

Maki 的完美算术教室  
系列在线数学课程——数学分析

---

## Maki 的数学分析课程（第一版）配套习题集

2020 年 第一版

---

2020 年 7 月 15 日更新

转发请注明出处，禁止一切商业用途，版权归我们编辑团队所有，侵权必究

Bilibili 个人空间：<https://space.bilibili.com/391930545>

官方网站：<https://www.maki-math.com>

Maki 的个人邮箱：[maki@maki-math.com](mailto:maki@maki-math.com)

# 目录

<b>1 数理逻辑与集合论</b>	<b>1</b>
1.1 与、或、非 (Akihi 编辑)	1
1.2 推出和等价 (Vict 编辑)	3
1.3 全称量词和存在量词 (Vict 编辑)	4
1.4 证明与证伪 (Yuan_T 编辑)	6
1.5 数学归纳法 (MilK 编辑)	8
1.6 朴素集合论 (tt 编辑)	9
1.7 函数 (icc7 酱编辑)	11
1.8 基本初等函数	13
<b>2 函数极限和连续性</b>	<b>14</b>
2.1 邻域和去心邻域	14
2.2 极限的直观定义与严格定义	14
2.3 极限的性质	14
2.4 函数的连续性及性质	14
2.5 复合函数的连续性	14
2.6 夹逼定律	14
2.7 介值定理——IVT	14
2.8 极值定理——EVT	14
<b>3 导数</b>	<b>15</b>
3.1 导数的直观定义和严格定义	15
3.2 导数的公式与性质	15
3.3 三角函数的导数	15
3.4 链式法则	15
3.5 反三角函数的导数	15
3.6 指数与对数函数的导数	15
<b>4 导数的应用</b>	<b>16</b>
4.1 隐函数求导	16
4.2 中值定理——MVT	16
4.3 局部单调性与一阶导数	16

4.4	凸性与二阶导数 . . . . .	16
4.5	极值存在的充分条件和必要条件 . . . . .	16
4.6	求函数的极值与最值 . . . . .	16
4.7	L'Hôpital 法则 . . . . .	16
4.8	函数作图 . . . . .	16
<b>5</b>	<b>定积分</b>	<b>17</b>
5.1	上确界与下确界, 确界存在公理 . . . . .	17
5.2	$\Sigma$ 记号与常用公式 . . . . .	17
5.3	定积分的 Riemann 定义, 各种黎曼和 . . . . .	17
5.4	定积分的 Darboux 定义 . . . . .	17
5.5	黎曼不可积的函数例子 . . . . .	17
<b>6</b>	<b>不定积分</b>	<b>18</b>
6.1	不定积分的定义 . . . . .	18
6.2	换元积分法 . . . . .	18
6.3	分部积分法 . . . . .	18
6.4	三角函数换元积分法 . . . . .	18
6.5	Tabular Method——分部积分法的推广 . . . . .	18
<b>7</b>	<b>微积分基本定理</b>	<b>19</b>
7.1	微积分第一基本定理——FTC1 . . . . .	19
7.2	微积分第二基本定理——FTC2 . . . . .	19
<b>8</b>	<b>积分的应用</b>	<b>20</b>
8.1	求面积 . . . . .	20
8.2	求旋转体的体积 . . . . .	20
<b>9</b>	<b>反常积分</b>	<b>21</b>
9.1	无界函数的反常积分 . . . . .	21
9.2	区间长度为无限的反常积分 . . . . .	21
<b>10</b>	<b>数列极限</b>	<b>22</b>
10.1	数列极限的定义 . . . . .	22
10.2	数列极限的性质 . . . . .	22

10.3 数列极限与函数极限的异同 . . . . .	22
10.4 连续函数的数列极限版等价定义 . . . . .	22
10.5 $e$ 的定义 . . . . .	22
10.6 $\pi$ 的定义 . . . . .	22
<b>11 级数</b>	<b>23</b>
11.1 特殊级数的求法 . . . . .	23
11.2 幂级数与 Hadamard 公式 . . . . .	23
11.3 级数的各种审敛法 . . . . .	23
<b>12 Taylor 级数</b>	<b>24</b>
12.1 Taylor 多项式与 Taylor 余项 . . . . .	24
12.2 Taylor 定理 . . . . .	24
12.3 Taylor 级数的导数与不定积分 . . . . .	24
<b>参考文献</b>	<b>25</b>

# 1 数理逻辑与集合论

这一章作为高等数学的基础，是非常重要的。请至少做出 80% 的习题，保证对后面章节而言能有充分的知识储备。

## 1.1 与、或、非 (Akihi 编辑)

证明下列逻辑恒等式

1.  $\neg(\neg p) \iff p$

2.  $p \wedge q \iff q \wedge p. \quad p \vee q \iff q \vee p$

3.  $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r). \quad (p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$

4.  $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r). \quad p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$$5. \neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q. \quad \neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$$

证伪下列逻辑推断

$$1. p \wedge q \iff p \vee q$$

$$2. p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee r$$

$$3. \neg(p \wedge q) \iff \neg p \wedge \neg q$$

## 1.2 推出和等价 (Vict 编辑)

证明下列逻辑恒等式

1.  $(p \Rightarrow F) \Rightarrow (p = F)$

2.  $(p \Rightarrow q) \iff (\neg p \vee q)$

3.  $(p \Rightarrow (q \wedge r)) \iff (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

4.  $((p \vee q) \Rightarrow r) \iff (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

5.  $((p \vee q \vee r) \Rightarrow s) \iff (p \Rightarrow s) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge (r \Rightarrow s)$

证伪下列逻辑推断

1.  $T \Rightarrow F$

2.  $((p \wedge q) \Rightarrow r) \iff (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

### 1.3 全称量词和存在量词 (Vict 编辑)

证明下列逻辑恒等式

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1$

2.  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 2xy$



3.  $\exists x > 0, x^3 - 4x = 0$

4.  $\exists x \in \mathbb{N}_1, \exists y \in \mathbb{N}_1, x + y = 3$

化简下列在开头带有“非”的复杂命题

1.  $\neg(\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y))$

2.  $\neg(\forall x \in A, \forall y \in B, \forall z \in C, p(x, y, z))$

3.  $\neg(\exists x \in A, \forall y \in B, \forall z \in C, p(x, y, z))$

## 1.4 证明与证伪 (Yuan\_T 编辑)

### 1. 证明下列命题

(a) 若  $m$  和  $n$  都是偶数, 则  $m + n$  是偶数

(b) 若  $m$  和  $n$  都是偶数, 则  $m \cdot n$  是偶数

(c) 设  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 - 3x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$

(d) 若  $m + n$  是奇数, 则  $m$  是奇数或  $n$  是奇数

(e)  $\sqrt{20} \notin \mathbb{Q}$

$$(f) \quad \forall x \in \mathbb{N}_1, \exists y \in \mathbb{N}_1, y > x$$

$$(g) \quad \exists x \in \mathbb{N}_1, \forall y \in \mathbb{N}_1, x + y = y + 1$$

2. 说明下列命题是错误的

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{N}_1, x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = 0$$

$$(b) \quad \forall x \in \mathbb{N}_1, \exists y \in \mathbb{N}_1, x + y = 1000$$

$$(c) \quad \exists x \in \mathbb{N}_1, \forall y \in \mathbb{N}_1, x + y = y$$

$$(d) \exists x \in \mathbb{N}_1, \forall y \in \mathbb{N}_1, x > y$$

## 1.5 数学归纳法 (MilK 编辑)

### 1. 证明

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}_1 ((p \Rightarrow (q_1 \wedge \cdots \wedge q_n)) \iff ((p \Rightarrow q_1) \wedge \cdots \wedge (p \Rightarrow q_n)))$$

$$(b) \forall n \in \mathbb{N}_1 (((p_1 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q) \iff ((p_1 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)))$$

$$(c) \text{ if } a_n = qa_{n-1} \text{ for } n \geq 2, \text{ then } \forall n \in \mathbb{N}_1, a_n = q^{n-1}a_1.$$

$$(d) \text{ if } a_n = 2n - 1 \text{ for } n \geq 1, \text{ then } \forall n \in \mathbb{N}_1, a_1 + \cdots + a_n = n^2.$$

(e) if  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  for  $n \geq 3$ ,  
 then  $\forall n \in \mathbb{N}_1, a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ .

2. (难题) 证明: “反向归纳法”

$$(\forall n \in \mathbb{N}_1, p(n)) \iff ((\exists \text{ 无穷多个 } n, p(n)) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}_2, p(n) \Rightarrow p(n-1))),$$

其中  $\mathbb{N}_2 = \{2, 3, 4, \dots\}$ .

## 1.6 朴素集合论 (tt 编辑)

证明下列命题:

1.  $A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A$ .

2.  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C; A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ .

3.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

4.  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c; (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$

5.  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C).$

6.  $A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B).$

7.  $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A).$

证明下列命题:

1.  $\{15x : x \in \mathbb{Z}\} \subsetneq \{5y : y \in \mathbb{Z}\}.$

2. 若  $m, n \in \mathbb{Z}$ , 则  $\{mnx : x \in \mathbb{Z}\} \subset \{my : y \in \mathbb{Z}\}.$

3.  $\{2x + 2y : x, y \in \mathbb{Z}\} = \{2z : z \in \mathbb{Z}\}.$

4.  $\{4x + 6y : x, y \in \mathbb{Z}\} = \{2z : z \in \mathbb{Z}\}.$

## 1.7 函数 (icc7 酱编辑)

1. 证明

$$(a) (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$(b) (A_1 \times A_2 \times A_3) \cap (B_1 \times B_2 \times B_3) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \times (A_3 \cap B_3)$$

$$(c) f(A^c) \subset (f(A))^c$$

2. 证伪 (找出反例)

$$(a) (f(A))^c \subset f(A^c)$$

3. 证明 (用逻辑演绎)

$$(a) (A_1 \times \cdots \times A_n) \cap (B_1 \times \cdots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_n \cap B_n)$$



$$(b) \ f^{-1}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = f^{-1}(A_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_n)$$

$$(c) \ f^{-1}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = f^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(A_n)$$

$$(d) \ f(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = f(A_1) \cup \cdots \cup f(A_n)$$

## 1.8 基本初等函数

## 2 函数极限和连续性

### 2.1 邻域和去心邻域

### 2.2 极限的直观定义与严格定义

### 2.3 极限的性质

### 2.4 函数的连续性及性质

### 2.5 复合函数的连续性

### 2.6 夹逼定律

### 2.7 介值定理——IVT

### 2.8 极值定理——EVT

### 3 导数

#### 3.1 导数的直观定义和严格定义

#### 3.2 导数的公式与性质

#### 3.3 三角函数的导数

#### 3.4 链式法则

#### 3.5 反三角函数的导数

#### 3.6 指数与对数函数的导数

## 4 导数的应用

### 4.1 隐函数求导

### 4.2 中值定理——MVT

### 4.3 局部单调性与一阶导数

### 4.4 凸性与二阶导数

### 4.5 极值存在的充分条件和必要条件

### 4.6 求函数的极值与最值

### 4.7 L'Hôpital 法则

### 4.8 函数作图

## 5 定积分

### 5.1 上确界与下确界，确界存在公理

### 5.2 $\Sigma$ 记号与常用公式

### 5.3 定积分的 Riemann 定义，各种黎曼和

### 5.4 定积分的 Darboux 定义

### 5.5 黎曼不可积的函数例子

## 6 不定积分

### 6.1 不定积分的定义

### 6.2 换元积分法

### 6.3 分部积分法

### 6.4 三角函数换元积分法

### 6.5 Tabular Method——分部积分法的推广

## 7 微积分基本定理

### 7.1 微积分第一基本定理——FTC1

### 7.2 微积分第二基本定理——FTC2

## 8 积分的应用

### 8.1 求面积

### 8.2 求旋转体的体积



## 9 反常积分

### 9.1 无界函数的反常积分

### 9.2 区间长度为无限的反常积分

## 10 数列极限

### 10.1 数列极限的定义

### 10.2 数列极限的性质

### 10.3 数列极限与函数极限的异同

### 10.4 连续函数的数列极限版等价定义

### 10.5 $e$ 的定义

### 10.6 $\pi$ 的定义

## 11 级数

### 11.1 特殊级数的求法

### 11.2 幂级数与 Hadamard 公式

### 11.3 级数的各种审敛法

## 12 Taylor 级数

### 12.1 Taylor 多项式与 Taylor 余项

### 12.2 Taylor 定理

### 12.3 Taylor 级数的导数与不定积分

## 参考文献

- [1] 常庚哲、史济怀 (2003). 数学分析教程 (上册) (第三版). 高等教育出版社. (ISBN 978-7-312-03009-3)
- [2] Holden, Tyler (2014-2015). *MAT137 Lecture Notes*. [http://home.tykenho.com/LectureNotes137\\_Preview.pdf](http://home.tykenho.com/LectureNotes137_Preview.pdf)
- [3] Spivak, Micheal (2008). *Calculus* (4th ed.). Publish or Perish, Inc. (ISBN 978-0-914098-91-1)