INFO B125 : Mathématiques pour l'informatique I

Juin 2017

Nom : ______________________________

Prénom : ______________________________

Année d'étude : Bachelier en Informatique - Bachelier Ingénieur de Gestion ______________

1. Merci de ne pas enlever l'agrafe.
2. La calculatrice est interdite.
3. Veuillez répondre sous l'énoncé de la question. Si l'espace vous manque, vous pouvez utiliser le verso de la feuille en le précisant sur votre feuille.
4. Vous trouverez quelques feuilles de brouillon en fin de questionnaire. Nous ne lirons pas le contenu de ces feuilles. Veillez que votre réponse, formulée dans l'espace réservé, soit complète.

Question	Points	Score
1	2	
2	4	
3	2	
4	2	
5	2	
6	2	
7	2	
8	4	
Total:	20	

Question 1 (2 points)

Ana a inventé une nouvelle propriété. Elle espère l'observer sur les opérateurs de la logique propositionnelle, étudiés durant le cours. Voici la définition de la propriété.

Soit l'opérateur $\star$. Soit les variables propositionnelles p et q. On dit de l'opérateur $\star$ qu'il est *implico-commutatif* lorsque

$$\mathsf{p} \star \mathsf{q} \Rightarrow \mathsf{q} \star \mathsf{p}$$

est une tautologie.

Parmi les opérateurs vus en classe, lesquels sont implico-commutatifs ? lesquels ne le sont pas ? Pourquoi ?

Solution: Les opérateurs binaires de la logique propositionnelle vus en cours sont : $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$. Par table de vérité, nous allons constater s'ils ont la propriété d'être *implico-commutatif* ou pas.

Commençons par $\wedge$:

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	0	0	1

Puisque la formule $\mathsf{p} \wedge \mathsf{q} \Rightarrow \mathsf{q} \wedge \mathsf{p}$ est une tautologie, l'opérateur $\wedge$ est donc *implico-commutatif.*

De la même manière, on peut établir que $\vee$ est *implico-commutatif*, tout comme $\oplus$ ou $\Leftrightarrow$. Par contre, $\Rightarrow$ n'est pas un opérateur *implico-commutatif.*

Question 2 (4 points)
Soit la formule

$$\neg(\mathsf{p} \vee \neg \mathsf{q}) \Rightarrow (\mathsf{r} \oplus \mathsf{p}) \Leftrightarrow \mathsf{r}.$$

Donnez la forme normale disjonctive et la forme normale conjonctive la plus simple de cette formule.
Expliquez votre démarche dans le détail.
Attention, restez bien dans le formalisme de la logique propositionnelle.

Solution: La bonne réponse est pour la forme normale disjonctive $\mathsf{r} \vee (\neg \mathsf{p} \wedge \mathsf{q})$ et pour la forme normale conjonctive $(\mathsf{r} \vee \neg \mathsf{p}) \wedge (\mathsf{r} \vee \mathsf{q})$. Pour obtenir ce résultat, on peut utiliser directement la table de vérité puis un diagramme de Karnaugh exprimé dans le formalisme de la logique propositionnelle.

Question 3 (2 points)

Travaillons avec les réels, soit l'ensemble $\mathbb{R}$ et l'ensemble des réels, 0 exclus, c'est-à-dire $\mathbb{R}_0$.
On définit l'opération *Star*, notée comme $\star$, de la manière suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_0 : x \star y = \frac{x}{y}.$$

Ana affirme que cette opération présente la propriété suivante

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}, \exists y, z \in \mathbb{R}_0 : a = x \star z \wedge b = z \star y \Rightarrow a = b.$$

1. Donnez la négation de cette propriété. Simplifiez votre expression pour que la négation ne porte plus que sur de simple prédicat.
2. En fonction, construisez un exemple qui établit qu'Ana a tort d'affirmer cette proposition.

Solution:

1. $\vdash \neg(\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \exists y, z \in \mathbb{R}_0 : (a = x \star z \wedge b = z \star y) \Rightarrow a = b)$
$\Leftrightarrow (\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y, z \in \mathbb{R}_0 : (a = x \star z \wedge b = z \star y) \wedge a \neq b))$
2. Nous devons montrer que la propriété n'est pas vraie pour l'opération $\star$ définie dans l'énoncé. Utilisons la négation obtenue au point 1 de la question. Il nous faut donc établir que celle-ci est vrai. Pour cela, il suffit de mettre en évidence l'existence des valeurs de a, b telles que pour tout x, y et z vérifiant les deux première égalités, nous avons que a est différent de b également.

   Prenons $a = 5$ et $b = 10$, avec $x = 10$, $z = 2$ et $y = 1/5$, nous vérifions bien que $a = x \star z \wedge b = z \star y$ mais également que $a \neq b$.

   La négation étant vrai, Ana a donc bien tort d'affirmer que la proposition de départ était vrai.

Question 4 (2 points)

Soit une fonction $\mathsf{f} : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$. Ana a défini la propriété pour une fonction d'être *particulièrement constante* lorsque la fonction f vérifie la propriété suivante

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N} : f(x) = f(y) + z.$$

1. La fonction constante vérifie cette propriété. Pourquoi ?
2. L'assertion ***être une fonction constante* est une condition nécessaire et suffisante pour *être une fonction particulièrement constante***, est-elle correcte ? Pourquoi ?

Solution:

1. Une fonction f dite constante vérifie la propriété suivante

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : f(x) = f(y).$$

   On voit que

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N} : f(x) = f(y) + z.$$

   est vrai puisqu'on peut dans le cas d'une fonction f constante prendre $z = 0$.

2. Nous venons de mettre en évidence qu'une fonction constante est une fonction particulièrement constante. Dès lors, être une fonction constante est une condition suffisante pour observer une fonction particulièrement constante.

   Il reste à démontrer que *Etre une fonction constante* est une condition nécessaire pour *Etre une fonction particulièrement constante*. En d'autre termes, si f est une fonction particulièrement constante sur $\mathbb{N}$, alors nécessairement f est constante sur $\mathbb{N}$.

   Soit f une fonction particulièrement constante. Soient x et y deux naturels quelconques fixés. Fixons x et y quelconques. D'après la définition, nous avons

$$\exists z \in \mathbb{N} : f(x) = f(y) + z$$

   mais aussi,

$$\exists z' \in \mathbb{N} : f(y) = f(x) + z$$

   En additionnant ces deux égalités, pour ce x et cet y fixés, il vient

$$z + z' = 0$$

   Les seuls naturels z et z' qui puissent vérifier $z + z' = 0$ sont $z = 0$ et $z' = 0$. Dès lors, la fonction f est constante sur $\mathbb{N}$.

   En conclusion, *E*tre une fonction constante est une condition **nécessaire** et **suffisante** pour *ê*tre une fonction particulièrement constante.

Question 5 (2 points)

En calcul booléen, Ana a défini l'opération $\mathsf{IF}(a, b, c)$ pour les variables a, b et c dans $\mathbb{B}$ de la manière suivante, elle donne la valeur de b lorsque a vaut 1 et la valeur de c sinon. Quelle est la forme normale disjonctive la plus simple correspondant à cette opération ? Expliquez votre démarche.

Elle désire modéliser l'opération $p \Rightarrow q$ grâce à l'opération IF. Comment ?

Solution: La forme normale disjonctive est $ab + \overline{a}c$. Nous pouvons l'observer grâce à la table de vérité de l'expression et en utilisant ensuite le diagramme de Karnaugh.
$p \Rightarrow q$ peut s'exprimer comme $\mathsf{IF}(p, q, \overline{p})$.

Question 6 (2 points)

Soit les fonctions de codage ϕ_1 et ϕ_2, toutes deux définies sur $\mathbb{B}^3$ à valeurs dans $\mathbb{B}^5$. Il s'agit de deux fonctions de codage linéaire systématique. On définit la fonction de codage ϕ obtenue de la manière suivante

$$\forall b \in \mathbb{B}^3 : \phi(b) = \phi_1(b) \oplus \phi_2(b)$$

S'agit-il d'une fonction de codage linéaire systématique ? Pourquoi ?

Solution: Il s'agit bien d'un codage linéaire systématique. Pour le vérifier, il faut montrer que le codage ϕ respecte l'égalité suivante

$$\phi(m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_k) = \phi(m_1) \oplus \phi(m_2) \oplus \ldots \phi(m_k)$$

et ce pour tout k et tous mots $m_1, m_2, \ldots, m_k$.
En utilisant la définition $\phi(b) = \phi_1(b) \oplus \phi_2(b)$, et le fait que ϕ_1 et ϕ_2 sont des codage linéaires systématiques, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\phi(m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_k) &= \phi_1(m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_k) \oplus \phi_2(m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_k) \\
&= \phi_1(m_1) \oplus \phi_1(m_2) \oplus \ldots \phi_1(m_k) \\
&\quad \oplus \phi_2(m_1) \oplus \phi_2(m_2) \oplus \ldots \phi_2(m_k) \\
&= \phi(m_1) \oplus \phi(m_2) \oplus \ldots \phi(m_k).
\end{aligned}$$

soit l'égalité à établir.

Question 7 (2 points)

Soit le codage linéaire systématique décrit par la matrice génératrice suivante

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donnez l'ensemble des mots erronés qui seraient corrigés par le mot 1101100.

Solution: Une méthode possible est la suivante. On construit la matrice de contrôle. A partir de celle-ci, on obtient la liste des syndrômes. Prenons a message à corriger et b correction à apporter, alors c est le message corrigé avec $a \oplus b = c$. Nous avons vu que l'addition modulo 2 est telle que $b \oplus c = a$. Dès lors, sachant que notre problème c est 1101100 et que b est fourni par la liste des syndrômes, nous obtenons pour a les messages suivants

1101101
1101110
1101111
1101000
1101001
1101010
0101100
1100100
1100101
1100110
1001100
1111101
1111100
1100010
1111110

Question 8 (4 points)

Réalisez les calculs suivants selon les contraintes imposées.

1. Détaillez le calcul écrit (comme appris en primaire) de la multiplication 120_6 par 15_6 en base 6 uniquement.
2. Multipliez 1100010010101010_2 par 101_2 en base 2.
3. Convertir en base 10 le nombre $1001,010011_2$. Donnez également la notation en virgule flottante.

Solution:

1. Le détail du produit de 120_6 par 15_6 est le suivant :

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 0 & \times \\ & & 1 & 5 & = \\ \hline 1 & 0 & 4 & 0 & \\ 1 & 2 & 0 & & \\ \hline 2 & 2 & 4 & 0 & \end{array}$$

Le résultat de la multiplication de 120_6 par 15_6 donne 2240_6.

2. La multiplication demandée s'effectue comme suit.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & \text{x} & & & & & & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

3. Pour convertir en base 10 le nombre, nous procédons comme suit.

$$\begin{aligned} 1001,010011_2 &= 2^3 + 2^0 + 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-6} \\ &= 8 + 1 + 0,25 + 0,03125 + 0,015625 \\ &= 9,296875 \end{aligned}$$

Du fait que

$$1001,010011_2 = 0,9296875 \cdot 10^1$$

nous avons la notation en virgule flottante (mantisse, exposant, base, signe)

$$\{[9296875], 1, 10, 0\}.$$

BROUILLON

BROUILLON

BROUILLON