Федеральное государственное автономное образовательное учереждение
высшего образования
«Национальный исследователький университет ИТМО»
Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №6.
«Работа с системой компьтерной вёрстки TEX
по дисциплине "Информатика"
Вариант 57

Выполнил:
Студент группы № P3114
Эйдельман Виктор Аркадьевич
Преподаватель:
Машина Екатерина Алексеевна

г.Санкт-Петербург
2022

личина штрафа делилась на 9. Тогда должно было 777= =9 a+x, но единственной купюрой, удовлетворяющей этому условию, является x=3. Итак утеряно 3 рубля. Заметим, что действие происходило до 1994 года, когда такие купюры ещё принимались.

10. Покажем, что указанная сумма может равняться только нулю. Для этого раскрасим клетками таблицы в шахматном порядке и посчитаем сумму чисел в чёрных клетках двумя способами. Обозначим сумму чисел на одной диагонали через S. С одной стороны, эта сумма равна $5S$, если взять сумму по диагоналям, идущим справа вниз налево, а по остальным диагоналям она равна $6S$. Итак, $5S$=$6S$, отсюда S =0 (рис. 1).

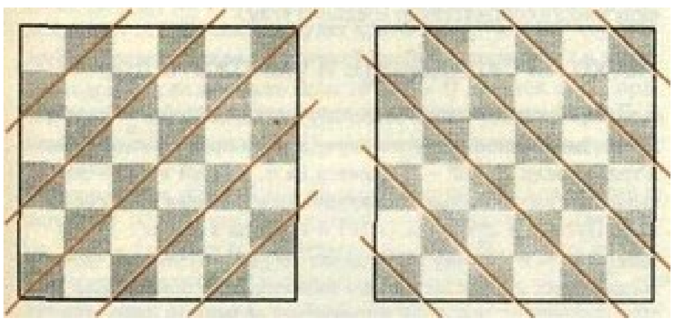

Рис. 1:

Заметим, что для таблиц с нечетным числом строк возможны и другие суммы. В таблице 1 приведена таблица 5×5, у которой S=1.

1	1	1	1	1
0	0	0	0	0
0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1

Таблица 1:

Геометрическая страничка

2. Можно воспользоватьс утверждением предыдущей задачи. Обозначим через M_0 точку пересечения мередиан, выходящих из
вершин A и B. Тогда треугольники AM_0B, AM_0C и BM_0C оказываются равновеликими. Это означает, что M_0 лежит и на третьей медиане. Дальнейшее ясно.

5. Искомое геометрическое место состоит из двух прямых, проходящих через A: одна из них делит попоам BC, а другая параллельна BC.

6. Искомое геометрическое место состоит из четырех точек: M_1 – точка пересечения медиан треугольника ABC,M_2, M_3, M_4 – таковы, что $ABCM_2$, ABM_3C AM_4BC являются параллелограммами.

7. Рассмотрим треугольник ABC, в котором A_1 – середина BC, M – точка пересечения медиан, K – середина MB. Тогда стороны треугольника KMA_1 равны $\frac{1}{3}$ соответствующих медиан, т.е. треугольник KMA_1 можно построить, а затем построить и сам треугольник ABC.

8. СМ. решение предыдущей задачи. Любой треугольник имеет площадь в $\frac{4}{3}$ раза большую, чем площадь треугольника, составленного из его медиан.

9. Пусть медиана m_1 составляет со стороной a углы φ и $180^\circ - \varphi$ (угол φ противолежит стороне b). Запишем две теоремы косинусов и сложим: $b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - m_a \cdot a\cos(\varphi)$, $c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + m_a \cdot a\cos(\varphi)$. Получим $b^2 + {}^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$ и т.д.

10. Воспользуйтесь формулой, доказанной в предыдущей задаче. Указанное отношение равно $\frac{3}{4}$.

11. Искомое геометрическое место есть окружность с центром в середине AB (или точка или пустое множество). Это следует, в частности, из того, что в треугольнике AMB медиана к стороне AB имеет постоянную длину (см. формулу задачи 9).

12. Пусть для определенности диагональ m образует со сторонами четырехугольника два треугольника a, b, m и c, d, m. Обозначим через x и y медианы в этих треугольниках к стороне m. Тогда в треугольнике со стороной x, y, n медиана к стороне n равна l. По формуле задачи 9 имеем
$l^2 = \frac{1}{4}(2x^2 + 2y^2 - n^2)$, $x^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - m^2)$,
$y^2 = \frac{1}{4}(2c^2 + 2d^2 - m^2)$. Из этих равенств сразу следует искомое равенство.

13. Утверждение задачи следует из формулы, доказанной в задаче 12.

Пусть A_1 – середина BC. Положим $\angle MGA_1 = \varphi$ ($\angle MGA_1 = 180^\circ - \varphi$). По теореме косинусов
$MA_1^2 = MG^2 + GA_1^2 - 2MG \cdot GA_1\cos(\varphi)$,
$MA^2 = MG^2 + GA^2 - 2MG \cdot GA_1\cos(\varphi)$. Умножим первое равенство на 2 и сложим со вторым ($GA = 2GA_1$). Получим
$2MA_1^2 + MA^2 = 3MG^2 + 2GA_1^2 + GA^2$ или ($GA_1 = \frac{1}{3}AA_1$)
$2MA_1^2 + MA^2 = 3MG^2 + \frac{2}{3}AA_1$.(*)
Далее по формуле задачи 9 имеем
$2MA_1^2 = MB^2 + MC^2 - Bc^2$,
$\frac{2}{3}2AA_1^2 = \frac{1}{6}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2)$. Заменив теперь в равенстве (*) $2MA_1^2$ и $\frac{2}{3}AA_1^2$, получим требуемое.

15. Воспользуйтесь теоремой Лейбница (задача 14):
$AM^2 + BM^2 + CM^2 \geq \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$. Но сумма квадратов сторон треугольника призаданном периметре будет наименьшей для правильного треугольника:
$\frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2) \geq (\frac{AB+BC+CA}{3})^2 = \frac{4}{9}p^2$.

16. Обозначим через A_1 середину $BC(2\overrightarrow{MA_1} = -\overrightarrow{MA})$. Тогда $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA_1} = 0$. Обратно, пусть M_1 – такая точка, что $\overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{M_1B} + \overrightarrow{M_1C} = 0$, M – точка пересечения медиан. Имеем
$0 = \overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{M_1B} + \overrightarrow{M_1C} = (\overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MA}) +$
$+(\overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MC}) = 3\overrightarrow{M_1M}(\overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$.

17. Воспользуемся утверждением предыдущей задачи. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть A_0, B_0, C_0 – центры квадратов, построенных соответственно на сторонах BC, CA и AB, M – точка пересечения медиан ABC. Нам достаточно доказать, что $\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{MB_0} + \overrightarrow{MC_0} = 0$. Но $\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{MB_0} + \overrightarrow{MC_0} =$
$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA_0} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB_0} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC_0} =$
$* = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{BA_0} + \overrightarrow{CB_0} + \overrightarrow{AC_0})$. Далее имеем $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} = 0$. Также нулю равна и вторая сумма. Это следует из того, что вектора $\overrightarrow{BA_0}$, $\overrightarrow{CB_0}$ и $\overrightarrow{AC_0}$ получаются соответственно из $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB}$ поворотом на 45° в одном и том же направлении и умножением на $\frac{\sqrt{2}}{2}$.