



Methode de vasicek

Explicitation de la discrétisation exact de
vasicek à un facteur et estimation des
paramètres

Ouedraogo Makemissa



Methode de vasicek

Explicitation de la discrétisation exact de
vasicek à un facteur et estimation des
paramètres

Ouedraogo Makemissa

Supervisor: Mme Konan

MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

ACTUARIAT

Master 1 en Actuariat

Contents

Contents	i
List of Figures	iv
1 Introduction	1
2 Processus Autoregressif	2
2.1 Le retour à la moyenne	2
2.2 Illustration	3
3 Modèle de Vasicek	4
3.1 Hypothèses et Formulation	4
3.2 Discrétisation exacte	5
3.3 Paramètres estimés	6
4 Implémentation avec R et excel et Interprétation	10
4.1 IMPLEMENTATION	10
4.1.1 Implémentation avec R	10
4.1.2 implémentation avec Excel	11
4.2 INTERPRETATION	13
4.2.1 Implémentation VBA Excel sur 650 périodes et simulation Monte-Carlo	14
5 Limites et Alternatives du Modèle de Vasicek	16
5.1 Les limites	16
5.2 Alternatives pour Contourner Ces Limites	17
6 Conclusion	18

List of Figures

2.1	Illustration du retour à la moyenne	3
4.1	INTERPOLATION DES TAUX PAR LA METHODE DE VASICEK . .	12
4.2	Comparaison entre les taux observés et les taux extrapolés	13
4.3	Comparaison entre des taux observés et la moyenne des taux	14
4.4	Simulation de Monte - Carlo	15

Introduction

La modélisation des taux d'intérêt joue un rôle central dans la gestion des risques financiers, en particulier dans le domaine de l'assurance vie, où les engagements à long terme nécessitent des estimations fiables des évolutions futures des taux. Parmi les modèles stochastiques utilisés, le modèle de Vasicek à un facteur se distingue par sa simplicité et sa capacité à capturer des dynamiques réalistes, comme le retour à la moyenne, tout en étant mathématiquement simple. Le modèle n'impose aucune contrainte sur les taux d'intérêt, ce qui peut entraîner des valeurs négatives. Cela découle de la nature du processus stochastique utilisé, où la composante aléatoire (σdW_t) peut être négative.

Dans cet exposé, nous explorons d'abord la discrétisation exacte du modèle de Vasicek, une étape cruciale pour le rendre applicable dans un contexte numérique. Nous abordons ensuite la méthode d'estimation des paramètres du modèle à partir d'une courbe de taux donnée. Enfin, nous présentons une application pratique sous Excel et VBA pour extrapoler la courbe de taux sur 117 périodes, en simulant l'évolution future des taux d'intérêt.

Cet exposé vise à allier théorie et pratique, en mettant en lumière les forces et les limites de ce modèle dans un cadre actuariel.

Processus Autoregressif

Le modèle de Vasicek est un modèle de taux d'intérêt d'équilibre, basé sur l'idée d'un retour à la moyenne des taux d'intérêts.

Tout part d'un processus autoregressif (AR). Un processus autoregressif est un modèle de série temporelle qui fait la régression d'une variable dépendante en fonction d'une ou de plusieurs valeurs passées de la variables elle-même.

Lorsque c'est une régression avec une seule valeur passée c'est un AR(1) Lorsque c'est une régression avec plusieurs valeurs passées c'est un AR(t)

Ici nous nous focaliserons sur le processus AR(1).

Un AR(1) est un processus stochastique de la forme:

$$Y_t = a + bY_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.1)$$

Où a et b sont des constantes, ϵ_t est un terme d'erreur aléatoire, $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Si $b = 1$, le processus est une marche aléatoire.

Si $b = 0$, alors Y_t est juste un bruit blanc.

Si $0 < b < 1$, c'est un processus de retour à la moyenne.

2.1 Le retour à la moyenne

Si un processus est dit processus de retour à la moyenne, cela signifie qu'il a tendance à revenir à une moyenne constante à long terme.

La vitesse de ce retour à la moyenne mesure le temps moyen que mets un processus à revenir à sa moyenne à long terme.

Le processus de retour à la moyenne convient à l'étude des taux d'intérêt.

Vasicek suppose que la source fondamentale d'incertitude dans l'économie est le taux de court terme.

Le taux de court terme est le taux de rendement annualisé d'un investissement à très court terme.

2.2 Illustration

Lorsque les taux d'intérêts sont très élevés, ils décroissent vers la moyenne.

Lorsque les taux d'intérêts sont très bas, ils croissent vers la moyenne.

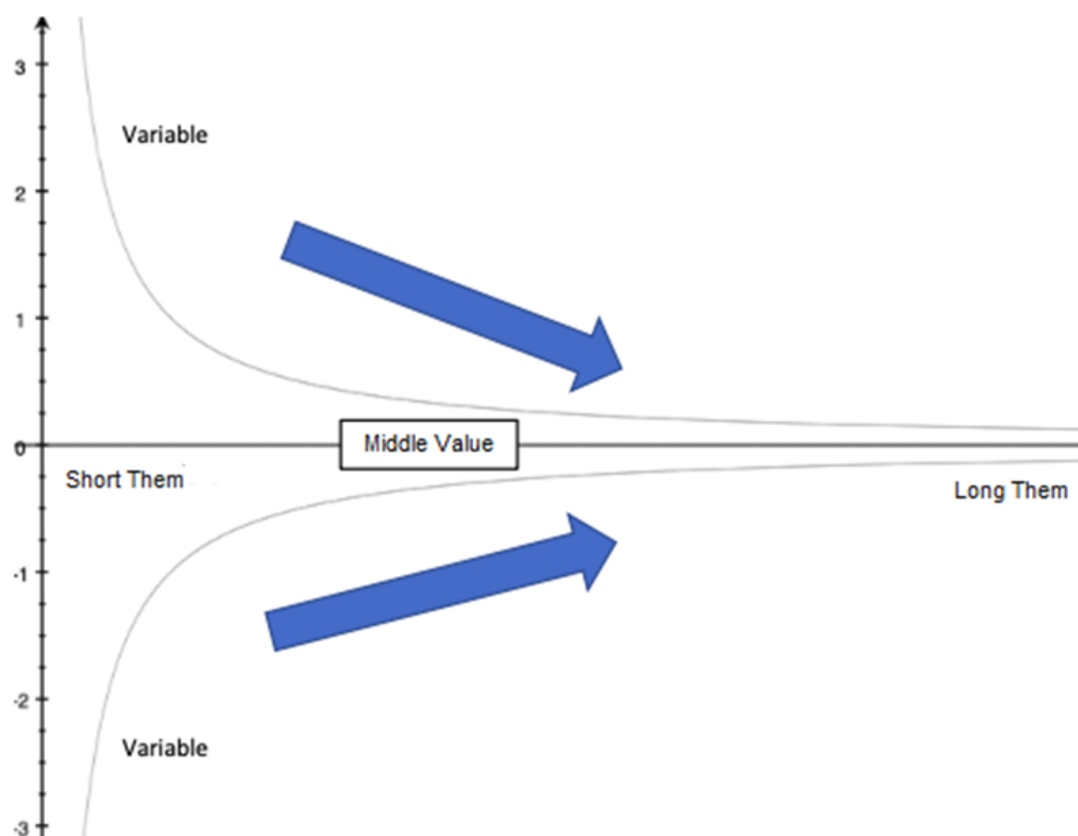


Figure 2.1: RETOUR A LA MOYENNE

Les processus de taux d'intérêt ont été définis à l'aide d'équations différentielles stochastiques. En général, les modèles sont divisés en modèles d'équilibre et en modèles de non-arbitrage (ou modèle sans arbitrage). Nous nous concentrons sur les modèles d'équilibre et, en particulier, le modèle Vasicek.

Modèle de Vasicek

Le modèle Vasicek a été introduit pour la première fois par Oldrich Vasicek en 1977 pour décrire le comportement des taux d'intérêt à court terme. Il est depuis devenu un outil fondamental dans la recherche sur les titres à revenu fixe et la gestion des risques. Le modèle suppose que les taux d'intérêt sont déterminés par deux facteurs principaux : une moyenne constante à long terme et une composante de choc aléatoire.

3.1 Hypothèses et Formulation

Le modèle Vasicek, est un modèle de taux d'intérêt à un facteur qui suppose que les taux d'intérêt suivent un processus de retour à la moyenne.

L'un des aspects fondamentaux du modèle de Vasicek est son mécanisme de retour à la moyenne. Cela signifie que les taux d'intérêt ont tendance à se rapprocher de leur valeur moyenne à long terme. Ce phénomène traduit l'idée que les niveaux extrêmes de taux d'intérêt sont peu susceptibles de perdurer indéfiniment. Ainsi, les taux oscillent autour d'une tendance centrale, permettant au modèle de représenter la nature cyclique des variations des taux d'intérêt.

Considérons un exemple où la moyenne à long terme des taux d'intérêt est de 5%. Si le taux actuel est de 4%, le modèle prévoit une hausse progressive pour converger vers cette moyenne. Inversement, si le taux actuel est de 6%, il devrait diminuer au fil du temps, s'alignant également sur la moyenne de 5%.

Le modèle Vasicek intègre le caractère aléatoire via un processus stochastique. Il suppose que la variation des taux d'intérêt est normalement distribuée et influencée par un choc aléatoire. Cette composante aléatoire permet de modéliser les fluctuations imprévisibles des taux d'intérêt, capturant ainsi l'incertitude inhérente aux marchés financiers.

Ici, Le taux d'intérêt suit un modèle d'"Ornstein-Uhlenbeck" selon l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t)dt + \sigma dB_t \quad (3.1)$$

Où κ , θ et σ sont des constantes et B_t un processus de Wiener ou mouvement Brownien.

Les constantes κ , θ peuvent être vues comme :

- θ : moyenne de long terme du taux court
- κ : vitesse de retour à la moyenne

3.2 Discrétisation exacte

La simulation d'un processus d'Itô pourra être effectuée directement (sans erreur de discrétisation) dès lors que celui-ci admet une discrétisation exacte. Définissons le terme discrétisation exacte qui peut apparaître comme une oxymore et voir que dans le cas du modèle de Vasicek, la simulation des processus pourra passer par une discrétisation exacte.

La discrétisation d'une équation différentielle stochastique consiste à transformer cette équation différentielle stochastique en une équation différentielle discrète.

Pour le modèle de Vasicek elle s'effectue comme suit:

$dX_t = \kappa(\theta - X_t)dt + \sigma dB_t \quad (3.2)$		$e^{\int_0^t \kappa ds} = e^{\kappa t} \quad (3.8)$
$dX_t = \kappa(\theta - X_t)dt \quad (3.3)$		$\frac{d}{dt} (e^{\kappa t} X) = e^{\kappa t} \frac{dX}{dt} + X \frac{d}{dt} (e^{\kappa t}) \quad (3.9)$
$dX_t + \kappa X_t dt = \kappa \theta \quad (3.4)$		$= e^{\kappa t} \frac{dX}{dt} + X e^{\kappa t} \frac{d}{dt} (\kappa t) \quad (3.10)$
$\frac{dX}{dt} + \kappa X = b \quad (3.5)$		$= e^{\kappa t} \frac{dX}{dt} + X e^{\kappa t} \kappa \quad (3.11)$
$e^{\kappa t} \frac{dX}{dt} + e^{\kappa t} \kappa X = e^{\kappa t} b \quad (3.6)$		
$\frac{d}{dt} (e^{\kappa t} X) = e^{\kappa t} b \quad (3.7)$		

$$dX_t = \kappa \theta dt - \kappa X_t dt + \sigma dB_t \quad (3.12)$$

$$dX_t + \kappa X_t = \kappa \theta dt + \sigma dB_t \quad (3.13)$$

$$(3.14)$$

en utilisant le lemme d'Itô, cela implique que :

$$e^{\kappa t} dX_t + \kappa e^{\kappa t} X_t = \kappa \theta e^{\kappa t} dt + \sigma e^{\kappa t} dB_t \quad (3.15)$$

$$d(e^{\kappa t}) = \kappa \theta e^{\kappa t} dt + \sigma e^{\kappa t} dB_t \quad (3.16)$$

$$\int_0^T d(e^{\kappa t} X_t) = \int_0^T \kappa \theta e^{\kappa t} dt + \int_0^T \sigma e^{\kappa t} dB_t \quad (3.17)$$

$$e^{\kappa T} X_T - e^0 X_0 = \kappa \theta \frac{e^{\kappa T} - e^0}{\kappa} + \sigma \int_0^T e^{\kappa t} dB_t \quad (3.18)$$

$$X_T - X_0 e^{-\kappa T} = \theta (1 - e^{-\kappa T}) + \sigma e^{-\kappa T} \int_0^T e^{\kappa t} dB_t \quad (3.19)$$

$$X_T = X_0 e^{-\kappa T} + \theta (1 - e^{-\kappa T}) + \sigma \int_0^T e^{-\kappa(T-t)} dB_t \quad (3.20)$$

l'espérance et la variance du modèle discrétisé sont :

soit $\Delta t = t_i - t_{i-1}$

$$\mathbb{E}[X_{t+\Delta t}] = X_t e^{-\kappa \Delta t} + \theta (1 - e^{-\kappa \Delta t}) \quad (3.21)$$

$$V[X_{t+\Delta t}] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa \Delta t}) \quad (3.22)$$

Modèle devient donc :

$$X_{t+\Delta t} = X_t e^{-\kappa \Delta t} + \theta (1 - e^{-\kappa \Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa \Delta t}}{2\kappa}} \epsilon \quad (3.23)$$

Avec $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$

3.3 Paramètres estimés

Soit Y tel que :

$$Y_{i+1} = bY_i + a + \epsilon_{i+1}$$

avec:

$$Y_{i+1} = X_{t+\Delta t}$$

$$Y_i = X_t$$

$$\epsilon_{i+1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa \Delta t}}{2\kappa}})$$

$$b = e^{-\kappa\Delta t} \quad (3.24)$$

$$a = \theta \left(1 - e^{-\kappa\Delta t}\right) \quad (3.25)$$

$$Se = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa\Delta t}}{2\kappa}} \quad (3.26)$$

$$\kappa = -\frac{\ln b}{\Delta t} \quad (3.27)$$

$$\theta = \frac{a}{1 - b} \quad (3.28)$$

$$\sigma = Se \sqrt{\frac{-2\ln b}{(1 - b^2)\Delta t}} \quad (3.29)$$

L'estimation du modèle par la méthode des moindres carré nous donne :

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n X_{t_i} - b \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}}{n} \quad (3.30)$$

$$\hat{b} = \frac{n \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}} X_{t_i} - \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}} \sum_{i=1}^n X_{t_i}}{n \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}} \right)^2} \quad (3.31)$$

$$\hat{\epsilon} = \sqrt{n \sum_{i=1}^n X_{t_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_{t_i} \right)^2} \quad (3.32)$$

Estimation du modèle par la méthode du maximum de vraisemblance:

La fonction de vraisemblance s'écrit come suit:

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{1}{V[X_{t+\Delta t}]} e^{\left(\frac{-1}{2} \left(\frac{x_i - \theta - (x_{i-1} - \theta) e^{-\kappa\Delta t}}{V[X_{t+\Delta t}]} \right)^2 \right)} \quad (3.33)$$

Soit $V[X_{t+\Delta t}] = S^2$

La Log-Vraisemblance est :

$$l = \log(L) \quad (3.34)$$

$$= \frac{-1}{2} \log \left(\frac{1}{2\pi r^2} \right) + \sum_{i=1}^n \log \left[\exp \left(\frac{-1}{2} \left(\frac{x_i - \theta - (x_{i-1} - \theta) e^{-\alpha\Delta t}}{S} \right)^2 \right) \right] \quad (3.35)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\log(2\pi) + \log(S^2) + \frac{(x_i - bx_{i-1} - c)^2}{S^2}] \quad (3.36)$$

Nous cherchons \hat{S}^2 , $\hat{\theta}$ et \hat{b} Déterminons \hat{S}^2

$$\frac{\partial l}{\partial S^2} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[0 + \frac{1}{S^2} - \frac{(x_i - bx_{i-1} - c)(1)}{S^4} \right] = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{n}{S^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - bx_{i-1} - c)^2}{S^4} \quad (3.38)$$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - bx_{i-1} - \theta(1 - b))^2 \quad (3.39)$$

Déterminons $\hat{\theta}$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[0 + \frac{1}{S^2} \cdot 2\{x_i - bx_{i-1} - \theta(1 - b)\}\{-(1 - b)\} \right] = 0 \quad (3.40)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - bx_{i-1}) = n\theta \sum_{i=1}^n (1 - b) \quad (3.41)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - bx_{i-1})}{n \sum_{i=1}^n (1 - b)} \quad (3.42)$$

Après avoir déterminé \hat{S}^2 et $\hat{\theta}$ nous allons chercher \hat{b} .

$$\frac{\partial l}{\partial b} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{0 + 0 + \frac{2}{S^2} (x_i - bx_{i-1} - c)(0 - x_{i-1})\} = 0 \quad (3.43)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{2}{S^2} (x_i - bx_{i-1} - c)(-x_{i-1}) = 0 \quad (3.44)$$

$$\sum_{i=1}^n (-x_i x_{i-1} + bx_{i-1}^2 + cx_{i-1}) = 0 \quad (3.45)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i x_{i-1} - \sum_{i=1}^n c x_{i-1}}{\sum_{i=1}^n x_{i-1}^2} \quad (3.46)$$

Notre paramètre b dépendant de c , nous devons donc déterminer c .

$$\frac{\partial l}{\partial c} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ 0 + \frac{2}{s^2} (x_i + bx_{i-1} - c)(-1) \right\} = 0 \quad (3.47)$$

$$c = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - bx_{i-1})}{n} \quad (3.48)$$

On a alors:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i x_{i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - bx_{i-1})}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_{i-1}}{\sum_{i=1}^n x_{i-1}^2} \quad (3.49)$$

$$b \left[n \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_{i-1} \right)^2 \right] = n \sum_{i=1}^n x_i x_{i-1} - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_{i-1} \quad (3.50)$$

$$\hat{b} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i x_{i-1} - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_{i-1}}{n \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_{i-1} \right)^2} \quad (3.51)$$

Dans la suite nous utiliserons l'estimation du maximum de vraisemblance donné par :

$$\hat{\kappa} = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \end{pmatrix}^T$$

avec: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

Ron, 2019 Ayraanci, 2013

Implémentation avec R et excel et Interprétation

4.1 IMPLEMENTATION

4.1.1 Implémentation avec R

```
#Code pour lire la bd
data <- read.csv2("C:/Users/makem/OneDrive/Documents/Proje4t_
    courbe de taux 1.csv", header = TRUE)
data <- data$Taux.en..
data <- as.matrix(data)

#generer une fonction pour la calibration du modele
Vasicek_Params <- function(data, dt) {
N <- length(data)
ones <- seq(1,1,length.out = (N-1))
x <- cbind(ones, data[1:(N-1)])
#Maximum de vraisemblance
ols <- solve(t(x) %*% x) %*% (t(x) %*% data[2:N])
resid <- data[2:N] - (x %*% ols)

c <- ols[1]
b <- ols[2]
delta <- sd(resid)

kappa <- -(log(b)/dt)
theta <- c/(1-b)/100
sigma <- delta/sqrt((b^2-1)*dt/(2 * log(b)))

params <- c(kappa, theta, sigma)
print(params)
}
params <- Vasicek_Params(data, 1)

[1] 0.03115710 2.01358481 0.08072445
```

- La moyenne des taux estimé $\hat{\theta}$ est 2.01358481
- La vitesse de retour à la moyenne estimé $\hat{\kappa}$ est 0.03115710
- La variance estimée $\hat{\sigma}$ est 0.08072445

4.1.2 implémentation avec Excel

```

Dim N As Long ' Nombre de points ésimuls
Dim dt As Double ' Pas de temps
Dim r0 As Double ' Valeur initiale
Dim theta As Double ' Moyenne de long terme
Dim kappa As Double ' Taux de retour à la moyenne
Dim sigma As Double ' éVolatilité
Dim r_t As Double ' Taux courant
Dim Z As Double ' Variable éalatoire normale
Dim i As Long ' Compteur pour la boucle

' éParamtres du émodle
N = 117 ' Nombre de points à simuler
dt = 1 ' Pas de temps (mensuel)
r0 = 3.9064533625687 ' Taux initial (3%)
theta = 2.01413555576111 ' Moyenne de long terme
kappa = 3.07238329407342E-02 ' Taux de retour à la moyenne
sigma = 7.91696545752616E-02 ' éVolatilité

' Initialisation
r_t = r0
Randomize ' Pour éégnrer des nombres éalatoires édiffrents à chaque éexécution

' En-étte

Worksheets("Taux swap sur 120 mois").Cells(9, 8).Value = "r_t"

' Boucle pour simuler les valeurs de r_t
For i = 2 To N
    ' ééGnration d'une variable éalatoire normale Z ~ N(0, 1)
    Z = WorksheetFunction.Norm_Inv(Rnd(), 0, 1)

    ' Calcul de r_t avec la solution exacte
    r_t = r_t * Exp(-kappa * dt) + theta * (1 - Exp(-kappa * dt)) + _
        sigma * Sqr((1 - Exp(-2 * kappa * dt)) / (2 * kappa)) * Z

    ' Enregistrement des érsultats
    Worksheets("Taux swap sur 120 mois").Cells(i + 9, 8).Value = r_t
Next i

MsgBox "Simulation étermine ! Consultez la feuille pour les érsultats.",
    vbInformation
End Sub

```

vitesse de rm	0,030723833
Taux moyen l	2,014135556
volatilité	0,079169655

Mois	Taux en %	$r(t+1)-r(t)$	$a(b-r(t))$	$[r(t+1)-r(t)]-[a(b-r(t))]$	PDF	ln(PDF)	r_t	$r_t - b$	Somme ln	129,597136
1	3,906									
2	3,804	-0,10225720	-0,0581393	-0,04411794	4,314387249	1,46195531	3,81573442	1,801598867		
3	3,664	-0,14039914	-0,0549975	-0,08540162	2,816257645	1,03540893	3,75282523	1,738689675		
4	3,659	-0,00514724	-0,0506839	0,04553668	4,270831498	1,45180854	3,70164841	1,687512854		
5	3,218	-0,44070508	-0,0505258	-0,39017930	2,67945E-05	-10,527313	3,5089216	1,494786042		
6	3,126	-0,09207152	-0,0369856	-0,05508589	3,95570168	1,375158	3,484758	1,470622449		
7	3,063	-0,06318839	-0,0341568	-0,02903154	4,711418704	1,5498907	3,52703476	1,512899209		
11	2,969	-0,09411303	-0,0322155	-0,06189757	3,712074944	1,311591	3,56005937	1,545923816		
12	2,974	0,00500000	-0,0293239	0,03432394	4,587068844	1,52324122	3,52800632	1,513870767		
13	2,979	0,00500000	-0,0294776	0,03447756	4,583202967	1,52239809	3,49904621	1,484910654		
14	2,984	0,00500000	-0,0296312	0,03463118	4,579323107	1,52155119	3,43038938	1,416253828		
15	2,989	0,00500000	-0,0297848	0,03478480	4,575429305	1,52070053	3,32265655	1,308520995		
16	2,994	0,00500000	-0,0299384	0,03493842	4,571521601	1,5198461	3,15672735	1,142591791		
17	2,999	0,00500000	-0,030092	0,03509203	4,567600038	1,51898791	3,17245301	1,158317456		
18	3,004	0,00500000	-0,0302457	0,03524565	4,563664656	1,51812595	3,11783611	1,10370055		
19	3,009	0,00500000	-0,0303993	0,03539927	4,559715497	1,51726023	3,20216707	1,188031519		
20	3,014	0,00500000	-0,0305529	0,03555289	4,555752602	1,51639074	3,21342024	1,199284689		
21	3,019	0,00500000	-0,0307065	0,03570651	4,551776014	1,51551749	3,14806216	1,133926604		
22	3,024	0,00500000	-0,0308601	0,03586013	4,547785774	1,51464047	3,2102097	1,196074148		
23	3,029	0,00500000	-0,0310137	0,03601375	4,543781925	1,51375969	3,21750929	1,203373734		
24	3,034	0,00500000	-0,0311674	0,03616737	4,539764508	1,51287514	3,27913688	1,265001328		
25	3,039	0,00500000	-0,031321	0,03632099	4,535733565	1,51198683	3,26108514	1,246949586		
26	3,044	0,00500000	-0,0314746	0,03647461	4,53168914	1,51109475	3,13992067	1,125785113		
27	3,049	0,00500000	-0,0316282	0,03662823	4,527631274	1,51019891	3,0483432	1,034207644		
28	3,054	0,00500000	-0,0317818	0,03678185	4,523560009	1,5092993	3,07720356	1,063068005		
29	3,059	0,00500000	-0,0319355	0,03693546	4,51947539	1,50839592	3,135882	1,121746443		
30	3,064	0,00500000	-0,0320891	0,03708908	4,515377458	1,50748878	3,16248619	1,148350637		
31	3,069	0,00500000	-0,0322427	0,03724270	4,511266257	1,50657788	3,05184574	1,037710185		
32	3,074	0,00500000	-0,0323963	0,03739632	4,507141829	1,50566321	3,05473008	1,040594523		
33	3,079	0,00500000	-0,0325499	0,03754994	4,503004218	1,50474478	2,99817346	0,984037904		
34	3,084	0,00500000	-0,0327036	0,03770356	4,498853466	1,50382258	2,83610239	0,821966837		
35	3,089	0,00500000	-0,0328572	0,03785718	4,494689618	1,50289662	2,78551295	0,771377391		
36	3,094	0,00500000	-0,0330108	0,03801080	4,490512716	1,50196689	2,72443492	0,710299363		
37	3,099	0,00500000	-0,0331644	0,03816442	4,486322805	1,50103339	2,80659206	0,7924565		
38	3,104	0,00500000	-0,033318	0,03831804	4,482119927	1,50009613	2,73970004	0,725564481		
39	3,109	0,00500000	-0,0334717	0,03847166	4,477904127	1,49915511	2,6846629	0,670527345		
40	3,114	0,00500000	-0,0336253	0,03862528	4,473675449	1,49821032	2,67601362	0,661878067		
41	3,119	0,00500000	-0,0337789	0,03877889	4,469433936	1,49726176	2,4419067	0,427771147		
42	3,124	0,00500000	-0,0339325	0,03893251	4,465179633	1,49630944	2,48539606	0,471260508		
43	3,129	0,00500000	-0,0340861	0,03908613	4,460912584	1,49535336	2,56489822	0,550762666		
44	3,134	0,00500000	-0,0342398	0,03923975	4,456632833	1,49439351	2,4935037	0,479368145		
45	3,139	0,00500000	-0,0343934	0,03939337	4,452340424	1,4934299	2,41694543	0,402809877		
46	3,144	0,00500000	-0,034547	0,03954699	4,448035403	1,49246252	2,42796145	0,413825894		
47	3,149	0,00500000	-0,0347006	0,03970061	4,443717813	1,49149137	2,32963808	0,315502524		
48	3,154	0,00500000	-0,0348542	0,03985423	4,439387699	1,49051646	2,28495923	0,270823678		
49	3,159	0,00500000	-0,0350078	0,04000785	4,435045107	1,48953779	2,31834493	0,304209378		
50	3,164	0,00500000	-0,0351615	0,04016147	4,43069008	1,48855535	2,23279391	0,218658357		
51	3,095	-0,06890000	-0,0353151	-0,03358491	4,605469909	1,52724471	2,26590118	0,251765623		
52	3,026	-0,06890000	-0,0331982	-0,03570179	4,551898541	1,51554441	2,21741267	0,203277116		
53	2,957	-0,06890000	-0,0310813	-0,03781866	4,495734976	1,50312916	2,09981724	0,085681682		
54	2,888	-0,06890000	-0,0289645	-0,03993553	4,437090981	1,48999898	2,07910982	0,06497426		
55	2,819	-0,06890000	-0,0268476	-0,04205240	4,376082189	1,47615385	1,98478475	-0,02935081		
56	2,750	-0,06890000	-0,0247307	-0,04416927	4,312827721	1,46159377	2,05431542	0,040179868		
57	2,681	-0,06890000	-0,0226139	-0,04628615	4,247449797	1,44631876	2,0439103	0,029774747		
58	2,612	-0,06890000	-0,020497	-0,04840302	4,180073349	1,43032879	2,10943629	0,095300731		
59	2,543	-0,06890000	-0,0183801	-0,05051989	4,110825621	1,41362389	2,12830761	0,114172058		
60	2,475	-0,06890000	-0,0162632	-0,05263676	4,039835775	1,39620404	2,13607641	0,121940856		
61	2,406	-0,06890000	-0,0141464	-0,05475363	3,967234489	1,37806925	2,19735687	0,183221314		
62	2,337	-0,06890000	-0,0120295	-0,05687051	3,893153566	1,35921951	2,14320375	0,129068197		
63	2,268	-0,06890000	-0,0099126	-0,05898738	3,817725536	1,33965484	2,29502919	0,280893633		
64	2,199	-0,06890000	-0,0077957	-0,06110425	3,741083269	1,31937521	2,2730554	0,258919847		
65	2,130	-0,06890000	-0,0056789	-0,06322112	3,663359593	1,29838065	2,26476528	0,250629724		
66	2,061	-0,06890000	-0,003562	-0,06533800	3,584686917	1,27667114	2,24717504	0,233039481		
67	1,992	-0,06890000	-0,0014451	-0,06745487	3,505196866	1,25424669	2,31525216	0,301116606		
68	1,923	-0,06890000	0,00067174	-0,06957174	3,425019927	1,23110729	2,409653	0,395517449		
69	1,854	-0,06890000	0,00278861	-0,07168861	3,344285104	1,20725295	2,32969786	0,3155623		
70	1,786	-0,06890000	0,00490548	-0,07380548	3,263119588	1,18268367	2,26688238	0,252746823		
71	1,717	-0,06890000	0,00702236	-0,07592236	3,18164844	1,15739944	2,1287189	0,114583342		
72	1,648	-0,06890000	0,00913923	-0,07803923	3,09999429	1,13140027	2,16278581	0,148650251		
73	1,579	-0,06890000	0,0112561	-0,08015610	3,018277051	1,10468616	2,23812366	0,223988109		
74	1,510	-0,06890000	0,01337297	-0,08227297	2,936613652	1,0772571	2,24532492	0,231189368		
75	1,579	0,06890000	0,01548984	0,05341016	4,013490977	1,38966143	2,22942292	0,215287368		
76	1,648	0,06890000	0,01337297	0,05552703	3,940333783	1,37126544	2,23766767	0,223532114		
77	1,717	0,06890000	0,0112561	0,05764390	3,865745307	1,3521545	2,12582108	0,11168552		
78	1,786	0,06890000	0,00913923	0,05976077	3,789858248	1,33232862	2,09421844	0,080082885		
79	1,854	0,06890000	0,00702236	0,06187764	3,712805507	1,31178779	2,15827867	0,144143113		
80	1,923	0,06890000	0,00490548	0,06399452	3,634719798	1,29053202	2,18308719	0,168951634		
81	1,992	0,06890000	0,00278861	0,06611139	3,555733289	1,26856131	2,2374409	0,223305341		
82	2,061	0,06890000	0,00067174	0,06822826	3,475977228	1,24587566	2,30881945	0,294683899		
83	2,130	0,06890000	-0,0014451	0,07034513	3,395581601	1,22247506	2,43574218	0,42160662		
84	2,199	0,06890000	-0,003562	0,07246200	3,314674785	1,19835951	2,44479696	0,430661408		
85	2,268	0,06890000	-0,0056789	0,07457888	3,233383231	1,17352903	2,50791581	0,493780257		
86	2,337	0,06890000	-0,0077957	0,07669575	3,151831144	1,1479836	2,37319623	0,359060672		
87	2,406	0,06890000	-0,0099126	0,07881262	3,070140194	1,12172323	2,33456522	0,320429666		
88	2,475	0,06890000	-0,0120295	0,08092949	2,988429235	1,09474791	2,31843472	0,304299162		
89	2,543	0,06890000	-0,0141464	0,08304637	2,90681404	1,06705765	2,27481771	0,260682152		
90	2,612	0,06890000	-0,0162632	0,08516324	2,82540706	1,03865245	2,29416737	0,280031814		
91	2,681	0,06890000	-0,0183801	0,08728011	2,744317195	1,0095323	2,33116676	0,317031202		

4.2 INTERPRETATION

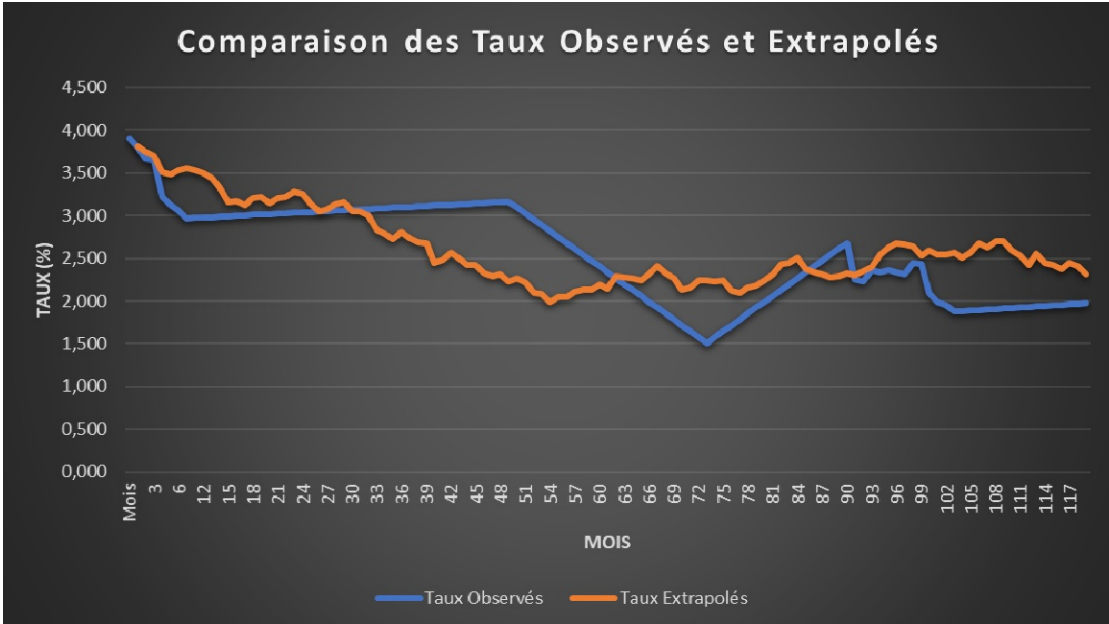


Figure 4.2: courbes des taux observés et taux extrapolés

La tendance générale des taux observé est respecté par notre modèle. Sur la première période on constate que les deux coïncident presque parfaitement. Sur la deuxième on observe la même tendance à la baisse mais beaucoup moins abrupte (plus lissée) avec notre modèle. On observe la presque stagnation sur la fin de période des deux types de taux (observés et extrapolés). Globalement le modèle respecte les observations. Mais n'arrive pas à représenter les pics, qui doivent correspondre à des phénomènes particulier qui ont provoqué une chute ou une hausse.

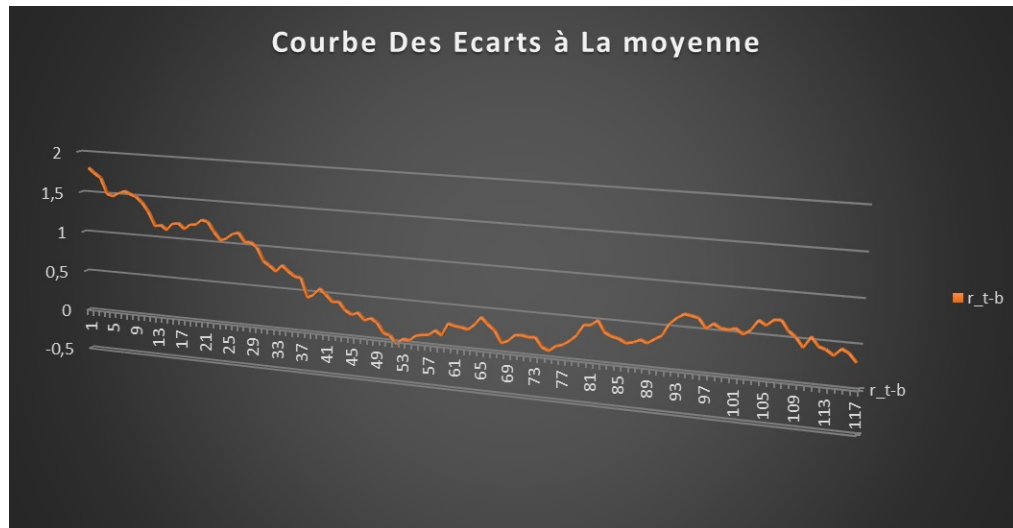


Figure 4.3: Comparaison entre des taux observés et la moyenne des taux

Les écarts à la moyenne ont une tendance à se rapprocher de zéro. Nos valeurs estimées ne sont pas très éloignées de la moyenne.

4.2.1 Implémentation VBA Excel sur 650 périodes et simulation Monte-Carlo

```
Dim a As Double, b As Double, sigma As Double, dt As Double
Dim r As Double, r_next As Double, Z As Double
Dim i As Integer, j As Integer
Dim numCurves As Integer, numSteps As Integer
Dim startRow As Integer, startCol As Integer

' Parametres du module
a = 0.000131552 ' Vitesse de reversion
b = 0.050521399 ' Niveau moyen
sigma = 0.00651328 ' Volatilite
dt = 1 ' Pas de temps (unite arbitraire)
r = 3.98898
' Taux initial
numSteps = 649 ' Nombre de pas de temps
numCurves = 10 ' Nombre de courbes simulees

' Position de depart pour les donnees dans la feuille
startRow = 10 ' Ligne de debut pour les donnees
startCol = 8 ' Colonne de debut pour la premiere courbe
```

```

' En-tetes des colonnes
For j = 1 To numCurves
    Cells(9, startCol + j - 1).Value = "Simulation" & j
Next j

' Generer les temps (colonne 1)
For i = 0 To numSteps
    Cells(startRow + i, 1).Value = i
Next i

' Simuler plusieurs courbes
For j = 1 To numCurves
    r = 3.98898 ' Reinitialiser le taux initial pour chaque courbe

    For i = 0 To numSteps
        ' Generer une variable normale standard Z ~ N(0, 1)
        Z = WorksheetFunction.NormSInv(Rnd())

        ' Calcul du taux suivant selon la formule discretise
        r_next = r * Exp(-a * dt) + b * (1 - Exp(-a * dt)) + _
            sigma * Sqr((1 - Exp(-2 * a * dt)) / (2 * a)) * Z

        ' Enregistrer le taux simule
        Cells(startRow + i, startCol + j - 1).Value = r_next

        ' Passer au taux suivant
        r = r_next
    Next i
Next j

' Message une fois termine
MsgBox "Simulation terminee pour " & numCurves & " courbes avec " & numSteps
    & " points chacune."
End Sub

```

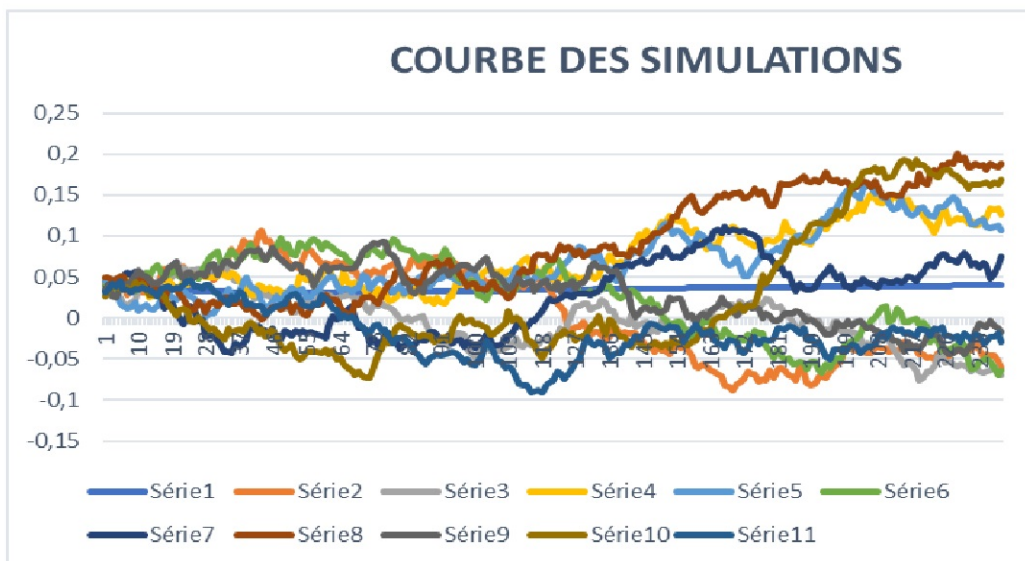


Figure 4.4: Simulation de Monte-Carlo sur 100

Limites et Alternatives du Modèle de Vasicek

5.1 Les limites

- Volatilité Constante (σ)

Description : La volatilité des taux est supposée constante dans le modèle de Vasicek. En réalité, les taux d'intérêt montrent souvent une volatilité variable, dépendant des niveaux des taux ou des conditions du marché.

Impact : Cela limite la capacité du modèle à capturer les variations de volatilité observées dans les courbes de taux réelles.

- Indépendance des Mouvements Brownien Description : Le modèle suppose que les fluctuations des taux d'intérêt sont purement aléatoires et suivent un mouvement brownien standard.

Impact : Cela peut ne pas refléter des facteurs de marché tels que des événements macroéconomiques, des politiques monétaires, ou des chocs exogènes.

- Hypothèse de Réversion à la Moyenne Simpliste Description : Le modèle suppose une réversion constante vers un taux moyen θ . En pratique, le taux moyen peut varier dans le temps en fonction des cycles économiques ou des politiques monétaires.

Impact : Le modèle peut sous-estimer ou surestimer les tendances longues des taux, surtout en période de changement structurel.

- Limites pour les Taux Long Terme Description : Le modèle de Vasicek a du mal à capturer la structure réelle des taux longs, qui peuvent être influencés par des facteurs comme l'inflation ou la prime de terme.

Impact : Cela peut entraîner des erreurs dans les projections des taux à long

terme ou dans la tarification des obligations longues.

- Faible Ajustement aux Courbes Réelles Description : Les courbes de taux observées sur les marchés financiers présentent souvent des formes complexes (croissantes, décroissantes, en cloche, etc.), que le modèle de Vasicek ne reproduit pas facilement.

Impact : Le modèle est souvent trop simpliste pour s'ajuster avec précision à une courbe de taux réelle, ce qui peut réduire sa pertinence pour la calibration directe.

- Non-Prise en Compte de Multiples Facteurs Description : Le modèle est un modèle unifactoriel, où l'évolution des taux d'intérêt dépend d'un seul facteur (le taux instantané).

Impact : Il ignore les effets de plusieurs facteurs comme l'inflation, les primes de risque ou les conditions de liquidité, qui peuvent influencer les taux à différents horizons.

5.2 Alternatives pour Contourner Ces Limites

- Modèle CIR (Cox-Ingersoll-Ross) : Contraint les taux à rester positifs et introduit une volatilité dépendant des niveaux de taux.
- Modèles multifactoriels : Intègrent plusieurs facteurs pour mieux capturer les dynamiques complexes des taux.
- Modèles à volatilité stochastique : Permettent une meilleure prise en compte des variations de volatilité observées sur les marchés.

Conclusion

Le modèle de Vasicek est un bon point de départ grâce à sa simplicité et sa robustesse. Cependant, ses limites le rendent moins adapté pour des applications nécessitant une grande précision, notamment dans des contextes de taux bas, de volatilité variable ou de courbes de taux complexes.

Bibliography

Ayranci, Gönül (2013). Distribution of the parameters in Vasicek model. Yasar University.

Ron, Sam John (2019). Yield Curve Analysis, Monte Carlo simulations and Variance Reduction. RPubs by RStudio. URL: <https://rpubs.com/RonJohn/480219>.

