Systèmes de numération

Marie-Ange Remiche
Cours donné par Martine De Vleeschouwer

Université de Namur

Nos ordinateurs...

Au niveau matériel, toute information est codée sous la forme d'une combinaison de signaux binaires : 0 ou 1. On dit que nous *travaillons dans la base* 2.
Tout nombre, entier ou réel, doit être codé uniquement avec ses signaux mis à disposition.

Etre capable

- de transformer n'importe quel réel exprimé dans une base particulière dans une autre base,
- de réaliser quelques opérations élémentaires sur des nombres entiers positifs exprimés en base 2,
- de transformer tout nombre réel en sa représentation en virgule flottante ou virgule fixe.

Ce que nous allons voir dans ce chapitre

Table des matières

1. Nous allons *représenter des entiers* positifs dans n'importe quelle base
2. Apprendre à les *convertir* d'une base à l'autre
3. Proposer différentes alternatives pour *représenter les entiers négatifs*.
4. Aborder le *calcul binaire* : addition, soustraction, multiplication, division euclidienne, calcul de pgcd.
5. *Représenter des réels*
6. Obtenir la *notation virgule fixe* d'un réel quelconque,
7. la *notation en virgule flottante*.

Exemple

Nous avons l'habitude de compter en base 10 avec les symboles

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

Nous pourrions compter en base 12 avec les symboles

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad A \quad B$$

Définition

Un *système de numération* d'un nombre naturel est constitué

- d'une *base* $B \in \mathbb{N} : B > 1$,
- d'un ensemble de B *symboles*, appelés également *chiffres*. Chacun représente un entier compris entre 0 et $B - 1$.

Théorème

Soit $x \in \mathbb{N}$ et un système de numération de base B. Alors il existe des entiers $n, a_0, a_1, \ldots, a_n$ compris entre 0 et $B-1$ tels que

$$x = a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \ldots a_1 B^1 + a_0 B^0.$$

De plus, ces entiers $n, a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont uniques si on prend la convention que a_n n'est pas nul.

Etape 1

On divise x par B', puis le quotient obtenu par B' jusqu'à obtenir 0 comme quotient.

De la base 10 à la base 2, étape 1

Le nombre de la colonne de gauche 1324 est divisé par 2, son quotient et son reste sont indiqués.

Nombre	Quotient	Reste
1324	662	0
662	331	0
331	165	1
165	82	1
82	41	0
41	20	1
20	10	0
10	5	0
5	2	1
2	1	0
1	0	1

Etape 2

Chaque reste est converti, en l'écrivant dans la base B'. On utilise pour cela une table de conversion.

De la base 10 à la base 2, étape 2

Nombre	Quotient	Reste
1324	662	0
662	331	0
331	165	1
165	82	1
82	41	0
41	20	1
20	10	0
10	5	0
5	2	1
2	1	0
1	0	1

Chaque reste obtenu (colonne de droite) est exprimé dans la base 2, ce qui est direct ici puisque $2 < 10$.

Etape 3

Les restes sont présentés de gauche à droite en démarrant par le dernier reste obtenu.

De la base 10 à la base 2, étape 3

Nombre	Quotient	Reste
1324	662	0
662	331	0
331	165	1
165	82	1
82	41	0
41	20	1
20	10	0
10	5	0
5	2	1
2	1	0
1	0	1

On obtient alors

$$1324_{10} = 10100101100_2$$

où la notation a_b exprime le nombre a dans la base b.

Exemple

1324 en base 10 à convertir en base 13.
Nous obtenons le tableau des divisions successives

Nombre	Quotient	Reste
1324	101	11
101	7	10
7	0	7

Ainsi, nous obtenons

$$1324_{10} = 7AB_{13},$$

en utilisant la table de conversion suivante

$B = 10$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$B = 13$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C

Exemple

Soit 123002_4, écrivons le en base 7, soit 13_4.
Considérons dès lors, la table de multiplication de 13_4, nous avons

Itération	Produit
0	0_4
1	13_4
2	32_4
3	111_4

En effet, réalisons le calcul en base 10. Nous avons, par exemple,

$$3 \cdot 7 = 21$$

soit $21 = 1 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0$ ce qui donne bien 111_4.

Exemple (suite)

Divisons à présent 123002_4 par 13_4,

$$
\begin{array}{rcccccc|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & & \\
\cline{8-11}
- & 1 & 1 & 1 & & & & 3 & 3 & 1 & 3 \\
\cline{2-7}
 & & 1 & 2 & 0 & & & & & & \\
- & & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
\cline{2-7}
 & & & & 3 & 0 & & & & & \\
- & & & & 1 & 3 & & & & & \\
\cline{2-7}
 & & & & 1 & 1 & 2 & & & & \\
- & & & & 1 & 1 & 1 & & & & \\
\cline{2-7}
 & & & & & & 1 & & & &
\end{array}
$$

Remarque

Nous avons bien que $30_4 - 13_4$ donne 11_4 car

$+$	1	2	3	10	11
13_4	20	21	22	23	30

Exemple (suite)

L'étape 1 de la conversion donne ainsi

Nombre	Quotient	Reste
123002	3313	1
3313	203	2
203	11	0
11	0	11

Exemple (suite)

On utilise alors la table de conversion pour écrire les restes obtenus dans la nouvelle base.
La table de conversion est la suivante

Base 4	Base 7
0	0
1	1
2	2
3	3
10	4
11	5
12	6

Nous avons donc

$$123002_4 = 5021_7.$$

Exemple

Ecrivons 1150_{13} en base 4. Les symboles manipulés en base 13 sont

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad A \quad B \quad C$$

4 en base 13 s'écrit donc via le même symbole.

Exemple (suite)

La table de multiplication de 4 exprimée en base 13 donne

Itérations	Produits
0	0
1	4
2	8
3	C
4	13
5	17
6	$1B$
7	22
8	26
9	$2A$
A	31
B	35
C	39

Exemple (suite)

Ainsi divisant 1150 par 4 donne

$$
\begin{array}{rcccc|ccc}
 & 1 & 1 & 5 & 0 & 4 & & \\ \cline{6-8}
- & & C & & & 3 & 7 & 9 \\ \cline{2-5}
 & & 2 & 5 & & & & \\
- & & 2 & 2 & & & & \\ \cline{2-5}
 & & & 3 & 0 & & & \\
- & & & 2 & A & & & \\ \cline{2-5}
 & & & & 3 & & & \\
\end{array}
$$

On obtient finalement

Nombre	Quotient	Reste
1150	379	3
379	$B8$	3
$B8$	$2B$	3
$2B$	9	1
9	2	1
2	0	2

soit le nombre 211333_4.

Etape 1

Lorsque B' (la base vers laquelle on opère la conversion) est une puissance entière de la base de départ B, soit

$$B' = B^k,$$

pour $k \in \mathbb{N}$, on a une règle de conversion plus simple.
L'étape 1 devient découper le nombre n à convertir, en tranches de k chiffres, à partir de la droite.

Exemple

Soit la base 2 ou *binaire* et la base 16 ou *hexadécimale*.
Soit le nombre $n = 1111001010001_2$. Comme $16 = 2^4$, on découpe le nombre en tranches de 4 chiffres, on obtient

$$n = 1 \quad 1110 \quad 0101 \quad 0001$$

Etape 2

Convertir le nombre obtenu dans chaque tranche par son correspondant dans la nouvelle base.

Exemple (suite)

$$n = 1 \quad 1110 \quad 0101 \quad 0001$$

soit en notation hexadécimale

$$\begin{aligned} n &= 1 \quad 14 \quad 5 \quad 1 \\ &= 1E51_{16}. \end{aligned}$$

Exemple

Soit 32123_4 converti en base 16 on obtient $39B$ puisque

$B = 4$	10	11	12	13	20	21	22	23	30	31	32	33
$B' = 16$	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

Exemple

Soit $AA2B1C_{16}$. En base 4, nous avons

$$\begin{array}{cccccc} A & A & 2 & B & 1 & C \\ 22 & 22 & 02 & 23 & 01 & 30 \end{array}$$

soit 222202230130_4.

Définition

Il s'agit simplement ici de réserver un bit dans la représentation du nombre pour indiquer si il est positif ou négatif.

Exemple

Soit un système où cinq bits sont utilisés pour représenter un entier, le premier bit (à gauche) marqué de 1 indique que le nombre est positif, 0 que le nombre est négatif. Ainsi

Représentation binaire	décimale
10010	2
10101	5
01111	-15
11111	15

Définition

Le principe est ici d'inverser tous les bits, soit de prendre le complément à 1 pour chaque bit.

Exemple

Soit un système où quatre bits sont utilisés pour représenter un entier. On pourra avec cette méthode représenter huit chiffres seulement. Ainsi, avec la méthode du complément à 1

	Représentation	
décimale positive	binaire positive	négative
0	0000	1111
1	0001	1110
2	0010	1101
3	0011	1100
4	0100	1011
5	0101	1010
6	0110	1001
7	0111	1000

Remarque

Cette méthode a été rapidement abandonnée. Considérons les sommes suivantes

$$\begin{aligned} \text{décimal :} \quad & (-1) + 1 = 0 \\ \text{binaire :} \quad & 1110 + 0001 = 1111 \\ \text{décimal :} \quad & 1 - (1) = 0 \\ \text{binaire :} \quad & 1110 - 1110 = 0000 \end{aligned}$$

ce qui donne deux représentations binaires pour le nombre 0.

Définition

Le principe est de

- prendre le complément à 1,
- ajouter 1.

Exemple

Soit un système où quatre bits sont utilisés pour représenter un entier. A nouveau, seul 8 chiffres peuvent être représentés. Nous avons

décimale	Représentation binaire	son opposé
0	0000	0000
1	0001	1111
2	0010	1110
3	0011	1101
4	0100	1100
5	0101	1011
6	0110	1010
7	0111	1001

Calculs

Nous avons

$$0 + 0 = 00$$
$$1 + 0 = 01$$
$$0 + 1 = 01$$
$$1 + 1 = 10$$

Exemple

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ + & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccccc} & 1 & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ + & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Méthode

La multiplication par une puissance de 2 est simple. Il suffit de décaler vers la gauche la représentation du nombre d'autant de bit que la puissance de 2.

Exemple

$$\begin{aligned} 5_{10} \times 32_{10} &= 101_2 \times 100000_2 \\ &= 10100000_2 \end{aligned}$$

Méthode (suite)

Lorsqu'il ne s'agit pas d'un nombre puissance de 2, il convient alors de décomposer le produit.

Exemple

$$\begin{aligned} 5_{10} \times 9_{10} &= (4_{10} + 1_{10}) \times 9_{10} \\ &= 4_{10} \times 9_{10} + 1_{10} \times 9_{10} \\ &= 100_2 \times 1001_2 + 1_2 \times 1001_2 \\ &= 100100_2 + 1001_2 \\ &= 101101_2 \end{aligned}$$

Méthode

Pour une division d'un entier positif avec un nombre quelconque toujours positif, on peut procéder comme pour une division classique, en notant que

$$1 \div 1 = 1$$
$$0 \div 1 = 0$$

Exemple

Lorsqu'on réalise la division $47_{10} \div 13_{10}$, on obtient en base 2

$$
\begin{array}{ccccccc|cccc}
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\cline{8-11}
- & & 1 & 1 & 0 & 1 & & 1 & 1 & & \\
\cline{2-7}
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & \\
- & & & 1 & 1 & 0 & 1 & & & & \\
\cline{2-7}
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & &
\end{array}
$$

soit $47_{10} \div 13_{10}$ est égal à $11_2 =$ (3 fois 13) plus 1000_2 (= 8, comme reste).

Propriété

Soit a et b deux nombres binaires.

1. On observe que

$$a\underbrace{000\ldots0}_{k} = a \cdot 10^k,$$

avec a impair.

2. Soit a et b impairs, alors

$$\mathrm{pgcd}(a \cdot 10^p, b \cdot 10^q) = \mathrm{pgcd}(a, b) \cdot 10^r,$$

où $r = \inf(p, q)$.

3. On observe

$$\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(a - b, b).$$

Méthode

1. On supprime les zéros communs qui terminent a et b, nous avons alors
$$\mathrm{pgcd}(a, b) = H \cdot 10^r,$$
où r est le nombre de zéros communs.
2. On supprime les zéros qui terminent l'un des deux nombres.
3. Les nombres restant se terminent tous deux par 1. Deux cas se présentent
    - $(a = b) \Rightarrow \mathrm{pgcd}(a, b) = a$,
    - $a \neq b$, on passe à l'étape suivante.
4. On reprend l'étape 1 avec $\mathrm{pgcd}(\max(a, b) - \min(a, b), \min(a, b))$.

Exemple

$$\mathrm{pgcd}(110011001000, 1010100100) = \mathrm{pgcd}(1100110010, 10101001) \cdot 10^2.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{pgcd}(1100110010, 10101001) \\
&\qquad = \mathrm{pgcd}(110011001, 10101001) && \text{par l'étape 2.} \\
&\qquad = \mathrm{pgcd}(11110000, 10101001) && \text{par l'étape 4.} \\
&\qquad = \mathrm{pgcd}(1111, 10101001) && \text{par l'étape 2.} \\
&\qquad = \mathrm{pgcd}(10011010, 1111) && \text{par l'étape 4.} \\
&\qquad = \mathrm{pgcd}(1001101, 1111) && \text{par l'étape 2.} \\
&\qquad = \mathrm{pgcd}(111110, 1111) && \text{par l'étape 4.} \\
&\qquad = \mathrm{pgcd}(11111, 1111) && \text{par l'étape 2.} \\
&\qquad = \mathrm{pgcd}(10000, 1111) && \text{par l'étape 4.} \\
&\qquad = \mathrm{pgcd}(1111, 1) && \text{par l'étape 2.} \\
&\qquad = 1
\end{aligned}$$

Théorème

Soit x un nombre réel strictement positif. Alors il existe une suite d'entiers $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_1, A_0, a_1, a_2, \ldots$ compris entre 0 et $B-1$ tels que la différence

$$x - \left(A_n B^n + A_{n-1} B^{n-1} + \ldots + A_0 + a_1 B^{-1} + \ldots + a_k B^{-k}\right)$$

est positive et tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

Exemple

Le réel $1/3$ est représenté par $0,333\ldots$ en base 10 et par $0,1$ en base 3.

Théorème

Lorsque x est de la forme

$$\frac{a_p}{B^p},$$

avec a_p et p entiers, alors il existe deux écritures en base B pour x. Celles-ci sont

1. pour la première : pour tout $k > p : a_k = 0$.
2. Pour la seconde : $a'_p = a_p - 1$ et $k > p : a_k = B - 1$.

Exemple

Soit $x = 2/100$ (ou encore $2/10^2$), alors

$$\begin{aligned} x &= 0,0200000\ldots \\ &= 0,0199999\ldots \end{aligned}$$

Définition

Soit x un nombre réel non nul. Sa *représentation en virgule fixe* est

$$\{[x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0, x_{-1} x_{-2} \dots x_{-m}], b, s\},$$

où

- $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$, est appelée la *base*,
- $s \in \{0, 1\}$ est appelé le *signe*,
- $x_i \in \mathbb{N}, 0 \leq x_i < b, i = -m, \dots, n$ sont les *symboles*,
- m désigne le nombre de chiffres après la virgule,
- $n + 1$ est le nombre de chiffres avant la virgule.

Exemple

Soit en notation décimale le réel $227,375$. Sa notation en virgule fixe est

$$\begin{aligned} &\{[227, 375], 10, 0\} \\ &\{[11100011, 011], 2, 0\} \\ &\{[3203, 12], 4, 0\} \end{aligned}$$

car par exemple,

$$0.375 = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4^2}.$$

Propriété

Si la notation en virgule fixe est

$$\{[x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0, x_{-1} x_{-2} \dots x_{-m}]\,, b, s\}\,,$$

alors le nombre x manipulé est en base 10

$$x = (-1)^s \left(\sum_{k=-m}^{n} x_k b^k \right).$$

Définition

Etant donné un nombre réel non nul x, sa *représentation en virgule flottante* est

$$\{[a_1 a_2 \ldots a_t], e, b, s\},$$

où

- $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ est appelé la *base*,
- $e \in \mathbb{Z}, L \leq e \leq U$ est appelé l'*exposant*,
- $s \in \{0, 1\}$ est le *signe*.
- t est le nombre de chiffres significatifs,
- $a_i \in \mathbb{N}, 0 < a_1 < b, 0 \leq a_i < b, i = 2, \ldots, t$

Définition

La quantité

$$m = m(x) = \sum_{i=1}^{t} a_i b^{t-i}$$

est appelée *mantisse*.

Propriété

Cette notation correspond alors au nombre réel en base 10

$$x = (-1)^s b^e \sum_{i=1}^{t} a_i b^{-i} = (-1)^s m b^{e-t}$$

Etape 1

transformer le nombre dans la base désirée

Exemple - étape 1

Soit le nombre 127.421, travaillons en base 10, avec $t = 9$. Dès lors la notation en virgule flottante est

$$\{[127421000], 3, 10, 0\}$$

En effet, en notation scientifique (soit $0, \ldots \cdot 10^e$), on a

$$127.421 = 0.127421\,10^3$$

Transformons ce nombre en base 3 avec $t = 9$.

Exemple - étape 1 (suite)

Le nombre 127.421 en base 3 s'écrit pour sa partie entière comme 11201 et sa partie décimale

$$0,421 = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{27} + 1 \cdot \frac{1}{3^4} + \dots$$

soit

$$127,421_{10} = 11201,1021\dots_3$$

Etape 2

tobtenir une notation scientifique du type $0, \ldots \cdot B^e$

Exemple - étape 2

$$11201,1021 = 0,112011021 \cdot 10^{12}$$

le tout exprimé en base 3 !

Etape 3

sachant que t est le nombre de chiffres présent après la virgule,

- il faut tronquer ce nombre si t est plus petit que ce nombre
- il faut ajouter des 0 sinon

Exemple - étape 3

Nous nous sommes limités à considérer un total de 9 symboles dans notre exemple.

Etape 4

Dès lors, *e* est déterminé en notant qu'il s'agit de l'exposant de la base dans la notation scientifique

Exemple - étape 4

Nous obtenons

$$\{[112011021], 5, 3, 0\}$$

Nous avons...

1. *représenté des entiers* positifs dans n'importe quelle base
2. Appris à les *convertir* d'une base à l'autre
3. Proposé différentes alternatives pour *représenter les entiers négatifs*.
4. Abordé le *calcul binaire* : addition, soustraction, multiplication, division euclidienne, calcul de pgcd.
5. *Représenté des réels*
6. Obtenu la *notation virgule fixe* d'un réel quelconque,
7. la *notation en virgule flottante*.

Etre capable...

- de transformer n'importe quel réel exprimé dans une base particulière dans une autre base,
- de réaliser quelques opérations élémentaires sur des nombres entiers positifs exprimés en base 2,
- de transformer tout nombre réel en sa représentation en virgule flottante ou virgule fixe.