

Тригонометрический ряд Фурье

d2 1000

Махова Анастасия, 409

Ноябрь 2023

1 Вход и выход

Дано:

- квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$ и функция $u(x, y) \in C^\infty[0; 1] \times C^\infty[0; 1]$,
- Краевые условия (10):

$$u_x(0, y) = u(1, y) = u_y(x, 0) = u(y, 1) = 0$$

- Сетка (00):

$$x_0 = 0, x_N = 1, h_x = h = \frac{1}{N}$$

$$y_0 = 0, y_N = 1, h_y = h = \frac{1}{N}$$

Вход:

- число узлов N (≥ 2)

Выход:

- файл '1.txt' со столбцами: $x_i, y_j, u(x_i, y_j), F(x_i, y_j), |u(x_i, y_j) - F(x_i, y_j)|$

2 Функции и формулы

u – функция $u(x, y)$

Generate_x – создаем узлы сетки (x_i) по формуле:

$$X_i = \frac{1}{N}$$

fourier – получаем значение ряда фурье в точке (x, y)

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} c_{nm} \cos(\pi(n + 0.5)x) \cos(\pi(m + 0.5)y)$$

базисная функция $\psi_{ij}^{(n,m)} = \phi_i^n \phi_j^m = \cos(\pi(n + 0.5)ih) \cos(\pi(m + 0.5)jh)$
она на $[0; 1] \times [0; 1]$ удовлетворяет граничным условиям.

$$(\psi_{ij}, \psi_{kl}) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & i = k, j = l \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Get_Coef – Находим коэффициенты c_{ij} ряда Фурье

$$c_{ij} = \frac{(u, \psi_{ij})_h h}{(\psi_{ij}, \psi_{ij})_h h} = 2(\phi_j, (u, \phi_i)_h)_h = 2(\phi_j, \hat{c})_h$$

где $(f, g)_h = f(0)g(0)\frac{h}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f_i g_i h$

dot_f_phi – возвращает скалярное произведение $(u \cdot \phi_j)_h$, чтобы
получить \hat{c}_{ij}

dot_c_phi – возвращает скалярное произведение $(\hat{c}_{ij} \cdot \phi_j)_h$

Write – в '1.txt' выводим $x_i, y_j, u(x_i, y_j), F(x_i, y_j), |u(x_i, y_j) - F(x_i, y_j)|$

find_p находит константу p

3 Тесты

Правильность работы:

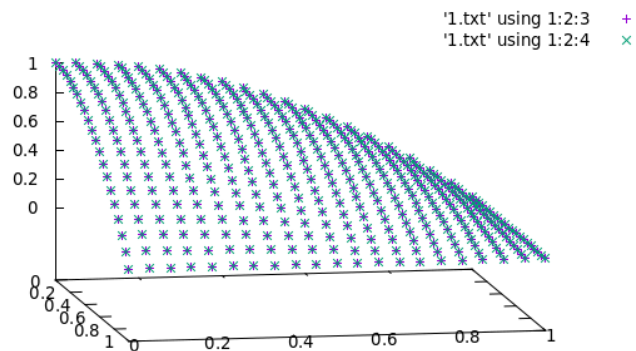


Рис. 1: $(-x^2 + 1)(-y^2 + 1)$, 20 узлов

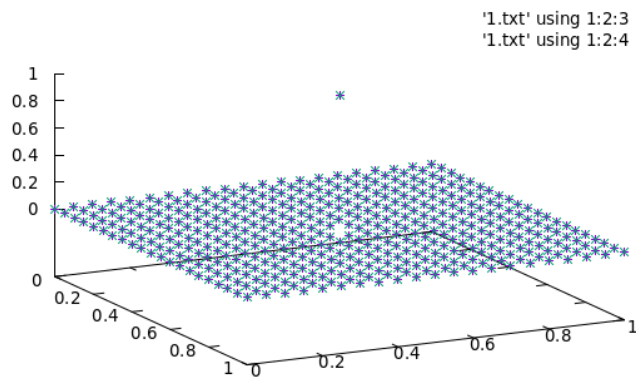


Рис. 2: индикатор $(0.5 - \epsilon, 0.5 + \epsilon)$, 10 узлов

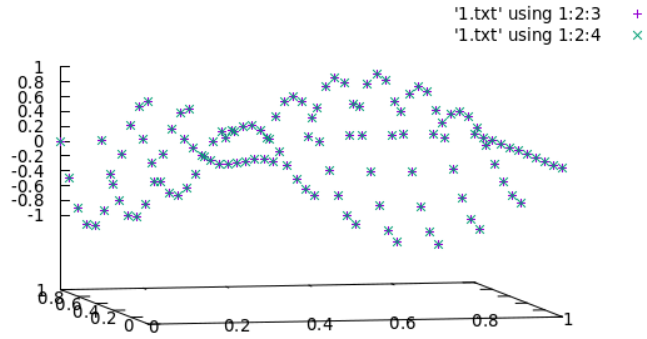


Рис. 3: $\cos \pi x(1 + 0.5) \cos \pi y(1 + 0.5)$, 20 узлов

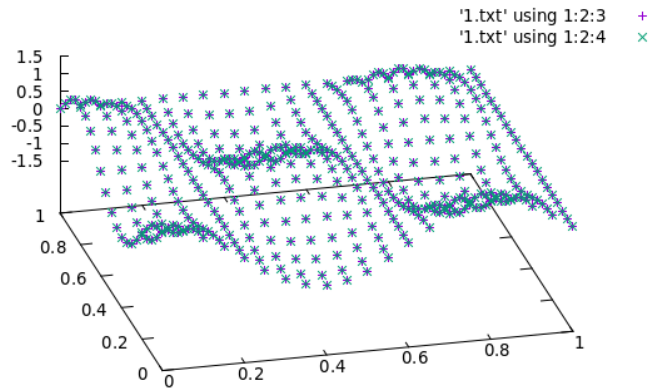


Рис. 4: $\cos \frac{5\pi x}{2} \cos \frac{5\pi y}{2}$, 20 узлов

4 Найдем p

Построим график $(\ln N; \ln \frac{1}{err})$

$err \approx Ch^p$, тогда $p = tg(...)$ посчитаем этот тангенс по 2-м точкам.

получаем, что $p =$