

Преамбулка к Лабораторной работе - 6

Дмитрий Х.

17 ноября 2022 г.

Задачу выполнил. «Квант» сваял. Сделал все на `\begin{minipage}`. Код страшный вышел. Вот так вот-с!

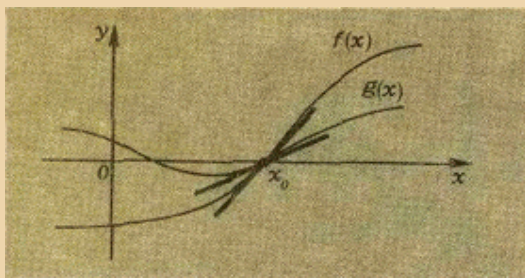


Рис. 4.

$f(x)/g(x)$ при значения x , приближающихся к x_0 , если в этой точке числитель и знаменатель обращаются в нуль. Считаем $f(x)$ и $g(x)$ линейными вблизи точки x_0 , малые кусочки их графиков заменяем касательными к к графикам этих функций в точке x_0 . Таким образом, считаем, что

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0), g(x) = g'(x_0)(x - x_0).$$

Тогда, если $g'(x_0) \neq 0$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Надо понять, что фактически это равенство приближенное, но тем более точное, чем ближе x к x_0 . Мы получили правило, известное в математике как *правило Лопиталья для раскрытия неопределенности типа 0/0*.

На языке пределов это правило читается так: предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \rightarrow x_0$, если $f(x_0) = 0$ и $g(x_0) = 0$, равен отношению производных $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad (g'(x_0) \neq 0)$$

Пример 3. Составить таблицу значений функции

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - \sin \pi x/2}{\sqrt{x} - \cos(1 - x)}$$

вблизи точки $x = 1$.

Решение. Результаты вычислений на МК ВЗ-34 показаны в таблице 1. Применим правило Лопиталья

$$\begin{aligned} (2x^2 - x - \sin \frac{\pi}{2}x)'|_{x=1} &= \\ &= (4x - 1 - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x)|_{x=1} = 4 - 1 = 3, \\ (\sqrt{x} - \cos(1 - x))'|_{x=1} &= \end{aligned}$$

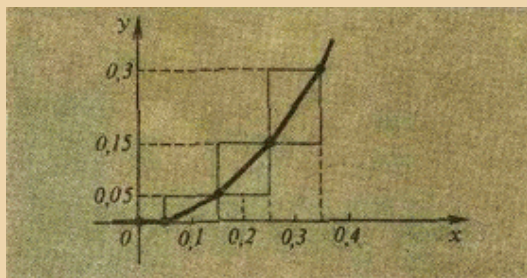


Рис. 5

$$= (\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin(1 - x))|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, при стремлении x к 1 значения $f(x)$ приближаются к числу 3 : $(1/2) = 6$. ИЗ таблицы видно, что ошибки в вычислениях начинаются довольно далеко от предела точности МК - уже при $x = 1,0001$.

Признак возрастания (убывания) функции на интервале

Теорема. Если в каждой точке интервала угловой коэффициент (производная) к графику функции возрастает на этом интервале, а если меньше нуля - то убывает.

Действительно, пусть угловой коэффициент касательной к графику функции больше нуля. Тогда касательная в любой точке графика является поднимающейся прямой и, следовательно, любой достаточно малый участок графика есть поднимающаяся линия. Интуитивно ясно, что график в целом есть поднимающаяся линия и, следовательно, функция возрастает. Аналогично, отрицательность производной во всех точках интервала влечет убывание функции на этом интервале.

Численное решение дифференциальных уравнений

Во многих случаях удается получить зависимость между величинами, содержащую их производные, т.е. в виде *дифференциального уравнения*. Далеко не всегда уравнение удается разрешить, т.е. найти функции, являющиеся решением данного дифферен-

Таблица 1

x	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001	1,000001
$f(x)$	6,1762693	6,0196529	6.0039984	6,012024	6,1224489	7,5



В номере:

- 2 *И. Д. Новиков*, Вселенная как тепловая машина
9 *Ю. М. Львов, Л. А. Фейн*, Ленгмюровские пленки —
путь к молекулярной электронике?
14 *М. Гарднер*, Рамсеевская теория графов
21 Интервью с американским математиком Рональдом
Грэхемом
27 **Задачник «Кванта»**
Задачи M1096-M1100, Ф110-Ф1112
28 Problems M109-M1100, Ф1108-Ф1112
29 Решения задач M1071, M1076-M1080, Ф1088-Ф1092
36 **Избранные школьные задачи**
«Кванта» для младших школьников
37 Задачи
38 *А. П. Савин*, Десять цифр
40 **Калейдоскоп «Кванта»**
Простые машины
Лаборатория «Кванта»
44 *В. Ф. Яковлев* «Физика для дураков»
Математический кружок
48 *Д. К. Фаддеев, М. С. Никулин, И. Ф. Соколовский*.
Основной принцип дифференциального исчисления.
Часть II: Свойства производной
Практикум абитуриента
44 *В. Ф. Яковлев*, «Физика для дураков»
54 *В. А. Петров*, Неравенства и графики
56 *А. И. Буздин, С. С. Кротов*, Поверхностное натяже-
ние и капиллярные явления
62 **Варианты вступительных экзаменов**
Информация
68 Заочная физическая школа при МГУ
69 Омскому НОУ - 20 лет
73 **Ответы, указания решения**
«Квант» улыбается (61)
Смесь (72)
Наша обложка
1 *Читайте в этом номере статью на с. 2!*
2 *Этот рисунок Леонардо да Винчи, сделанный 500*
лет назад, - своеобразный анонс «Калейдоскопа
«Кванта» из этого номера.
3 **Шахматная страничка**
4 **Головоломка Рамсея.**

©Издательство «Наука».

● Главная редакция физико-математической литературы, «Квант»,
1988