большого искусства. В качестве примера можно привести задачу Аполлония: *построить окружность, касающуюся трех данных окружностей*.

Многим, вероятно, известны три знаменитые задачи древности, оказавшиеся неразрешимыми: *о квадратуре круга, трисекции угла и удвоении куба*.

Но, пожалуй, самой красивой является задача о построении правильных многоугольников. Собственно говоря, это не одна задача, а целая серия задач: *для каждого натурального числа  $n \geq 3$  требуется с помощью циркуля и линейки построить правильный  $n$ -угольник*

Для некоторых значений  $n$  эта задача совсем простая (например, для  $n = 3, 4, 6, 8, 12$ ); для других — посложнее ( $n = 5, 10, 15$ ; ниже мы расскажем, как построить десятиугольник и пятиугольник); для третьих — очень сложная ( $n = 17$  или  $257$ ). Наконец существуют такие значения  $n$ , для которых эта задача вообще неразрешима (например,  $n = 7, 9, 11$ ).

Выпишем подряд несколько натуральных чисел, начиная  $n = 3$ , отметим красным цветом те числа  $n$ , для которых можно построить правильный  $n$ -угольник циркулем и линейкой:

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48...

Рис. 1: Необходимые числа

Есть ли какая-нибудь закономерность в распределении «красных» и

«черных» чисел? Оказывается, есть; но найти ее довольно трудно. Эта закономерность имеет арифметическую природу; чтобы ее описать, нам придется временно оставить геометрию и заняться элементами теории чисел — высшего раздела арифметики.

## Функция Эйлера

Важной арифметической характеристикой числа является количество чисел, меньших  $n$  и взаимно простых с  $n$ . Одним из первых это заметил знаменитый математик XVIII века Леонард Эйлер. Он предложил для этого количества обозначение  $\phi(n)$ , и с тех пор функция  $n \rightarrow \phi(n)$  известна, под именем «функции Эйлера». Например, для  $n = 10$  имеется четыре числа, меньших десяти и взаимно простых с ним: 1, 3, 7 и 9; так что  $\phi(10) = 4$ .

Функция  $\phi$  обладает многими интересными свойствами. Одно из них было открыто еще самим Эйлером: для любых двух взаимно простых чисел  $m$  и  $n$  справедливо равенство:

$$\phi(mn) = \phi(m)\phi(n). \quad (1)$$

Кроме того, легко проверить, что если  $p$  — простое число, то  $\phi(p) = p - 1$ ,  $\phi(p^2) = p^2 - p$ , и вообще

$$\phi(p^m) = p^{m-1}(p - 1). \quad (2)$$

Эти свойства позволяют легко вычислять функцию Эйлера для небольших значений  $n$ . Например,

$$\phi(10) = \phi(2) \cdot \phi(5) = 1 \cdot 4 = 4,$$

$$\phi(100) = \phi(4) \cdot \phi(25) = 2 \cdot 20 = 40.$$

Мы приводим здесь значения функции Эйлера для  $n$  от 1 до 42 (см. таблицы 1, а и б).

Сравните эти таблицы с приведенным выше рядом «красных» и «черных» чисел. Не правда ли, связь между «цветом» чисел  $n$  и значением  $\phi(n)$  уже легко угадывается? Мы видим, что если правильный  $n$ -угольник можно построить с помощью циркуля и линейки, то соответствующее значение функции  $\phi(n)$  является степенью двойки. Оказывается, это условие является необходимым и достаточным для возможности построения правильного  $n$ -угольника.

В настоящей статье мы не сможем строго доказать это. Однако мы приведем достаточно простые и убедительные соображения в пользу этого факта. Аналогичные соображения применимы и ко многим другим задачам на построение — например, к задаче о трисекции угла.

## Что значит «построить»?

Вопрос о точной постановке задачи на построение циркулем и линейкой уже обсуждался на страницах «Кванта». Мы не будем здесь еще раз предостерегать читателей от неправильного употребления математических инструментов. Скажем лишь, что окончательное решение задачи на построение должно быть (хотя бы в принципе) записываемо в виде цепочки элементарных операций, напоминающей систему команд, отдаваемых электронной вычислительной машине.

Таблица 1, а

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\phi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8

Таблица 1, б

$n$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$\phi(n)$	12	10	22	8	20	12	24	12	28	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24	16	40	12

<sup>0</sup>Эта статья впервые была опубликована в «Кванте» № 7 за 1977 год.