# Комментарии к задачам из лекций А.А. Васильевой по ВИиОУ

список которых мне прислал 15.10.23 Всеволод Заостровский (409 группа)

**Задача 4.** Геодезические на плоскости Лобачевского. См. решение задачи в прошлогодних лекциях А.А. Васильевой на стр. 84-85, которые я высылал ранее и прилагаю вновь.

**Задача 5.** Брахистохрона. По поводу этой задачи см.,например, на стр. 4-5 высланного ранее файла lect-09-09-14.pdf, который высылаю вновь.

**Задача 6** Поверхность вращения с минимальной площадью боковой поверхности. Могу порекомендовать посмотреть в высланном ранее файле TU.pdf (который вновь прилагаю) на стр. 26 верхние первые 8 строк со ссылкой на формулу (1.13) о первом интеграле, а также более детальное рассмотрение этой задачи на стр. 39. Все это я планирую подробно изложить на ближайших занятиях, приллюстрировав применение необходимых и достаточных условий слабого и сильного минимума в простейшей задаче вариационного исчисления (условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса). Кроме того, планирую рассказать дополнительные, не вполне ожидаемые результаты по этой задаче. а также ее обобщению, связаннному с оптимальным управление. Но для более легкого восприятия желательно предварительно просмотреть обозначенные здесь страницы файла TU.pdf

**Задача 10.** Привести пример функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, всюду дифференцированной по Фреше, но не строго дифференцируемой в нуле.

Моя точка зрения: понятие строгой дифференцируемости в точке = фальшивая красота формулировок утверждений, связанных с точкой, априори не заданной (искомой). Тем не менее, это понятие существует в курсе ВИиОУ и потому надо его осознать. Напомню, что отображение $f:X\to Y$ банаховых пространств называют строго дифференцируемым в точке $c$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что производная этого отображения $f'(c)$ в точке $c$ удовлетворяет условию

$$\|f(a)-f(b)-f'(c)(a-b)\|\le\varepsilon\|a-b\|\,,\quad \text{если}\quad \|a-c\|\le\delta\,,\quad \|b-c\|\le\delta\,. \tag{1}$$

Условие (1) появилось, но НИКАК не называлось, предполагаю (но не гарантирую) впервые у бурбакиста Дьедонне (см. его учебник "Основы современного анализа"1962г.), при вычленении тех моментов, которые использовались в доказательстве в 40х годах теоремы об обратной функции $F:X_1\times X_2\to Y$ в банаховых пространствах методом последовательных приближений. (Замечу в скобках, что более общая теорема была доказана иначе Люстерником в 30х годах, для отображения $F:X\to Y$ без неверного для бесконечномерного банахового пространства $X$ предположения, что любое его замкнутое подпространство $X_1$ дополняемо замкнутым $X_2$ до прямой суммы. Эта теорема Люстерника об обратном отображении в курсе ВИиОУ под названием теорема об обратной функции доказывается модификацией метода Ньютона. Она связанна с его леммой о касательном пространстве к нулевому уровню дифференцируемого по Фреше отображения. Кстати, выясните имеются ли ненулевые касательные вектора к множествам

$$\mathcal{M}_k=\{x\in X+\mathbb{R}\,|\,x^2f_k(x)=0\}\,,$$

где $k=1,2$, а $f_k(0)=0$ и $f_1(x)\sin\frac{1}{x}$, $f_2(x)=\sin\frac{1}{\ln x}$ при $x\ne0$ .

Вернемся к задаче 10. Но сначала проверьте непосредственно (проанализировав соответствующий график), что отображение

$$f:\mathbb{R}\ni x\mapsto y=f(x)\in\mathbb{R}\,,$$

где $f(x)=ax+x^2\sin\frac{1}{x}$ при $x\ne0$ и $f(0)=0$, обратимо в нуле, если и только если $|A|>2/\pi$. Отсюда, в силу доказываемой в курсе ВИиОУ теоремы об обратной функции, отображение $g(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ не является строго дифференцирумым в нуле. Проверьте это непосредственно, исходя из определения. С другой стороны, отображение $g$ очевидно дифференцируемо всюду по Фреше.

**Задача 13.** Пусть $T:L^2(0,1)\to L^2(0,1)$, $Tx(t)=\sin x(t)$. Показать, что $T$ дифференцируемо по Гато в каждой точке, но нигде не дифференцируемо по Фреше.

Сначала зафиксируем вектор $h\in L^2(0,1)$. Пусть $\lambda\in\mathbb{R}$. Имеем

$$\sin\big[x(t)+\lambda h(t)\big]-\sin x(t)=\sin x(t)\cos\big[\lambda h(t)\big]+\cos x(t)\sin\big[\lambda h(t)\big]-\sin x(t)=$$

$$= \sin x(t)\big[1 - O(\lambda^2 h^2(t))\big] + \cos x(t)\big[\lambda h(t) + O(\lambda^3 h^3(t))\big] - \sin x(t) = \lambda \cos x(t)\cdot h(t) + r(\lambda h(t)),$$

где

$$r(\lambda h(t)) = \lambda^2\big[O(h^2(t))\big] + \lambda^3 \cos x(t)\big[O(h^3(t))\big].$$

Поэтому

$$\frac{\sin\big[x(t)+\lambda h(t)\big] - \sin x(t)}{\lambda} \to 0\,, \qquad \text{если} \quad \lambda \to 0\,.$$

При этом отображение $\mathrm{L}^2(0,1) \ni h \mapsto \cos x[h] \in L^2(0,1)$ линейно и очевидно непрерывно. Тем самым, $T$ дифференцируемо по Гато.

Далее, для любого $h \in L^2(0,1)$ $\sin\big[x(t)+h(t)\big] - \sin x(t) = \cos x(t)\cdot h(t) + r(h(t))$, но

$$\|r(h(t))\|_{L^2} \simeq \frac{\sqrt{\int_0^1 h^2(t)\,dt}}{\|h\|_{L_2}} = \frac{\|h\|_{L_2}}{\|h\|_{L_2}} = 1\,.$$

Это означает, что $T$ не дифференцируемо по Фреше.

**Задача 18.** Привести пример такой задачи выпуклого программирования, что допустимая $\hat{x}$ — не есть точка минимума, но существует ненулевой набор $(\lambda_0,\ldots,\lambda_m)$, удовлетворяющий условиям a)-c) теоремы Куна–Таккера.

У меня нет лекций этого года А.А. Васильевой, но предполагаю, что приведнные там условия a)-c) теоремы Куна–Таккера стандартны. В частности, если $\hat{x}$ — решение задачи на минимум $f_0(x)$ при условии $f_1(x)=0$, $f_1(x)=0$, где функционалы выпуклы, то для функции Лагранжа $\mathcal{L}(x) = \sum\limits_{j\ge 0}\lambda_j f_j(x)$ справедливы условия

a) минимум функции Лагранжа достигается на решении;

b) $\lambda_j f_j(\hat{x}) = 0$, $j \ge 1$;

c) $\lambda_j \ge 0$, $j \ge 0$.

Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f_1(x) = x_1$, $f_2(x) = x_2$, а $f_0(x) = x_1^2 + (x_2-1)^2$. Тогда для функции Лагранжа $\mathcal{L}(x) = f_1(x) + f_2(x)$ имеем: точка $\hat{x} = (0,0)$ — допустимая, условия a)-c) выполнены, но минимум $f_0(x)$ достигается в точке (0,1).