Logique des propositions

Marie-Ange Remiche
Cours donné par Martine De Vleeschouwer

Université de Namur

Etude de cas n° 1

Etude de cas n° 1

1. Si je mange, alors je bois et je ne parle pas.

Etude de cas n° 1

1. Si je mange, alors je bois et je ne parle pas.
2. Si je ne parle pas alors je m'ennuie.

Etude de cas n° 1

1. Si je mange, alors je bois et je ne parle pas.
2. Si je ne parle pas alors je m'ennuie.
3. Je ne m'ennuie pas.

Etude de cas n° 1

1. Si je mange, alors je bois et je ne parle pas.
2. Si je ne parle pas alors je m'ennuie.
3. Je ne m'ennuie pas.

Je ne mange pas.

Etude de cas n° 1

1. Si je mange, alors je bois et je ne parle pas.
2. Si je ne parle pas alors je m'ennuie.
3. Je ne m'ennuie pas.

Je ne mange pas.

Vrai ou Faux ?

Objectifs

- Etre capable de traduire en langage mathématique ces propositions : créer un modèle.
- Utiliser à bon escient le formalisme associé à ce langage.
- Vérifier la véracité d'une déduction de ces règles.

Etude de cas n° 2

1. Si Lise ne suit pas le cours de Mathématiques pour l'informatique, elle ne pourra réussir l'examen.
2. Si Lise ne réussit pas l'examen, elle ne pourra obtenir son diplôme de bachelier.
3. Si Lise lit le syllabus, elle obtiendra son diplôme de bachelier.
4. Lise ne suit pas le cours de Mathématiques pour l'informatique mais elle a lu le syllabus.

Etude de cas n° 2

1. Si Lise ne suit pas le cours de Mathématiques pour l'informatique, elle ne pourra réussir l'examen.
2. Si Lise ne réussit pas l'examen, elle ne pourra obtenir son diplôme de bachelier.
3. Si Lise lit le syllabus, elle obtiendra son diplôme de bachelier.
4. Lise ne suit pas le cours de Mathématiques pour l'informatique mais elle a lu le syllabus.

Est-ce cohérent comme règles ?

Objectifs

- Déduire la cohérence d'une série de règles.

Dans votre formation en informatique...

Dans votre formation en informatique...

- Etre capable de formaliser les besoins du client grâce à la logique formelle

Dans votre formation en informatique...

- Etre capable de formaliser les besoins du client grâce à la logique formelle
- Etre capable d'utiliser la logique formelle pour vérifier la cohérence des règles imposées par le client

Dans votre formation en informatique...

- Etre capable de formaliser les besoins du client grâce à la logique formelle
- Etre capable d'utiliser la logique formelle pour vérifier la cohérence des règles imposées par le client
- ... pour vérifier que son programme réalise ce qui a été demandé

Dans votre formation en informatique...

- Etre capable de formaliser les besoins du client grâce à la logique formelle
- Etre capable d'utiliser la logique formelle pour vérifier la cohérence des règles imposées par le client
- ... pour vérifier que son programme réalise ce qui a été demandé
- Etre capable de programmer des règles de logique (robot,...)

Ce que nous allons voir dans ce chapitre...

Table des matières

Ce que nous allons voir dans ce chapitre...

Table des matières

- **La notion de proposition** : élément fondamental de notre langage

Ce que nous allons voir dans ce chapitre...

Table des matières

- **La notion de proposition** : élément fondamental de notre langage
- **Les différents connecteurs, leurs règles de fonctionnement** : les outils nécessaires pour créer un modèle

Ce que nous allons voir dans ce chapitre...

Table des matières

- **La notion de proposition** : élément fondamental de notre langage
- **Les différents connecteurs, leurs règles de fonctionnement** : les outils nécessaires pour créer un modèle
- **Propriétés des connecteurs** : déduire la véracité d'une proposition

Ce que nous allons voir dans ce chapitre...

Table des matières

Quelques définitions fondamentales

Quelques définitions fondamentales

Définition

Une *proposition* est un énoncé qui est soit vrai soit faux et cela sans ambiguïté.

Définition

Une *proposition* est un énoncé qui est soit vrai soit faux et cela sans ambiguïté.

Exemples

- *Le lundi 13 mars 2012, il pleut.*

Quelques définitions fondamentales

Définition

Une *proposition* est un énoncé qui est soit vrai soit faux et cela sans ambiguïté.

Exemples

- *Le lundi 13 mars 2012, il pleut.*
- *Quel jour sommes-nous ?*

Quelques définitions fondamentales

Définition

Une *proposition* est un énoncé qui est soit vrai soit faux et cela sans ambiguïté.

Exemples

- *Le lundi 13 mars 2012, il pleut.*
- *Quel jour sommes-nous ?*
- $2+3=5$

Quelques définitions fondamentales

Définition

Une *proposition* est un énoncé qui est soit vrai soit faux et cela sans ambiguïté.

Exemples

- *Le lundi 13 mars 2012, il pleut.*
- *Quel jour sommes-nous ?*
- $2 + 3 = 5$
- $5 - 2 = 9$

Quelques définitions fondamentales

Définition

Une *proposition* est un énoncé qui est soit vrai soit faux et cela sans ambiguïté.

Exemples

- *Le lundi 13 mars 2012, il pleut.*
- *Quel jour sommes-nous ?*
- $2 + 3 = 5$
- $5 - 2 = 9$
- *Boire ou conduire, Monsieur Bob doit choisir.*

Définition

La *valeur de vérité* d'une proposition est vrai ou faux.

Définition

La *valeur de vérité* d'une proposition est vrai ou faux.
Habituellement, on note la valeur *vrai* par 1 et la valeur *faux* par 0.
Il s'agit d'une convention de notation.

Définition

La *valeur de vérité* d'une proposition est vrai ou faux.
Habituellement, on note la valeur *vrai* par 1 et la valeur *faux* par 0.
Il s'agit d'une convention de notation.

Attention

La *logique formelle* est basée sur deux hypothèses de départ qui sont

Définition

La *valeur de vérité* d'une proposition est vrai ou faux.
Habituellement, on note la valeur *vrai* par 1 et la valeur *faux* par 0.
Il s'agit d'une convention de notation.

Attention

La *logique formelle* est basée sur deux hypothèses de départ qui sont

- *Le tiers-exclu :* Toute proposition est soit vraie, soit fausse. (Attention de bien fixer le *contexte* dans lequel une proposition est énoncée)

Définition

La *valeur de vérité* d'une proposition est vrai ou faux.
Habituellement, on note la valeur *vrai* par 1 et la valeur *faux* par 0.
Il s'agit d'une convention de notation.

Attention

La *logique formelle* est basée sur deux hypothèses de départ qui sont

- *Le tiers-exclu :* Toute proposition est soit vraie, soit fausse. (Attention de bien fixer le *contexte* dans lequel une proposition est énoncée)
- *La non-contradiction :* Aucune proposition vraie n'est fausse en même temps.

Définition

La *valeur de vérité* d'une proposition est vrai ou faux.
Habituellement, on note la valeur *vrai* par 1 et la valeur *faux* par 0.
Il s'agit d'une convention de notation.

Attention

La *logique formelle* est basée sur deux hypothèses de départ qui sont

- *Le tiers-exclu :* Toute proposition est soit vraie, soit fausse. (Attention de bien fixer le *contexte* dans lequel une proposition est énoncée)
- *La non-contradiction :* Aucune proposition vraie n'est fausse en même temps.

Il existe d'autres logiques (logique flou, logique probabiliste, ...).

Déterminer la valeur de vérité

Déterminer la valeur de vérité

- 2 *est plus petit que* 3

Déterminer la valeur de vérité

- 2 *est plus petit que* 3
- *n est un nombre naturel.*

Déterminer la valeur de vérité

- 2 *est plus petit que* 3
- n *est un nombre naturel.*

Définition

Un *prédicat* est une proposition exprimée à l'aide d'un paramètre.

Déterminer la valeur de vérité

- 2 *est plus petit que* 3
- *n est un nombre naturel.*

Définition

Un *prédicat* est une proposition exprimée à l'aide d'un paramètre.

Exemples

- *Un chat est gris ou noir*

Déterminer la valeur de vérité

- 2 *est plus petit que* 3
- *n est un nombre naturel.*

Définition

Un *prédicat* est une proposition exprimée à l'aide d'un paramètre.

Exemples

- *Un chat est gris ou noir*
- *En Belgique, lors des dernières élections, il existait au moins un électeur dont il s'agissait du premier scrutin*

Rappel : notre objectif

Rappel : notre objectif

Travailler avec un langage, en toute abstraction, fixer ces règles de calculs en toute généralité... sans se placer dans le contexte de propositions particulières.

Rappel : notre objectif

Travailler avec un langage, en toute abstraction, fixer ces règles de calculs en toute généralité... sans se placer dans le contexte de propositions particulières.
Plutôt qu'étudier l'arithmétique en retenant

$$(2+3)^2 = 25$$
$$(3+4)^2 = 49$$
$$\ldots$$

Rappel : notre objectif

Travailler avec un langage, en toute abstraction, fixer ces règles de calculs en toute généralité... sans se placer dans le contexte de propositions particulières.
Plutôt qu'étudier l'arithmétique en retenant

$$(2+3)^2 = 25$$
$$(3+4)^2 = 49$$
$$\cdots$$

mieux vaut retenir

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Rappel : notre objectif

Travailler avec un langage, en toute abstraction, fixer ces règles de calculs en toute généralité... sans se placer dans le contexte de propositions particulières.
Plutôt qu'étudier l'arithmétique en retenant

$$(2+3)^2 = 25$$
$$(3+4)^2 = 49$$
$$\cdots$$

mieux vaut retenir

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

En logique, on travaille avec des variables propositionnelles.

Définition

Une *variable propositionnelle* est une proposition anonyme, dont la valeur de vérité n'est pas fixée.

Définition

Une *variable propositionnelle* est une proposition anonyme, dont la valeur de vérité n'est pas fixée.
Par hypothèse, cette valeur est 0 ou 1.

Définition

Une *variable propositionnelle* est une proposition anonyme, dont la valeur de vérité n'est pas fixée.
Par hypothèse, cette valeur est 0 ou 1.

Définition

Soit p une variable propositionnelle.

Définition

Une *variable propositionnelle* est une proposition anonyme, dont la valeur de vérité n'est pas fixée.
Par hypothèse, cette valeur est 0 ou 1.

Définition

Soit p une variable propositionnelle. Sa *table de vérité* est la suivante.

p
1
0

Une proposition plus complexe

Boire ou conduire, Monsieur Bob doit choisir.

Une proposition plus complexe

Boire ou conduire, Monsieur Bob doit choisir.

Une formule obtenue grâce aux connecteurs

Ces variables propositionnelles élémentaires permettent de construire des propositions plus complexes et cela, grâce aux connecteurs.

Une proposition plus complexe

Boire ou conduire, Monsieur Bob doit choisir.

Une formule obtenue grâce aux connecteurs

Ces variables propositionnelles élémentaires permettent de construire des propositions plus complexes et cela, grâce aux connecteurs.
On obtient alors des *formules* qui sont elles-mêmes des propositions.

Une proposition plus complexe

Boire ou conduire, Monsieur Bob doit choisir.

Une formule obtenue grâce aux connecteurs

Ces variables propositionnelles élémentaires permettent de construire des propositions plus complexes et cela, grâce aux connecteurs.
On obtient alors des *formules* qui sont elles-mêmes des propositions.

Ce que permettra la table de vérité...

d'observer toutes les valeurs possibles de la variable propositionnelle, ou d'une formule en général.

Les différents connecteurs

Origine

La logique nous aide à formaliser des règles, issues du langage courant.

Les différents connecteurs

Origine

La logique nous aide à formaliser des règles, issues du langage courant.
Les connecteurs sont des outils pour *traduire* ces règles en langage formel.

Les différents connecteurs

Origine

La logique nous aide à formaliser des règles, issues du langage courant.
Les connecteurs sont des outils pour *traduire* ces règles en langage formel.
Ils ont une signification bien claire en français.

Les différents connecteurs

Origine

La logique nous aide à formaliser des règles, issues du langage courant.
Les connecteurs sont des outils pour *traduire* ces règles en langage formel.
Ils ont une signification bien claire en français.

Les connecteurs étudiés

Les différents connecteurs

Origine

La logique nous aide à formaliser des règles, issues du langage courant.
Les connecteurs sont des outils pour *traduire* ces règles en langage formel.
Ils ont une signification bien claire en français.

Les connecteurs étudiés

- la négation, notée $\neg$,

Les différents connecteurs

Origine

La logique nous aide à formaliser des règles, issues du langage courant.
Les connecteurs sont des outils pour *traduire* ces règles en langage formel.
Ils ont une signification bien claire en français.

Les connecteurs étudiés

- la négation, notée $\neg$,
- la disjonction, notée $\vee$,

Les différents connecteurs

Origine

La logique nous aide à formaliser des règles, issues du langage courant.
Les connecteurs sont des outils pour *traduire* ces règles en langage formel.
Ils ont une signification bien claire en français.

Les connecteurs étudiés

- la négation, notée $\neg$,
- la disjonction, notée $\vee$,
- la conjonction, notée $\wedge$,

Les différents connecteurs

Origine

La logique nous aide à formaliser des règles, issues du langage courant.
Les connecteurs sont des outils pour *traduire* ces règles en langage formel.
Ils ont une signification bien claire en français.

Les connecteurs étudiés

- la négation, notée $\neg$,
- la disjonction, notée $\vee$,
- la conjonction, notée $\wedge$,
- l'implication, notée $\Rightarrow$,

Les différents connecteurs

Origine

La logique nous aide à formaliser des règles, issues du langage courant.
Les connecteurs sont des outils pour *traduire* ces règles en langage formel.
Ils ont une signification bien claire en français.

Les connecteurs étudiés

- la négation, notée $\neg$,
- la disjonction, notée $\vee$,
- la conjonction, notée $\wedge$,
- l'implication, notée $\Rightarrow$,
- l'équivalence, notée $\Leftrightarrow$,

Les différents connecteurs

Origine

La logique nous aide à formaliser des règles, issues du langage courant.
Les connecteurs sont des outils pour *traduire* ces règles en langage formel.
Ils ont une signification bien claire en français.

Les connecteurs étudiés

- la négation, notée $\neg$,
- la disjonction, notée $\vee$,
- la conjonction, notée $\wedge$,
- l'implication, notée $\Rightarrow$,
- l'équivalence, notée $\Leftrightarrow$,
- la disjonction exclusive, notée $\oplus$.

Nier une proposition

- *2 est plus petit que 3.*

Nier une proposition

- *2 est plus petit que 3*. Sa négation est *2 n'est pas plus petit que 3*.
- *Je ne suis pas un chat*.

Nier une proposition

- *2 est plus petit que 3*. Sa négation est *2 n'est pas plus petit que 3*.
- *Je ne suis pas un chat*. Sa négation est *Je suis un chat.*

Nier une proposition

- *2 est plus petit que 3*. Sa négation est *2 n'est pas plus petit que 3*.
- *Je ne suis pas un chat*.Sa négation est *Je suis un chat*.

Définition

La *négation* d'une proposition p, notée $\neg p$ se définit par la table de vérité suivante

p	$\neg p$
1	
0	

Nier une proposition

- *2 est plus petit que 3*. Sa négation est *2 n'est pas plus petit que 3*.
- *Je ne suis pas un chat*.Sa négation est *Je suis un chat*.

Définition

La *négation* d'une proposition p, notée $\neg p$ se définit par la table de vérité suivante

p	$\neg p$
1	0
0	1

Nier une proposition

- *2 est plus petit que 3*. Sa négation est *2 n'est pas plus petit que 3*.
- *Je ne suis pas un chat*.Sa négation est *Je suis un chat.*

Définition

La *négation* d'une proposition p, notée $\neg p$ se définit par la table de vérité suivante

p	$\neg p$
1	0
0	1

Attention

La négation est un connecteur *unaire*. car il n'a qu'un seul opérande.

L'un ou l'autre ... ou les deux

L'électeur choisit un candidat ou l'électeur choisit une liste.

Définition

La *disjonction* de deux variables propositionnelles p et q, notée $p \vee q$ est définie par la table de vérité suivante

L'un ou l'autre ... ou les deux

L'électeur choisit un candidat ou l'électeur choisit une liste.

Définition

La *disjonction* de deux variables propositionnelles p et q, notée $p \vee q$ est définie par la table de vérité suivante

p	q	$p \vee q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

L'un ou l'autre ... ou les deux

L'électeur choisit un candidat ou l'électeur choisit une liste.

Définition

La *disjonction* de deux variables propositionnelles p et q, notée $p \vee q$ est définie par la table de vérité suivante

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Remarque

- La disjonction est un connecteur binaire ; il met en relation deux variables propositionnelles ou deux formules.
- L'opérateur $\neg$ est prioritaire sur tout autre opérateur.

Exemple

Considérons la table de vérité de la proposition $p \vee \neg q \vee p$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \vee \neg q \vee p$
1	1			

Remarque

- La disjonction est un connecteur binaire ; il met en relation deux variables propositionnelles ou deux formules.
- L'opérateur $\neg$ est prioritaire sur tout autre opérateur.

Exemple

Considérons la table de vérité de la proposition $p \vee \neg q \vee p$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \vee \neg q \vee p$
1	1			
1	0			

Remarque

- La disjonction est un connecteur binaire ; il met en relation deux variables propositionnelles ou deux formules.
- L'opérateur $\neg$ est prioritaire sur tout autre opérateur.

Exemple

Considérons la table de vérité de la proposition $p \vee \neg q \vee p$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \vee \neg q \vee p$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Remarque

- La disjonction est un connecteur binaire ; il met en relation deux variables propositionnelles ou deux formules.
- L'opérateur $\neg$ est prioritaire sur tout autre opérateur.

Exemple

Considérons la table de vérité de la proposition $p \vee \neg q \vee p$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \vee \neg q \vee p$
1	1	0		
1	0			
0	1			
0	0			

Remarque

- La disjonction est un connecteur binaire ; il met en relation deux variables propositionnelles ou deux formules.
- L'opérateur $\neg$ est prioritaire sur tout autre opérateur.

Exemple

Considérons la table de vérité de la proposition $p \vee \neg q \vee p$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \vee \neg q \vee p$
1	1	0		
1	0	1		
0	1	0		
0	0	1		

Remarque

- La disjonction est un connecteur binaire ; il met en relation deux variables propositionnelles ou deux formules.
- L'opérateur $\neg$ est prioritaire sur tout autre opérateur.

Exemple

Considérons la table de vérité de la proposition $p \vee \neg q \vee p$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \vee \neg q \vee p$
1	1	0	1	
1	0	1		
0	1	0		
0	0	1		

Remarque

- La disjonction est un connecteur binaire ; il met en relation deux variables propositionnelles ou deux formules.
- L'opérateur $\neg$ est prioritaire sur tout autre opérateur.

Exemple

Considérons la table de vérité de la proposition $p \vee \neg q \vee p$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \vee \neg q \vee p$
1	1	0	1	
1	0	1	1	
0	1	0	0	
0	0	1	1	

Remarque

- La disjonction est un connecteur binaire ; il met en relation deux variables propositionnelles ou deux formules.
- L'opérateur $\neg$ est prioritaire sur tout autre opérateur.

Exemple

Considérons la table de vérité de la proposition $p \vee \neg q \vee p$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \vee \neg q \vee p$
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1

L'un ET l'autre... ensemble

Nous sommes un vendredi et il fait beau.

Définition

La *conjonction* de deux propositions p et q, notée $p \wedge q$ se définit par la table de vérité suivante

L'un ET l'autre... ensemble

Nous sommes un vendredi et il fait beau.

Définition

La *conjonction* de deux propositions p et q, notée $p \wedge q$ se définit par la table de vérité suivante

p	q	$p \wedge q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

L'un ET l'autre... ensemble

Nous sommes un vendredi et il fait beau.

Définition

La *conjonction* de deux propositions p et q, notée $p \wedge q$ se définit par la table de vérité suivante

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	
0	1	
0	0	

L'un ET l'autre... ensemble

Nous sommes un vendredi et il fait beau.

Définition

La *conjonction* de deux propositions p et q, notée $p \wedge q$ se définit par la table de vérité suivante

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	
0	0	

L'un ET l'autre... ensemble

Nous sommes un vendredi et il fait beau.

Définition

La *conjonction* de deux propositions p et q, notée $p \wedge q$ se définit par la table de vérité suivante

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	

L'un ET l'autre... ensemble

Nous sommes un vendredi et il fait beau.

Définition

La *conjonction* de deux propositions p et q, notée $p \wedge q$ se définit par la table de vérité suivante

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Attention

Les opérateurs $\vee$ et $\wedge$ ont la même priorité.

Comparons

la table de vérité de $(p \wedge q) \vee r$ avec la table de vérité de $p \wedge (q \vee r)$.

Nous avons

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Attention

Les opérateurs $\vee$ et $\wedge$ ont la même priorité.

Comparons

la table de vérité de $(p \wedge q) \vee r$ avec la table de vérité de $p \wedge (q \vee r)$.

Nous avons

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Attention

Les opérateurs $\vee$ et $\wedge$ ont la même priorité.

Comparons

la table de vérité de $(p \wedge q) \vee r$ avec la table de vérité de $p \wedge (q \vee r)$.
Nous avons

p	q	r	$(p \wedge q) \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
0	0	0	0	0
0	**0**	**1**	**1**	**0**
0	1	0	0	0
0	**1**	**1**	**1**	**0**
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Définition

Ces trois premiers connecteurs sont appelés *connecteurs fondamentaux*.

Définition

Ces trois premiers connecteurs sont appelés *connecteurs fondamentaux*.
Tout autre connecteur peut être défini à partir de ces trois connecteurs fondamentaux.

Définition

Ces trois premiers connecteurs sont appelés *connecteurs fondamentaux*.
Tout autre connecteur peut être défini à partir de ces trois connecteurs fondamentaux.

Etre capable...

Définition

Ces trois premiers connecteurs sont appelés *connecteurs fondamentaux*.
Tout autre connecteur peut être défini à partir de ces trois connecteurs fondamentaux.

Etre capable...

- de calculer une table de vérité

Définition

Ces trois premiers connecteurs sont appelés *connecteurs fondamentaux*.
Tout autre connecteur peut être défini à partir de ces trois connecteurs fondamentaux.

Etre capable...

- de calculer une table de vérité
- de compléter une table de vérité

Définition

Ces trois premiers connecteurs sont appelés *connecteurs fondamentaux*.
Tout autre connecteur peut être défini à partir de ces trois connecteurs fondamentaux.

Etre capable...

- de calculer une table de vérité
- de compléter une table de vérité
- de calculer une formule ne faisant intervenir que des connecteurs fondamentaux

Si l'un, alors l'autre

Si les poules ont des dents, alors il pleut aujourd'hui.

- Etes-vous d'accord avec cette règle de météorologie ?
- Pleut-il aujourd'hui ?
- Les poules ont-elles des dents ?

Définition

L'*implication* entre deux propositions p et q, notée $p \Rightarrow q$ se définit par la table de vérité suivante

Si l'un, alors l'autre

Si les poules ont des dents, alors il pleut aujourd'hui.

- Etes-vous d'accord avec cette règle de météorologie ?
- Pleut-il aujourd'hui ?
- Les poules ont-elles des dents ?

Définition

L'*implication* entre deux propositions p et q, notée $p \Rightarrow q$ se définit par la table de vérité suivante

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Si l'un, alors l'autre

Si les poules ont des dents, alors il pleut aujourd'hui.

- Etes-vous d'accord avec cette règle de météorologie ?
- Pleut-il aujourd'hui ?
- Les poules ont-elles des dents ?

Définition

L'*implication* entre deux propositions p et q, notée $p \Rightarrow q$ se définit par la table de vérité suivante

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	
0	1	
0	0	

Si l'un, alors l'autre

Si les poules ont des dents, alors il pleut aujourd'hui.

- Etes-vous d'accord avec cette règle de météorologie ?
- Pleut-il aujourd'hui ?
- Les poules ont-elles des dents ?

Définition

L'*implication* entre deux propositions p et q, notée $p \Rightarrow q$ se définit par la table de vérité suivante

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	
0	0	

Si l'un, alors l'autre

Si les poules ont des dents, alors il pleut aujourd'hui.

- Etes-vous d'accord avec cette règle de météorologie ?
- Pleut-il aujourd'hui ?
- Les poules ont-elles des dents ?

Définition

L'*implication* entre deux propositions p et q, notée $p \Rightarrow q$ se définit par la table de vérité suivante

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	

Si l'un, alors l'autre

Si les poules ont des dents, alors il pleut aujourd'hui.

- Etes-vous d'accord avec cette règle de météorologie ?
- Pleut-il aujourd'hui ?
- Les poules ont-elles des dents ?

Définition

L'*implication* entre deux propositions p et q, notée $p \Rightarrow q$ se définit par la table de vérité suivante

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Définition

Soit la proposition $p \Rightarrow q$.

Définition

Soit la proposition $p \Rightarrow q$.
La proposition p située à gauche du connecteur $\Rightarrow$ est appelée *antécédent*, la proposition q est appelée *conséquent*.

Définition

Soit la proposition $p \Rightarrow q$.
La proposition p située à gauche du connecteur $\Rightarrow$ est appelée *antécédent*, la proposition q est appelée *conséquent*.
On parle encore pour p d'*hypothèse* et pour q de *conclusion*.

Ne pas confondre...

Si $1 = 2$, *alors* $5 = 6$

Ne pas confondre...

Si $1 = 2$, *alors* $5 = 6$

- est une implication qui est...
- dont le conséquent est...

Ne pas confondre...

Si $1 = 2$, *alors* $5 = 6$

- est une implication qui est toujours vraie,
- dont le conséquent est faux.

Il ne faut donc pas confondre la véracité du conséquent avec la véracité de l'implication.

Nous avons donc...

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Nous avons donc...

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Une implication n'est pas vérifiée lorsque p est vraie et que q est fausse.

Nous avons donc...

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Une implication n'est pas vérifiée lorsque p est vraie et que q est fausse.
On voit encore que l'implication $p \Rightarrow q$ est vraie dès que p est fausse ou que q est vraie.

Définition

Lorsque l'implication $p \Rightarrow q$ est vraie,

Définition

Lorsque l'implication $p \Rightarrow q$ est vraie, on dit que p est une *condition suffisante* pour avoir q

Définition

Lorsque l'implication $p \Rightarrow q$ est vraie, on dit que p est une *condition suffisante* pour avoir q et que q est une *condition nécessaire* pour avoir p.

Définition

Lorsque l'implication $p \Rightarrow q$ est vraie, on dit que p est une *condition suffisante* pour avoir q et que q est une *condition nécessaire* pour avoir p.

Observons...

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Définition

Lorsque l'implication $p \Rightarrow q$ est vraie, on dit que p est une *condition suffisante* pour avoir q et que q est une *condition nécessaire* pour avoir p.

Observons...

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Lorsque $p \Rightarrow q$ est vraie, établir que p est vraie suffit pour savoir que q est vraie.

Définition

Lorsque l'implication $p \Rightarrow q$ est vraie, on dit que p est une *condition suffisante* pour avoir q et que q est une *condition nécessaire* pour avoir p.

Observons...

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Lorsque $p \Rightarrow q$ est vraie, établir que p est vraie suffit pour savoir que q est vraie.
Par contre, établir que q est vraie, ne suffit pas pour affirmer que p est vraie.

Définition

Lorsque l'implication $p \Rightarrow q$ est vraie, on dit que p est une *condition suffisante* pour avoir q et que q est une *condition nécessaire* pour avoir p.

Observons...

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Lorsque $p \Rightarrow q$ est vraie, établir que p est vraie suffit pour savoir que q est vraie.
Par contre, établir que q est vraie, ne suffit pas pour affirmer que p est vraie.
De plus si q est fausse, alors nécessairement p sera fausse, toujours dans le contexte où l'implication $p \Rightarrow q$ est vraie.

Observons...

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Lorsque $p \Rightarrow q$ est vraie, établir que p est vraie suffit pour savoir que q est vraie.
Par contre, établir que q est vraie, ne suffit pas pour affirmer que p est vraie.
De plus si q est fausse, alors nécessairement p sera fausse, toujours dans le contexte où l'implication $p \Rightarrow q$ est vraie.

"Être un gant" est-il une condition *nécessaire* ou *suffisante* pour "être un vêtement"?

Observons...

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Lorsque $p \Rightarrow q$ est vraie, établir que p est vraie suffit pour savoir que q est vraie.
Par contre, établir que q est vraie, ne suffit pas pour affirmer que p est vraie.
De plus si q est fausse, alors nécessairement p sera fausse, toujours dans le contexte où l'implication $p \Rightarrow q$ est vraie.

Exemples

Etre un gant est suffisant pour être un vêtement.

Attention,

Un énoncé d'implication en français s'exprime souvent sous la forme *Si* ..., *alors* ....

Modélisez les phrases suivantes :

- La somme de deux nombres pairs est paire.
- J'emporte un parapluie si le temps est couvert.
- J'emporte un parapluie seulement si le temps est couvert.

Attention,

Un énoncé d'implication en français s'exprime souvent sous la forme *Si* …, *alors* ….
Ce n'est pas toujours le cas, nous pouvons également avoir des énoncés tels que par exemple,

- *La somme de deux nombres pairs est paire*.
- *J'emporte un parapluie si le temps est couvert*.

Attention,

Un énoncé d'implication en français s'exprime souvent sous la forme *Si* . . ., *alors* . . ..
Ce n'est pas toujours le cas, nous pouvons également avoir des énoncés tels que par exemple,

- *La somme de deux nombres pairs est paire*.
- *J'emporte un parapluie si le temps est couvert*.

Pour observer une implication dans le langage courant, il convient donc de bien identifier les hypothèses et les conclusions.

Illustration sur: "Je sors au bunker si j'ai fini d'étudier."

Définition

Illustration sur: "Je sors au bunker si j'ai fini d'étudier."

Définition

La formule $q \Rightarrow p$ est la *réciproque* de $p \Rightarrow q$.

Illustration sur: "Je sors au bunker si j'ai fini d'étudier."

Définition

La formule $q \Rightarrow p$ est la *réciproque* de $p \Rightarrow q$.
La formule $\neg q \Rightarrow \neg p$ est la *contraposée* de $p \Rightarrow q$.

Illustration sur: "Je sors au bunker si j'ai fini d'étudier."

Définition

La formule $q \Rightarrow p$ est la *réciproque* de $p \Rightarrow q$.
La formule $\neg q \Rightarrow \neg p$ est la *contraposée* de $p \Rightarrow q$.
La formule $\neg p \Rightarrow \neg q$ est l'*inverse* de $p \Rightarrow q$.

Illustration sur: "Je sors au bunker si j'ai fini d'étudier."

Définition

La formule $q \Rightarrow p$ est la *réciproque* de $p \Rightarrow q$.
La formule $\neg q \Rightarrow \neg p$ est la *contraposée* de $p \Rightarrow q$.
La formule $\neg p \Rightarrow \neg q$ est l'*inverse* de $p \Rightarrow q$.

Attention

Notons que la négation d'une implication, n'est pas *p n'implique pas q*....

Illustration sur: "Je sors au bunker si j'ai fini d'étudier."

Définition

La formule $q \Rightarrow p$ est la *réciproque* de $p \Rightarrow q$.
La formule $\neg q \Rightarrow \neg p$ est la *contraposée* de $p \Rightarrow q$.
La formule $\neg p \Rightarrow \neg q$ est l'*inverse* de $p \Rightarrow q$.

Attention

Notons que la négation d'une implication, n'est pas *p n'implique pas q*....

Y a-t-il des **propositions *équivalentes*** à p => q parmi sa réciproque, sa contraposée, son inverse ou sa négation?

Définition

Deux formules sont *équivalentes* si elles conduisent à la même table de vérité.

Définition

Deux formules sont *équivalentes* si elles conduisent à la même table de vérité.

Propriété

Soit p et q deux variables propositionnelles. La formule $p \Rightarrow q$ est équivalente à $\neg(p \wedge \neg q)$.

Propriété

Soit p et q deux variables propositionnelles. La formule $p \Rightarrow q$ est équivalente à $\neg(p \wedge \neg q)$.

Propriété

Soit p et q deux variables propositionnelles. La formule $p \Rightarrow q$ est équivalente à $\neg(p \wedge \neg q)$.

Démonstration

La définition de $\Rightarrow$ est

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Propriété

Soit p et q deux variables propositionnelles. La formule $p \Rightarrow q$ est équivalente à $\neg(p \wedge \neg q)$.

Démonstration

La définition de $\Rightarrow$ est

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Or nous pouvons calculer la valeur de vérité de $\neg(p \wedge \neg q)$,

Propriété

Soit p et q deux variables propositionnelles. La formule $p \Rightarrow q$ est équivalente à $\neg(p \wedge \neg q)$.

Démonstration

La définition de $\Rightarrow$ est

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Or nous pouvons calculer la valeur de vérité de $\neg(p \wedge \neg q)$, soit

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

en utilisant les définitions de la négation et de la conjonction.

Propriété

Soit p et q deux variables propositionnelles. La formule $p \Rightarrow q$ est équivalente à $\neg(p \wedge \neg q)$.

Démonstration

La définition de $\Rightarrow$ est

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Or nous pouvons calculer la valeur de vérité de $\neg(p \wedge \neg q)$, soit

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

en utilisant les définitions de la négation et de la conjonction.
La dernière colonne de chaque tableau étant identique à l'autre, les deux formules sont bien équivalentes.

Attention

Notons que la négation d'une implication, n'est pas *p n'implique pas q*, mais ....

Attention

Notons que la négation d'une implication, n'est pas *p n'implique pas q*, mais *p et non q*.

Attention

Notons que la négation d'une implication, n'est pas *p n'implique pas q*, mais *p et non q*.

Exemple

Prenons l'énoncé suivant *Si il fait beau demain, je vais à la piscine*.

Attention

Notons que la négation d'une implication, n'est pas *p n'implique pas q*, mais *p et non q*.

Exemple

Prenons l'énoncé suivant *Si il fait beau demain, je vais à la piscine*. La négation de celui-ci est *Il fait beau et je ne vais pas à la piscine*.

Nous avons donc...

Nous avons donc...

- La formule $p \Rightarrow q$ est équivalente à $\neg(p \wedge \neg q)$.

Nous avons donc...

- La formule $p \Rightarrow q$ est équivalente à $\neg(p \wedge \neg q)$.
  Ceci est toujours vrai.

Nous avons donc...

- La formule $p \Rightarrow q$ est équivalente à $\neg(p \wedge \neg q)$.
  Ceci est toujours vrai.
-
- $p \Rightarrow q$ ...... $\neg(p \wedge \neg q)$

Nous avons donc...

- La formule $p \Rightarrow q$ est équivalente à $\neg(p \wedge \neg q)$.
  Ceci est toujours vrai.
-
- $(\ p \ \Rightarrow \ q \ ) \qquad \Leftrightarrow \qquad \neg(p \wedge \neg q)$

Définition

Le connecteur *équivalence* entre deux propositions p et q, noté

$p \Leftrightarrow q$ est la proposition composée suivante

Nous avons donc...

- La formule $p \Rightarrow q$ est équivalente à $\neg(p \wedge \neg q)$.
-
- $(\ p \ \Rightarrow \ q\ ) \qquad \Leftrightarrow \qquad \neg(p \wedge \neg q)$

Définition

Le connecteur *équivalence* entre deux propositions p et q, noté $p \Leftrightarrow q$ est la proposition composée suivante

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

Nous avons donc...

- La formule $p \Rightarrow q$ est équivalente à $\neg(p \wedge \neg q)$.
  Ceci est toujours vrai.
-
-

Définition

Le connecteur *équivalence* entre deux propositions p et q, noté $p \Leftrightarrow q$ est la proposition composée suivante

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

Définition

Lorsque la proposition $p \Leftrightarrow q$ est vraie, on dit alors que p est une *condition nécessaire et suffisante* de q.

Nous avons donc...

- La formule $p \Rightarrow q$ est équivalente à $\neg(p \wedge \neg q)$.
  Ceci est toujours vrai.
-
-

Définition

Le connecteur *équivalence* entre deux propositions p et q, noté $p \Leftrightarrow q$ est la proposition composée suivante

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

Définition

Lorsque la proposition $p \Leftrightarrow q$ est vraie, on dit alors que p est une *condition nécessaire et suffisante* de q.
Lorsque la proposition $p \Leftrightarrow q$ est vraie, on dit que q est un *synonyme* de p.

L'un ou l'autre...exclusivement

Un nombre, strictement positif est pair ou impair.

L'un ou l'autre...exclusivement

Un nombre, strictement positif est pair ou impair.

Définition

Le connecteur appelé *disjonction exclusive* entre p et q, noté $p \oplus q$ est équivalent à la formule suivante

L'un ou l'autre...exclusivement

Un nombre, strictement positif est pair ou impair.

Définition

Le connecteur appelé *disjonction exclusive* entre p et q, noté $p \oplus q$ est équivalent à la formule suivante

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q).$$

Exemple

A quelle(s) condition(s) la formule $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \oplus q)$ est-elle vraie ?

Exemple

On peut démontrer que la formule $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \oplus q)$ est toujours vraie et ce quelles que soient les valeurs de vérité des variables propositionnelles p et q.

Exemple

On peut démontrer que la formule $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \oplus q)$ est toujours vraie et ce quelles que soient les valeurs de vérité des variables propositionnelles p et q.

Définition

Une *tautologie* est une formule F dont la valeur de vérité est vrai quelle que soit la valeur attribuée aux variables propositionnelles qui la composent.

Exemple

On peut démontrer que la formule $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \oplus q)$ est toujours vraie et ce quelles que soient les valeurs de vérité des variables propositionnelles p et q.

Définition

Une *tautologie* est une formule F dont la valeur de vérité est vrai quelle que soit la valeur attribuée aux variables propositionnelles qui la composent.
On note que F est une tautologie par $\vdash F$

Propriétés des connecteurs

Propriétés

Nous avons les tautologies suivantes

$$\begin{aligned} \vdash p \wedge 0 &\Leftrightarrow \ldots \\ \vdash p \wedge 1 &\Leftrightarrow \ldots \\ \vdash p \wedge \neg p &\Leftrightarrow \ldots \end{aligned}$$

Propriétés des connecteurs

Propriétés

Nous avons les tautologies suivantes

$$\vdash p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$
$$\vdash p \wedge 1 \Leftrightarrow p$$
$$\vdash p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0.$$

Démonstration

Calculons la table de vérité de la formule $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

p	$p \wedge 0$	$(p \wedge 0) \Leftrightarrow 0$
1	0	1
0	0	1

La dernière colonne nous indique que la formule $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ est bien une tautologie.

Etre capable...

de réaliser une démonstration

Etre capable...

de réaliser une démonstration

- en utilisant les tables de vérité, les définitions,

Etre capable...

de réaliser une démonstration

- en utilisant les tables de vérité, les définitions,
- en utilisant les propriétés que nous allons énoncer.

Propriétés

L'opérateur $\vee$ respecte les tautologies suivantes.

$$\begin{aligned}
&\vdash p \vee 0 \quad \Leftrightarrow \ ... \\
&\vdash p \vee 1 \quad \Leftrightarrow \ ... \\
&\vdash p \vee \neg p \Leftrightarrow \ ...
\end{aligned}$$

Propriétés

L'opérateur $\vee$ respecte les tautologies suivantes.

$$\vdash p \vee 0 \Leftrightarrow p$$
$$\vdash p \vee 1 \Leftrightarrow 1$$
$$\vdash p \vee \neg p \Leftrightarrow 1.$$

Propriétés

Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ vérifient la propriété de commutativité :

Propriétés

Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ vérifient la propriété de commutativité :

$$\vdash p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

$$\vdash p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

Propriétés

Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ vérifient la propriété de commutativité :

$$\vdash p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$
$$\vdash p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ vérifient la propriété d'associativité :

Propriétés

Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ vérifient la propriété de commutativité :

$$\vdash p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$
$$\vdash p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ vérifient la propriété d'associativité :

$$\vdash p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$
$$\vdash p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

Propriétés

Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ vérifient chacun la propriété de distributivité sur l'autre :

Propriétés

Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ vérifient chacun la propriété de distributivité sur l'autre :

$$\vdash p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow \quad ...$$
$$\vdash p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow \quad ...$$

Propriétés

Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ vérifient chacun la propriété de distributivité sur l'autre :

$$\vdash p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$\vdash p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Propriétés

Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ vérifient chacun la propriété de distributivité sur l'autre :

$$\vdash p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$\vdash p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ vérifient la propriété d'idempotence :

Propriétés

Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ vérifient chacun la propriété de distributivité sur l'autre :

$$\vdash p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$\vdash p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ vérifient la propriété d'idempotence :

$$\vdash p \wedge p \Leftrightarrow p$$
$$\vdash p \vee p \Leftrightarrow p$$

Démonstration

Nous établissons la tautologie $\vdash p \wedge p \Leftrightarrow p$.

Démonstration

Nous établissons la tautologie $\vdash p \wedge p \Leftrightarrow p$.
Pour cela, nous comparons les tables de vérité. Nous avons

p	p	$p \wedge p$
1	1	1
0	0	0

Démonstration

Nous établissons la tautologie $\vdash p \wedge p \Leftrightarrow p$.
Pour cela, nous comparons les tables de vérité. Nous avons

p	p	$p \wedge p$
1	1	1
0	0	0

dont la dernière colonne, comparée à p donne les mêmes valeurs de vérité.

Démonstration

Nous établissons la tautologie $\vdash p \wedge p \Leftrightarrow p$.
Pour cela, nous comparons les tables de vérité. Nous avons

p	p	$p \wedge p$
1	1	1
0	0	0

dont la dernière colonne, comparée à p donne les mêmes valeurs de vérité.
Dès lors $p \wedge p \Leftrightarrow p$ est bien une tautologie.

Propriétés

Le connecteur $\neg$ respecte le principe de double négation, soit

Propriétés

Le connecteur $\neg$ respecte le principe de double négation, soit

$$\vdash \neg\neg p \Leftrightarrow p$$

Loi de De Morgan

La loi de De Morgan reprend deux tautologies

$$\begin{aligned} &\vdash \quad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \quad \ldots \\ &\vdash \quad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \quad \ldots \end{aligned}$$

Loi de De Morgan

La loi de De Morgan reprend deux tautologies

$$\vdash \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
$$\vdash \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Démonstration

Nous établissons $\vdash \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ en construisant les tables de vérité.

Démonstration

Nous établissons $\vdash \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ en construisant les tables de vérité.
Nous avons

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Démonstration

Nous établissons $\vdash \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ en construisant les tables de vérité.
Nous avons

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

et

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Démonstration

Nous établissons $\vdash \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ en construisant les tables de vérité.
Nous avons

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

et

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Les dernières colonnes de ces deux tables de vérité sont bien les mêmes.

Démonstration

Nous établissons $\vdash \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ en construisant les tables de vérité.
Nous avons

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

et

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Les dernières colonnes de ces deux tables de vérité sont bien les mêmes.
Nous sommes donc bien en présence d'une tautologie.

Exemple

- Lorsque vous niez une proposition telle que *Je pars à la mer ou à la montagne*, cela revient à dire ......

- Si vous niez *Je pars à la mer et je pars en voiture*, cela revient à dire ....

Exemple

- Lorsque vous niez une proposition telle que *Je pars à la mer ou à la montagne*, cela revient à dire *Je ne pars ni à la mer, ni à la montagne*.
- Si vous niez *Je pars à la mer et je pars en voiture*, cela revient à dire *Je ne pars pas à la mer ou je ne pars pas en voiture*.

Etre capable de réaliser une démonstration en utilisant les propriétés

Nous devons établir que

$$\vdash (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

Nous avons

$$\vdash (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \qquad \text{par la proposition sur } \Rightarrow$$

Etre capable de réaliser une démonstration en utilisant les propriétés

Nous devons établir que

$$\vdash (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \vdash (p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) && \text{par la proposition sur } \Rightarrow \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg q \wedge p) && \text{par la commutativité de } \wedge \end{aligned}$$

Etre capable de réaliser une démonstration en utilisant les propriétés

Nous devons établir que

$$\vdash (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \vdash (p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) && \text{par la proposition sur } \Rightarrow \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg q \wedge p) && \text{par la commutativité de } \wedge \\ &\Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p && \text{par la proposition sur } \Rightarrow \end{aligned}$$

Propriété

Soit p, q et r trois variables propositionnelles, alors

$$\begin{aligned}
&\vdash \quad p \oplus p \quad \Leftrightarrow \ ... \\
&\vdash \quad p \oplus \neg p \ \Leftrightarrow \ ... \\
&\vdash \quad p \oplus 0 \quad \Leftrightarrow \ ... \\
&\vdash \quad p \oplus 1 \quad \Leftrightarrow \ ... \\
&\vdash \quad p \oplus (q \oplus r) \Leftrightarrow \ ... \\
&\vdash \quad p \oplus q \quad \Leftrightarrow \quad (q \oplus p) \\
&\vdash \quad (p \oplus q) \oplus q \quad \Leftrightarrow \ ...
\end{aligned}$$

Propriété

Soit p, q et r trois variables propositionnelles, alors

$$\vdash p \oplus p \Leftrightarrow 0$$
$$\vdash p \oplus \neg p \Leftrightarrow 1$$
$$\vdash p \oplus 0 \Leftrightarrow p$$
$$\vdash p \oplus 1 \Leftrightarrow \neg p$$
$$\vdash p \oplus (q \oplus r) \Leftrightarrow ((p \oplus q) \oplus r)$$
$$\vdash p \oplus q \Leftrightarrow (q \oplus p)$$
$$\vdash (p \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow p$$

Remarque

Observons

$$\vdash (p \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow p$$

Remarque

Observons

$$\vdash (p \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow p$$

Nous avons alors

$$\vdash ((p \oplus q) \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow (p \oplus q)$$
$$\vdash (((p \oplus q) \oplus q) \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow p$$

Remarque

Observons

$$\vdash (p \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow p$$

Nous avons alors

$$\vdash ((p \oplus q) \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow (p \oplus q)$$
$$\vdash (((p \oplus q) \oplus q) \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow p$$

en appliquant deux fois le résultat cette fois, et ainsi de suite.

Remarque

Observons

$$\vdash (p \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow p$$

Nous avons alors

$$\vdash ((p \oplus q) \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow (p \oplus q)$$
$$\vdash (((p \oplus q) \oplus q) \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow p$$

en appliquant deux fois le résultat cette fois, et ainsi de suite.
Dès lors, seule la parité du nombre d'occurrences d'une variable propositionnelle dans une formule où n'intervient que l'opérateur $\oplus$, détermine le résultat.

Remarque

Observons

$$\vdash (p \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow p$$

Nous avons alors

$$\vdash ((p \oplus q) \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow (p \oplus q)$$
$$\vdash (((p \oplus q) \oplus q) \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow p$$

en appliquant deux fois le résultat cette fois, et ainsi de suite.
Dès lors, seule la parité du nombre d'occurrences d'une variable propositionnelle dans une formule où n'intervient que l'opérateur $\oplus$, détermine le résultat.
Cette propriété nous sera utile lorsque nous travaillerons avec le codage-décodage.

Remarque

Observons

$$\vdash (p \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow p$$

Nous avons alors

$$\vdash ((p \oplus q) \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow (p \oplus q)$$
$$\vdash (((p \oplus q) \oplus q) \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow p$$

en appliquant deux fois le résultat cette fois, et ainsi de suite.
Dès lors, seule la parité du nombre d'occurrences d'une variable propositionnelle dans une formule où n'intervient que l'opérateur $\oplus$, détermine le résultat.
Cette propriété nous sera utile lorsque nous travaillerons avec le codage-décodage.

Exemple

La formule $p \oplus p \oplus q \oplus r \oplus r$ est équivalente à ...

Remarque

Observons

$$\vdash (p \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow p$$

Nous avons alors

$$\vdash ((p \oplus q) \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow (p \oplus q)$$
$$\vdash (((p \oplus q) \oplus q) \oplus q) \oplus q \Leftrightarrow p$$

en appliquant deux fois le résultat cette fois, et ainsi de suite.
Dès lors, seule la parité du nombre d'occurrences d'une variable propositionnelle dans une formule où n'intervient que l'opérateur $\oplus$, détermine le résultat.
Cette propriété nous sera utile lorsque nous travaillerons avec le codage-décodage.

Exemple

La formule $p \oplus p \oplus q \oplus r \oplus r$ est équivalente à q.

Connecter des prédicats

Nous venons de voir comment connecter des variables propositionnelles à l'aide des connecteurs (fondamentaux ou non). De la même manière, nous pouvons connecter les prédicats.

Connecter des prédicats

Nous venons de voir comment connecter des variables propositionnelles à l'aide des connecteurs (fondamentaux ou non). De la même manière, nous pouvons connecter les prédicats.

Exemple

Soit les prédicats suivants

1. $p(x)$: x a un manteau rouge,
2. $q(x)$: x ne porte pas de barbe.

Connecter des prédicats

Nous venons de voir comment connecter des variables propositionnelles à l'aide des connecteurs (fondamentaux ou non). De la même manière, nous pouvons connecter les prédicats.

Exemple

Soit les prédicats suivants

1. $p(x)$: x a un manteau rouge,
2. $q(x)$: x ne porte pas de barbe.

Le prédicat $p(x) \vee q(x)$ est vrai pour x défini comme le *Père Noël*.
Le prédicat $p(x) \wedge \neg q(x)$ est également vrai.

Connecter des prédicats

Nous venons de voir comment connecter des variables propositionnelles à l'aide des connecteurs (fondamentaux ou non). De la même manière, nous pouvons connecter les prédicats.

Exemple

Soit les prédicats suivants

1. $p(x)$: x a un manteau rouge,
2. $q(x)$: x ne porte pas de barbe.

Le prédicat $p(x) \vee q(x)$ est vrai pour x défini comme le *Père Noël*.
Le prédicat $p(x) \wedge \neg q(x)$ est également vrai.
Par contre,

$$\neg(\neg(\neg p(x)) \vee \neg q(x))$$

Connecter des prédicats

Nous venons de voir comment connecter des variables propositionnelles à l'aide des connecteurs (fondamentaux ou non). De la même manière, nous pouvons connecter les prédicats.

Exemple

Soit les prédicats suivants

1. $p(x)$: x a un manteau rouge,
2. $q(x)$: x ne porte pas de barbe.

Le prédicat $p(x) \vee q(x)$ est vrai pour x défini comme le *Père Noël*.
Le prédicat $p(x) \wedge \neg q(x)$ est également vrai.
Par contre,

$$\neg(\neg(\neg p(x)) \vee \neg q(x))$$

est faux pour x défini comme le *Père Noël* mais est vrai si x est *Batman*.

Etre capable

d'utiliser à bon escient les connecteurs pour établir un modèle

- à l'aide de propositions
- à l'aide de prédicat

La consistance d'un ensemble de propositions

Etude de cas n° 2

1. Si Lise ne suit pas le cours de Mathématiques pour l'informatique, elle ne pourra réussir l'examen.
2. Si Lise ne réussit pas l'examen, elle ne pourra obtenir son diplôme de bachelier.
3. Si Lise lit le syllabus, elle obtiendra son diplôme de bachelier.
4. Lise ne suit pas le cours de Mathématiques pour l'informatique mais elle a lu le syllabus.

La consistance d'un ensemble de propositions

Etude de cas n° 2

1. Si Lise ne suit pas le cours de Mathématiques pour l'informatique, elle ne pourra réussir l'examen.
2. Si Lise ne réussit pas l'examen, elle ne pourra obtenir son diplôme de bachelier.
3. Si Lise lit le syllabus, elle obtiendra son diplôme de bachelier.
4. Lise ne suit pas le cours de Mathématiques pour l'informatique mais elle a lu le syllabus.

Est-ce cohérent comme règles ?

Définition

Un ensemble de propositions est dit *consistant* lorsqu'il est possible que toutes les propositions soient vraies simultanément.

Définition

Un ensemble de propositions est dit *consistant* lorsqu'il est possible que toutes les propositions soient vraies simultanément.
On précise alors les conditions sous lesquelles ces propositions sont vraies.

Exemple 1.18 (page 16 du syllabus)

Nous considérons la piscine communale qui doit respecter les règles de fonctionnement suivantes.

Exemple 1.18 (page 16 du syllabus)

Nous considérons la piscine communale qui doit respecter les règles de fonctionnement suivantes.

1. La piscine accueille plusieurs nageurs si et seulement si elle est ouverte.

Exemple 1.18 (page 16 du syllabus)

Nous considérons la piscine communale qui doit respecter les règles de fonctionnement suivantes.

1. La piscine accueille plusieurs nageurs si et seulement si elle est ouverte.
2. Si la piscine est ouverte, on peut acheter un ticket d'entrée.

Exemple 1.18 (page 16 du syllabus)

Nous considérons la piscine communale qui doit respecter les règles de fonctionnement suivantes.

1. La piscine accueille plusieurs nageurs si et seulement si elle est ouverte.
2. Si la piscine est ouverte, on peut acheter un ticket d'entrée.
3. On achète un ticket d'entrée ou la piscine est en travaux.

Exemple 1.18 (page 16 du syllabus)

Nous considérons la piscine communale qui doit respecter les règles de fonctionnement suivantes.

1. La piscine accueille plusieurs nageurs si et seulement si elle est ouverte.
2. Si la piscine est ouverte, on peut acheter un ticket d'entrée.
3. On achète un ticket d'entrée ou la piscine est en travaux.
4. Si la piscine n'est pas en travaux, la piscine accueille plusieurs nageurs et on ne peut pas acheter de ticket d'entrée.

Première étape : réaliser le modèle

Première étape : réaliser le modèle

1. identifier les propositions le composant

Première étape : réaliser le modèle

1. identifier les propositions le composant
2. connecter à bon escient ces propositions

Première étape : réaliser le modèle

1. identifier les propositions le composant
2. connecter à bon escient ces propositions

Exemple 1.18 (page 16 du syllabus)

Nous considérons la piscine communale qui doit respecter les règles de fonctionnement suivantes.

1. La piscine accueille plusieurs nageurs si et seulement si elle est ouverte.
2. Si la piscine est ouverte, on peut acheter un ticket d'entrée.
3. On achète un ticket d'entrée ou la piscine est en travaux.
4. Si la piscine n'est pas en travaux, la piscine accueille plusieurs nageurs et on ne peut pas acheter de ticket d'entrée.

Première étape : identifier les propositions le composant

Première étape : réaliser le modèle

1. identifier les propositions le composant
2. connecter à bon escient ces propositions

Exemple 1.18 (page 16 du syllabus)

Nous considérons la piscine communale qui doit respecter les règles de fonctionnement suivantes.

1. La piscine accueille plusieurs nageurs si et seulement si elle est ouverte.
2. Si la piscine est ouverte, on peut acheter un ticket d'entrée.
3. On achète un ticket d'entrée ou la piscine est en travaux.
4. Si la piscine n'est pas en travaux, la piscine accueille plusieurs nageurs et on ne peut pas acheter de ticket d'entrée.

Première étape : identifier les propositions le composant

p *La piscine accueille plusieurs nageurs* ,

Première étape : réaliser le modèle

1. identifier les propositions le composant
2. connecter à bon escient ces propositions

Exemple 1.18 (page 16 du syllabus)

Nous considérons la piscine communale qui doit respecter les règles de fonctionnement suivantes.

1. La piscine accueille plusieurs nageurs si et seulement si elle est ouverte.
2. Si la piscine est ouverte, on peut acheter un ticket d'entrée.
3. On achète un ticket d'entrée ou la piscine est en travaux.
4. Si la piscine n'est pas en travaux, la piscine accueille plusieurs nageurs et on ne peut pas acheter de ticket d'entrée.

Première étape : identifier les propositions le composant

p *La piscine accueille plusieurs nageurs* ,

q *la piscine est ouverte*,

Première étape : réaliser le modèle

1. identifier les propositions le composant
2. connecter à bon escient ces propositions

Exemple 1.18 (page 16 du syllabus)

Nous considérons la piscine communale qui doit respecter les règles de fonctionnement suivantes.

1. La piscine accueille plusieurs nageurs si et seulement si elle est ouverte.
2. Si la piscine est ouverte, on peut acheter un ticket d'entrée.
3. On achète un ticket d'entrée ou la piscine est en travaux.
4. Si la piscine n'est pas en travaux, la piscine accueille plusieurs nageurs et on ne peut pas acheter de ticket d'entrée.

Première étape : identifier les propositions le composant

p *La piscine accueille plusieurs nageurs ,*

q *la piscine est ouverte,*

r *on peut acheter un ticket d'entrée,*

Première étape : réaliser le modèle

1. identifier les propositions le composant
2. connecter à bon escient ces propositions

Exemple 1.18 (page 16 du syllabus)

Nous considérons la piscine communale qui doit respecter les règles de fonctionnement suivantes.

1. La piscine accueille plusieurs nageurs si et seulement si elle est ouverte.
2. Si la piscine est ouverte, on peut acheter un ticket d'entrée.
3. On achète un ticket d'entrée ou la piscine est en travaux.
4. Si la piscine n'est pas en travaux, la piscine accueille plusieurs nageurs et on ne peut pas acheter de ticket d'entrée.

Première étape : identifier les propositions le composant

p *La piscine accueille plusieurs nageurs ,*

q *la piscine est ouverte,*

r *on peut acheter un ticket d'entrée,*

s *la piscine est en travaux.*

Exemple 1.18 (page 16 du syllabus)

Nous considérons la piscine communale qui doit respecter les règles de fonctionnement suivantes.

1. La piscine accueille plusieurs nageurs si et seulement si elle est ouverte.
2. Si la piscine est ouverte, on peut acheter un ticket d'entrée.
3. On achète un ticket d'entrée ou la piscine est en travaux.
4. Si la piscine n'est pas en travaux, la piscine accueille plusieurs nageurs et on ne peut pas acheter de ticket d'entrée.

Première étape : identifier les propositions le composant

- p *La piscine accueille plusieurs nageurs ,*
- q *la piscine est ouverte,*
- r *on peut acheter un ticket d'entrée,*
- s *la piscine est en travaux.*

Exemple 1.18 (page 16 du syllabus)

Nous considérons la piscine communale qui doit respecter les règles de fonctionnement suivantes.

1. La piscine accueille plusieurs nageurs si et seulement si elle est ouverte.
2. Si la piscine est ouverte, on peut acheter un ticket d'entrée.
3. On achète un ticket d'entrée ou la piscine est en travaux.
4. Si la piscine n'est pas en travaux, la piscine accueille plusieurs nageurs et on ne peut pas acheter de ticket d'entrée.

Première étape : identifier les propositions le composant

- p *La piscine accueille plusieurs nageurs* ,
- q *la piscine est ouverte*,
- r *on peut acheter un ticket d'entrée*,
- s *la piscine est en travaux*.

connecter à bon escient ces propositions

L'ensemble des règles se représente alors comme

Exemple 1.18 (page 16 du syllabus)

Nous considérons la piscine communale qui doit respecter les règles de fonctionnement suivantes.

1. La piscine accueille plusieurs nageurs si et seulement si elle est ouverte.
2. Si la piscine est ouverte, on peut acheter un ticket d'entrée.
3. On achète un ticket d'entrée ou la piscine est en travaux.
4. Si la piscine n'est pas en travaux, la piscine accueille plusieurs nageurs et on ne peut pas acheter de ticket d'entrée.

Première étape : identifier les propositions le composant

- p *La piscine accueille plusieurs nageurs ,*
- q *la piscine est ouverte,*
- r *on peut acheter un ticket d'entrée,*
- s *la piscine est en travaux.*

connecter à bon escient ces propositions

L'ensemble des règles se représente alors comme

1. $p \Leftrightarrow q$,

Exemple 1.18 (page 16 du syllabus)

Nous considérons la piscine communale qui doit respecter les règles de fonctionnement suivantes.

1. La piscine accueille plusieurs nageurs si et seulement si elle est ouverte.
2. Si la piscine est ouverte, on peut acheter un ticket d'entrée.
3. On achète un ticket d'entrée ou la piscine est en travaux.
4. Si la piscine n'est pas en travaux, la piscine accueille plusieurs nageurs et on ne peut pas acheter de ticket d'entrée.

Première étape : identifier les propositions le composant

- p *La piscine accueille plusieurs nageurs* ,
- q *la piscine est ouverte*,
- r *on peut acheter un ticket d'entrée*,
- s *la piscine est en travaux*.

connecter à bon escient ces propositions

L'ensemble des règles se représente alors comme

1. $p \Leftrightarrow q$,
2. $q \Rightarrow r$,

Exemple 1.18 (page 16 du syllabus)

Nous considérons la piscine communale qui doit respecter les règles de fonctionnement suivantes.

1. La piscine accueille plusieurs nageurs si et seulement si elle est ouverte.
2. Si la piscine est ouverte, on peut acheter un ticket d'entrée.
3. On achète un ticket d'entrée ou la piscine est en travaux.
4. Si la piscine n'est pas en travaux, la piscine accueille plusieurs nageurs et on ne peut pas acheter de ticket d'entrée.

Première étape : identifier les propositions le composant

- p *La piscine accueille plusieurs nageurs ,*
- q *la piscine est ouverte,*
- r *on peut acheter un ticket d'entrée,*
- s *la piscine est en travaux.*

connecter à bon escient ces propositions

L'ensemble des règles se représente alors comme

1. $p \Leftrightarrow q$,
2. $q \Rightarrow r$,
3. $r \bigvee s$,

Exemple 1.18 (page 16 du syllabus)

Nous considérons la piscine communale qui doit respecter les règles de fonctionnement suivantes.

1. La piscine accueille plusieurs nageurs si et seulement si elle est ouverte.
2. Si la piscine est ouverte, on peut acheter un ticket d'entrée.
3. On achète un ticket d'entrée ou la piscine est en travaux.
4. Si la piscine n'est pas en travaux, la piscine accueille plusieurs nageurs et on ne peut pas acheter de ticket d'entrée.

Première étape : identifier les propositions le composant

- p *La piscine accueille plusieurs nageurs ,*
- q *la piscine est ouverte,*
- r *on peut acheter un ticket d'entrée,*
- s *la piscine est en travaux.*

connecter à bon escient ces propositions

L'ensemble des règles se représente alors comme

1. $p \Leftrightarrow q$,
2. $q \Rightarrow r$,
3. $r \bigvee s$,
4. $\neg s \Rightarrow (p \bigwedge \neg r)$.

Deuxième étape

Déterminer pour quelles valeurs des variables propositionnelles, l'ensemble des règles est consistant.

Deuxième étape

Déterminer pour quelles valeurs des variables propositionnelles, l'ensemble des règles est consistant.
Deux approches

Deuxième étape

Déterminer pour quelles valeurs des variables propositionnelles, l'ensemble des règles est consistant.

Deux approches

1. en calculant toute la table de vérité

Deuxième étape

Déterminer pour quelles valeurs des variables propositionnelles, l'ensemble des règles est consistant.

Deux approches

1. en calculant toute la table de vérité
2. en raisonnant pas par pas.

Raisonnons

La table de vérité ferait intervenir toutes les lignes suivantes

p	q	r	s
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Raisonnons

D'après la règle $p \Leftrightarrow q$, seule les lignes où p et q ont la même valeur conviennent

p	q	r	s
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$
$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$
$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$
$\cancel{1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
$\cancel{1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$
$\cancel{1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$
$\cancel{1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Raisonnons

Il nous reste donc à considérer seulement

p	q	r	s
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Raisonnons

D'après la règle $r \vee s$, r ou s doit être vrai. Ainsi, on peut ne plus considérer

p	q	r	s
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Raisonnons

Il reste

p	q	r	s
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Raisonnons

D'après $q \Rightarrow r$, on peut supprimer

p	q	r	s
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~
1	1	1	0
1	1	1	1

Raisonnons

Il reste

p	q	r	s
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Raisonnons

Calculons la valeur de vérité de $\neg s \Rightarrow (p \wedge \neg r)$

p	q	r	s	$\neg r$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Raisonnons

Calculons la valeur de vérité de $\neg s \Rightarrow (p \wedge \neg r)$

p	q	r	s	$\neg r$	$p \wedge \neg r$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0

Raisonnons

Calculons la valeur de vérité de $\neg s \Rightarrow (p \wedge \neg r)$

p	q	r	s	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	$\neg s$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0

Raisonnons

Calculons la valeur de vérité de $\neg s \Rightarrow (p \wedge \neg r)$

p	q	r	s	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	$\neg s$	$\neg s \Rightarrow (p \wedge \neg r)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1

Raisonnons

Ainsi, seules les lignes suivantes doivent être considérées

p	q	r	s	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	$\neg s$	$\neg s \Rightarrow (p \wedge \neg r)$
0	0	0	1	1	0	0	1
$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$
0	0	1	1	0	0	0	1
$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$
1	1	1	1	0	0	0	1

Qu'en penser ?

Table des matières

- **La notion de proposition** : élément fondamental de notre langage
- **Les différents connecteurs, leurs règles de fonctionnement** : les outils nécessaires pour créer un modèle
- **Propriétés des connecteurs** : déduire la véracité d'une proposition
- **Consistance** : notre modèle est-il cohérent ?

Etre capable

- de traduire en langage mathématique ces propositions : créer un modèle,
- d'utiliser à bon escient le formalisme (les connecteurs) associé à ce langage (avec les propositions ou les prédicats),
- de vérifier la véracité d'une déduction de ces règles,
- de calculer une table de vérité,
- de compléter une table de vérité,
- de calculer une formule ne faisant intervenir que des connecteurs fondamentaux et cela sous un format imposé,
- de réaliser une démonstration en utilisant les propriétés,
- d'établir les circonstances de la consistance d'une série de règles.