Pré-cálculo

LISTA DE EXERCÍCIOS 2

Gabarito

Questão 1.

Seja g a função definida por: $g(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$,

simplifique a expressão: $\dfrac{g(x) - g(2)}{x-2}$

PRIMEIRO CALCULAMOS O NUMERADOR:

$$g(x) - g(2) = \frac{x-1}{x+2} - \frac{1}{4} = \frac{4(x-1) - (x+2)}{4(x+2)} =$$

$$= \frac{4x - 4 - x - 2}{4(x+2)} = \frac{3x-6}{4(x+2)} = \frac{3(x-2)}{4(x+2)}$$

ASSIM:

$$\frac{g(x) - g(2)}{x-2} = \frac{3(x-2)}{4(x+2)} \cdot \frac{1}{(x-2)} = \boxed{\frac{3}{4(x+2)}}$$

Questão 2.

Seja f a função definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 2t+9\ , & se\ t < 0 \\ 3t-10\ , & se\ t \geqslant 0 \end{cases}$$

(a) Calcule o valor de $f(|\ x\ | + 1)$

(b) Determine dois valores distintos de t tais que $f(t) = 0$

a) COMO: $|x|+1 \geqslant 1$,

CONSIDERAMOS $f(t) = 3t-10$

ENTÃO,

$$f(|x|+1) = 3(|x|+1) - 10 = \boxed{3|x| - 7}$$

b) se $t<0$, $f(t) = 2t+9$, $f(t) = 0$

$$2t+9=0$$
$$2t = -9$$
$$\boxed{t = -\frac{9}{2}}$$

DE FATO, $f\left(-\frac{9}{2}\right) = 0$

se $t \geqslant 0$, $f(t) = 3t-10$, $f(t)=0$

$$3t-10=0$$
$$3t = 10$$
$$\boxed{t = \frac{10}{3}}$$

DE FATO, $f\left(\frac{10}{3}\right) = 0$

Questão 3.

Seja g a função definida por: $g(x) = -2x^2 + 3x$

Determine e simplifique:

(a) $g(x+h)$

(b) $g(\frac{\sqrt{h}}{2})$

(c) $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$

a) $g(x+h) =$

$-2(x+h)^2 + 3(x+h) =$

$-2(x^2+2xh+h^2)+3x+3h =$

$\boxed{-2x^2 - 4xh - 2h^2 + 3x + 3h}$

b) $-2\left(\frac{\sqrt{h}}{2}\right)^2 + \frac{3\sqrt{h}}{2} = \frac{-2h}{4} + \frac{3\sqrt{h}}{2} = \boxed{\frac{-2h+6\sqrt{h}}{4}}$

c) $\dfrac{\cancel{-2x^2} - 4xh - 2h^2 \cancel{+3x} + 3h \cancel{-2x^2} \cancel{+3x}}{h} = \dfrac{-4xh - 2h^2 + 3h}{h} =$

$\boxed{-4x - 2h + 3}$

Questão 4.

Determine um número b tal que a função f seja igual à função g.
A função f tem como domínio o conjunto dos números positivos e é definida por $f(x) = 5x^2 - 7$; a função g tem domínio $]b, \infty[$ e é definida por $g(x) = 5x^2 - 7$.

PARA $f(x) = g(x)$ O DOMINIO TEM QUE SER IGUAL E TAMBÉM TODOS OS VALORES PARA ESTE DOMÍNIO;

ENTÃO FAZEMOS:

$$D(f) = D(g)$$

$$]0, \infty[\cong]b, \infty[$$

ASSIM: $\boxed{b = 0}$

Questão 5.

Abaixo apresenta-se uma fórmula para definir f sem, entretanto, especificar seu domínio. Determine o domínio de cada função f, supondo que esse domínio seja o conjunto de todos os números reais para os quais a fórmula faz sentido e produz um número real.

(a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-4}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-5}}{x-7}$

a) $3x - 4 \neq 0$

$3x \neq 4$

$\boxed{x \neq \frac{4}{3}}$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{4}{3}\}$

ou

$\boxed{]-\infty, \frac{4}{3}[\cup]\frac{4}{3}, \infty[}$

b) b.1) $x - 7 \neq 0$

b.2) $x - 5 \geq 0$

b.1) $x - 7 \neq 0$

$\boxed{x \neq 7}$

b.2) $x - 5 \geq 0$

$\boxed{x \geq 5}$

ENTÃO: $D(f) = \{x : x \geq 5, x \neq 7\}$ ou

$\boxed{[5, \infty[\cup]7, \infty[}$

(c) $f(x) = \sqrt{|\,x - 6\,| - 1}$

c) $|x-6| - 1 \geqslant 0$

$|x-6| \geqslant 1$

$-1 \geqslant x - 6 \geqslant 1$

$5 \geqslant x \geqslant 7$ ou $\boxed{]-\infty, 5] \cup [7, \infty[}$

Questão 6.

Seja h a função definida por: $h(t) =\mid t \mid +1$.
Determine a imagem de h cujo domínio é o conjunto indicado:

(a) $]1, 4]$

(b) $[-3, 5]$

(c) $]0, \infty[$

a) $\operatorname{Im}(h) = \boxed{]2, 5]}$

b) b.1) para $-3 \leq t < 0$: $h(t) = -t + 1$

b.2) para $0 \leq t \leq 5$: $h(t) = t + 1$

b.1) $x - 1 + 1 = -3.(-1) + 1 = 4$

$0.(-1) + 1 = 1$

$\operatorname{Im}_1 =]1, 4]$

b.2) $0 + 1 = 1$

$5 + 1 = 6$

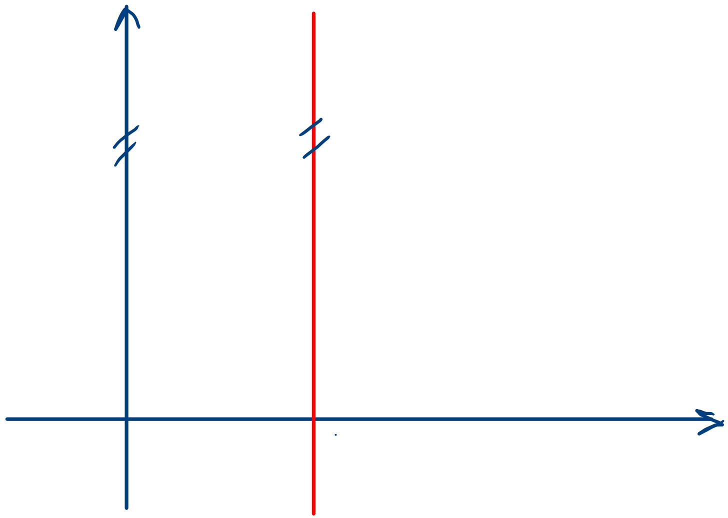
$\operatorname{Im}_2 = [1, 6]$ ENTÃO $\operatorname{Im}_1 \cup \operatorname{Im}_2 = \boxed{[1, 6]}$

c) Se $t > 0$, então: $h(t) = t + 1$

$$\boxed{Im(h) =]1, \infty[}$$

Questão 7.

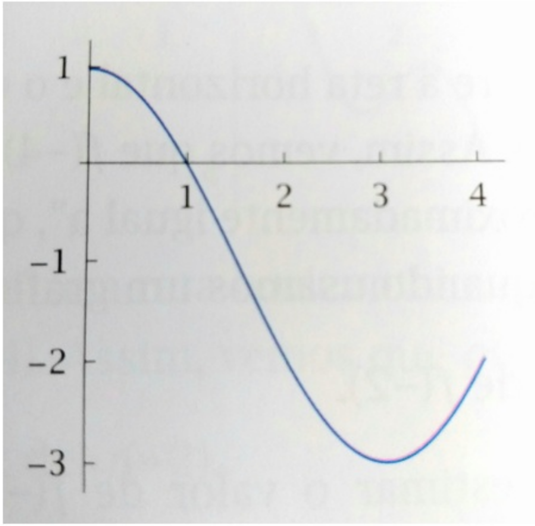
Dê um exemplo de uma reta no plano das coordenadas que não seja o gráfico de nenhuma função.



PORQUE $x_1 = x_2$ e $f(x_1) \neq f(x_2)$

Questão 8.

Seja o gráfico da função f:



a) $D(f) = [0, 4]$

b) $Im(f) = [-3, 1]$

(a) Qual parece ser o domínio de f?

(b) Qual parece ser a imagem de f?

Questão 9.

Verifique se as seguintes equações definem y como uma função de x

OBS: y é chamada variável dependente e x a variável independente:

(a) $y = x^2 + 4$

(b) $x = y^2 + 5$

(c) $y = \sqrt{x - 5}$

(d) $y = 5$

(e) $x^2 - y^2 = 36$

a) COMO $\forall x$, $\exists$ UM VALOR CORRESPONDENTE DE y, ESSA EQUAÇÃO DEFINE y COMO UMA FUNÇÃO DE x.

b) $\exists$ UM VALOR DE X PARA QUAL CORRESPONDE MAIS DE UM VALOR DE y

P. EX: $x = 6 \therefore y^2 = 1 \therefore \boxed{y = \pm 1}$

ENTÃO A EQUAÇÃO NÃO DEFINE y EM FUNÇÃO DE X.

c) O SÍMBOLO DE RADICAL DEFINE y COMO UMA RAIZ QUADRADA POSITIVA. ENTÃO, DEFINE y EM FUNÇÃO DE x.

d) SIM. POIS $x = 5$ SEMPRE.

e) NÃO DEFINE. P. EX: $X = 10 \therefore y^2 = 64 \therefore \boxed{y = \pm 8}$

Questão 10.

Determine o domínio para cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = 3x - x^3$

(b) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 9}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - 24x}$

(d) $f(x) = \sqrt{x + 5}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 12}$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x + 1}{x^3 - 8}}$

a) FUNÇÃO POLINOMIAL:

$D(f) = \mathbb{R}$

b) $x^2 - 9 \neq 0$

$x^2 \neq 9$

$\boxed{x \neq \pm 3}$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 3\}$

c) $x(x^2 + 2x - 24) \neq 0$

$x \cdot (x - 4) \cdot (x + 6) \neq 0$

<u>sse</u>: $x \neq 0$ ou $x \neq 4$ ou $x \neq -6$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, 4, -6\}$

d) $x + 5 \geq 0$

$\boxed{x \geq -5}$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$ ou $[-5, \infty[$

e) $x^2 - 8x + 12 \geq 0$

$(x-6)(x-2) \geq 0$

O PONTO CRÍTICO DE AMBOS OS FATORES É: 6 E 2

		2		6	
SINAL DE $(x-6)$	$-$		$-$		$+$
SINAL DE $(x-2)$	$-$		$+$		$+$
SINAL DO PRODUTO $(x-6)(x-2)$	$+$		$-$		$+$

$D(f) =$

$]-\infty, 2] \cup [6, \infty[$

f) RAIZ CÚBICA $\forall x \in \mathbb{R}$,

EXCETO SE $x^3 - 8 = 0$

ASSIM, $x^3 = 8$

$$\boxed{x = 2}$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$$

Questão 11.
Escreva o comprimento da circunferência C de um círculo como uma função da sua área.

CIRCUNFERÊNCIA $\Rightarrow$ $C = 2 \cdot \pi \cdot r$

ÁREA $\Rightarrow$ $A = \pi \cdot r^2$

ENTÃO, COLOCAMOS r EM FUNÇÃO DE A:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

AGORA COLOCAMOS C EM FUNÇÃO DE A:

$$\boxed{C = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}}}$$