Mathématique pour l'informatique INFOB125

Chapitre 3 : Calcul Booléen

Marie-Ange Remiche
Cours donné par Martine De Vleeschouwer

Objectifs – à partir d’une illustration

Première application proposée dans le syllabus page 33

Dans une institution particulière, un étudiant ne réussit pas son année lorsque :

- il a plus de 3 points d’échec, une moyenne générale inférieure à 12, et est en règle d’inscription ;
- il a plus de 3 points d’échec, une moyenne générale supérieure à 12, et est en règle d’inscription,
- il a moins de 3 points d’échec, une moyenne générale inférieure à 12, et est en règle d’inscription,
- il a plus de 3 points d’échec, une moyenne générale inférieure à 12, et n’est pas en règle d’inscription.

N’y a-t-il pas moyen de simplifier l’énoncé de l’ensemble de ces conditions ? ? ?

Objectifs – à partir d'une illustration

Autre illustration : Ève est-elle heureuse ?

Ève est heureuse dans les conditions suivantes :

- Lorsqu'elle écoute de la musique et qu'elle lit, ou bien
- lorsqu'elle travaille en écoutant de la musique, ou encore
- lorsqu'elle lit et qu'elle ne travaille pas.

On définit 4 variables logiques de la manière suivante :

- $m = 1$ si Ève écoute de la musique,
- $\ell = 1$ si Ève lit,
- $t = 1$ si Ève travaille
- $h = 1$ lorsque Ève est heureuse.

1. Donnez l'équation logique de h (en fonction de m, ℓ, t), traduisant les données du problème : $h = h(m, \ell, t) = \ldots$
2. Y a-t-il moyen de simplifier l'expression de h ?

Objectifs – à partir d'une autre illustration

Etude de cas

En `Décimal codé binaire` (DCB), chaque chiffre de 0 à 9 est décrit par son code binaire à quatre bits. Les représentations binaires de 1010 (soit 10) à 1111 (soit 15) ne sont pas utilisées. Ainsi, tout nombre peut être aisément codé. Par exemple, 721 sera codé comme 011100100001.
En `Excess-three` (XS3), chaque chiffre de 0 à 9 est décrit par son code binaire à quatre bits auquel on ajoute 3. Dès lors, 721 sera codé comme 101001010100.

Etude de cas (suite)

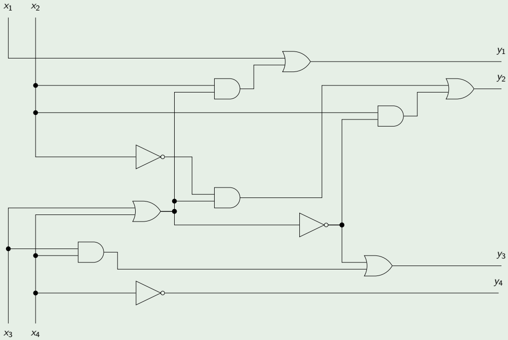
Nous souhaitons construire un circuit logique qui permet de traduire tout nombre exprimé en DCB en un nombre exprimé en XS3. Ce circuit possède donc 4 entrées (un par bit de codage DCB) et 4 sorties (une par bit de codage XS3). Nous avons la table de traduction suivante

	INPUT DCB				OUTPUT XS3			
Décim.	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	1
5	0	1	0	1	1	0	0	0
6	0	1	1	0	1	0	0	1
7	0	1	1	1	1	0	1	0
8	1	0	0	0	1	0	1	1
9	1	0	0	1	1	1	0	0

Étude de cas (suite)

Pour découvrir le **circuit logique** qui réalise cette traduction, il suffit de considérer que chacun des outputs y_1, y_2, y_3 et y_4 est le résultat d'une fonction booléenne à quatre variables x_1, x_2, x_3 et x_4.

Le diagramme qui représente le circuit du traducteur est :



Objectifs de ce chapitre

Être capable...

- de construire les fonctions booléennes issues de la modélisation d'un système donné ;
- de calculer la valeur numérique ou littérale de ces fonctions ;
- d'utiliser à bon escient les axiomes ou les propriétés des opérateurs du calcul booléen, afin de simplifier des expressions complexes ;
- de représenter graphiquement les fonctions logiques, en utilisant la notion de circuit logique.

Objectifs de ce chapitre

Dans votre formation en informatique/économie,...

- Être capable de formaliser les besoins du client grâce au calcul booléen ;
- Être capable d'utiliser les axiomes et les propriétés du calcul booléen pour simplifier des règles imposées par le client ;
- Être capable de concevoir et de représenter un circuit logique, utile dans le fonctionnement d'un ordinateur.

Ce que nous allons voir dans ce chapitre :

Table des matières

Nous allons étudier :

1. Les bases du calcul booléen : ses **axiomes**,
2. et les **propriétés** qui en découlent ;
3. la simplification des fonctions booléennes en **forme normale conjonctive et disjonctive**
4. pour cela, le **diagramme de Karnaugh** sera un outil
5. et les **circuits de portes** nous permettront de représenter graphiquement des **cas pratiques**.

3.1. Axiomes du calcul booléen

Définition

L'algèbre de Boole de base est composée de l'ensemble d'éléments $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, sur lesquels opèrent les opérations $\times, +,$ et $\bar{\cdot}$.

Définition

Une fonction booléenne est une application définie comme

$$\begin{array}{llll} f: & \mathcal{B}^n & \rightarrow & \mathcal{B} \\ & (a_1, a_2, \ldots, a_n) & \rightsquigarrow & f(a_1, a_2, \ldots, a_n). \end{array}$$

Définition (Axiomes)

Soient a, b et c trois éléments issus de $\mathcal{B}$.

Les axiomes qui permettent de définir l'algèbre de Boole sont les suivants :

Élément neutre	$a \times 1 = a$	(Ax.3.1)
	$a + 0 = a$	(Ax.3.2)
Commutativité	$a \times b = b \times a$	(Ax.3.3)
	$a + b = b + a$	(Ax.3.4)
Distributivité	$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$	(Ax.3.5)
	$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$	(Ax.3.6)
Complémentarité	$a \times \overline{a} = 0$	(Ax.3.7)
	$a + \overline{a} = 1$	(Ax.3.8)
Associativité	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$	
	$(a + b) + c = a + (b + c)$	

Convention

Nous faisons l'hypothèse que l'opération $\times$ est "prioritaire" sur l'opération $+$.

Ainsi,

$$a \times b + c \times d \quad \text{siginifie} \quad (a \times b) + (c \times d)$$

Remarque : dans ***N*** ou ***R***, nous avions déjà :

$$3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \quad \text{siginifie} \quad (3 \cdot 5) + (2 \cdot 4)$$

Lien entre le calcul booléen et la logique du 1er ordre

Par analogie au calcul booléen avec la logique du premier ordre, on désigne encore :

- l'opération de multiplication comme l'opération de conjonction,
- celle d'addition comme l'opération de disjonction,
- l'opération $\bar{\cdot}$ comme l'opération de prendre la négation d'une formule.

Remarque

- Pour alléger les écritures, l'opération $\times$ ne sera pas nécessairement représentée dans les équations :

$$a \times b = a \cdot b = a\, b$$

Suite à la dernière remarque, on écrira, par exemple, les axiomes comme :

Définition (Axiomes) : *réécriture*

Axiomes de l'algèbre de Boole :

Élément neutre	$a \cdot 1 = a$	(Ax.3.1)
	$a + 0 = a$	(Ax.3.2)
Commutativité	$a \cdot b = b \cdot a$	(Ax.3.3)
	$a + b = b + a$	(Ax.3.4)
Distributivité	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	(Ax.3.5)
	$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$	(Ax.3.6)
Complémentarité	$a \cdot \overline{a} = 0$	(Ax.3.7)
	$a + \overline{a} = 1$	(Ax.3.8)
Associativité	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	
	$(a + b) + c = a + (b + c)$	

Observons…

$$\overline{a} \cdot \overline{\overline{a}} = 0 \quad \text{par l'Axiome 3.7}$$

$$\overline{a} + \overline{\overline{a}} = 1 \quad \text{par l'Axiome 3.8}$$

$$\begin{aligned}
& 0 + a = a && \text{par Ax.3.2 et Ax.3.4} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\overline{a} \cdot \overline{\overline{a}}\right) + a = a && \text{par } \overline{a} \cdot \overline{\overline{a}} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (\overline{a} + a) \cdot \left(\overline{\overline{a}} + a\right) = a && \text{par Ax.3.4 et Ax.3.6} \\
\Leftrightarrow \quad & 1 \cdot \left(\overline{\overline{a}} + a\right) = a && \text{par Ax.3.4 et Ax.3.8} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\overline{\overline{a}} + a\right) = a && \text{par Ax.3.1 et A.3.4} \\
& \overline{\overline{a}} + a = a &&
\end{aligned}$$

Observons…

Nous venons donc de démontrer les propriétés suivantes :

$\overline{a} \cdot \overline{\overline{a}} = 0$ $\boxed{\overline{a} + \overline{\overline{a}} = 1}$ $\boxed{\overline{\overline{a}} + a = a}$

On a donc :

$$
\begin{aligned}
& & \overline{\overline{a}} + 0 &= \overline{\overline{a}} \\
&\Leftrightarrow & \overline{\overline{a}} + \overbrace{(a \cdot \overline{a})} &= \overline{\overline{a}} \\
&\Leftrightarrow & \left(\overline{\overline{a}} + a\right) \cdot \left(\overline{\overline{a}} + \overline{a}\right) &= \overline{\overline{a}} \\
&\Leftrightarrow & \underbrace{\left(\overline{\overline{a}} + a\right)}_{a} \cdot \underbrace{\left(\overline{a} + \overline{\overline{a}}\right)}_{1} &= \overline{\overline{a}} \\
&\Leftrightarrow & a \cdot 1 &= \overline{\overline{a}} \\
&\Leftrightarrow & a &= \overline{\overline{a}}
\end{aligned}
$$

Propriétés – 1ère partie

Soient a, b et c : trois éléments issus de $\mathcal{B}$. On a :

Idempotence	$a \cdot a$	$=$	a	Démontré dans le syllabus
	$a + a$	$=$	a	Démontré ci-après
Élmt absorbant	$a \cdot 0$	$=$	0	
	$a + 1$	$=$	1	
Involution	$\overline{\overline{a}}$	$=$	a	Démontré ci-avant
Associativité	$a + (b + c)$	$=$	$(a + b) + c$	
	$a \cdot (b \cdot c)$	$=$	$(a \cdot b) \cdot c$	
De Morgan	$\overline{a \cdot b}$	$=$	$\overline{a} + \overline{b}$	
	$\overline{a + b}$	$=$	$\overline{a} \cdot \overline{b}$	
	$\overline{0}$	$=$	1	
	$\overline{1}$	$=$	0	

$\boxed{a \cdot a = a}$ est démontré dans le syllabus

Démonstration d'une des propriétés

Démontrons que $\boxed{a + a = a}$

$$
\begin{array}{lrcll}
 & a + 0 & = & a & \text{(C'est l'Axiome (3.2))} \\
\Leftrightarrow & a + (a \cdot \overline{a}) & = & a & \text{par l'Axiome (3.7)} \\
\Leftrightarrow & (a + a) \cdot (a + \overline{a}) & = & a & \text{par l'Axiome (3.6)} \\
\Leftrightarrow & (a + a) \cdot (1) & = & a & \text{par l'Axiome (3.8)} \\
\Leftrightarrow & (a + a) & = & a & \text{par l'Axiome (3.1)}
\end{array}
$$

Les démonstrations des autres propriétés sont laissées à titre d'exercice.

Propriétés – suite

Soient a, b : deux éléments issus de $\mathcal{B}$. On a :

$$\begin{array}{rcll}
a \cdot (a + b) & = & a & \text{Démontré dans le syllabus} \\
a + (a \cdot b) & = & a & \\
\overline{a} \cdot (a \cdot b) & = & 0 & \\
\overline{a} + (a + b) & = & 1 & \\
a \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b}) & = & 0 & \\
a + (\overline{a} + \overline{b}) & = & 1 &
\end{array}$$

$\boxed{a \cdot (a+b) = a}$ est démontré dans le syllabus.

Détaillons cette démonstration :

Démonstration d'une des propriétés

Démontrons que $\boxed{a \cdot (a+b) = a}$

$$\begin{aligned} a \cdot (a+b) &= a \cdot a + a \cdot b \\ &= a + a \cdot b \\ &= a \cdot 1 + a \cdot b \\ &= a \cdot (1+b) \\ &= a \cdot 1 \\ &= a \end{aligned}$$

Les démonstrations des autres propriétés sont laissées à titre d'exercice.

Un document intéressant. . . :

Les axiomes et les propriétés de base sont reprises sur la page

http ://www.gecif.net/articles/genie_electrique/ressources/algebre_de_boole.pdf

(site consutlé le 7/10/17)

Site Internet : ***www.gecif.net*** Discipline : ***Génie Electrique***

Toutes les relations de l'algèbre de Boole

George BOOLE était un mathématicien britannique, 1815 – 1864

Il y a 13 relations, dont 4 fondamentales [en **GRAS**].

I – Les propriétés de l'algèbre de Boole

- La commutativité : $A.B = B.A$
  $A+B = B+A$
- L'associativité : $[A.B].C = A.[B.C]$
  $[A+B]+C = A+[B+C]$
- La priorité : $A+B.C = A+[B.C]$
  Le ET est prioritaire devant le OU [comme en arithmétique, la multiplication est prioritaire devant l'addition]
- La distributivité : $A.[B+C] = [A.B] + [A.C] = A.B+A.C$
  Distributivité de la multiplication, comme en arithmétique

  $$\mathbf{A+[B.C] = [A+B].[A+C]}$$

  En logique, il y a distributivité de l'addition [ce qui n'est pas du tout le cas en arithmétique]
- Les éléments neutres : $A.1 = A$
  $A+0 = A$
- Les éléments absorbants : $A.0 = 0$
  $A+1 = 1$
- La complémentarité : $A.\overline{A}=0$
  $A+\overline{A}=1$
- L'idempotence : $A.A=A$
  $A+A=A$

Penser que A peut être une expression logique

II – Les théorèmes de l'algèbre de Boole

- Théorème d'involution : $\overline{\overline{A}}=A$
  $\overline{\overline{\overline{A}}}=\overline{A}$
- Théorème d'inclusion : $A.B+A.\overline{B}=A$
  $[A+B].[A+\overline{B}]=A$

  Démonstration : mettre A en facteur [distributivité « à l'envers »] :
  $A.B+A.\overline{B}=A.[B+\overline{B}]=A$
  $[A+B].[A+\overline{B}]=A+B.\overline{B}=A$
- **Théorème d'allégement** : $\mathbf{A.[\overline{A}+B]=A.B}$
  $\mathbf{A+\overline{A}.B=A+B}$

  Démonstration : utiliser la distributivité [du ET et du OU] :
  $A.[\overline{A}+B]=A.\overline{A}+A.B=A.B$
  $A+\overline{A}.B=[A+\overline{A}].[A+B]=A+B$
- **Théorème d'absorption** : $\mathbf{A.[A+B] = A}$
  $\mathbf{A+[A.B] = A}$

  Démonstration par la distributivité du ET [*utilisée dans les 2 sens*] :
  $A.[A+B] = A.A + A.B$ [distributivité du ET]
  $= A + A.B$ [2ème forme du théorème d'absorption]
  $= A.[B+1]$ [mise en facteur de A : distributivité du ET « à l'envers »]
  $= A.1$
  $= A$

  Démonstration par la distributivité du OU [*utilisée dans les 2 sens*] :
  $A+A.B = [A+A].[A+B]$ [distributivité du OU]
  $= A.[A+B]$ [1ère forme du théorème d'absorption]
  $= [A+0].[A+B]$ [pour y voir plus clair dans ce qui va suivre ...]
  $= A + [B.0]$ [distributivité du OU à l'envers : « factorisation par l'addition »]
  $= A+0$
  $=A$
- **Théorème de De Morgan** : $\mathbf{\overline{A.B}=\overline{A}+\overline{B}}$ ➨ porte ET-NON
  $\mathbf{\overline{A+B}=\overline{A}\,.\,\overline{B}}$ ➨ porte OU-NON

Les relations marquées **en gras** y sont appelées *fondamentales* (moins évidentes).

Un document intéressant. . . :

Site Internet : ***www.gecif.net*** Discipline : ***Génie Electrique***

Toutes les relations de l'algèbre de Boole

George BOOLE était un mathématicien britannique, 1815 – 1864

Il y a 13 relations, dont 4 fondamentales (en **GRAS**).

I – Les propriétés de l'algèbre de Boole

- La commutativité : $A.B = B.A$
  $A+B = B+A$
- L'associativité : $(A.B).C = A.(B.C)$
  $(A+B)+C = A+(B+C)$
- La priorité : $A+B.C = A+(B.C)$
  Le ET est prioritaire devant le OU (comme en arithmétique, la multiplication est prioritaire devant l'addition)
- La distributivité : $A.(B+C) = (A.B) + (A.C) = A.B+A.C$
  Distributivité de la multiplication, comme en arithmétique

  $$\mathbf{A+(B.C) = (A+B).(A+C)}$$
  En logique, il y a distributivité de l'addition (ce qui n'est pas du tout le cas en arithmétique)
- Les éléments neutres : $A.1 = A$
  $A+0 = A$
- Les éléments absorbants : $A.0 = 0$
  $A+1 = 1$
- La complémentarité : $A.\overline{A}=0$
  $A+\overline{A}=1$
- L'idempotence : $A.A=A$
  $A+A=A$

Penser que A peut être une expression logique

II – Les théorèmes de l'algèbre de Boole

- Théorème d'involution : $\overline{\overline{A}}=A$
  $\overline{\overline{\overline{A}}}=\overline{A}$
- Théorème d'inclusion : $A.B+A.\overline{B}=A$
  $(A+B).(A+\overline{B})=A$

  Démonstration : mettre A en facteur (distributivité « à l'envers ») :
  $A.B+A.\overline{B}=A.(B+\overline{B})=A$
  $(A+B).(A+\overline{B})=A+B.\overline{B}=A$
- **Théorème d'allégement** : $\mathbf{A.(\overline{A}+B)=A.B}$
  $\mathbf{A+\overline{A}.B=A+B}$

  Démonstration : utiliser la distributivité (du ET et du OU) :
  $A.(\overline{A}+B)=A.\overline{A}+A.B=A.B$
  $A+\overline{A}.B=(A+\overline{A}).(A+B)=A+B$
- **Théorème d'absorption** : $\mathbf{A.(A+B) = A}$
  $\mathbf{A+(A.B) = A}$

  Démonstration par la distributivité du ET (*utilisée dans les 2 sens*) :
  $A.(A+B) = A.A + A.B$ (distributivité du ET)
  $= A + A.B$ (2ème forme du théorème d'absorption)
  $= A.(B+1)$ (mise en facteur de A : distributivité du ET « à l'envers »)
  $= A.1$
  $= A$

  Démonstration par la distributivité du OU (*utilisée dans les 2 sens*) :
  $A+A.B = (A+A).(A+B)$ (distributivité du OU)
  $= A.(A+B)$ (1ère forme du théorème d'absorption)
  $= (A+0).(A+B)$ (pour y voir plus clair dans ce qui va suivre ...)
  $= A + (B.0)$ (distributivité du OU à l'envers : « factorisation par l'addition »)
  $= A+0$
  $=A$
- **Théorème de De Morgan** : $\mathbf{\overline{A.B}=\overline{A}+\overline{B}}$ ➡ porte ET-NON
  $\mathbf{\overline{A+B}=\overline{A}\,.\,\overline{B}}$ ➡ porte OU-NON

En plus des axiomes, on a donc les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
a \cdot a &= a \\
a + a &= a \\
a \cdot 0 &= 0 \\
a + 1 &= 1 \\
a + (b + c) &= (a + b) + c \\
a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c \\
\overline{a \cdot b} &= \overline{a} + \overline{b} \\
\overline{a + b} &= \overline{a} \cdot \overline{b}
\end{aligned}$$

$$\overline{0} = 1 \quad \text{et} \quad \overline{1} = 0$$

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{a}} &= a \\
a \cdot (a + b) &= a \\
a + (a \cdot b) &= a \\
\overline{a} \cdot (a \cdot b) &= 0 \\
\overline{a} + (a + b) &= 1 \\
a \cdot \left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) &= 0 \\
a + \left(\overline{a} + \overline{b}\right) &= 1
\end{aligned}$$

Exercices

- $1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 + \underbrace{(1 \cdot 0)} + \underbrace{(1 \cdot 1)}$
  $= 1 + 0 + 1$
  $= 1$.
- $1 \cdot \overline{1} = 0$.

Observons :

La fonction $f(a,b,c) = \overline{\overline{a}b}\,(a+b)+c$ peut être simplifiée.

En effet :

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) &= \overline{\overline{a}b}\,(a+b)+c \\
&= (\overline{\overline{a}}+\overline{b})\,(a+b)\;+\;c \\
&= (a+\overline{b})\,(a+b)\;+\;c \\
&= ((a+\overline{b})\;a)+((a+\overline{b})\;b)\;+\;c \\
&= (aa)+(ab)+(\overline{b}a)+(\overline{b}b)\;+\;c \\
&= \quad a\;+(ab)+(a\overline{b})+\quad 0\;+\;c \\
&= \quad a\;+\;a\,(b+\overline{b})\;+\;c \\
&= \quad a\;+\;a\cdot 1\;+\;c \\
&= \quad a\;+\;a\;+\;c \\
&= \qquad a\;+\;c
\end{aligned}$$

3.3. Forme normale conjonctive et disjonctive

Notre objectif dans cette partie du chapitre :

- Être capable d'utiliser à bon escient les axiomes ou les propriétés des opérateurs du calcul booléen afin de simplifier des expressions complexes.

Remarque et précision des objectifs :

- On pourrait démontrer que les trois opérateurs $\bar{\cdot}$, $+$ et $\cdot$ sont suffisants pour exprimer toute fonction booléenne. On dit qu'ils forment un ensemble d'opérateurs *fonctionnellement complet*.

On peut donc préciser davantage les objectifs :

- Être capable d'écrire toute fonction booléenne dans une *forme normale conjonctive* (FNC) ou *disjonctive* (FND).

Commençons par un exemple :

Soit la fonction définie par $\overline{\overline{p}q}(p+q)$.

Recherchons-en *une* FNC (forme normale conjonctive) et *une* FND (forme normale disjonctive) :

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{p}q}(p+q) &= (\overline{\overline{p}}+\overline{q})(p+q) \\
&= (p+\overline{q})(p+q) && \leftarrow \text{une FNC} \\
&= (p+\overline{q})p+(p+\overline{q})q \\
&= pp+\overline{q}p+pq+\overline{q}q \\
&= p+\overline{q}p+pq+0 \\
&= p+\overline{q}p+pq && \leftarrow \text{une FND}
\end{aligned}
$$

Définitions

- Un atome est - une variable propositionnelle en logique,
  - un élément en calcul booléen.
- Un littéral est un *atome* ou la négation d'un *atome*.

Soient $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ des *littéraux*. On définit encore :

- Une clause conjonctive est une conjonction de *littéraux*, c-à-d : $\ell_1\ \ell_2\ \ldots\ \ell_n$.
- Une clause disjonctive est une disjonction de *littéraux*, c-à-d : $\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_n$.

Définition d'une Forme Normale Conjonctive (FNC)

Une formule f est sous **forme normale conjonctive** lorqu'elle est exprimée sous la forme d'**une conjonction de *clauses disjonctives*** : $\boxed{f = m_1\ m_2\ \ldots\ m_k}$,

où, pour tout i : m_i est une *clause disjonctive*, c-à-d :

$$m_i = \ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_n, \quad \text{où, pour tout } j : \ell_j \text{ est un littéral.}$$

Définitions

- Un atome est - une variable propositionnelle en logique,
  - un élément en calcul booléen.
- Un littéral est un *atome* ou la négation d'un *atome*.

Soient $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ des *littéraux*. On définit encore :

- Une clause conjonctive est une conjonction de *littéraux*, c-à-d : $\ell_1\ \ell_2\ \ldots\ \ell_n$.
- Une clause disjonctive est une disjonction de *littéraux*, c-à-d : $\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_n$.

Définition d'une Forme Normale Disjonctive (FND)

Une formule f est sous **forme normale disjonctive** lorqu'elle est exprimée sous la forme d'**une disjonction de *clauses conjonctives*** : $\boxed{f = m_1 + m_2 + \ldots + m_k}$,

où, pour tout i : m_i est une *clause conjonctive*, c-à-d :

$$m_i = \ell_1\ \ell_2\ \ldots\ \ell_n, \quad \text{où, pour tout } j : \ell_j \text{ est un littéral.}$$

Il n'y a pas unicité des FNC et FND !

Reprenons notre exemple : $\overline{pq}(p+q)$

Quelles sont les FNC et FND de la fonction définie par $\overline{pq}(p+q)$ dans le développement ci-dessous ?

On avait calculé :

$$\begin{aligned}
\overline{pq}(p+q) &= (\overline{\overline{p}} + \overline{q})\,(p+q) && (1)\\
&= (p+\overline{q})\,(p+q) && (2)\\
&= (p+\overline{q})p + (p+\overline{q})q && (3)\\
&= pp + \overline{q}p + pq + \overline{q}q && (4)\\
&= p + \overline{q}p + pq + 0 && (5)\\
&= p + \overline{q}p + pq && (6)
\end{aligned}$$

Continuons :

$$\begin{aligned}
&= p\,(1 + \overline{q} + q) && (8)\\
&= p \cdot 1 && (9)\\
&= p && (10)
\end{aligned}$$

Obtenir une forme normale (disjonctive ou conjonctive)...

Définition

On parle de normaliser une formule f lorsqu'il s'agit de faire apparaître une forme normale disjonctive (FND) ou conjonctive (FNC).

Il n'y a **aucune garantie** d'obtenir la **forme normale *la plus simple***.

Pour obtenir une forme normale :

Selon le cadre :

- du formalisme du **calcul booléen**
- en **logique propositionnelle**
- à partir de **tables de vérité** ($\rightarrow$ FND)
- **diagramme de Karnaugh** (pour simplifier une FND)

Obtenir une forme normale (disjonctive ou conjonctive)...

(page 27 du syllabus)

Approche systématique (méthode) :

Soit une fonction booléenne f. Pour obtenir une forme normale (D ou C) avec le formalisme du **calcul booléen**, il faut :

1. faire porter le connecteur unaire $\bar{\ }$ directement sur les variables.
2. - Utiliser la distributivité de $\cdot$ sur $+$ pour obtenir une forme normale disjonctive et
   - Utiliser la distributivité de $+$ sur $\cdot$ pour obtenir une forme normale conjonctive.

Obtenir une forme normale (disjonctive ou conjonctive)...

(page 27 du syllabus)

Approche systématique (méthode) :

Soit une fonction booléenne f. Pour obtenir une forme normale (D ou C) dans le cadre de la **logique propositionnelle**, il faut :

1. éliminer tous les connecteurs non-fondamentaux, c-à-d : $\Leftrightarrow, \bigoplus, \Rightarrow$.
2. faire porter le connecteur unaire $\neg$ directement sur les variables.
3. - Utiliser la distributivité de $\wedge$ sur $\vee$ pour obtenir une forme normale disjonctive et
   - Utiliser la distributivité de $\vee$ sur $\wedge$ pour obtenir une forme normale conjonctive.

Obtenir une forme normale **disjonctive**. . . (p.27 du syllabus)

Approche systématique (méthode) :

Soit une fonction booléenne f. Pour obtenir une forme normale **disjonctive** dans le cadre des **tables de vérité**, il suffit :

- de repérer les valeurs des variables pour lesquelles la fonction f vaut 1 et de les reprendre comme termes de la forme normale disjonctive.

Obtenir une forme normale par des **tables de vérité**

Exemple 1

Soit la table suivante   Quelle est la fonction (sous F.N.) associée à cette table ?

p	q	f
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

On remarque que si $p = 1$ et $q = 0$, alors $f = 1$.
Si je prends la formule $p\overline{q}$, dans ce cas précis, elle vaut donc bien 1.
Il n'y aucun autre cas de valeurs pour p et q pour lesquelles la fonction f vaut 1.

On a donc : $f(p, q) = p\,\overline{q}$

Obtenir une forme normale **disjonctive** par des **tables de vérité**

Exemple 2

Soit la table suivante Quelle est la fonction (sous F.N.) associée à cette table ?

p	q	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

On remarque que deux cas donnent la valeur 1 pour f, à savoir $p = 1$ et $q = 0$ **ou** $p = 0$ et $q = 0$.
Le premier cas donne la formule $p\overline{q}$, qui donnera 1 si $p = 1$ et $q = 0$, et 0 dans les autres cas.
Le second cas donne la formule $\overline{p}\,\overline{q}$ qui donnera 1 si $p = 0$ et $q = 0$ et 0 dans les autres cas.
Si nous prenons la somme de ces deux formules, on obtient le même résultat, soit 1 si $p = 1$ et $q = 0$ **ou** si $p = 0$ et $q = 0$, 0 dans les autres cas. On a donc : f (p,q) = ...

Obtenir une forme normale **disjonctive** par des **tables de vérité**

Exemple 3 (page 28 du syllabus)

Soit la fonction $f(p, q, r)$ dont la tale de vérité est :

p	q	r	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Cette table donne la fonction $f(p, q, r) = \overline{p}\,\overline{q}\,r + \overline{p}qr + p\overline{q}\,\overline{r}$, sous forme normale disjonctive.

Outil de simplification graphique pour une FND

Début de la définition

Le diagramme de Karnaugh est une méthode graphique qui **permet de simplifier une forme normale disjonctive** afin de limiter l'utilisation de symboles.

Cette méthode est facile à manipuler tant que la fonction ne comprend que trois ou quatre variables.

Exemple 1

Soit la forme normale disjonctive suivante :

$$pqr + \overline{p}q\overline{r} \ ,$$

qui est une formule comprenant trois variables : p, q, r.

Définition (suite)

Le diagramme de Karnaugh est comme une matrice où les colonnes correspondent à toutes les conjonctions possibles de p et q et leurs négations, et les lignes à r et à sa négation.
Cela donne le diagramme suivant :

	pq	$\overline{p}q$	$\overline{p}\,\overline{q}$	$p\overline{q}$
r				
$\overline{r}$				

Si dans la forme normale disjonctive, la conjonction xyz est présente, on place 1 dans la cellule correspondante dans le diagramme de Karnaugh.

Exemple 1 – suite

Pour $pqr + \overline{p}q\overline{r}$, on obtient alors le diagramme suivant :

	pq	$\overline{p}q$	$\overline{p}\,\overline{q}$	$p\overline{q}$
r	1			
$\overline{r}$		1		

Définition – suite

Par la suite, on groupe les cellules contigües remplies de 1 (2 à 2 ou 4 à 4). Celles-ci seront simplifiées en des expressions plus simples.

Exemple 2

Appliquons ce principe à la formule $\overline{p}qr + \overline{p}\,\overline{q}r$, qui donne le diagramme de Karnaugh :

	pq	$\overline{p}q$	$\overline{p}\,\overline{q}$	$p\overline{q}$
r		1	1	
$\overline{r}$				

On y repère deux cellules contigües remplies de 1 ; celles-ci sont grisées :

	pq	$\overline{p}q$	$\overline{p}\,\overline{q}$	$p\overline{q}$
r		1	1	
$\overline{r}$				

On peut dès lors simplifier la formule de la manière suivante :

$\overline{p}\,q\,r + \overline{p}\,\overline{q}\,r = \overline{p}\,r$

Deux cellules contigües

Pourquoi ça marche ?

Dans chacune des deux cellules contigües, on retrouve la multiplication d'une formule f (identique dans les deux cellules) et d'un atome q, nié dans une cellule, non-nié dans l'autre, ce qui donne :

$$f \cdot q + f \cdot \overline{q}$$

puisque nous sommes en présence d'une FND.

Ainsi, cette expression se simplifie aisément de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f \cdot q + f \cdot \overline{q} &= f \cdot (q + \overline{q}) \\ &= f \cdot 1 \\ &= f \end{aligned}$$

Quatre cellules contigües

Exemple 3

Soit la formule $\boxed{pqr + \overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r} + \overline{p}qr + pq\overline{r} + \overline{p}q\overline{r}}$ à laquelle correspond le diagramme suivant :

	pq	$\overline{p}q$	$\overline{p}\,\overline{q}$	$p\overline{q}$
r	1	1		
$\overline{r}$	1	1	1	

On remarque la présence de 5 cellules contigües.

L'équation correspondant aux 4 cellules grisées dans

	pq	$\overline{p}q$	$\overline{p}\,\overline{q}$	$p\overline{q}$
r	1	1		
$\overline{r}$	1	1	1	

se simplifie en

$$pqr + \overline{p}qr + pq\overline{r} + \overline{p}q\overline{r} = q$$

Quatre cellules contigües

Pourquoi cela fonctionne ?

Nous avons

$$\begin{aligned}
pqr + \overline{p}qr + pq\overline{r} + \overline{p}q\overline{r} &= (pqr + \overline{p}qr) + (pq\overline{r} + \overline{p}q\overline{r}) \\
&= (p + \overline{p})qr + (p + \overline{p})q\overline{r} \\
&= 1 \cdot qr + 1 \cdot q\overline{r} \\
&= q\,(r + \overline{r}) \\
&= q \cdot 1 \\
&= q
\end{aligned}$$

Utiliser deux fois une même cellule

Exemple 4

Reprenons l'exemple 3. On peut ensuite prendre les deux cellules grisées représentées ci-dessous :

	pq	$\overline{p}q$	$\overline{p}\,\overline{q}$	$p\overline{q}$
r	1	1		
$\overline{r}$	1	1	1	

L'équation correspondant à ces deux cellules se simplifie comme :

$$\overline{p}q\overline{r} + \overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r} = \overline{p}\,\overline{r}\ .$$

Utiliser plusieurs fois une même cellule, pourquoi cela fonctionne ?

Pour toute formule f , nous avons l'égalité : $\boxed{f + f \ = \ f}$

Toute cellule grisée peut donc être considérée deux fois (ou plus).

Attention aux cellules des bords : simplification possible !

Exemple 5

Soit la formule $\boxed{pqr + p\overline{q}r}$ à laquelle correspond le diagramme suivant :

	pq	$\overline{p}q$	$\overline{p}\,\overline{q}$	$p\overline{q}$
r	1			1
$\overline{r}$				

Les deux cellules marquées à 1 sont bien "contigües".
En effet, si nous étiquetons les colonnes en démarrant par $\overline{p}q$ plutôt que par pq, nous obtenons le graphique :

	$\overline{p}q$	$\overline{p}\,\overline{q}$	$p\overline{q}$	pq
r			1	1
$\overline{r}$				

3.4 Diagramme de Karnaugh

Diagramme de Karnaugh à 4 variables

Définition

Soient p, q, r, s quatre variables booléennes.

Nous avons alors la représentation en diagramme de Karnaugh suivante :

	pq	$\overline{p}q$	$\overline{p}\,\overline{q}$	$p\overline{q}$
rs				
$\overline{r}s$				
$\overline{r}\,\overline{s}$				
$r\overline{s}$				

Exercice pour l'exemple 6 – Syllabus Ex3.4, p. 30

Donnez le diagramme de Karnaugh correspondant à la proposition suivante :

$$\overline{p}\,\overline{q}r\overline{s} + \overline{p}\,\overline{q}rs + \overline{p}qr\overline{s} + \overline{p}qrs + p\overline{q}rs + pq\overline{r}\,\overline{s} + pq\overline{r}s + pqr\overline{s}$$

Exemple 6 – Syllabus Ex3.4, p. 31

La proposition :

$$\overline{p}\,\overline{q}r\overline{s} + \overline{p}\,\overline{q}rs + \overline{p}qr\overline{s} + \overline{p}qrs + p\overline{q}rs + pq\overline{r}\,\overline{s} + pq\overline{r}s + pqr\overline{s}$$

donne le diagramme de Karnaugh :

	pq	$\overline{p}q$	$\overline{p}\,\overline{q}$	$p\overline{q}$
rs		1	1	1
$\overline{r}s$	1			
$\overline{r}\,\overline{s}$	1			
$r\overline{s}$	1	1	1	

• Groupe de 4 cellules "contigües" :

	pq	$\overline{p}q$	$\overline{p}\,\overline{q}$	$p\overline{q}$
rs		1	1	1
$\overline{r}s$	1			
$\overline{r}\,\overline{s}$	1			
$r\overline{s}$	1	1	1	

qui permet de simplifier $\overline{p}\,\overline{q}r\overline{s} + \overline{p}qr\overline{s} + \overline{p}qrs + \overline{p}\,\overline{q}rs$ en : $\overline{p}r$.

Exemple 6 – Suite

En considérant successivement les couples de cellules dans les trois figures suivantes :

	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\,\bar{q}$	$p\bar{q}$
rs		1	1	1
$\bar{r}s$	1			
$\bar{r}\,\bar{s}$	1			
$r\bar{s}$	1	1	1	

	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\,\bar{q}$	$p\bar{q}$
rs		1	1	1
$\bar{r}s$	1			
$\bar{r}\bar{s}$	1			
$r\bar{s}$	1	1	1	

	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\,\bar{q}$	$p\bar{q}$
rs		1	1	1
$\bar{r}s$	1			
$\bar{r}\bar{s}$	1			
$r\bar{s}$	1	1	1	

on obtient alors la formule simplifiée suivante :

$$\boxed{\overline{p}r + pq\overline{r} + \overline{q}rs + qr\overline{s}}$$

Exercice 3.1 du syllabus - page 32

Considérons la fonction f dont la table de vérité est la suivante :

p	q	r	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Donnez son expression et simplifiez-la à l'aide d'un diagramme de Karnaugh.

La fonction simplifiée est : $f(p, q, r) = \overline{q} + \overline{p}r$

Diagramme de Karnaugh pour 5 variables syllabus - p.31

Pour une fonction à 5 variables, le diagramme de Karnaugh aura l'allure suivante :

	pqr	$pq\overline{r}$	$p\overline{q}\,\overline{r}$	$p\overline{q}r$	$\overline{p}\,\overline{q}r$	$\overline{pq}\,\overline{r}$	$\overline{p}q\overline{r}$	$\overline{p}qr$
tu								
$\overline{t}u$								
$\overline{t}\,\overline{u}$								
$t\overline{u}$								

Électronique et circuits logiques

Objectif

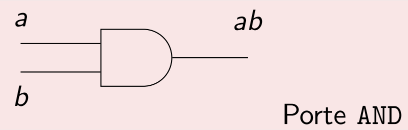
Obtenir une représentation graphique qui permette des **interprétations intuitives**, notamment en fonctionnement des ordinateurs.

Elle représente à la fois le calcul booléen et
la logique du premier ordre.

Définition

Représentation graphique du connecteur **conjonction** :

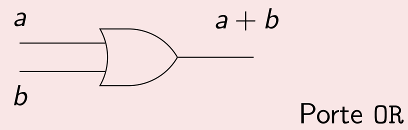
- $p\,q$ avec p et q : éléments de $\mathcal{B}$
- $p \wedge q$ avec p et q : variables propositionnelles.

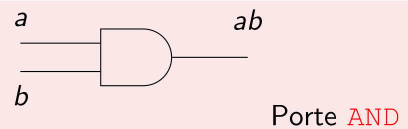


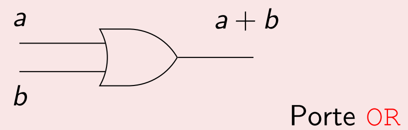
Définition

Représentation graphique du connecteur **disjonction** :

- $p + q$ avec p et q : éléments de $\mathcal{B}$
- $p \vee q$ avec p et q : variables propositionnelles.



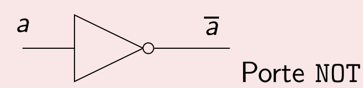




Définition

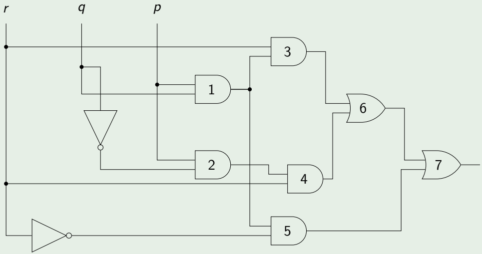
Représentation graphique du connecteur **négation** :

- $\overline{p}$ avec p : élément de $\mathcal{B}$
- $\neg p$ avec p : variable propositionnelle.



Exemple

Considérons le circuit suivant (Fig.3-11, page 38) :



Nous devons calculer la sortie de chaque porte *dans un ordre bien particulier*.

Nous avons les sorties des différentes portes dans le tableau ci-contre :

Porte	Sortie
1	pq
2	$p\overline{q}$
3	pqr
4	$p\overline{q}r$
5	$pq\overline{r}$
6	$pqr + p\overline{q}r$
7	$pqr + p\overline{q}r + pq\overline{r}$

Exemple (Fig.3-11, page 38) – suite

La sortie finale (porte 7) est donc : $pqr + p\bar{q}r + pq\bar{r}$.

Représentons-la dans un diagramme de Karnaugh :

	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\,\bar{q}$	$p\bar{q}$
r	1			1
$\bar{r}$	1			

On y distingue donc 2 couples de cellules grisées.

Le premier :

	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\,\bar{q}$	$p\bar{q}$
r	1			1
$\bar{r}$	1			

permet la simplification suivante : $pqr + p\bar{q}r = pr$.

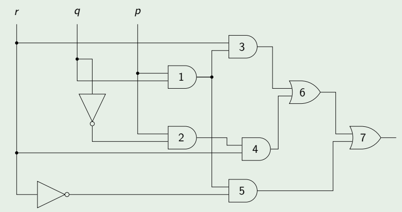
Le second :

	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\,\bar{q}$	$p\bar{q}$
r	1			1
$\bar{r}$	1			

permet la simplification suivante : $pqr + pq\bar{r} = pq$.

Ainsi, $pqr + p\bar{q}r + pq\bar{r} = pr + pq$,

dont on peut faire une représentation en circuit simple !

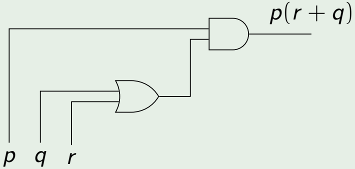


Exemple (Fig.3-11, page 38) – suite et fin

La sortie finale (porte 7) qui est : $pqr + p\bar{q}r + pq\bar{r}$

a été simplifiée en $pr + pq \; = p(r + q)$,

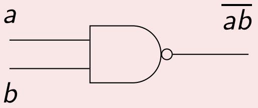
dont on peut faire une représentation en circuit simple :



Définition

On peut combiner la porte logique AND avec la négation. On obtient alors la porte NAND.

Celle-ci représente les opérations $\overline{ab}$ et se représente par :

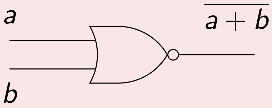


Porte NAND

Définition

On peut combiner la porte logique OR avec la négation. On obtient alors la porte NOR.

Celle-ci représente les opérations $\overline{a+b}$ et se représente par :



Porte NOR

Propriété

L'opérateur `NAND` est un opérateur qui à lui seul constitue un *ensemble fonctionnellement complet*.

Preuve – début

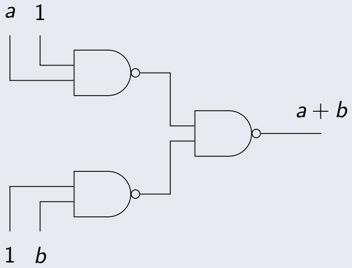
Pour établir ce résultat, nous devons construire une porte `OR`, `AND` et `NOT` à partir de la porte `NAND` uniquement.

La démonstration se fera donc en 3 parties.

Propriété : L'opérateur `NAND` est un opérateur qui à lui seul constitue un *ensemble fonctionnellement complet*.

Preuve – Partie 1

1. Construisons une porte `OR` uniquement à partir de la porte `NAND` :



`Un circuit équivalent à une porte OR`

Car :

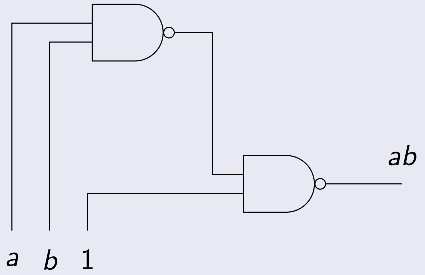
$$\overline{\overline{(a \cdot 1)} \cdot \overline{(b \cdot 1)}} = \overline{\overline{(a \cdot 1)}} + \overline{\overline{(b \cdot 1)}} = (a \cdot 1) + (b \cdot 1) = a + b$$

Propriété :

L'opérateur `NAND` est un opérateur qui à lui seul constitue un *ensemble fonctionnellement complet*.

Preuve – Partie 2

2. Construisons une porte `AND` uniquement à partir de la porte `NAND` :



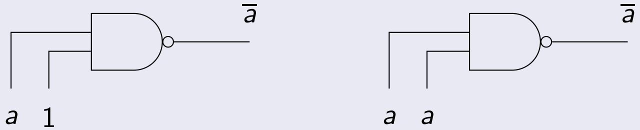
Un circuit équivalent à une porte `AND`

Propriété :

L'opérateur `NAND` est un opérateur qui à lui seul constitue un *ensemble fonctionnellement complet*.

Preuve – Partie 3

3. Construisons une porte `NOT` uniquement à partir de la porte `NAND` :

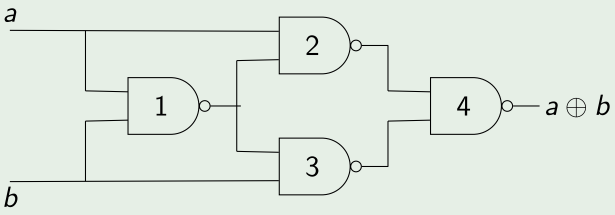


Deux circuits équivalents à une porte NOT

Illustration

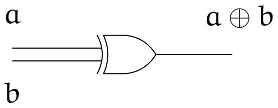
Considérons le circuit suivant :

Représentation du "ou exclusif"



Circuit XOR avec des portes NAND uniquement

Remarque : Syllabus, p.38 :



Objectifs – à partir d'une autre illustration

Étude de cas

Etude de cas

En `Décimal codé binaire` (DCB), chaque chiffre de 0 à 9 est décrit par son code binaire à quatre bits. Les représentations binaires de 1010 (soit 10) à 1111 (soit 15) ne sont pas utilisées. Ainsi, tout nombre peut être aisément codé. Par exemple, 721 sera codé comme 011100100001.
En `Excess-three` (XS3), chaque chiffre de 0 à 9 est décrit par son code binaire à quatre bits auquel on ajoute 3. Dès lors, 721 sera codé comme 101001010100.

Étude de cas : Exemple 3.6, page 37 du syllabus.

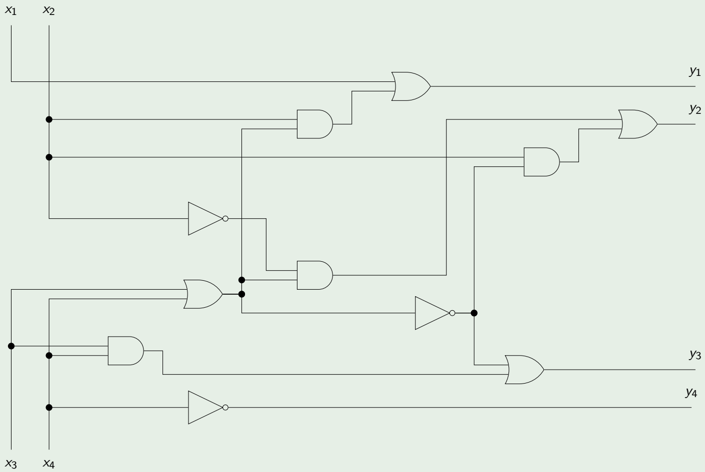
Reprise de notre cas de départ (introduction)

Nous souhaitons construire un circuit logique qui permet de traduire tout nombre exprimé en DCB en un nombre exprimé en XS3. Ce circuit possède donc 4 entrées (un par bit de codage DCB) et 4 sorties (une par bit de codage XS3). Nous avons la table de traduction suivante :

INPUT DCB					OUTPUT XS3			
Décim.	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	1
5	0	1	0	1	1	0	0	0
6	0	1	1	0	1	0	0	1
7	0	1	1	1	1	0	1	0
8	1	0	0	0	1	0	1	1
9	1	0	0	1	1	1	0	0

Reprise de notre cas de départ (suite)

Nous allons montrer que le circuit résultant est :



qui représente le diagramme de circuit du traducteur.

Étude de cas : Suite exemple 3.6, page 38 du syllabus.

Reprise de notre cas de départ (introduction)

	INPUT DCB				OUTPUT XS3			
Décim.	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	1
5	0	1	0	1	1	0	0	0
6	0	1	1	0	1	0	0	1
7	0	1	1	1	1	0	1	0
8	1	0	0	0	1	0	1	1
9	1	0	0	1	1	1	0	0

Reprise de notre cas de départ (suite)

Pour découvrir le circuit logique qui réalise cette traduction, il suffit de considérer que chacun des outputs y_1, y_2, y_3 et y_4 est le résultat d'une fonction booléenne à quatre variables (soit x_1, x_2, x_3 et x_4). Étudions la fonction dont l'output est y_1, nous avons le diagramme de Karnaugh suivant :

	$x_1 x_2$	$x_1 \overline{x}_2$	$\overline{x}_1\,\overline{x}_2$	$\overline{x}_1 x_2$
$x_3 x_4$			0	1
$x_3 \overline{x}_4$			0	1
$\overline{x}_3\,\overline{x}_4$		1	0	0
$\overline{x}_3 x_4$		1	0	1

Notre objectif est de déterminer la fonction qui correspond à ce diagramme.

Reprise de notre cas de départ (suite)

Étudions la fonction dont l'output est y_1 :

	x_1x_2	$x_1\overline{x}_2$	$\overline{x}_1\,\overline{x}_2$	$\overline{x}_1x_2$
x_3x_4			0	1
$x_3\overline{x}_4$			0	1
$\overline{x}_3\,\overline{x}_4$		1	0	0
$\overline{x}_3x_4$		1	0	1

Les cases vides n'étant pas spécifiées par le traducteur, nous pouvons y placer un 1 ou un 0. La fonction résultante sera plus simple à exprimer si on peut faire des regroupements de cellules. Dans ce cas-ci, on propose donc de remplir les cases vides avec des 1.

Reprise de notre cas de départ (suite)

On retrouve alors un premier groupe de **huit cellules contigües**, à savoir :

	x_1x_2	$x_1\overline{x}_2$	$\overline{x}_1\,\overline{x}_2$	$\overline{x}_1x_2$
x_3x_4	1	1	0	1
$x_3\overline{x}_4$	1	1	0	1
$\overline{x}_3\,\overline{x}_4$	1	1	0	0
$\overline{x}_3x_4$	1	1	0	1

Celles-ci se simplifient en une fonction booléenne simple : x_1

On a ensuite le regroupement de **six cellules** :

	x_1x_2	$x_1\overline{x}_2$	$\overline{x}_1\,\overline{x}_2$	$\overline{x}_1x_2$
x_3x_4	1	1	0	1
$x_3\overline{x}_4$	1	1	0	1
$\overline{x}_3\,\overline{x}_4$	1	1	0	0
$\overline{x}_3x_4$	1	1	0	1

qui se simplifient en : $x_2\,(x_3 + x_4)$

La fonction y_1 est donc : $y_1 = x_1 + x_2\,(x_3 + x_4)$

Reprise de notre cas de départ (suite)

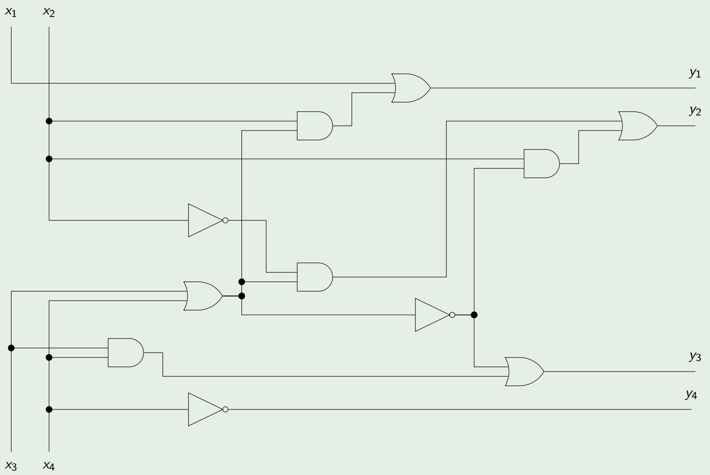
Si nous réalisons la même analyse pour y_2, y_3 et y_4 respectivement, nous obtenons les fonctions :

$$\begin{aligned}
y_2 &= (\overline{x}_2(x_3 + x_4)) + (x_2\overline{x}_3\overline{x}_4) \\
&= \overline{x}_2(x_3 + x_4) + x_2(\overline{x_3 + x_4}) \\
y_3 &= (\overline{x}_3\overline{x}_4) + (x_3x_4) \\
&= \overline{x_3 + x_4} + (x_3x_4) \\
y_4 &= \overline{x}_4
\end{aligned}$$

où nous voyons apparaître les termes $x_3 + x_4$ plusieurs fois.

Reprise de notre cas de départ (suite)

Le circuit résultant est finalement :



qui représente le diagramme de circuit du traducteur.

Rappel de la table des matières

Ce que nous avons vu dans ce chapitre :

Nous avons étudié :

1. Les bases du calcul booléen : ses **axiomes**,
2. et les **propriétés** qui en découlent ;
3. la simplification des fonctions booléennes en **forme normale conjonctive et disjonctive**
4. pour cela, le **diagramme de Karnaugh** est un outil
5. et les **circuits de portes** nous permettent de représenter graphiquement des **cas pratiques**.

Rappels des objectifs de ce chapitre

Dans votre formation en informatique/économie,. . .

- Être capable de formaliser les besoins du client grâce au calcul booléen ;
- Être capable d'utiliser les axiomes et les propriétés du calcul booléen pour simplifier des règles imposées par le client ;
- Être capable de concevoir et de représenter un circuit logique, utile dans le fonctionnement d'un ordinateur.

Rappels des objectifs de ce chapitre

Être capable...

- de construire les fonctions booléennes issues de la modélisation d'un système donné ;
- de calculer la valeur numérique ou littérale de ces fonctions ;
- d'utiliser à bon escient les axiomes ou les propriétés des opérateurs du calcul booléen, afin de simplifier des expressions complexes ;
- de représenter graphiquement les fonctions logiques, en utilisant la notion de circuit logique.