Lógica para computação

Fórmulas e equações lógicas

Conectivos vistos

Negação, conjunção, disjunção, disjunção exclusiva, implicação, bi-implicação

Definição

Dada uma implicação $(A \to B)$, definimos três variações dessa implicação como sendo a Recíproca, $(B \to A)$, a Inversa, $((\neg A) \to (\neg B))$ e a Contrapositiva, $((\neg B) \to (\neg A))$. Nas sentenças abaixo, determine o que se pede:

1. A Recíproca de "Se tem quatro lados, é um quadrado".
2. A Inversa de "Se Maria é professora, ela é pobre".
3. A Contrapositiva de "Se José estudar, ele passará em lógica".
4. A Contrapositiva de "Se um político mente, ele ganha a eleição".

Fórmulas lógicas

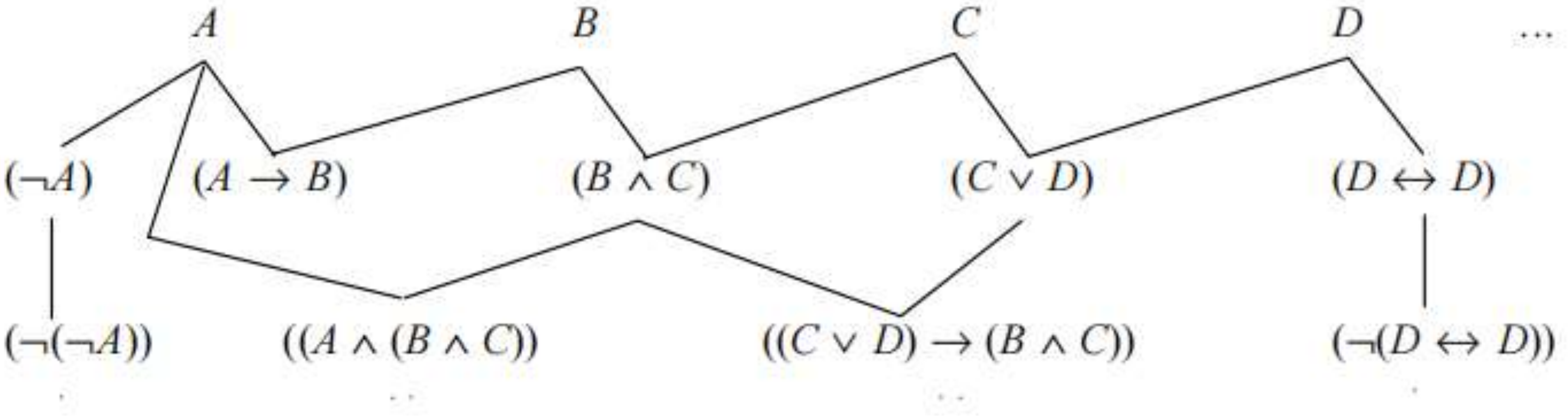
1. Todas as fórmulas atômicas são fórmulas.
2. Se A e B são fórmulas, então

$$(\neg A),$$
$$(A \wedge B),$$
$$(A \vee B),$$
$$(A \rightarrow B) \text{ e}$$
$$(A \leftrightarrow B)$$

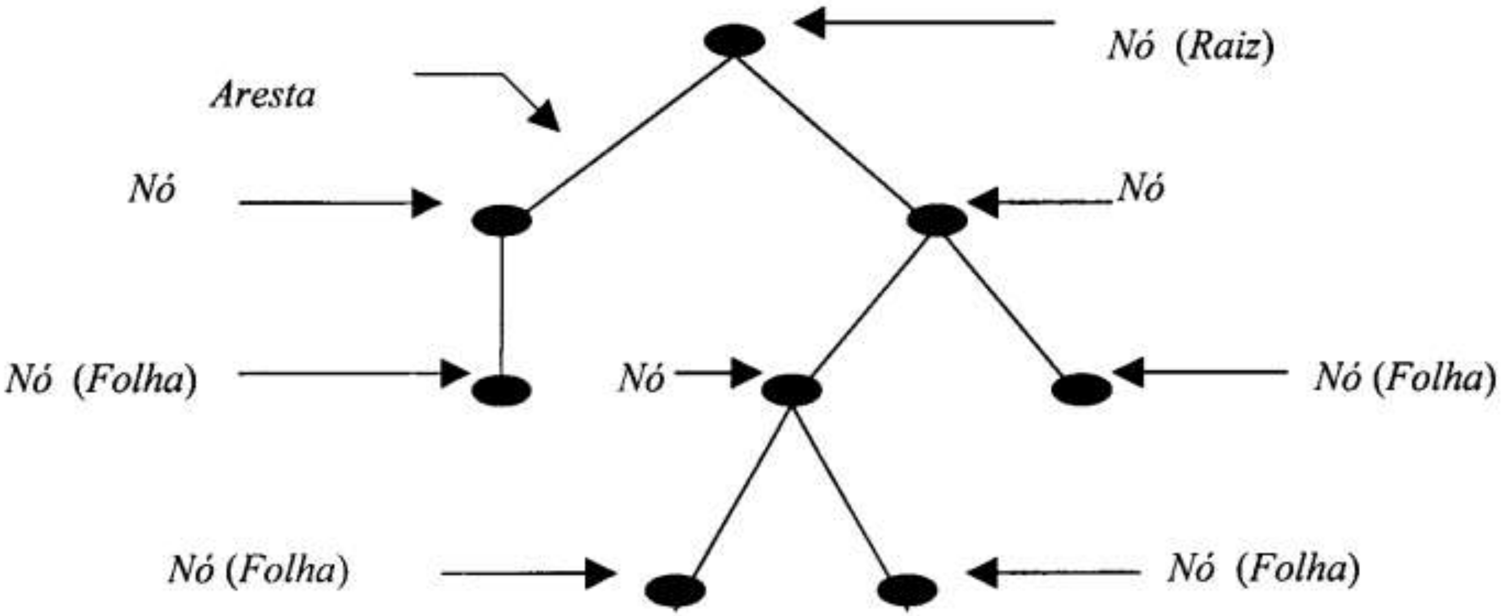
são também fórmulas.

3. Uma dada expressão constitui uma fórmula se e somente se foi obtida pela aplicação de uma das regras (1 ou 2) acima.

Árvore de composição de uma fórmula



Árvore de decomposição de uma fórmula



Árvore de decomposição de uma fórmula

1. Dada uma fórmula qualquer S esta será a raiz da árvore de subfórmulas de S,

2. Se S é uma fórmula do tipo *não*, então ela é composta por uma fórmula A, de tal modo que $S = (\neg A)$, logo teremos

$$\begin{array}{c} (\neg A) \\ | \\ A \end{array}$$

Árvore de decomposição de uma fórmula

3. Se S é uma fórmula do tipo *e*, então ela é composta por duas fórmulas A e B de tal modo que $S = (A \wedge B)$, logo teremos $(A \wedge B)$.

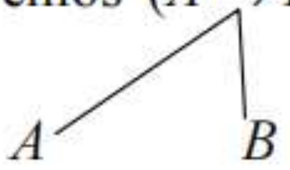
$$A \qquad B$$

4. Se S é uma fórmula do tipo *ou*, então ela é composta por duas fórmulas A e B de tal modo que $S = (A \vee B)$, daí teremos $(A \vee B)$

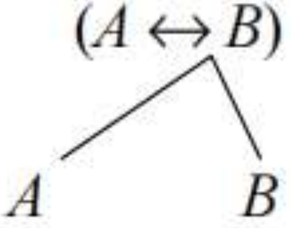
$$A \qquad B$$

Árvore de decomposição de uma fórmula

5. Se S é uma fórmula do tipo *implica*, então ela é composta por duas fórmulas A e B de tal modo que S é dado por $(A \rightarrow B)$, e teremos $(A \rightarrow B)$



6. Se S é uma fórmula do tipo *bi-implica*, então ela é composta por duas fórmulas A e B de tal modo que S é dado por $(A \leftrightarrow B)$, e teremos



Exemplos

1) $[A \rightarrow (B \vee C)]$

Exemplos

1) $[A \rightarrow (B \vee C)]$

2) $\{\neg[[(\neg B) \wedge (\neg(\neg A))] \leftrightarrow [\neg(\neg(B \vee C))]]\}$

Exemplos

1) $[A \to (B \vee C)]$

2) $\{\neg[[(\neg B) \wedge (\neg(\neg A))] \leftrightarrow [\neg(\neg(B \vee C))]]\}$

3) $\{[(A \to B) \to A] \to A\}$

Exemplos

1) $[A \rightarrow (B \vee C)]$

2) $\{\neg[[(\neg B) \wedge (\neg(\neg A))] \leftrightarrow [\neg(\neg(B \vee C))]]\}$

3) $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A\}$

4) $\{A \wedge [C \wedge (A \vee C)]\}$

Exemplos

1) $[A \to (B \vee C)]$

2) $\{\neg[[(\neg B) \wedge (\neg(\neg A))] \leftrightarrow [\neg(\neg(B \vee C))]]\}$

3) $\{[(A \to B) \to A] \to A\}$

4) $\{A \wedge [C \wedge (A \vee C)]\}$

5) $\{[(E \to C) \vee (A \wedge D)] \wedge [(E \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \vee D)]\}$

Exemplos

1) $[A \rightarrow (B \vee C)]$

2) $\{\neg[[(\neg B) \wedge (\neg(\neg A))] \leftrightarrow [\neg(\neg(B \vee C))]]\}$

3) $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A\}$

4) $\{A \wedge [C \wedge (A \vee C)]\}$

5) $\{[(E \rightarrow C) \vee (A \wedge D)] \wedge [(E \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \vee D)]\}$

Conclusão: Decompomos a fórmula em subfórmulas

Tabela-verdade de uma fórmula

$$(\neg(B \wedge C))$$

Passos	Instruções
1	Construa a árvore de decomposição da fórmula.

Tabela-verdade de uma fórmula

$(\neg(B \wedge C))$

Passos	Instruções
1	Construa a árvore de decomposição da fórmula.
2	Veja quais e quantas são as fórmulas atômicas.

Tabela-verdade de uma fórmula

$(\neg(B \wedge C))$

Passos	Instruções
1	Construa a árvore de decomposição da fórmula.
2	Veja quais e quantas são as fórmulas atômicas.
3	Escreva em ordem alfabética as atômicas e trace colunas para cada uma delas
4	Trace 2n linhas, sendo n o número de atômicas

Tabela-verdade de uma fórmula

$(\neg(B \wedge C))$

5	Agora olhe para a árvore de decomposição. Se houver apenas um ramo, olhe-as de baixo para cima, e escreva cada uma das sub-fórmulas da esquerda para a direita (sentido usual de escrita), cada uma em uma coluna separada
6	Se a árvore apresentar dois ramos, consideramos primeiro o ramo da esquerda, e escreva cada uma das sub-fórmulas começando pelas atômicas, de baixo para cima, transportando-as na primeira linha e escrevendo-as da esquerda para a direita (sentido usual de escrita), cada uma em uma coluna separada. Passe à coluna da direita e faça o mesmo, até esgotar todas as sub-fórmulas de A, até chegar à última fórmula que é A.

Preenchendo a tabela-verdade

$(\neg(B \wedge C))$

Passos	Instruções
1	Olhemos inicialmente todas as colunas das atômicas.
2	. Na primeira coluna, preenchemos a primeira metade com 1 e a outra metade com 0.
3	Na segunda coluna, para cada metade de 1 da primeira coluna, preenchemos a primeira metade com 1 e a outra metade com 0. Na outra metade 0, ainda da primeira coluna, preenchemos a primeira metade com 1 e a outra metade com 0.
4	Nas demais colunas, repete-se o processo anterior, para cada bloco de 1 e de 0, até chegar à última coluna que deve apresentar-se assim: 1, 0, 1, 0, etc.

Preenchendo a tabela-verdade

$(\neg(B \wedge C))$

Preenchimento das demais colunas.

Passos	Instruções
1	A tabela já está pronta para que a primeira coluna após as atômicas seja preenchível olhando-se a tabela verdade da fórmula da coluna.
2	Repete-se o processo acima, pois a tabela já dá a seqüência de preenchimento.
3	Como na última coluna deve figurar a fórmula A, a tabela-verdade de A está feita

Outros exemplos

$$(\neg(B \land C))$$

Outros exemplos

$$(\neg(B \wedge C))$$

$$D \rightarrow (\neg E)$$

Outros exemplos

$$(\neg(B \wedge C))$$

$$D \rightarrow (\neg E)$$

$$(A \rightarrow (B \wedge A))$$

Outros exemplos

$$(\neg(B \wedge C))$$

$$D \rightarrow (\neg E)$$

$$(A \rightarrow (B \wedge A))$$

$$(A \rightarrow (\neg(B \vee A)))$$

Outros exemplos

$(\neg(B \land C))$

$(A \to (B \to A))$

$D \to (\neg E)$

$(A \to (B \land A))$

$(A \to (\neg(B \lor A)))$

Outros exemplos

$(\neg(B \land C))$

$D \rightarrow (\neg E)$

$(A \rightarrow (B \land A))$

$(A \rightarrow (\neg(B \lor A)))$

$(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

$((A \leftrightarrow B) \rightarrow A)$

Outros exemplos

$(\neg(B \wedge C))$

$D \rightarrow (\neg E)$

$(A \rightarrow (B \wedge A))$

$(A \rightarrow (\neg(B \vee A)))$

$(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

$((A \leftrightarrow B) \rightarrow A)$

$\{A \rightarrow [(\neg B) \wedge C]\}$

Outros exemplos

$(\neg(B \wedge C))$

$D \rightarrow (\neg E)$

$(A \rightarrow (B \wedge A))$

$(A \rightarrow (\neg(B \vee A)))$

$(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

$((A \leftrightarrow B) \rightarrow A)$

$\{A \rightarrow [(\neg B) \wedge C]\}$

$\{\neg[A \wedge (\neg A)]\} \leftrightarrow A)$

Definição - Tautologia

Definição 1. Denomina-se função-verdade de n argumentos ($n \geq 1$) a qualquer função f: $2^n \rightarrow 2$, onde 2 denota o conjunto $\{0, 1\}$.

Definição - Tautologia

Definição 1. Denomina-se função-verdade de n argumentos ($n \geq 1$) a qualquer função f: $2^n \to 2$, onde 2 denota o conjunto $\{0, 1\}$.

Definição 2. Uma fórmula A diz-se ser uma tautologia se o valor-verdade de A sempre for verdadeiro, quaisquer que sejam os valores-verdade de suas fórmulas atômicas componentes.

Definição - Tautologia

Definição 1. Denomina-se função-verdade de *n* argumentos ($n \geq 1$) a qualquer função f: $2^n \rightarrow 2$, onde 2 denota o conjunto $\{0, 1\}$.

Definição 2. Uma fórmula *A* diz-se ser uma tautologia se o valor-verdade de *A* sempre for verdadeiro, quaisquer que sejam os valores-verdade de suas fórmulas atômicas componentes.

Definição - Tautologia

Definição 1. Denomina-se função-verdade de n argumentos ($n \geq 1$) a qualquer função f: $2^n \rightarrow 2$, onde 2 denota o conjunto $\{0, 1\}$.

Definição 2. Uma fórmula A diz-se ser uma tautologia se o valor-verdade de A sempre for verdadeiro, quaisquer que sejam os valores-verdade de suas fórmulas atômicas componentes.

$$((A \wedge B) \rightarrow B)$$

Definição - Tautologia

Definição 1. Denomina-se função-verdade de *n* argumentos ($n \geq 1$) a qualquer função f: $2^n \rightarrow 2$, onde 2 denota o conjunto $\{0, 1\}$.

Definição 2. Uma fórmula *A* diz-se ser uma tautologia se o valor-verdade de *A* sempre for verdadeiro, quaisquer que sejam os valores-verdade de suas fórmulas atômicas componentes.

$((A \wedge B) \rightarrow B)$

$(\neg(A \wedge (\neg A)))$

Definição - Tautologia

Definição 1. Denomina-se função-verdade de n argumentos ($n \geq 1$) a qualquer função f: $2^n \to 2$, onde 2 denota o conjunto $\{0, 1\}$.

Definição 2. Uma fórmula A diz-se ser uma tautologia se o valor-verdade de A sempre for verdadeiro, quaisquer que sejam os valores-verdade de suas fórmulas atômicas componentes.

$$((A \wedge B) \to B) \qquad (\neg(A \wedge (\neg A)))$$

$$((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$$

Definição - Tautologia

Definição 3. Diz-se que uma fórmula A *implica tautologicamente* a fórmula B se $(A \to B)$ constituir uma tautologia. Neste caso, diz-se também que B é uma *conseqüência lógica* de A.

Diz-se que as fórmulas A e B são *logicamente equivalentes* se $(A \leftrightarrow B)$ constituir uma tautologia.

Definição - Tautologia

Definição 3. Diz-se que uma fórmula A *implica tautologicamente* a fórmula B se $(A \rightarrow B)$ constituir uma tautologia. Neste caso, diz-se também que B é uma *conseqüência lógica* de A.

Diz-se que as fórmulas A e B são *logicamente equivalentes* se $(A \leftrightarrow B)$ constituir uma tautologia.

Definição - Tautologia

Definição 3. Diz-se que uma fórmula A *implica tautologicamente* a fórmula B se $(A \rightarrow B)$ constituir uma tautologia. Neste caso, diz-se também que B é uma *conseqüência lógica* de A.

Diz-se que as fórmulas A e B são *logicamente equivalentes* se $(A \leftrightarrow B)$ constituir uma tautologia.

$$((A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A))$$

Definição - Tautologia

Definição 3. Diz-se que uma fórmula A *implica tautologicamente* a fórmula B se $(A \rightarrow B)$ constituir uma tautologia. Neste caso, diz-se também que B é uma *conseqüência lógica* de A.

Diz-se que as fórmulas A e B são *logicamente equivalentes* se $(A \leftrightarrow B)$ constituir uma tautologia.

$((A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A))$

$((A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$

Definição - Tautologia

Definição 3. Diz-se que uma fórmula A *implica tautologicamente* a fórmula B se $(A \rightarrow B)$ constituir uma tautologia. Neste caso, diz-se também que B é uma *conseqüência lógica* de A.

Diz-se que as fórmulas A e B são *logicamente equivalentes* se $(A \leftrightarrow B)$ constituir uma tautologia.

$$((A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A))$$

$$((A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$$

$$((A \vee A) \leftrightarrow A)$$

Definição - Tautologia

Definição 3. Diz-se que uma fórmula A *implica tautologicamente* a fórmula B se $(A \rightarrow B)$ constituir uma tautologia. Neste caso, diz-se também que B é uma *conseqüência lógica* de A.

Diz-se que as fórmulas A e B são *logicamente equivalentes* se $(A \leftrightarrow B)$ constituir uma tautologia.

$((A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A))$

$((A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$

$((A \vee A) \leftrightarrow A)$

$(A \leftrightarrow (\neg(\neg A)))$

Algumas leis interessantes

$$(((A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A)))$$

Algumas leis interessantes

$$(((A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A)))$$

$$((\neg(A \vee B)) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B)))$$
$$((\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B)))$$