1

Задача. 1) Пусть $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задано равенством $F(x_1,\, x_2) = \sqrt[3]{x_1^2 x_2}$. Показать, что F имеет вариацию по Лагранжу, но не дифференцируемо по Гато в нуле. 2) Пусть X — бесконечномерное нормированное пространство, $F : X \to \mathbb{R}$ — линейный неограниченный функционал. Показать, что F имеет вариацию по Лагранжу в нуле, но не дифференцируемо по Гато.

Решение. Пусть $h = (h_1,\, h_2)$. Тогда $F(th_1,\, th_2) = \sqrt[3]{(th_1)^2 th_2} = t\sqrt[3]{h_1^2 h_2}$. Значит,

$$\frac{F(th_1,\, th_2) - F(0,\, 0)}{t} = \sqrt[3]{h_1^2 h_2}, \quad F'(0,\, 0)[(h_1,\, h_2)] = \sqrt[3]{h_1^2 h_2};$$

легко видеть, что это отображение нелинейно.

2) Если функционал F линеен, то $F(th) - F(0) = tF(h)$; значит, $F'(0)[h] = F(h)$. Это отображение линейно, но разрывно.

2

Задача. Пусть $M = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 > 0,\ x_2 = x_1^2\}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1,\, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1,\, x_2) \in M, \\ 0, & (x_1,\, x_2) \notin M. \end{cases}$$

Показать, что f дифференцируемо по Гато, но не дифференцируемо по Фреше в т. $(0,\, 0)$.

Решение. Вычислим вариацию по Лагранжу в нуле. Пусть $h \in \mathbb{R}^2$. Заметим, что прямая $\{th : \ t \in \mathbb{R}\}$ пересекается с множеством M не более, чем в одной точке. Значит, при малых t выполнено $th \notin M$, $F(th) - F(0) = 0$. Поэтому $F'(0)[h] = 0$. Это линейный непрерывный функционал. Значит, F дифференцируемо по Гато в 0. При этом F в нуле разрывно и, следовательно, не дифференцируемо по Фреше.

Разбор задач.

Задача. (из лекций) Построить пример отображений $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таких, что F дифференцируемо по Фреше в т. 0, G дифференцируемо по Гато в т. $(0,\, 0)$, $F(0) = (0,\, 0)$, при этом $G \circ F$ не имеет вариации по Лагранжу в т. 0. (Можно использовать пример из предыдущей задачи.)

Решение. Положим $F(x) = (x,\, x^2)$,

$$G(x,\, y) = \begin{cases} 1, & (x,\, y) \in M, \\ 0, & (x,\, y) \notin M, \end{cases}$$

где $M = \{(x,\, x^2) :\ x > 0\}$. Тогда F всюду дифференцируемо по Фреше, G дифференцируемо по Гато в $(0,\, 0)$. При этом $G(F(x)) = 1$ при $x > 0$, $G(F(x)) = 0$ при $x \leqslant 0$. Значит, $G \circ F$ не имеет вариации по Лагранжу в 0.

4

Задача. (с лекций). 1) Если $F : X \to \mathbb{R}$, то существует $x \in [x_0, x_1]$ такое, что $F(x_1) - F(x_0) = F'(x)[x_1 - x_0]$. 2) Если $F : X \to Y$, $\dim Y > 1$, то утверждение из п. 1 может быть неверным.

Решение. 1) Положим $\varphi(t) = F((1-t)x_0+tx_1)$. Тогда $\varphi'(t) = F'((1-t)x_0+tx_1)[x_1-x_0]$. По теореме Лагранжа, существует $\tau \in (0, 1)$ такое, что $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)$. Значит,

$$F(x_1) - F(x_0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) = F'((1 - \tau)x_0 + \tau x_1)[x_1 - x_0].$$

2) Пусть $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $F(t) = (\cos t, \sin t)$. Тогда $F(2\pi) - F(0) = (0, 0)$, $F'(t) = (-\sin t, \cos t)$; значит, если $F(2\pi)-F(0) = 2\pi F'(t)$ для некоторого t, то $(0, 0) = 2\pi(-\sin t, \cos t)$ — противоречие.

Задача. Пусть X — пространство непрерывных функций на $[0,\,1]$ с нормой $\|x\| = \int\limits_0^1 |x(t)|\,dt$, $T : X \to X$, $Tx(t) = x^2(t)$. Показать, что T дифференцируем по Гато, но не дифференцируем по Фреше.

5

Решение. Сначала вычислим вариацию по Лагранжу:

$$\frac{T(x+\lambda h) - Tx}{\lambda}(t) = \frac{(x(t)+\lambda h(t))^2 - x^2(t)}{\lambda} = 2x(t)h(t) + \lambda h^2(t).$$

Так как $\|\lambda h^2(\cdot)\| \underset{\lambda\to 0}{\to} 0$, то $T'(x)[h](t) = 2x(t)h(t)$. Это линейное отображение по h. Так как x — непрерывная функция, то она ограничена и

$$\|2x(\cdot)h(\cdot)\| = 2\int_0^1 |x(t)h(t)|\,dt \leqslant 2\max_{t\in[0,\,1]}|x(t)|\int_0^1 |h(t)|\,dt.$$

Значит, $T'(x)$ — ограниченный оператор. Итак, T дифференцируемо по Гато.

Покажем, что T не дифференцируемо по Фреше. Если есть дифференцируемость по Фреше, то $T(x+h) - T(x) = T'(x)[h] + o(\|h\|)$, $\|h\| \to 0$.

Имеем: $T(x+h) - T(x) = 2x(\cdot)h(\cdot) + h^2(\cdot)$. Поэтому нужно проверить, будет ли $h^2(\cdot) = o(\|h\|)$, $\|h\| \to 0$, то есть верно ли, что

$$\frac{\int\limits_0^1 h^2(t)\,dt}{\int\limits_0^1 |h(t)|\,dt} \underset{\|h\|\to 0}{\to} 0.$$

Рассмотрим функцию $h_0(t) = t^{-\alpha}$, где α такое, что $h_0 \in L_1[0,\,1]\backslash L_2[0,\,1]$. Для $\varepsilon > 0$, $M > 0$ положим $h_{\varepsilon,M}(t) = \min\{\varepsilon h_0(t),\, M\} \in X$. Тогда $\|h_{\varepsilon,M}\| = \int\limits_0^1 |h_{\varepsilon,M}(t)|\,dt \leqslant \varepsilon\|h_0\|$. Так как $\int\limits_0^1 h_0^2(t)\,dt = \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $M_\varepsilon > 0$ такое, что $\int\limits_0^1 h_{\varepsilon,M_\varepsilon}^2(t)\,dt \geqslant 1$. Поэтому

$$\frac{\int\limits_0^1 h_{\varepsilon,M_\varepsilon}^2(t)\,dt}{\int\limits_0^1 |h_{\varepsilon,M_\varepsilon}(t)|\,dt} \geqslant \frac{1}{\varepsilon\|h_0\|} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \infty.$$

Значит, дифференцируемости по Фреше нет.

6

Решение. Напомним, что производная по Фреше существует и равна

$$\mathcal{L}'(x)[h] = \int\limits_{t_0}^{t_1} (L_x(t,\, x(t),\, \dot{x}(t))h(t) + L_{\dot{x}}(t,\, x(t),\, \dot{x}(t))\dot{h}(t))\, dt.$$

Так как L_x и $L_{\dot{x}}$ непрерывны, то они равномерно непрерывны на компактах. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых чисел z, w таких, что $|z| < \delta$, $|w| < \delta$ и для любого $t \in [t_0,\, t_1]$ выполнено $|L_x(t,\, x(t) + z,\, \dot{x}(t) + w) - L_x(t,\, x(t),\, \dot{x}(t))| < \varepsilon$, $|L_{\dot{x}}(t,\, x(t) + z,\, \dot{x}(t) + w) - L_{\dot{x}}(t,\, x(t),\, \dot{x}(t))| < \varepsilon$.

Таким образом, если $\|h\|_{C^1} \leqslant 1$, $\|y - x\|_{C^1} < \delta$, то

$$|\mathcal{L}'(x)[h] - \mathcal{L}'(y)[h]| \leqslant (t_1 - t_0) \sup_{t \in [t_0,\, t_1]} |L_x(t,\, x(t),\, \dot{x}(t)) - L_x(t,\, y(t),\, \dot{y}(t))| +$$

$$+ (t_1 - t_0) \sup_{t \in [t_0,\, t_1]} |L_{\dot{x}}(t,\, x(t),\, \dot{x}(t)) - L_{\dot{x}}(t,\, y(t),\, \dot{y}(t))| \leqslant 2\varepsilon(t_1 - t_0),$$

так что $\|\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}'(y)\| \leqslant 2\varepsilon(t_1 - t_0)$.

Задача. (из лекций). 1) Пусть $T_0 > \pi$, $x(t) = c\sin\frac{\pi t}{T_0}$. Показать, что $\mathcal{L}(x) < 0$ при $c \neq 0$. Почему проведенные выше рассуждения не проходят при $T_0 > \pi$ и проходят при $T_0 < \pi$? 2) Показать, что $\int\limits_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2)\,dt = \int\limits_0^\pi (\dot{x} - x\cdot\mathrm{ctg} t)^2\,dt \geqslant 0$.

Решение. 1) Вычисляем:

$$\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt = c^2 \int\limits_0^{T_0} \left(\frac{\pi^2}{T_0}\cos^2\frac{\pi t}{T_0} - \sin^2\frac{\pi t}{T_0}\right)dt =$$

$$= \frac{c^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{T_0^2}\int\limits_0^{T_0}\left(1+\cos\frac{2\pi t}{T_0}\right)dt - \int\limits_0^{T_0}\left(1-\cos\frac{2\pi t}{T_0}\right)dt\right) = \frac{c^2 T_0}{2}\left(\frac{\pi^2}{T_0^2} - 1\right) < 0.$$

Напомним, что мы подбирали гладкую функцию ω так, чтобы

$$\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt = \int\limits_0^{T_0} (\dot{x} - \omega x)^2\,dt;$$

при этом ω была решением дифференциального уравнения $\dot{\omega} = -1 - \omega^2$. Значит, $\omega(t) = \mathrm{ctg}(t-a)$.

Если $T_0 < \pi$, то можно подобрать a так, чтобы $\mathrm{ctg}(t-a)$ была гладкой на $[0,\, T_0]$. Если $T_0 > \pi$, то для любого a функция ω будет иметь точку разрыва в интервале $(0,\, T_0)$.

2) Имеем:

$$\int\limits_0^{\pi} (\dot{x} - x \cdot \mathrm{ctg} t)^2 \, dt = \int\limits_0^{\pi} (\dot{x}^2 - 2x\dot{x}\mathrm{ctg}t + x^2\mathrm{ctg}^2 t) \, dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} (\dot{x}^2 + x^2(\mathrm{ctg}t)' + x^2\mathrm{ctg}^2 t) \, dt + x^2(t)\mathrm{ctg}t|_0^{\pi} = \int\limits_0^{\pi} (\dot{x}^2 - x^2) \, dt + x^2(t)\mathrm{ctg}t|_0^{\pi}.$$

Так как $x \in C^1[0,\, \pi]$ и $x(0) = 0$, то $x(t) = O(t)$ в окрестности нуля; так как $\mathrm{ctg}t = O(1/t)$ в окрестности нуля, то $x^2(t)\mathrm{ctg}t = O(t) \underset{t \to 0}{\to} 0$. Аналогично $x^2(t)\mathrm{ctg}t = O(\pi - t) \underset{t \to \pi}{\to} 0$. Значит, $x^2(t)\mathrm{ctg}t|_0^{\pi} = 0$.

8

Задача. (из лекций.) Доказать, что в задаче

$$\int\limits_0^1 t^{1/2}\dot{x}^2\,dt \to \inf, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

точки локального минимума в пространстве $C^1[0,\,1]$ не существует; найти точку глобального минимума для той же задачи в пространстве

$$W = \left\{ f \in AC[0,\,1] : \int\limits_0^1 t^{1/2}\dot{x}^2\,dt < \infty \right\}.$$

Решение. Напишем уравнение Эйлера: $\frac{d}{dt}(2t^{1/2}\dot{x}) = 0$, откуда $t^{1/2}\dot{x} = c$. Значит, $x = 2ct^{1/2} + b$. Подставляя граничные условия, получаем $x = t^{1/2} \notin C^1[0,\,1]$.

Пусть $h \in W$, $h(0) = h(1) = 0$. Тогда

$$\int\limits_0^1 t^{1/2}(\dot{x}+\dot{h})^2\,dt - \int\limits_0^1 t^{1/2}\dot{x}^2\,dt = \int\limits_0^1 t^{1/2}(2\dot{x}\dot{h}+\dot{h}^2)\,dt = \int\limits_0^1 t^{1/2}(t^{-1/2}\dot{h}+\dot{h}^2)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \dot{h}\,dt + \int\limits_0^1 t^{1/2}\dot{h}^2\,dt = \int\limits_0^1 t^{1/2}\dot{h}^2\,dt \geqslant 0.$$

9

Задача. Доказать, что в задаче

$$\int_0^1 (1-\dot{x}^2)^2\,dt \to \inf, \quad x(0)=0, \quad x(1)=0$$

точки локального минимума в пространстве $C^1[0,\,1]$ не существует, при этом точная нижняя грань функционала равна 0.

Решение. Заметим, что $\int\limits_0^1 (1-\dot{x}^2)^2\,dt \geqslant 0$. Если $\int\limits_0^1 (1-\dot{x}^2)^2\,dt = 0$, то $\dot{x}^2(t) \equiv 1$, откуда $\dot{x}(t) = \pm 1$ для любого t. Так как $\dot{x}$ непрерывна, то $\dot{x} \equiv 1$ или $\dot{x} \equiv -1$. Получаем противоречие с граничными условиями. Значит, нулевое значение не достигается.

Теперь покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует допустимая функция $x \in C^1[0,\,1]$ такая, что $\int\limits_0^1 (1-\dot{x}^2)^2\,dt \leqslant \varepsilon$. Положим

$$z(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}-\delta, \\ \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{2}-t\right), & \frac{1}{2}-\delta \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}+\delta, \\ -1, & \frac{1}{2}+\delta \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

$x(t) = \int\limits_0^t z(s)\,ds$. Тогда $x \in C^1[0,\,1]$, $x(0)=x(1)=0$. При этом $|\dot{x}| \leqslant 1$. Значит,

$$\int_0^1 (1-\dot{x}^2)^2\,dt = \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} (1-\dot{x}^2)^2\,dt \leqslant 2\delta.$$

Значит, достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

10

Задача. Пусть $A : l_2 \to l_2$,

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots),$$

$(y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in l_2 \backslash \operatorname{Im} A$ (почему такая точка существует?). Рассмотрим задачу

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \to \inf, \quad A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = 0.$$

Какая точка будет точкой минимума в этой задаче? Показать, что для этой задачи принцип Лагранжа неверен. Какое из условий теоремы о необходимом условии локального минимума здесь не выполнено?

Решение. 1) В качестве точки y можно взять последовательность $(1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots) \in l_2$. Если $Ax = y$, то $x_n = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, но $(1, \ldots, 1, \ldots) \notin l_2$.

2) Если $A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = 0$, то $\frac{x_n}{n} = 0$ для любого n. Значит, $x = 0$ — единственная допустимая точка, она же и будет точкой минимума.

3) Пусть $f_0(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n x_n$, $F(x) = A(x)$. Тогда $f_0'(x)[h] = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n h_n$, $F'(x)[h] = A(h) = (h_1, h_2/2, \ldots, h_n/n, \ldots)$. Если z^* — линейный непрерывный функционал на l_2, то существует вектор $z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in l_2$ такой, что $z^*(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n x_n$.

Таким образом, если принцип Лагранжа выполнен, то существуют $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и $z \in l_2$, одновременно не равные нулю, такие, что для любого $h \in l_2$ выполнено

$$\lambda_0 \sum_{n=1}^{\infty} y_n h_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_n \frac{h_n}{n} = 0.$$

Значит, $\lambda_0 y_n + \frac{z_n}{n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Если $\lambda_0 \neq 0$, то $y_n = -\frac{z_n}{\lambda_0 n}$, то есть $y = A(-z/\lambda_0)$. Но $y \notin \operatorname{Im} A$ — противоречие. Если $\lambda_0 = 0$, то $\frac{z_n}{n} = 0$ для любого n, поэтому $z = 0$. Получили, что оба множителя Лагранжа нулевые.

4) Пространства $X = Y = l_2$ банаховы, f_0 и F непрерывно дифференцируемы (это линейные непрерывные отображения). Но $\operatorname{Im} F'(0) = \operatorname{Im} A$ незамкнут (он всюду плотен в l_2, но не совпадает с l_2).

11

Задача. Привести пример гладких функций $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что в задаче $f_0(x) \to \min$, $f_1(x) = 0$ будет существовать точка локального минимума и в принципе Лагранжа будет $\lambda_0 = 0$ (а с $\lambda_0 \neq 0$ принцип Лагранжа не выполнен).

Решение. Рассмотрим задачу

$$x \to \inf, \quad x^2 = 0.$$

Единственная допустимая точка — $\hat{x} = 0$. Значит, она и будет точкой минимума. Запишем функцию Лагранжа: $\mathcal{L} = \lambda_0 x + \lambda_1 x^2$. Приравнивая ее производную в $\hat{x}$ к нулю, получаем $\lambda_0 = 0$.

12

Задача. Найти

1. $T_{(0,0)}M$, где $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^3 = x^2\}$,

2. $T_{(0,0)}M$, где $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 = \sin^2 x\}$,

3. $T_{(0,0,0)}M$, где $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (z - x^2 - y^2)(x^2 - y^3) = 0\}$.

Решение. Напомним, что

$$T_{x_0}M = \{h : \ \operatorname{dist}(x_0 + th, \ M) = o(t), \ t \to 0\}.$$

Перед тем, как разбирать случаи, отметим несколько фактов для касательного пространства к подмножеству M в нормированном пространстве X:

- Пусть $M = M_1 \cup M_2$, $x_0 \in M_1 \cap M_2$. Тогда $T_{x_0}M \supset T_{x_0}M_1 \cup T_{x_0}M_2$.

- Пусть $M = \{x : \ F(x) = 0\}$, F дифференцируемо по Фреше в точке x_0, $x_0 \in M$. Пусть $h \notin \ker F'(x_0)$. Тогда существует $c > 0$ такое, что $\operatorname{dist}(x_0 + th, \ M) \geqslant c|t|$ при малых t. В самом деле, иначе существует последовательность $t_n \to 0$ и функция $r : (-\delta, \delta) \to X$, $\frac{\|r(t_n)\|}{|t_n|} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $F(x_0 + t_n h + r(t_n)) = 0$. Значит, $F'(x_0)[t_n h + r(t_n)] + \omega(t_n h + r(t_n)) = 0$, $\omega(\xi) = o(\|\xi\|)$, $\xi \to 0$. Отсюда $t_n F'(x_0)[h] = o(t_n)$ при $n \to \infty$; это возможно только если $h \in \ker F'(x_0)$.

- Пусть $M_i = \{x : \ F_i(x) = 0\}$, $x_0 \in M_i$, F_i дифференцируемы по Фреше в точке x_0, $i \in 1, 2$. Пусть $h \notin \ker F_i'(x_0)$, $i = 1, 2$. Тогда $h \notin T_{x_0}(M_1 \cup M_2)$. В самом деле, при малых t выполнено

$$\operatorname{dist}(th, \ M_1 \cup M_2) \geqslant \min(\operatorname{dist}(th, \ M_1), \ \operatorname{dist}(th, \ M_2)) \geqslant \min(c_1|t|, \ c_2|t|),$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

Теперь разберем пункты задачи.

Теперь разберем пункты задачи.

1) Заметим, что $M \subset M_+ \cup M_-$, $M_\pm = \{(x,\,y):\ F_\pm(x,\,y) = 0\}$, $F_\pm(x,\,y) = x \pm y^{3/2}$. Так как $F'_\pm(0,\,0) = (1,\,0)$, то $\ker F'_\pm(0,\,0) = \{(0,\,r):\ r \in \mathbb{R}\}$. Значит, если $h = (h_1,\,h_2)$, $h_1 \neq 0$, то $h \notin T_{(0,\,0)}(M_+ \cup M_-)$ и тем более $h \notin T_{(0,\,0)}M$. Если $h = (0,\,r)$, $r \neq 0$, $tr < 0$, то $\operatorname{dist}(th,\,M) \geqslant |tr|$, так как M лежит в верхней полуплоскости. Таким образом, $T_{(0,\,0)}M = \{(0,\,0)\}$.

2) Заметим, что $M = M_+ \cup M_-$, $M_\pm = \{(x,\,y):\ F_\pm(x,\,y) = 0\}$, $F_\pm(x,\,y) = y \pm \sin x$. Имеем $F'_\pm(0,\,0) = (\pm 1,\,1)$. Значит, $\ker F'_\pm(0,\,0) = \{(r,\,\mp r):\ r \in \mathbb{R}\}$. Если $h \notin \ker F'_+(0,\,0) \cup \ker F'_-(0,\,0)$, то $h \notin T_{(0,\,0)}M$. Наоборот, если $h \in \ker F'_+(0,\,0) \cup \ker F'_-(0,\,0)$, то $h \in T_{(0,\,0)}M$. Значит, $T_{(0,\,0)}M$ — объединение двух прямых: $y = x$ и $y = -x$.

3) Заметим, что $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 = \{(x,\,y,\,z):\ z - x^2 - y^2 = 0\}$, $M_2 = \{(x,\,y,\,z):\ x^2 - y^3 = 0\}$. Имеем: $T_{(0,\,0,\,0)}M_1 = \{(x,\,y,\,0):\ x,\,y \in \mathbb{R}\}$. Далее, $\{(0,\,0,\,z):\ z \in \mathbb{R}\} \subset M_2$ и поэтому $\{(0,\,0,\,z):\ z \in \mathbb{R}\} \subset T_{(0,\,0,\,0)}M_2$. Значит, объединение плоскости $\{(x,\,y,\,0):\ x,\,y \in \mathbb{R}\}$ и прямой $\{(0,\,0,\,z):\ z \in \mathbb{R}\}$ содержится в $T_{(0,\,0,\,0)}M$. Докажем, что это и есть множество всех касательных векторов.

Отметим, что $M_2 \subset M_+ \cup M_-$, $M_\pm = \{(x,\,y,\,z):\ x \pm y^{3/2} = 0\}$. Тогда (так же, как в п. 1) получаем, что если $h = (h_1,\,h_2,\,h_3)$, $h_1 \neq 0$, то $\operatorname{dist}(th,\,M_+ \cup M_-) \geqslant c|t|$ при малых t, где $c > 0$. Если $h_2 \neq 0$, $th_2 < 0$, то $\operatorname{dist}(th,\,M_2) \geqslant |th_2|$. Таким образом, если $(h_1,\,h_2) \neq (0,\,0)$, то $\operatorname{dist}(th,\,M_2) \geqslant \tilde{c}|t|$ при малых t, где $\tilde{c} > 0$. Если при этом еще $h_3 \neq 0$, то $h \notin T_{(0,\,0,\,0)}M$.

13

Задача. Пусть $M = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = x/n,\ -1/n \leqslant x \leqslant 1/n\}$. Найти $T_{(0,0)}M$.

Решение. Если $h = (r,\, r/n)$, $r \in \mathbb{R}$, то при малых t выполнено $th \in M$, так что $h \in T_{(0,0)}M$. Рассмотрим остальные случаи. Если $h = (h_1,\, h_2)$, $h_2 \neq 0$, то $h \notin T_{(0,0)}M$. Докажем, что $h = (r,\, 0) \in T_{(0,0)}M$. В самом деле, пусть $|tr| \leqslant 1/n$. Тогда $\operatorname{dist}(th,\, M) \leqslant tr/n$, так что $\operatorname{dist}(th,\, M)/t \underset{t\to 0}{\to} 0$.

14

Задача. (из лекций). Пусть $\hat{x} \in M$ — точка локального минимума в задаче

$$\begin{cases} f_0(x) \to \inf, \\ x \in M, \end{cases} \tag{1}$$

функция f_0 дифференцируема по Гато в точке $\hat{x}$. Верно ли, что тогда $f_0'(\hat{x})[h] = 0$ для любого $h \in T_{\hat{x}}M$?

Решение. Пусть $M = \{(x,\, y) :\; y = x^2\}$,

$$f_0(x,\, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = x^2, \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $f_0(th,\, tg) = th$ при малых t, поэтому $f_0'(0,\, 0)[(h,\, g)] = h$. Касательный вектор в $(0,\, 0)$ к M имеет вид $(h,\, 0)$, так что на нем производная не равна 0 (если $h \neq 0$). Но при этом $(0,\, 0)$ — точка минимума f_0 на M.

15

Задача. Пусть $l > 0$. Доказать, что допустимые экстремали в задаче

$$\int_0^1 (y\dot{x} - x\dot{y})\, dt \to \max, \quad \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = l, \quad x(0) = x(1) = y(0) = y(1) = 0, \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0 \tag{2}$$

являются параметризацией окружности.

Решение. Функция Лагранжа имеет вид

$$\int_0^1 (\lambda_0(-y\dot{x} + x\dot{y}) + \lambda_1\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})\, dt.$$

Значит, уравнения Эйлера имеют вид

$$-\frac{d}{dt}\left(\lambda_1\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \lambda_0 y\right) + \lambda_0\dot{y} = 0,$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\lambda_1\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \lambda_0 x\right) - \lambda_0\dot{x} = 0.$$

Если $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_0\dot{y} = 0$, $\lambda_0\dot{x} = 0$. Так как $\lambda_0 \neq 0$, то $\dot{y} = 0$, $\dot{x} = 0$, что противоречит условию $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$.

Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Можно считать, что $\lambda_1 = 2$. Тогда

$$-\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \lambda_0\dot{y} = 0,$$

Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Можно считать, что $\lambda_1 = 2$. Тогда

$$-\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} + \lambda_0 \dot{y} = 0,$$

$$-\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} - \lambda_0 \dot{x} = 0,$$

откуда

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \lambda_0 y + a, \quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = -\lambda_0 x + b.$$

Возведем обе части равенств в квадрат и получим

$$1 = (-\lambda_0 y + a)^2 + (\lambda_0 x + b)^2. \tag{3}$$

Заметим, что $\lambda_0 \neq 0$, иначе $\frac{dy}{dx} = \text{const}$ или $\frac{dx}{dy} = \text{const}$, при этом $(\dot{x}, \dot{y})$ нигде не обращается в $(0, 0)$. Тогда будет движение по отрезку всё время в одном направлении, что противоречит граничным условиям. А если $\lambda_0 \neq 0$, то (3) — уравнение окружности.

Задача. (распределение с максимальной энтропией; см. тему про достаточное условие глобального минимума в задаче с равенствами и неравенствами). Пусть $\rho : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\int\limits_0^\infty \rho(x)\,dx = 1$ (функция ρ имеет смысл плотности распределения). Энтропией называется величина $S = -\int\limits_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)\,dx$. Найти функцию ρ, для которой энтропия максимальна при заданном среднем (т.е. задано ограничение $\int\limits_0^\infty x\rho(x)\,dx = C_1$).

Решение. Напишем задачу на экстремум:

$$\int\limits_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)\,dx \to \inf, \quad \int\limits_0^\infty \rho(x)\,dx = 1, \quad \int\limits_0^\infty x\rho(x)\,dx = C_1.$$

Составим функцию Лагранжа с $\lambda_0 = 1$:

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^\infty \rho(x)\ln\rho(x)\,dx + \lambda_1\int\limits_0^\infty \rho(x)\,dx + \lambda_2\int\limits_0^\infty x\rho(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty (\rho(x)\ln\rho(x) + \lambda_1\rho(x) + \lambda_2 x\rho(x))\,dx.$$

Найдем минимум у функции $\mathcal{L}$. Для этого при каждом фиксированном $x \in [0, \infty)$ найдем точку минимума у $f(v) = v\ln v + \lambda_1 v + \lambda_2 xv$. Вычислим производную: $f'(v) = \ln v + 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x$. Эта функция строго возрастает по v; $f'(v) = 0$ в точке $\hat\rho(x) = e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x}$. Значит, $\hat\rho(x) = e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x}$ является точкой минимума $v\ln v + \lambda_1 v + \lambda_2 xv$.

Из условий $\int\limits_0^\infty e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x}\,dx = 1$ и $\int\limits_0^\infty xe^{-1-\lambda_1-\lambda_2 x}\,dx = C_1$ находим λ_1 и λ_2:

$$e^{\lambda_1+1} = \frac{1}{\lambda_2}, \quad C_1 e^{\lambda_1+1} = \frac{1}{\lambda_2^2}.$$

Докажем, что найденная функция будет точкой минимума в задаче. В самом деле, пусть $\rho(x)$ — допустимая функция. Тогда для любого $x \in [0, \infty)$ получаем

$$\rho(x)\ln\rho(x) + \lambda_1\rho(x) + \lambda_2 x\rho(x) \ge \hat\rho(x)\ln\hat\rho(x) + \lambda_1\hat\rho(x) + \lambda_2 x\hat\rho(x).$$

Интегрируем это неравенство и получаем $\mathcal{L}(\rho) \geq \mathcal{L}(\hat{\rho})$, т.е.

$$\int\limits_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x)\, dx + \lambda_1 \int\limits_0^\infty \rho(x)\, dx + \lambda_2 \int\limits_0^\infty x\rho(x)\, dx \geq$$

$$\geq \int\limits_0^\infty \hat{\rho}(x) \ln \hat{\rho}(x)\, dx + \lambda_1 \int\limits_0^\infty \hat{\rho}(x)\, dx + \lambda_2 \int\limits_0^\infty x\hat{\rho}(x)\, dx.$$

Воспользуемся ограничениями в задаче и получим, что $\int\limits_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x)\, dx \geq \int\limits_0^\infty \hat{\rho}(x) \ln \hat{\rho}(x)\, dx$.

Теперь докажем, что других точек минимума в задаче нет. Пусть ρ_1 и ρ_2 — две разные точки минимума. Обозначим минимальное значение через m; тогда $\int\limits_0^\infty \rho_1(x) \ln \rho_1(x)\, dx = \int\limits_0^\infty \rho_2(x) \ln \rho_2(x)\, dx = m$. Функции ρ_1 и ρ_2 различаются на множестве положительной меры. Заметим, что функция $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$ также является допустимой. Покажем, что $\int\limits_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x)\, dx < m$.

В самом деле, функция $\varphi(v) = v \ln v$ строго выпукла, т.е. для любых $u \neq w$, $\lambda \in (0,\, 1)$ выполнено $\varphi((1-\lambda)u + \lambda w) < (1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(w)$. Это верно, так как $\varphi''(v) > 0$ для любого $v > 0$.

Значит, на множестве положительной меры

$$\frac{\rho_1(x) + \rho_2(x)}{2} \ln\left(\frac{\rho_1(x) + \rho_2(x)}{2}\right) < \frac{1}{2}\rho_1(x) \ln \rho_1(x) + \frac{1}{2}\rho_2(x) \ln \rho_2(x),$$

поэтому

$$\int\limits_0^\infty \rho(x) \ln \rho(x)\, dx < \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \rho_1(x) \ln \rho_1(x)\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \rho_2(x) \ln \rho_2(x)\, dx = m.$$

17

Задача. (см. доказательство леммы о скруглении углов) Показать, что если δ достаточно мало, то $\int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} \xi_{\tau,\tau_j}(t)\,dt > \int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} z(t)\,dt$, $\int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} \xi_{\tau_j,\sigma}(t)\,dt < \int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} z(t)\,dt$ и что найдутся такие $\tau < \tau_j < \sigma$, что $\int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} \xi_{\tau,\sigma}(t)\,dt = \int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} z(t)\,dt$.

Решение. Пусть $\gamma > 0$. Если δ достаточно мало, то $z(\tau_j - 0) - \gamma \le z(t) \le z(\tau_j - 0) + \gamma$ для любого $t \in (\tau_j - \delta, \tau_j)$.

Имеем

$$\int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} (z(t) - \xi_{\tau,\tau_j}(t))\,dt = \int\limits_{\tau}^{\tau_j} (z(t) - \xi_{\tau,\tau_j}(t))\,dt \le$$

$$\le (z(\tau_j - 0) + \gamma)(\tau_j - \tau) - \frac{1}{2}(\tau_j - \tau)(z(\tau_j + 0) + z(\tau)) =$$

$$= (\tau_j - \tau)\left(z(\tau_j - 0) + \gamma - \frac{1}{2}z(\tau_j + 0) - \frac{1}{2}z(\tau)\right) \le$$

$$\le (\tau_j - \tau)\left(\frac{1}{2}z(\tau_j - 0) - \frac{1}{2}z(\tau_j + 0) + \frac{3}{2}\gamma\right) < 0,$$

если γ достаточно мало.

Второе неравенство доказывается аналогично.

Последнее утверждение доказывается следующим образом. Сначала выбираем $\tilde{\tau} \in (\tau_j - \delta, \tau)$ так, чтобы $\int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} \xi_{\tilde{\tau},\tau_j}(t)\,dt > \int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} z(t)\,dt$. Затем выбираем $\sigma > \tau_j$ так, чтобы $\int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} \xi_{\tilde{\tau},\sigma}(t)\,dt > \int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} z(t)\,dt$ (σ достаточно близко к τ_j).

Итак, у нас два неравенства: $\int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} \xi_{\tilde{\tau},\sigma}(t)\,dt > \int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} z(t)\,dt$, $\int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} \xi_{\tau_j,\sigma}(t)\,dt < \int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} z(t)\,dt$. По теореме о промежуточном значении, найдется $\tau \in (\tilde{\tau}, \sigma)$ такое, что $\int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} \xi_{\tau,\sigma}(t)\,dt = \int\limits_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta} z(t)\,dt$.

18

Задача. (из лекций) Сделав замену $\dot{x} = u$, вывести необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче вариационного исчисления (условие Вейерштрасса и непрерывность $L_{\dot{x}}(t,\, \hat{x}(t),\, \dot{\hat{x}}(t))$) из принципа максимума Понтрягина.

Решение. Задача записывается в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L(t,\, x(t),\, u(t))\, dt \to \inf, \quad x(t_0) = x_0, \;\; x(t_1) = x_1, \;\; \dot{x} = u.$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L} = \int\limits_{t_0}^{t_1} (\lambda_0 L(t,\, x(t),\, u(t)) + p(t)(\dot{x}(t) - u(t)))\, dt + \lambda_1 x(t_0) + \lambda_2 x(t_1).$$

Условие неотрицательности: $\lambda_0 \geq 0$.

Уравнение Эйлера: $-\dot{p}(t) + \lambda_0 L_x(t,\, \hat{x}(t),\, \hat{u}(t)) = 0$.

Условие трансверсальности: $p(t_0) = \lambda_1$, $p(t_1) = -\lambda_2$.

Принцип максимума Понтрягина: $\min_{v\in\mathbb{R}}(\lambda_0 L(t,\, \hat{x}(t),\, v) - p(t)v) = \lambda_0 L(t,\, \hat{x}(t),\, \hat{u}(t)) - p(t)\hat{u}(t)$.

Так как L гладкая и минимум берется по $v \in \mathbb{R}$, то получаем $\lambda_0 L_{\dot{x}}(t,\, \hat{x}(t),\, \hat{u}(t)) - p(t) = 0$.

Если $\lambda_0 = 0$, то отсюда $p = 0$; в силу условий трансверсальности, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то есть все множители Лагранжа нулевые.

Итак, $\lambda_0 > 0$. Можно считать, что $\lambda_0 = 1$. Так как $\dot{\hat{x}} = \hat{u}$, то $L_{\dot{x}}(t,\, \hat{x}(t),\, \dot{\hat{x}}(t)) = p(t)$. В теореме о необходимом условии сильного минимума в задаче оптимального управления функция p кусочно непрерывно-дифференцируемая и, значит, непрерывная. Отсюда получаем непрерывность $t \mapsto L_{\dot{x}}(t,\, \hat{x}(t),\, \dot{\hat{x}}(t))$.

Еще раз запишем принцип максимума Понтрягина: для любого $v \in \mathbb{R}$

$$L(t,\, \hat{x}(t),\, v) - L_{\dot{x}}(t,\, \hat{x}(t),\, \dot{\hat{x}}(t))v \geq L(t,\, \hat{x}(t),\, \hat{u}(t)) - L_{\dot{x}}(t,\, \hat{x}(t),\, \dot{\hat{x}}(t))\hat{u}(t).$$

Подставим $\hat{u} = \dot{\hat{x}}$, перенесем все в левую часть и получим условие Вейерштрасса.

19 **Задача.** Показать, что если L явно не зависит от x (т.е. $L = L(t,\, \dot{x}(t))$), то условие Вейерштрасса будет достаточным условием глобального минимума.

Решение. В силу уравнения Эйлера, $L_{\dot{x}}(t,\, \dot{\hat{x}}(t)) \equiv c$.

Пусть x — произвольная допустимая функция. В силу условия Вейерштрасса

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t,\, \hat{x}(t),\, \dot{\hat{x}}(t),\, \dot{x}(t))\, dt \geq 0,$$

откуда

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} (L(t,\, \dot{x}(t)) - L(t,\, \dot{\hat{x}}(t)) - L_{\dot{x}}(t,\, \dot{\hat{x}}(t))(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)))\, dt \geq 0.$$

Значит,

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L(t,\, \dot{x}(t))\, dt \geq \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t,\, \dot{\hat{x}}(t))\, dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} c(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t))\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t,\, \dot{\hat{x}}(t))\, dt + cx|_{t_0}^{t_1} - c\hat{x}|_{t_0}^{t_1} = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t,\, \dot{\hat{x}}(t))\, dt,$$

так как $x(t_0) = \hat{x}(t_0)$ и $x(t_1) = \hat{x}(t_1)$.

20

Задача. Показать, что существует такая простейшая задача вариационного исчисления, для которой 0 является точкой глобального минимума, при этом усиленное условие Лежандра не выполнено и условие Якоби не выполнено.

Решение. Рассмотрим задачу $\int\limits_0^1 x^4\,dt \to \inf$, $x(0) = x(1) = 0$. Ясно, что 0 — ее точка минимума. Далее, $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} = \hat{L}_{x\dot{x}} = \hat{L}_{xx} = 0$. Поэтому выполнено условие Лежандра, а функционал $J(h)$ равен $\int\limits_0^1 0\,dt$. Значит, уравнение Якоби имеет вид $0 = 0$. Любая функция является его решением, поэтому сопряженная точка на $(0,\,1)$ есть.

21

Задача. Рассмотрим задачу $\int\limits_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2 - x^4)\,dt \to \inf$, $x(0) = x(\pi) = 0$. Показать, что для $\hat{x} = 0$ выполнено усиленное условие Лежандра, условие Якоби, при этом $\hat{x}$ не является точкой слабого минимума.

Решение. Имеем $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = 2$, $\hat{L}_{x\dot{x}} = 0$, $\hat{L}_{xx} = -2$. Значит, выполнено усиленное условие Лежандра. Уравнение Якоби имеет вид $\ddot{h} + h = 0$; его нетривиальное решение, зануляющееся при $t = 0$, имеет вид $h(t) = a\sin t$, $a \neq 0$. Тогда $h(t) \neq 0$ при $t \in (0, \pi)$, но $h(\pi) = 0$. Значит, выполнено условие Якоби, но не усиленное.

Возьмем $x(t) = \varepsilon \sin t$. Тогда

$$\int\limits_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2 - x^4)\,dt = \varepsilon^2 \int\limits_0^\pi (\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt - \varepsilon^4 \int\limits_0^\pi \sin^4 t\,dt =$$

$$= \varepsilon^2 \int\limits_0^\pi \cos 2t\,dt - \varepsilon^4 \int\limits_0^\pi \sin^4 t\,dt = -\varepsilon^4 \int\limits_0^\pi \sin^4 t\,dt < 0.$$

Так как $\varepsilon > 0$ может быть сколь угодно мало, то слабого минимума нет.

22

Задача. Рассмотрим задачу $\int\limits_0^{3/2}(\dot{x}^3+2x)\,dt \to \inf$, $x(0)=0$, $x(3/2)=1$. Доказать, что выполнено (неусиленное) условие Лежандра, усиленное условие Якоби, но допустимая экстремаль — не точка слабого минимума.

Решение. Уравнение Эйлера имеет вид $-\frac{d}{dt}(3\dot{x}^2)+2=0$. Отсюда $3\dot{x}^2=2t+c$. Учитывая, что $x(0)<x(3/2)$ в силу граничных условий, получаем $\dot{x}=\sqrt{\frac{2}{3}t+\frac{c}{3}}$. В итоге $x(t)=\left(\frac{2}{3}t+k\right)^{3/2}+d$, где k и d — неопределенные константы. Из граничных условий получаем $k^{3/2}+d=0$, $(1+k)^{3/2}+d=1$. Отсюда $(1+k)^{3/2}-k^{3/2}=1$. Одно из решений — это $k=0$. Левая часть строго возрастает, т.к. ее производная строго положительная. Значит, решение только одно.

Итак, допустимая экстремаль имеет вид $\hat{x}(t)=\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$. Значит, $\dot{\hat{x}}(t)=\left(\frac{2}{3}t\right)^{1/2}$.

Имеем $L_{\dot{x}\dot{x}}=6\dot{x}$, так что $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)=6\left(\frac{2}{3}t\right)^{1/2}$. Значит, выполнено условие Лежандра (неусиленное). Далее, $L_{x\dot{x}}=0$, $L_{xx}=0$. Запишем уравнение Якоби: $-\frac{d}{dt}(t^{1/2}\dot{h})=0$. Отсюда $t^{1/2}\dot{h}=\text{const}$. Поэтому общее решение уравнения Якоби имеет вид $h(t) = at^{1/2} + b$. Если h нетривиально и $h(0) = 0$, то $h(t) = at^{1/2}$, $a \neq 0$. Эта функция зануляется только при $t = 0$, так что выполнено усиленное условие Якоби.

Теперь покажем, что $\hat{x}$ не является точкой слабого минимума, то есть что существует семейство функций $\hat{h}_\varepsilon \in C^1[0,\,3/2]$ такое, что $\|\hat{h}_\varepsilon\|_{C^1[0,\,1]} \underset{\varepsilon\to+0}{\to} 0$, $\hat{h}_\varepsilon(0) = \hat{h}_\varepsilon(3/2) = 0$, $\mathcal{L}(\hat{x} + \hat{h}_\varepsilon) - \mathcal{L}(\hat{x}) < 0$, где $\mathcal{L}(x) = \int\limits_0^{3/2} (\dot{x}^3 + 2x)\,dt$, $\varepsilon \in (0,\,\varepsilon_0)$. В силу леммы о скруглении углов, достаточно построить функции $h_\varepsilon \in PC^1[0,\,3/2]$ такие, что $\sup_{t\in[0,\,3/2]} |\dot{h}_\varepsilon(t)| \underset{\varepsilon\to+0}{\to} 0$, $h_\varepsilon(0) = h_\varepsilon(3/2) = 0$, $\mathcal{L}(\hat{x} + h_\varepsilon) - \mathcal{L}(\hat{x}) < 0$. (Заметим, что тогда $\sup_{t\in[0,\,3/2]} |h_\varepsilon(t)| \underset{\varepsilon\to+0}{\to} 0$.)

Для $h \in PC^1[0,\,3/2]$ такой, что $h(0) = h(3/2) = 0$, получаем

$$\mathcal{L}(\hat{x} + h) - \mathcal{L}(\hat{x}) = \int\limits_0^{3/2} (3\dot{\hat{x}}^2\dot{h} + 3\dot{\hat{x}}\dot{h}^2 + \dot{h}^3 + 2h)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{3/2} (3\dot{\hat{x}}\dot{h}^2 + \dot{h}^3)\,dt$$

(интегрируем по частям слагаемое с $3\dot{\hat{x}}^2\dot{h}$ и применяем уравнение Эйлера).

Пусть

$$\dot{h}_\varepsilon(t) = \begin{cases} -\varepsilon, & t < \delta_\varepsilon, \\ c_\varepsilon, & t > \delta_\varepsilon, \end{cases}$$

$h_\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \dot{h}_\varepsilon(s)\,ds$. Константа $c_\varepsilon > 0$ выбирается так, чтобы $h(3/2) = 0$, т.е. $c_\varepsilon = \frac{\varepsilon\delta_\varepsilon}{3/2-\delta_\varepsilon}$. Число $\delta_\varepsilon \in (0,\,1)$ подберем позже по ε.

Имеем

$$\int\limits_0^{3/2} (3\dot{\hat{x}}\dot{h}_\varepsilon^2 + \dot{h}_\varepsilon^3)\,dt = \int\limits_0^{\delta_\varepsilon} \left(3\left(\frac{2}{3}t\right)^{1/2}\varepsilon^2 - \varepsilon^3\right)\,dt +$$

$$+ \int\limits_{\delta_\varepsilon}^{3/2} \left(3\left(\frac{2}{3}t\right)^{1/2}\frac{\varepsilon^2\delta_\varepsilon^2}{(3/2-\delta_\varepsilon)^2} + \frac{\varepsilon^3\delta_\varepsilon^3}{(3/2-\delta_\varepsilon)^3}\right)\,dt \leq$$

$$\leq C_1\delta_\varepsilon^{3/2}\varepsilon^2 - C_2\delta_\varepsilon\varepsilon^3 + C_3\varepsilon^2\delta_\varepsilon^2 + C_4\varepsilon^3\delta_\varepsilon^3,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — положительные константы.

Положим $\delta_\varepsilon = \varepsilon^\alpha$ и подберем число $\alpha > 0$ так, чтобы наименьший показатель оказался у второго слагаемого. Достаточно, чтобы $\frac{3}{2}\alpha + 2 > \alpha + 3$, т.е. $\alpha > 2$. Тогда при малых ε получим

$$C_1\varepsilon^{2+3\alpha/2} - C_2\varepsilon^{3+\alpha} + C_3\varepsilon^{2+2\alpha} + C_4\varepsilon^{3+3\alpha} < 0.$$