Maki 的完美算术教室

系列在线数学课程——数学分析

Maki 的数学分析课程（第一版）配套习题集

2020 年 第一版

2020 年 7 月 15 日更新

Bilibili 个人空间：https://space.bilibili.com/391930545

官方网站：https://www.maki-math.com

Maki 的个人邮箱：maki@maki-math.com

目录

1 数理逻辑与集合论

这一章作为高等数学的基础，是非常重要的。请至少做出 80% 的习题，保证对后面章节而言能有充分的知识储备。

1.1 与、或、非 (Akihi 编辑)

证明下列逻辑恒等式

1. $\neg(\neg p) \iff p$

2. $p \wedge q \iff q \wedge p.\quad p \vee q \iff q \vee p$

3. $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r).\quad (p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$

4. $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r).\quad p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

5. $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q. \quad \neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$

证伪下列逻辑推断

1. $p \wedge q \iff p \vee q$

2. $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee r$

3. $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \wedge \neg q$

1.2 推出和等价 (Vict 编辑)

证明下列逻辑恒等式

1. $(p \Rightarrow F) \Rightarrow (p = F)$

2. $(p \Rightarrow q) \iff (\neg p \vee q)$

3. $(p \Rightarrow (q \wedge r)) \iff (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

4. $((p \vee q) \Rightarrow r) \iff (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

5. $((p \vee q \vee r) \Rightarrow s) \iff (p \Rightarrow s) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge (r \Rightarrow s)$

证伪下列逻辑推断

1. $T \Rightarrow F$

2. $((p \wedge q) \Rightarrow r) \iff (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

1.3 全称量词和存在量词 (Vict 编辑)

证明下列逻辑恒等式

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq -1$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \geq 2xy$

3. $\exists x > 0,\ x^3 - 4x = 0$

4. $\exists x \in \mathbb{N}_1,\ \exists y \in \mathbb{N}_1,\ x + y = 3$

化简下列在开头带有“非”的复杂命题

1. $\neg(\exists x \in A,\ \exists y \in B,\ p(x, y))$

2. $\neg(\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ \forall z \in C,\ p(x, y, z))$

3. $\neg(\exists x \in A,\ \forall y \in B,\ \forall z \in C,\ p(x, y, z))$

1.4 证明与证伪（Yuan_T 编辑）

1. 证明下列命题

   (a) 若 m 和 n 都是偶数，则 $m+n$ 是偶数

   (b) 若 m 和 n 都是偶数，则 $m \cdot n$ 是偶数

   (c) 设 $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$

   (d) 若 $m+n$ 是奇数，则 m 是奇数或 n 是奇数

   (e) $\sqrt{20} \notin \mathbb{Q}$

(f) $\forall x \in \mathbb{N}_1,\ \exists y \in \mathbb{N}_1,\ y > x$

(g) $\exists x \in \mathbb{N}_1,\ \forall y \in \mathbb{N}_1,\ x + y = y + 1$

2. 说明下列命题是错误的

(a) $\forall x \in \mathbb{N}_1,\ x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) = 0$

(b) $\forall x \in \mathbb{N}_1,\ \exists y \in \mathbb{N}_1,\ x + y = 1000$

(c) $\exists x \in \mathbb{N}_1,\ \forall y \in \mathbb{N}_1,\ x + y = y$

(d) $\exists x \in \mathbb{N}_1,\ \forall y \in \mathbb{N}_1,\ x > y$

1.5 数学归纳法 (MilK 编辑)

1. 证明

(a) $\forall\ n \in \mathbb{N}_1\ \ ((p \Rightarrow (q_1 \wedge \cdots \wedge q_n)) \iff ((p \Rightarrow q_1) \wedge \cdots \wedge (p \Rightarrow q_n)))$

(b) $\forall\ n \in \mathbb{N}_1\ (((p_1 \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q) \iff ((p_1 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)))$

(c) if $a_n = qa_{n-1}$ for $n \geq 2$, then $\forall\ n \in \mathbb{N}_1,\ a_n = q^{n-1}a_1$.

(d) if $a_n = 2n - 1$ for $n \geq 1$, then $\forall\ n \in \mathbb{N}_1,\ a_1 + \cdots + a_n = n^2$.

(e) if $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ for $n \geq 3$,

then $\forall\ n \in \mathbb{N}_1,\ a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

2. (难题) 证明: “反向归纳法”

$$(\forall n \in \mathbb{N}_1,\ p(n)) \iff ((\exists \text{ 无穷多个 } n,\ p(n)) \wedge (\forall\ n \in \mathbb{N}_2,\ p(n) \Rightarrow p(n-1))),$$

其中 $\mathbb{N}_2 = \{2, 3, 4, \cdots\}$.

1.6 朴素集合论（tt 编辑）

证明下列命题:

1. $A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A$.

2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C; A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c; (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

5. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

6. $A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B)$.

7. $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$.

证明下列命题:

1. $\{15x : x \in \mathbb{Z}\} \subsetneqq \{5y : y \in \mathbb{Z}\}$.

2. 若 $m, n \in \mathbb{Z}$, 则 $\{mnx : x \in \mathbb{Z}\} \subset \{my : y \in \mathbb{Z}\}$.

3. $\{2x + 2y : x, y \in \mathbb{Z}\} = \{2z : z \in \mathbb{Z}\}$.

4. $\{4x + 6y : x, y \in \mathbb{Z}\} = \{2z : z \in \mathbb{Z}\}$.

1.7 函数（icc7 酱编辑）

1. 证明

(a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

(b) $(A_1 \times A_2 \times A_3) \cap (B_1 \times B_2 \times B_3) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \times (A_3 \cap B_3)$

(c) $f(A^c) \subset (f(A))^c$

2. 证伪 (找出反例)

(a) $(f(A))^c \subset f(A^c)$

3. 证明 (用逻辑演绎)

(a) $(A_1 \times \cdots \times A_n) \cap (B_1 \times \cdots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_n \cap B_n)$

(b) $f^{-1}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = f^{-1}(A_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_n)$

(c) $f^{-1}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = f^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(A_n)$

(d) $f(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = f(A_1) \cup \cdots \cup f(A_n)$

1.8 基本初等函数

2 函数极限和连续性

2.1 邻域和去心邻域

2.2 极限的直观定义与严格定义

2.3 极限的性质

2.4 函数的连续性及性质

2.5 复合函数的连续性

2.6 夹逼定律

2.7 介值定理——IVT

2.8 极值定理——EVT

3 导数

3.1 导数的直观定义和严格定义

3.2 导数的公式与性质

3.3 三角函数的导数

3.4 链式法则

3.5 反三角函数的导数

3.6 指数与对数函数的导数

4 导数的应用

4.1 隐函数求导

4.2 中值定理——MVT

4.3 局部单调性与一阶导数

4.4 凸性与二阶导数

4.5 极值存在的充分条件和必要条件

4.6 求函数的极值与最值

4.7 L'Hôspital 法则

4.8 函数作图

5 定积分

5.1 上确界与下确界，确界存在公理

5.2 Σ 记号与常用公式

5.3 定积分的 Riemann 定义，各种黎曼和

5.4 定积分的 Darboux 定义

5.5 黎曼不可积的函数例子

6 不定积分

6.1 不定积分的定义

6.2 换元积分法

6.3 分部积分法

6.4 三角函数换元积分法

6.5 Tabular Method——分部积分法的推广

7 微积分基本定理

7.1 微积分第一基本定理——FTC1

7.2 微积分第二基本定理——FTC2

8 积分的应用

8.1 求面积

8.2 求旋转体的体积

9 反常积分

9.1 无界函数的反常积分

9.2 区间长度为无限的反常积分

10 数列极限

10.1 数列极限的定义

10.2 数列极限的性质

10.3 数列极限与函数极限的异同

10.4 连续函数的数列极限版等价定义

10.5 e 的定义

10.6 π 的定义

11 级数

11.1 特殊级数的求法

11.2 幂级数与 Hadamard 公式

11.3 级数的各种审敛法

12 Taylor 级数

12.1 Taylor 多项式与 Taylor 余项

12.2 Taylor 定理

12.3 Taylor 级数的导数与不定积分

参考文献

[1] 常庚哲、史济怀 (2003). 数学分析教程（上册）(第三版). 高等教育出版社. (ISBN 978-7-312-03009-3)

[2] Holden, Tyler (2014-2015). *MAT137 Lecture Notes*. http://home.tykenho.com/LectureNotes137_Preview.pdf

[3] Spivak, Micheal (2008). *Calculus* (4th ed.). Publish or Perish, Inc. (ISBN 978-0-914098-91-1)