A Matemática no Vestibular do IME

sergioℓn@ℓps.ufrj.br

Versão 19
Novembro de 2010

Apresentação

A origem deste material remonta a 1984/1985, quando fiz o vestibular do IME sem a preparação adequada e fui reprovado, como seria de se esperar. Em 2004, me deparei com a lista de discussão da Sociedade da OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática). Nesta lista, moderada pelo Prof. Nicolau C. Saldanha da PUC-RJ, algumas pessoas que sempre admirei colabora(va)m com curiosos, amadores e estudantes na solução de problemas de Matemática. Fiquei surpreso como alguns conhecidos matemáticos participavam ativamente e apaixonadamente das discussões. Observei também um grande interesse da comunidade pelos problemas de Matemática do vestibular do IME, principalmente os mais antigos. Foi neste contexto que resolvi dar minha contribuição, organizando este material com as provas antigas que tinha, disponibilizando-as para todos os interessados da lista.

A primeira versão, de abril/2004, incluía uns poucos enunciados, e mesmo assim a resposta inicial foi bastante positiva. Com esta motivação, novas versões vieram, corrigindo e complementando as versões anteriores. Em um dado momento, o material adquiriu vida própria, e passei a receber significativas contribuições (soluções alternativas, correções para algumas das minhas soluções e novos enunciados de provas) de diversos colaboradores. Em 2005, algumas versões intermediárias representaram grandes avanços na incorporação de soluções de diversas provas de Álgebra, numa primeira fase, e, posteriormente, de Geometria. Na versão 9, abril/2006, foi feita uma grande pesquisa junto aos arquivos do próprio IME, com a ajuda do sub-tenente Petrenko e sua equipe. Com isto, conseguimos complementar bastante o material. Infelizmente, porém, alguns anos ficaram faltando, o que tem sido resolvido nas versões mais recentes. Em maio/2007, na versão 11, o conteúdo do material retrocedeu até a década de 1940, devido ao material gentilmente fornecido pelo Cel. Hélios Malebranche da AMAN-RJ. Na versão 17, de agosto/2010, foi incluída uma discussão a respeito das origens do vestibular do IME. Nas versões 17–19, foram incluídas as provas de Desenho Técnico, Geometria Descritiva e Desenho Geométrico. Atualmente, contamos um total de 131 provas, sendo que 58 delas com soluções propostas.

Cabe dizer que este material não tem a pretensão de ensinar Matemática. É, talvez, um amplo apoio no exercício desta disciplina, para que se apliquem os conhecimentos adquiridos em bons livros e principalmente com a ajuda de bons professores.

Comentários em geral são muito bem-vindos. Você pode entrar em contato comigo pelo email sergioℓn@ℓps.ufrj.br. A versão mais atual deste material pode ser encontrada no endereço http://www.ℓps.ufrj.br/profs/sergioℓn (opção "IME Math Exams").

Meus agradecimentos a todos aqueles que têm colaborado com a elaboração deste material. Em especial, a Onan Neves, Claudio Gustavo, Caio S. Guimarães, Alessandro J. S. Dutra, Paulo Abreu, sub-tenente Petrenko (IME-RJ), Francisco Claudio Gomes, Cap. Armando Staib (AMAN-RJ) e Cel. Hélios Malebranche (AMAN-RJ) pelo envio dos enunciados de diversas provas.

Rio de Janeiro, 11 de novembro de 2010.
Sergio Lima Netto
sergioln@lps.ufrj.br

Créditos de Soluções

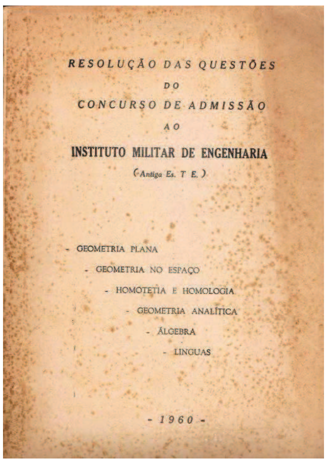
- **Em relação a algumas soluções, crédito é devido a:**
  - **Colégio Impacto: [1974/1975 (geometria), 10ª] [1975/1976 (geometria), 7ª], [1977/1978 (álgebra), 9ª], [1980/1981 (álgebra), 8ª] e [1982/1983 (álgebra), 6ª];**
  - **Prof. Nicolau C. Saldanha e Claudio Buffara (lema): [1980/1981 (álgebra), 9ª];**
  - **Paulo Santa Rita: [1982/1983 (geometria), 7ª] e [1986/1987 (geometria), 9ª];**
  - **Colégio Princesa Isabel: [1983/1984 (geometria), 2ª, item (b)] e [1983/1984 (geometria), 8ª, item (a)];**
  - **Jean-Pierre, Eric e Francisco Javier García Capitán, via Luís Lopes: [1985/1986 (geometria), 6ª, item (b)];**
  - **Guilherme Augusto: [1986/1987 (álgebra), 10ª, item (b)];**
  - **Caio S. Guimarães: [1994/1995, 9ª, (2ª resposta)] e [1995/1996, 4ª];**
  - **Eric D. Cariello: [1995/1996, 2ª];**
  - **Prof. Bruno Fraga: [2002/2003, 10ª];**
  - **Cesário J. Ferreira: [2003/2004, 2ª];**
  - **Colégio Poliedro: [2006/2007 (matemática), 7ª];**
  - **Algumas correções das soluções me foram apontadas por Caio S. Guimarães (diversas!), Douglas Ribeiro, Jair Nunes, Arthur Duarte, Estude+, Cesário J. Ferreira, Marcos V. P. Vieira e Gustavo Santos.**
- **Nesta versão 19, foram incluídas as provas de Desenho Técnio e Geometria Descritiva da década de 1950.**

Acerca das Origens do IME

Algumas pessoas questionam o fato deste material retroceder a 1944/1945 quando o IME só teria sido fundado em 1959. Para justificar o conteúdo aqui apresentado, fiz uma breve pesquisa acerca das origens do ensino de engenharia no Brasil e descobri uma literatura muito interessante e apaixonada [1]–[4]. Uma sinopse das informações contidas nestas fontes nos leva ao seguinte desenvolvimento histórico:

- Em 1919, um regulamento militar estabeleceu a criação da Escola de Engenharia Militar, o que só foi efetivamente consolidado após novo decreto de 31 de dezembro de 1928. Isto causou um interstício na formação de engenheiros militares no Brasil ao longo de todo este período. O primeiro comandante desta instituição, o General-de-Brigada José Victoriano Aranha da Silva, só assumiu o comando em 11 de agosto de 1930, sendo a primeira turma de alunos apresentada em 21 de agosto de 1930.
- A partir de 1º de janeiro de 1934, a Escola de Engenharia Militar passou a se chamar Escola Técnica do Exército. Em 1949, por influência americana, foi criado o Instituto Militar de Tecnologia, que atuou em paralelo com a Escola Técnica do Exército.
- Por lei de 4 de novembro de 1959, da fusão da Escola Técnica do Exército e do Instituto Militar de Tecnologia, surgiu o Instituto Militar de Engenharia.

Assim, o ano formal de fundação do IME é efetivamente o de 1959. Porém, segundo [4], o IME celebra seu aniversário baseado na data de início de operação da Escola de Engenharia Militar, em 11 de agosto de 1930. Podemos citar ainda dois outros indícios da importância desta data para o IME: (a) a referência [5], editada em 1960 pelo próprio IME, contendo as soluções das provas de Matemática de seu vestibular no período de 1945 a 1960; (b) celebração de 50 anos de existência do IME nas capas das provas de seu vestibular de 1980/1981.



Estes aspectos adicionais, oficialmente considerados pelo próprio IME, apontam suas origens para o ano de 1930 e justificam o conteúdo anterior a 1959 no presente material.

Referências

[1] A. Pirassinunga, *O Ensino Militar no Brasil (colônia)*, Rio de Janeiro, Biblioteca do Exército, 1958.

[2] P. Pardal, *Brasil, 1972: Início do Ensino da Engenharia Civil e da Escola de Engenharia da UFRJ,* Rio de Janeiro, Odebrecht, 1985.

[3] P. Pardal, *140 Anos de Doutorado e 75 de Livre-Docência no Ensino de Engenharia no Brasil,* Rio de Janeiro, Escola de Engenharia da UFRJ, 1986.

[4] L. C. de Lucena, *Um Breve Histórico do IME*, Rio de Janeiro, IME, 2005.

[5] *Resolução das Questões do Concurso de Admissão ao Instituto Militar de Engenharia (Antiga Es. T. E.)*, Rio de Janeiro, IME, 1960.

Enunciados

	Álgebra Cálculo	Geometria Trigonometria	Desenho Descritiva
1944/1945	X	X	
1945/1946	X	X	
1946/1947	X	X	
1947/1948	X	X	
1948/1949	X	X	
1949/1950	X	X	
1950/1951	X	X	
1951/1952	X	X	
1952/1953	X	X	
1953/1954	XX[1]	X	X
1954/1955	XX[1]	X	X
1955/1956	X	X	
1956/1957	XX[1]	X	X
1957/1958	X	X	
1958/1959	X	X	
1959/1960	XX[1]	X	XX[2]
1960/1961	-	-	
1961/1962	-	-	
1962/1963	-	-	
1963/1964	X	XX[3]	
1964/1965	X	XX[3]	X
1965/1966	X	X	X
1966/1967	X	X	X
1967/1968	X	X	X
1968/1969	X	X	X
1969/1970	X	X	X
1970/1971	X	X	X
1971/1972	X	X	X
1972/1973	X	X	
1973/1974	X	X	
1974/1975	-	**X**	
1975/1976	**X**	**X**	
1976/1977	**X**	**X**	
1977/1978	**X**	**X**	
1978/1979	**X**	**X**	
1979/1980	**X**	**X**	
1980/1981	**X**	**X**	
1981/1982	**X**	**X**	
1982/1983	**X**	**X**	
1983/1984	**X**	**X**	
1984/1985	**X**	**X**	
1985/1986	**X**	**X**	
1986/1987	**X**	**X**	
1987/1988	**X**	**X**	
1988/1989	**X**	**X**	
1989/1990	**X**	**X**	
1990/1991	**X**	**X**	

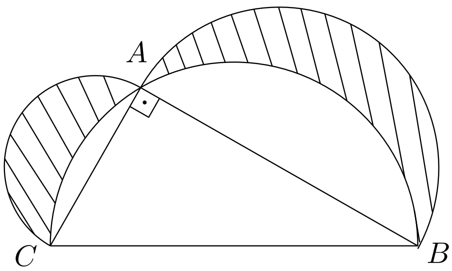
	Matemática
1991/1992	**X**
1992/1993	**X**
1993/1994	**X**
1994/1995	**X**
1995/1996	**X**
1996/1997	**X**
1997/1998	**X**
1998/1999	**X**
1999/2000	**X**
2000/2001	**X**
2001/2002	**X**
2002/2003	**X**
2003/2004	**X**
2004/2005	**X**
2005/2006	**X**

	Objetiva	Matemática
2006/2007	**X**	**X**
2007/2008	**X**	**X**
2008/2009	**X**	**X**
2009/2010	**X**	**X**
2010/2011	**X**	**X**

(*1): As provas de Álgebra e Cálculo foram realizadas separadamente.
(*2): As provas de Desenho Técnico e Geometria Descritiva foram realizadas separadamente.
(*3): As provas de Geometria e Trigonometria foram realizadas separadamente.

IME 2010/2011 - Objetiva

1ª Questão [Valor: 0,25]
Seja o triângulo retângulo ABC com os catetos medindo 3 cm e 4 cm. Os diâmetros dos três semicírculos, traçados na figura abaixo, coincidem com os lados do triângulo ABC. A soma das áreas hachuradas, em cm^2, é:



(A) 6

(B) 8

(C) 10

(D) 12

(E) 14

2ª Questão [Valor: 0,25]
O valor de x que satisfaz a equação $\text{sen}(\text{arccotg}\,(1+x)) = \cos(\text{arctg}\,(x))$:

(A) $\frac{3}{2}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $-\frac{1}{2}$

(E) $-\frac{3}{2}$

3ª Questão [Valor: 0,25]
A base de uma pirâmide é um retângulo de área S. Sabe-se que duas de suas faces laterais são perpendiculares ao plano da base. As outras duas faces formam ângulos de 30° e 60° com a base. O volume da pirâmide é:

(A) $\frac{S\sqrt{S}}{3}$

(B) $\frac{S\sqrt{S}}{6}$

(C) $\frac{2S\sqrt{S}}{3}$

(D) $\frac{2S\sqrt{S}}{5}$

(E) $\frac{2S^2}{3}$

4ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam $x_1, \ldots, x_n$ os n primeiros termos de uma progressão aritmética, O primeiro termo e a razão desta progressão são os números reais x_1 e r, respectivamente. O determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix} \text{ é :}$$

(A) $x_1^n.r^n$
(B) $x_1^n.r$
(C) $x_1^n.r^{n-1}$
(D) $x_1.r^n$
(E) $x_1.r^{n-1}$

5ª Questão [Valor: 0,25]
Uma reta, com coeficiente angular a_1, passa pelo ponto $(0, -1)$. Uma outra reta, com coeficiente angular a_2, passa pelo ponto $(0, 1)$. Sabe-se que $a_1^2 + a_2^2 = 2$. O lugar geométrico percorrido pelo ponto de interseção das duas retas é uma:

(A) hipérbole de centro $(0, 0)$ e retas diretrizes $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
(B) circunferência de centro (a_1, a_2) e raio $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
(C) hipérbole de centro $(0, 0)$ e retas diretrizes $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
(D) elipse de centro $(0, 0)$ e retas diretrizes $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
(E) elipse de centro (a_1, a_2) e retas diretrizes $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

6ª Questão [Valor: 0,25]
O valor de y real positivo na equação $(5y)^{\log_x 5} - (7y)^{\log_x 7} = 0$, onde x é um número real maior do que 1, é:

(A) 70
(B) 35
(C) 1
(D) $\frac{1}{35}$
(E) $\frac{1}{70}$

7ª Questão [Valor: 0,25]
O pipoqueiro cobra o valor de R$ 1,00 por saco de pipoca. Ele começa seu trabalho sem qualquer dinheiro para troco. Existem oito pessoas na fila do pipoqueiro, das quais quatro têm uma moeda de R$ 1,00 e quatro uma nota de R$ 2,00. Supondo uma arrumação aleatória para a fila formada pelas oito pessoas e que cada uma comprará exatamente um saco de pipoca, a probabilidade de que o pipoqueiro tenha troco para as quatro pessoas que pagarão com a nota de R$ 2,00 é:

(A) $\frac{1}{8}$
(B) $\frac{1}{5}$
(C) $\frac{1}{4}$
(D) $\frac{1}{3}$
(E) $\frac{1}{2}$

8ª Questão [Valor: 0,25]
O valor de $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\frac{1}{2}$ é:

(A) -1
(B) $-0{,}5$
(C) 0
(D) 0,5
(E) 1

9ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam x e y números reais. Assinale a alternativa correta:

(A) Todo x e y satisfaz $|x|+|y|\leq\sqrt{2}\,|x^2+y^2|$
(B) Existe x e y que não satisfaz $|x+y|\leq||x|+|y||$
(C) Todo x e y satisfaz $|x|+|y|\leq\sqrt{2}\sqrt{|x^2|+|y^2|}$
(D) Todo x e y satisfaz $|x-y|\leq|x+y|$
(E) Não existe x e y que não satisfaz $|x|+|y|\leq\sqrt{3}|x^2+y^2|$

10ª Questão [Valor: 0,25]
Em relação à teoria dos conjuntos, considere as seguintes afirmativas relacionadas aos conjuntos A, B e C:

I. Se $A\in B$ e $B\subseteq C$ então $A\in C$.

II. Se $A\subseteq B$ e $B\in C$ então $A\in C$.

III. Se $A\subseteq B$ e $B\in C$ então $A\subseteq C$.

Estão corretas:

(A) nenhuma das alternativas
(B) somente a alternativa I
(C) somente as alternativas I e II
(D) somente as alternativas II e III
(E) todas as alternativas

11ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $p(x)$ uma função polinomial satisfazendo a relação $p(x)p\left(\frac{1}{x}\right)=p(x)+p\left(\frac{1}{x}\right)$. Sabendo que $p(3)=28$, o valor de $p(4)$ é:

(A) 10
(B) 30
(C) 45
(D) 55
(E) 65

12ª Questão [Valor: 0,25]
Uma progressão aritmética $\{a_n\}$, onde $n\in\mathbb{N}^*$, tem $a_1>0$ e $3a_8=5a_{13}$. Se S_n é a soma dos n primeiros termos desta progressão, o valor de n para que S_n seja máxima é:

(A) 10
(B) 11
(C) 19
(D) 20
(E) 21

13ª Questão [Valor: 0,25]
Um trem conduzindo 4 homens e 6 mulheres passa por seis estações. Sabe-se que cada um destes passageiros irá embarcar em qualquer uma das seis estações e que não existe distinção dentre os passageiros de mesmo sexo. O número de possibilidades distintas de desembarque destes passageiros é:

(A) 1.287
(B) 14.112
(C) 44.200
(D) 58.212
(E) 62.822

14ª Questão [Valor: 0,25]
Considere o sistema de equações lineares representado abaixo:

$$\begin{pmatrix}1&3&0&2&1&0\\0&2&0&3&0&0\\1&5&0&0&0&0\\3&1&2&0&0&0\\4&0&0&0&0&0\\2&0&0&1&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\11\\7\\9\\8\\13\end{pmatrix}$$

Os valores de a e d são, respectivamente:

(A) 1 e 2
(B) 2 e 3
(C) 3 e 2
(D) 2 e 2
(E) 3 e 1

15ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $f(x)=a\,\mathrm{sen}\,x+b\sqrt[3]{x}+4$, onde a e b são números reais diferentes de zero. Sabendo que $f(\log_{10}(\log_3 10))=5$, o valor de $f(\log_{10}(\log_{10}3))$ é:

(A) 5
(B) 3
(C) 0
(D) -3
(E) -5

IME 2010/2011 - Matemática

1ª Questão [Valor: 1,0]
A base de um prisma reto $ABCA_1B_1C_1$ é um triângulo com o lado AB igual ao lado AC. O valor do segmento CD vale x, onde D é o ponto médio da aresta lateral AA_1. Sabendo que α é o ângulo ACB e β é o ângulo DCA, determine a área lateral do prisma em função de x, α e β.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o valor da excentricidade da cônica dada pela equação $x^2 - 10\sqrt{3}\,xy + 11y^2 + 16 = 0$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam $z_1 = 10 + 6i$ e $z_2 = 4 + 6i$, onde i é a unidade imaginária, e z um número complexo tal que $\arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = \frac{\pi}{4}$, determine o módulo do número complexo $(z - 7 - 9i)$.
Obs.: $\arg(w)$ é o argumento do número complexo w.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Os números m, 22.680 e n fazem parte, nessa ordem, de uma progressão geométrica crescente com razão dada por q. Sabe-se que:

- existem, pelo menos, dois elementos entre m e 22.680;
- n é o sexto termo dessa progressão geométrica;
- $n \leq 180.000$.

Determine os possíveis valores de m e n, sabendo que m, n e q são números naturais positivos.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Seja ABC um triângulo onde α, β e γ são os ângulos internos dos vértices A, B e C, respectivamente. Esse triângulo está inscrito em um círculo de raio unitário. As bissetrizes internas desses ângulos interceptam esse círculo nos pontos A_1, B_1 e C_1, respectivamente. Determine o valor da expressão

$$\frac{\overline{AA_1}\cos\frac{\alpha}{2} + \overline{BB_1}\cos\frac{\beta}{2} + \overline{CC_1}\cos\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma}.$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a equação $z^2 + \dfrac{9z^2}{(z+3)^2} = -5$, onde z pertence ao conjunto dos números complexos.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja x um número inteiro positivo menor ou igual a 20.000. Sabe-se que $2^x - x^2$ é divisível por 7. Determine o número de possíveis valores de x.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Uma pessoa lança um dado n vezes. Determine, em função de n, a probabilidade de que a sequência de resultados obtidos pelos lançamentos dos dados se inicie por 4 e que, em todos eles, a partir do segundo, o resultado seja maior ou igual ao lançamento anterior.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam o polinômio $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ e os conjuntos $A = \{p(k) \,/\, k \in \mathbb{N} \text{ e } k \leq 1999\}$, $B = \{r^2 + 1 \,/\, r \in \mathbb{N}\}$ e $C = \{q^2 + 2 \,/\, q \in \mathbb{N}\}$. Sabe-se que $y = n(A \cap B) - n(A \cap C)$, onde $n(E)$ é o número de elementos do conjunto E. Determine o valor de y.
Obs.: $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que o determinante abaixo apresenta valor menor ou igual a 16 para todos valores de a, b e c, pertencentes ao conjunto dos números reais, que satisfazem a equação $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

IME 2009/2010 - Objetiva

1ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam r, s, t e v números inteiros positivos tais que $\frac{r}{s} < \frac{t}{v}$. Considere as seguintes relações:

i. $\frac{(r+s)}{s} < \frac{(t+v)}{v}$ ii. $\frac{r}{(r+s)} < \frac{t}{(t+v)}$

iii. $\frac{r}{s} < \frac{(r+t)}{(s+v)}$ iv. $\frac{(r+t)}{s} < \frac{(r+t)}{v}$

O número total de relações que estão corretas é:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

2ª Questão [Valor: 0,25]
Considere o determinante de uma matriz de ordem n definido por

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Sabendo que $\Delta_1 = 1$, o valor de Δ_{10} é:

(A) 59049
(B) 48725
(C) 29524
(D) 9841
(E) 364

3ª Questão [Valor: 0,25]
O valor da expressão $y = \text{sen}\left[\arcsin\left(\frac{1}{a^2-1}\right) + \arccos\left(\frac{1}{a^2-1}\right)\right]$, onde a é um número real e $a \in (-1, 0)$, é:

(A) -1
(B) 0
(C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(E) 1

4ª Questão [Valor: 0,25]
Seja ABC um triângulo de lados AB, BC e AC iguais a 26, 28 e 18, respectivamente. Considere o círculo de centro O inscrito nesse triângulo. A distância AO vale:

(A) $\frac{\sqrt{104}}{6}$
(B) $\frac{\sqrt{104}}{3}$
(C) $\frac{2\sqrt{104}}{3}$
(D) $\sqrt{104}$
(E) $3\sqrt{104}$

5ª Questão [Valor: 0,25]
Considere o sistema $\begin{cases} xy + x - y = 5 \\ x^3y^2 - x^2y^3 - 2x^2y + 2xy^2 = 6 \end{cases}$, onde x e y são números inteiros. O valor de $x^3 + y^2 + x^2 + y$ é:

(A) 14
(B) 18
(C) 20
(D) 32
(E) 38

6ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + 79^2$. O valor de S satisfaz:

(A) $S < 7 \times 10^4$
(B) $7 \times 10^4 \leq S < 8 \times 10^4$
(C) $8 \times 10^4 \leq S < 9 \times 10^4$
(D) $9 \times 10^4 \leq S < 10^5$
(E) $S \geq 10^5$

7ª Questão [Valor: 0,25]
Seja o polinômio $p(x) = x^3 + (\ln a)x + e^b$, onde a e b são números reais positivos diferentes de zero. A soma dos cubos das raízes de $p(x)$ depende

(A) apenas de a e é positiva.
(B) de a e b e é negativa.
(C) apenas de b e é positiva.
(D) apenas de b e é negativa.
(E) de a e b e é positiva.

Obs: e representa a base do logaritmo neperiano e ln a função logaritmo neperiano.

8ª Questão [Valor: 0,25]
A quantidade k de números naturais positivos, menores do que 1000, que não são divisíveis por 6 ou 8, satisfaz a condição:

(A) $k < 720$
(B) $720 \leq k < 750$
(C) $750 \leq k < 780$
(D) $780 \leq k < 810$
(E) $k \geq 810$

9ª Questão [Valor: 0,25]
Uma hipérbole de excentricidade $\sqrt{2}$ tem centro na origem e passa pelo ponto $(\sqrt{5}, 1)$. A equação de uma reta tangente a esta hipérbole e paralela a $y = 2x$ é:

(A) $\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 6$
(B) $y = -2x + 3\sqrt{3}$
(C) $3y = 6x + 2\sqrt{3}$
(D) $\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 4$
(E) $y = 2x + \sqrt{3}$

10ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A alternativa que apresenta a condição necessária para que se $f(g(x)) = f(h(x))$, então $g(x) = h(x)$ é:

(A) $f(x) = x$
(B) $f(f(x)) = f(x)$
(C) f é bijetora
(D) f é sobrejetora
(E) f é injetora

11ª Questão [Valor: 0,25]
Considere o sistema abaixo, onde x_1, x_2, x_3 e Z pertencem ao conjunto dos números complexos.

$$\begin{cases} (1+i)x_1 - ix_2 + ix_3 = 0 \\ 2ix_1 - x_2 - x_3 = Z \\ (2i-2)x_1 + ix_2 - ix_3 = 0 \end{cases}$$

O argumento de Z, em graus, para que x_3 seja um número real positivo é:

(A) 0º
(B) 45º
(C) 90º
(D) 135º
(E) 180º

12ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $f(x) = |3 - \log(x)|$, $x \in \mathbb{R}$. Sendo n um número inteiro positivo, a desigualdade $\left|\frac{f(x)}{4}\right| + \left|\frac{2f(x)}{12}\right| + \left|\frac{4f(x)}{36}\right| + \ldots + \left|\frac{2^{n-3}f(x)}{3^{n-1}}\right| + \ldots \leq \frac{9}{4}$ somente é possível se:

(A) $0 \leq x \leq 10^6$
(B) $10^{-6} \leq x \leq 10^8$
(C) $10^3 \leq x \leq 10^6$
(D) $10^0 \leq x \leq 10^6$
(E) $10^{-6} \leq x \leq 10^6$

Obs: log representa a função logarítmica na base 10.

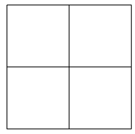
13ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam ABC um triângulo equilátero de lado 2 cm e r uma reta situada no seu plano, distante 3 cm de seu baricentro. Calcule a área da superfície gerada pela rotação deste triângulo em torno da reta r.

(A) 8π cm^2
(B) 9π cm^2
(C) 12π cm^2
(D) 16π cm^2
(E) 36π cm^2

14ª Questão [Valor: 0,25]
Seja M um ponto de uma elipse com centro O e focos F e F'. A reta r é tangente à elipse no ponto M e s é uma reta, que passa por O, paralela a r. As retas suportes dos raios vetores MF e MF' interceptam a reta s em H e H', respectivamente. Sabendo que o segmento FH mede 2 cm, o comprimento $F'H'$ é:

(A) 0,5 cm
(B) 1,0 cm
(C) 1,5 cm
(D) 2,0 cm
(E) 3,0 cm

15ª Questão [Valor: 0,25]



Cada um dos quadrados menores da figura acima é pintado aleatoriamente de verde, azul, amarelo ou vermelho. Qual é a probabilidade de que ao menos dois quadrados, que possuam um lado em comum, sejam pintados da mesma cor?

(A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{5}{8}$
(C) $\frac{7}{16}$
(D) $\frac{23}{32}$
(E) $\frac{43}{64}$

IME 2009/2010 - Matemática

1ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam os conjuntos P_1, P_2, S_1 e S_2 tais que $(P_2 \cap S_1) \subset P_1$, $(P_1 \cap S_2) \subset P_2$ e $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$. Demonstre que $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Três dados iguais, honestos e com seis faces numeradas de um a seis são lançados simultaneamente. Determine a probabilidade de que a soma dos resultados de dois quaisquer deles ser igual ao resultado do terceiro dado.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere as hipérboles que passam pelos pontos $(-4, 2)$ e $(-1, -1)$ e apresentam diretriz na reta $y = -4$. Determine a equação do lugar geométrico formado pelos focos dessas hipérboles, associados a esta diretriz, e represente o mesmo no plano cartesiano.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja x o valor do maior lado de um paralelogramo $ABCD$. A diagonal AC divide $\hat{A}$ em dois ângulos iguais a 30º e 15º. A projeção de cada um dos quatro vértices sobre a reta suporte da diagonal que não o contém forma o quadrilátero $A'B'C'D'$. Calcule o perímetro de $A'B'C'D'$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
A área da superfície lateral de uma pirâmide quadrangular regular $SABCD$ é duas vezes maior do que a área de sua base $ABCD$. Nas faces SAD e SDC traçam-se as medianas AQ e DP. Calcule a ângulo entre estas medianas.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Demonstre que a matriz

$$\begin{pmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{pmatrix},$$

onde $x,\ y,\ z \in \mathbb{N}$, pode ser escrita como o quadrado de uma matriz simétrica, com traço igual a zero, cujos elementos pertencem ao conjunto dos números naturais.
Obs: Traço de uma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere o conjunto de números complexos $E = (a + b\omega)$, onde a e b são inteiros e $\omega = \operatorname{cis}(2\pi/3)$. Seja o subconjunto $U = \{\alpha \in E / E\beta \in E$ no qual $\alpha\beta = 1\}$. Determine:

(a) Os elementos do conjunto U.

(b) Dois elementos pertencentes ao conjunto $Y = E - U$ tais que o produto seja um número primo.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja a equação $p^n + 144 = q^2$, onde n e q são números inteiros positivos e p é um número primo. Determine os possíveis valores de n, p e q.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Seja o sistema $\begin{cases} \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y-z) = a \\ \operatorname{tg}(y)\operatorname{tg}(z-x) = b \\ \operatorname{tg}(z)\operatorname{tg}(x-y) = c \end{cases}$, onde a, b, c, x, y, $z \in \mathbb{R}$. Determine as condições que a, b e c devem satisfazer para que o sistema admita pelo menos uma solução.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a seqüência:

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}},$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}}},$$

$$a_3 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}}}}, \ldots$$

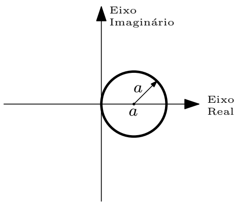
Determine o produto dos 20 primeiros termos desta seqüência.

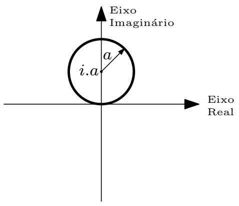
IME 2008/2009 - Objetiva

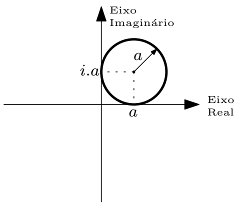
1ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam dois conjuntos, X e Y, e a operação Δ, definida por $X\Delta Y = (X-Y)\cup(Y-X)$. Pode-se afirmar que

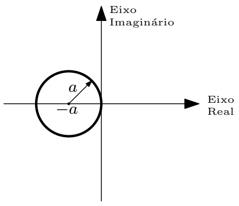
(A) $(X\Delta Y)\cap(X\cap Y)=\varnothing$
(B) $(X\Delta Y)\cap(X-Y)=\varnothing$
(C) $(X\Delta Y)\cap(Y-X)=\varnothing$
(D) $(X\Delta Y)\cup(X-Y)=X$
(E) $(X\Delta Y)\cup(Y-X)=X$

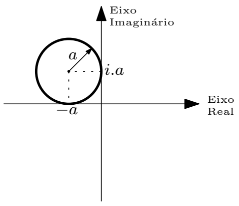
2ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $z=\rho.e^{i\theta}$ um número complexo onde ρ e θ são, respectivamente, o módulo e o argumento de z e i é a unidade imaginária. Sabe-se que $\rho = 2a\cos\theta$, onde a é uma constante real positiva. A representação de z no plano complexo é

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


3ª Questão [Valor: 0,25]
Seja A uma matriz quadrada inversível de ordem 4 tal que o resultado da soma (A^4+3A^3) é uma matriz de elementos nulos. O valor do determinante de A é

(A) -81
(B) -27
(C) -3
(D) 27
(E) 81

4ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam $\log 5 = m$, $\log 2 = p$ e $N = 125\sqrt[3]{\dfrac{1562{,}5}{\sqrt[5]{2}}}$. O valor de $\log_5 N$, em função de m e p, é

(A) $\dfrac{75m+6p}{15m}$
(B) $\dfrac{70m-6p}{15m}$
(C) $\dfrac{75m-6p}{15m}$
(D) $\dfrac{70m+6p}{15m}$
(E) $\dfrac{70m+6p}{15p}$

5ª Questão [Valor: 0,25]
Sabe-se que $y = \dfrac{2+2^{\cos 2x}}{2(1+4^{\operatorname{sen}^2 x})}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Uma outra expressão para y é

(A) 2
(B) $2^{-\operatorname{sen}^2 x}$
(C) $2^{-2\operatorname{sen}^2 x}$
(D) $2^{-\cos^2 x}$
(E) $2^{-2\cos^2 x}$

6ª Questão [Valor: 0,25]
Um triângulo ABC apresenta lados a, b e c. Sabendo que $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são, respectivamente, os ângulos opostos aos lados b e c, o valor de $\dfrac{\operatorname{tg}\hat{B}}{\operatorname{tg}\hat{C}}$ é

(A) $\dfrac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2-c^2}\dfrac{c}{b}$
(B) $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}$
(C) $\dfrac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2-c^2}$
(D) $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}\dfrac{c}{b}$
(E) $\dfrac{b}{c}$

7ª Questão [Valor: 0,25]
Os centros das faces de um tetraedro regular são os vértices de um tetraedro interno. Se a razão entre os volumes dos tetraedros interno e original vale $\frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros positivos primos entre si, o valor de $m+n$ é

(A) 20

(B) 24

(C) 28

(D) 30

(E) 32

8ª Questão [Valor: 0,25]
Os raios dos círculos circunscritos aos triângulos ABD e ACD de um losango $ABCD$ são, respectivamente, $\frac{25}{2}$ e 25. A área do losango $ABCD$ é

(A) 100

(B) 200

(C) 300

(D) 400

(E) 500

9ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $A(a,b)$ o ponto da cônica $x^2 - y^2 = 27$ mais próximo da reta $4x - 2y + 3 = 0$. O valor de $a + b$ é

(A) 9

(B) 4

(C) 0

(D) -4

(E) -9

10ª Questão [Valor: 0,25]
Seja o sistema de equações lineares dadas por

$$\begin{cases} 6y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10 \\ y_1 + 6y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 20 \\ y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + y_5 = 40 \\ y_1 + y_2 + y_3 + 6y_4 + y_5 = 80 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 6y_5 = 160 \end{cases}.$$

O valor de $7y_1 + 3y_5$ é

(A) 12

(B) 24

(C) 36

(D) 48

(E) 60

11ª Questão [Valor: 0,25]
Uma urna contém cinco bolas numeradas de 1 a 5. Retiram-se, **com reposição**, 3 bolas desta urna, sendo α o número da primeira bola, β o da segunda e λ o da terceira. Dada a equação quadrática $\alpha x^2 + \beta x + \lambda = 0$, a alternativa que expressa a probabilidade das raízes desta equação serem reais é

(A) $\frac{19}{125}$

(B) $\frac{23}{60}$

(C) $\frac{26}{125}$

(D) $\frac{26}{60}$

(E) $\frac{25}{60}$

12ª Questão [Valor: 0,25]
É dada uma PA de razão r. Sabe-se que o quadrado de qualquer número par x, $x > 2$, pode ser expresso como a soma dos n primeiros termos desta PA, onde n é igual à metade de x. O valor de r é
(A) 2
(B) 4
(C) 8
(D) 10
(E) 16

13ª Questão [Valor: 0,25]
Se as curvas $y = x^2 + ax + b$ e $x = y^2 + cy + d$ se interceptam em quatro pontos distintos, a soma das ordenadas destes quatro pontos
(A) depende apenas do valor de c.
(B) depende apenas do valor de a.
(C) depende apenas dos valores de a e c.
(D) depende apenas dos valores de a e b.
(E) depende dos valores de a, b, c e d.

14ª Questão [Valor: 0,25]
O par ordenado (x, y), com x e y inteiros positivos, satisfaz a equação $5x^2 + 2y^2 = 11(xy - 11)$. O valor de $x + y$ é
(A) 160
(B) 122
(C) 81
(D) 41
(E) 11

15ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam f uma função bijetora de uma variável real, definida para todo conjunto dos números reais, e as relações h e g, definidas por: $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \to (x^2, x - f(y))$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \to (x^3, x - f(y))$. Pode-se afirmar que
(A) h e g são sobrejetoras.
(B) h é injetora e g sobrejetora.
(C) h e g não são bijetoras.
(D) h e g não são sobrejetoras.
(E) h não é injetora e g é bijetora.

IME 2008/2009 - Matemática

1ª Questão [Valor: 1,0]
Sabe-se que: $a = [a] + \{a\}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, onde $[a]$ é a parte inteira de a.

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 4{,}2 \\ y + [z] + \{x\} = 3{,}6 \\ z + [x] + \{y\} = 2 \end{cases}, \text{ com } x, y, \text{ e } z \in \mathbb{R}$$

Determine o valor de $x - y + z$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Um triângulo isósceles possui seus vértices da base sobre o eixo das abscissas e o terceiro vértice, B, sobre o eixo positivo das ordenadas. Sabe-se que a base mede b e seu ângulo oposto $\hat{B} = 120^\circ$. Considere o lugar geométrico dos pontos cujo quadrado da distância à reta suporte da base do triângulo é igual ao produto das distâncias às outras duas retas que suportam os dois outros lados. Determine a(s) equação(ões) do lugar geométrico e identifique a(s) curva(s) descrita(s).

3ª Questão [Valor: 1,0]
Sabe-se que $z_1\overline{z_2} = \dfrac{z_3}{z_4}$ e $|z_3 + z_4| - |z_3 - z_4| = 0$, sendo z_1, z_2, z_3 e z_4 números complexos diferentes de zero. Prove que z_1 e z_2 são ortogonais.
Obs: Números complexos ortogonais são aqueles cujas representações gráficas são perpendiculares entre si e $\overline{z}$ é o número complexo conjugado de z.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a função $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, com as seguintes características:
$F(0,0) = 1$;
$F(n, m+1) = q.F(n,m)$, onde q é um número real diferente de zero.
$F(n+1, 0) = r + F(n,0)$, onde r é um número real diferente de zero.
Determine o valor de $\displaystyle\sum_{i=0}^{2009} F(i,i)$, $i \in \mathbb{N}$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Seja G o ponto de interseção das medianas de um triângulo ABC com área S. Considere os pontos A', B' e C' obtidos por uma rotação de 180° dos pontos A, B e C, respectivamente, em torno de G. Determine, em função de S, a área formada pela união das regiões delimitadas pelos triângulos ABC e $A'B'C'$.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a seguinte inequação, para $0 \le x < 2\pi$:

$$\frac{3\,\text{sen}^2 x + 2\cos^2 x + 4\,\text{sen}\, x - (1+4\sqrt{2})\,\text{sen}\, x \cos x + 4\cos x - (2+2\sqrt{2})}{2\,\text{sen}\, x - 2\sqrt{2}\,\text{sen}\, x\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}} > 2$$

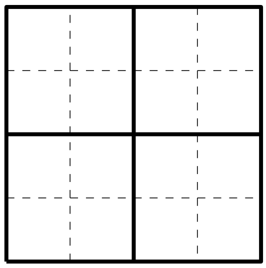
7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um cubo de base $ABCD$ com aresta a. No interior do cubo, sobre a diagonal principal, marca-se o ponto V, formando-se a pirâmide $VABCD$. Determine os possíveis valores da altura da pirâmide $VABCD$, em função de a, sabendo que a soma dos quadrados das arestas laterais da pirâmide é igual a ka^2, sendo k um número primo.
Obs: As arestas laterais da pirâmide são VA, VB, VC e VD.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Dada uma matriz quadrada A de ordem n, definida da seguinte forma:

- os elementos da linha i da coluna n são da forma $a_{in} = -\begin{pmatrix} n \\ n-i+1 \end{pmatrix}$;
- os elementos imediatamente abaixo da diagonal principal são unitários, isto é, $a_{ij} = 1$ para $i - j = 1$;
- todos os demais elementos são nulos.

Sendo I a matriz identidade de ordem n e $\det(M)$ o determinante de uma matriz M, encontre as raízes da equação $\det(x.I - A) = 0$.

9ª Questão [Valor: 1,0]
A figura abaixo é composta de 16 quadrados menores. De quantas formas é possível preencher estes quadrados com os números 1, 2, 3 e 4, de modo que um número não pode aparecer 2 vezes em:
- uma mesma linha.
- uma mesma coluna.
- cada um dos quatro quadrados demarcados pelas linhas contínuas.



10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja a uma constante real positiva. Resolva a equação

$$\sqrt{a}\sqrt{a + \sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{3a}\sqrt{a - \sqrt{a^2 - x^2}} = 2\sqrt{2}x,$$

para $x \in \mathbb{R}$ e $0 \le x \le a$.

IME 2007/2008 - Objetiva

1ª Questão [Valor: 0,25]
De quantas maneiras n bolas idênticas podem ser distribuídas em três cestos de cores verde, amarelo e azul?

(A) $\binom{n+2}{2}$

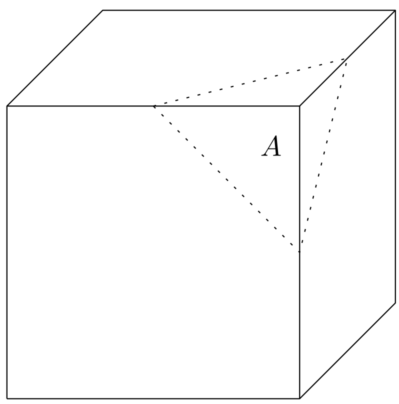
(B) $\binom{n}{3}$

(C) $\frac{n!}{3!}$

(D) $(n-3)!$

(E) 3^n

2ª Questão [Valor: 0,25]
Um plano corta um cubo com aresta de comprimento 1 passando pelo ponto médio de três arestas concorrentes no vértice A e formando uma pirâmide, conforme a figura a seguir. Este processo é repetido para todos os vértices. As pirâmides obtidas são agrupadas formando um octaedro cuja área da superfície externa é igual a:



(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $\sqrt{3}$

(C) 1

(D) 2

(E) $2\sqrt{2}$

3ª Questão [Valor: 0,25]
Na figura seguinte $ABCD$ é um quadrado de lado 1 e BCE é um triângulo equilátero. O valor de $\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ é igual a:

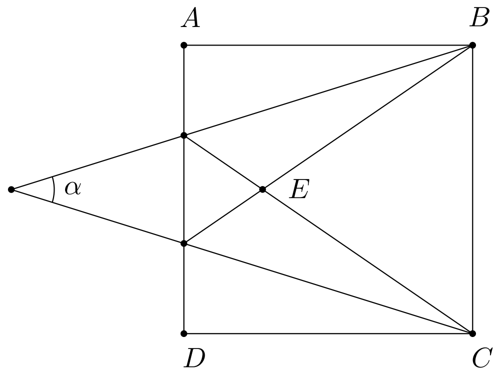
(A) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $2-\frac{\sqrt{6}}{2}$

(C) $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(D) $1-\frac{\sqrt{2}}{5}$

(E) $1-\frac{\sqrt{3}}{5}$



4ª Questão [Valor: 0,25]
Assinale a opção correspondente ao valor da soma das raízes reais da equação:

$$\begin{vmatrix} \log x & \log x & \log x \\ \log 6x & \log 3x & \cos x \\ 1 & 1 & \log^2 x \end{vmatrix} = 0$$

(A) 1,0
(B) π
(C) 10,0
(D) 11,0
(E) 11,1

5ª Questão [Valor: 0,25]
Assinale a opção correspondente ao valor da soma das raízes da equação: $y^{3/2}+5y+2y^{1/2}+8=0$

(A) 5
(B) 2
(C) 21
(D) $5^{1/2}$
(E) 0,5

6ª Questão [Valor: 0,25]
Uma série de Fibonacci é uma seqüência de valores definida da seguinte maneira:
- Os dois primeiros termos são iguais à unidade, ou seja, $T_1 = T_2 = 1$
- Cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores, isto é: $T_N = T_{N-2} + T_{N-1}$

Se $T_{18} = 2584$ e $T_{21} = 10946$ então T_{22} é igual a:

(A) 12225
(B) 13530
(C) 17711
(D) 20412
(E) 22121

7ª Questão [Valor: 0,25]
Assinale a opção correspondente ao valor de μ que faz com que a equação $(1+\mu)s^3+6s^2+5s+1=0$ possua raízes no eixo imaginário.

(A) 0
(B) 6
(C) 14
(D) 29
(E) 41

8ª Questão [Valor: 0,25]
Assinale a opção correspondente ao número de possíveis valores de $\alpha \in [0, 2\pi)$ tais que o lugar geométrico representado pela equação $3x^2+4y^2-16y-12x+\text{tg}\alpha+27=0$ seja um único ponto.

(A) Nenhum valor
(B) Apenas 1 valor
(C) 2 valores
(D) 4 valores
(E) Um número infinito de valores

9ª Questão [Valor: 0,25]
Sendo o ponto A $(8, -2)$ um vértice de um losango $ABCD$ e $2x + y + 1 = 0$ a reta que contém os vértices B e D, assinale a opção correspondente ao vértice C.

(A) $(-2, -8)$
(B) $(0, -4)$
(C) $(4, 3)$
(D) $(-4, -8)$
(E) $(-1, 7)$

10ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam $\mathbf{L}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{U}$ matrizes quadradas de ordem n cujos elementos da i-ésima linha e j-ésima coluna $l_{i,j}$, $d_{i,j}$ e $u_{i,j}$, respectivamente, são dados por:

$$l_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{i^2}{i.j}, \text{ para } i \geq j \\ 0, \text{ para } i < j \end{cases},$$

$$d_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{i+1}{i}, \text{ para } i = j \\ 0, \text{ para } i \neq j \end{cases} \quad \text{e}$$

$$u_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{2i}{i+j}, \text{ para } i \leq j \\ 0, \text{ para } i > j \end{cases}.$$

O valor do determinante de $\mathbf{A} = \mathbf{LDU}$ é igual a:

(A) 0
(B) 1
(C) n
(D) $n+1$
(E) $\dfrac{n+1}{n}$

11ª Questão [Valor: 0,25]
Assinale a opção correspondente aos valores de K para os quais o sistema de equações dado por:

$$\begin{cases} e^x + e^y = e^{x+y} \\ x + y = K \end{cases}$$

admite solução real.

(A) $0 \leq K \leq 2$
(B) $0 \leq K \leq \ln 2$
(C) $K \geq e^{-2}$
(D) $K > \ln 4$
(E) $0 \leq K \leq 1$

12ª Questão [Valor: 0,25]
A soma dos números inteiros positivos de quatro algarismos que admitem 3, 5 e 7 como fatores primos é:

(A) 11025
(B) 90300
(C) 470005
(D) 474075
(E) 475105

13ª Questão [Valor: 0,25]
Seja x um número real ou complexo para o qual $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1$. O valor de $\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right)$ é:

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

14ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $g(x) = e^x$ e $h(x) = g(f^{-1}(x))$. Se os valores da base e da altura de um triângulo são definidos por $h(0{,}5)$ e $h(0{,}75)$, respectivamente, a área desse triângulo é igual a:

(A) $\frac{e}{2}$
(B) $\frac{\sqrt{7}}{2}$
(C) $\frac{\sqrt{21}}{2}$
(D) $\sqrt{10}$
(E) e

15ª Questão [Valor: 0,25]
Seja a_i um dos termos da progressão geométrica com oito elementos $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$, e $S = \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \ldots + \log_2 a_8$. Se $b = \frac{S}{-5}$ e $f(x) = |x + 2b| + |2x - b|$, o valor de $f(1)$ será:

(A) -7
(B) 7
(C) 11
(D) -11
(E) 1

IME 2007/2008 - Matemática

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o conjunto-solução da equação $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Encontre o polinômio $P(x)$ tal que $Q(x) + 1 = (x-1)^3 . P(x)$ e $Q(x) + 2$ é divisível por x^4, onde $Q(x)$ é um polinômio do 6º grau.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Os elementos da matriz dos coeficientes de um sistema de quatro equações lineares e quatro incógnitas (x, y, z e w) são função de quatro constantes a, b, c e d. Determine as relações entre a, b, c e d para que o referido sistema admita uma solução não trivial, sabendo que $CD = -DC$, onde

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}.$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Uma seqüência de quatro termos forma uma PG. Subtraindo-se 2 do primeiro termo e k do quarto termo, transforma-se a seqüência original em uma PA. Uma terceira seqüência é obtida somando-se os termos correspondentes da PG e da PA. Finalmente, uma quarta seqüência, uma nova PA, é obtida a partir da terceira seqüência, subtraindo-se 2 do terceiro termo e sete do quarto. Determine os termos da PG original.

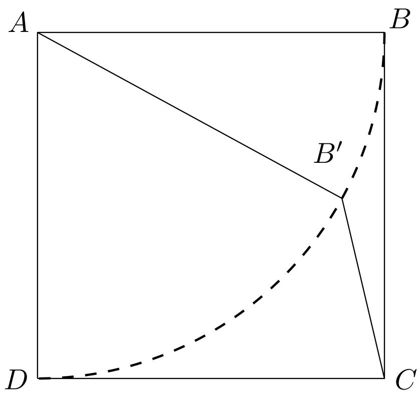
5ª Questão [Valor: 1,0]
Cinco equipes concorrem numa competição automobilística, em que cada equipe possui dois carros. Para a largada são formadas duas colunas de carros lado a lado, de tal forma que cada carro da coluna da direita tenha ao seu lado, na coluna da esquerda, um carro de outra equipe. Determine o número de formações possíveis para a largada.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a expressão da soma a seguir, onde n é um inteiro múltiplo de 4.

$$1 + 2i + 3i^2 + \ldots + (n+1)i^n$$

7ª Questão [Valor: 1,0]
A área de uma calota esférica é o dobro da área do seu círculo base. Determine o raio do círculo base da calota em função do raio R da esfera.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Em um quadrado $ABCD$ o segmento AB', com comprimento igual ao lado do quadrado, descreve um arco de círculo, conforme indicado na figura. Determine o ângulo $B\hat{A}B'$ correspondente à posição em que a razão entre o comprimento do segmento $B'C$ e o lado do quadrado vale $\sqrt{3 - \sqrt{6}}$.



9ª Questão [Valor: 1,0]
Considere os números complexos $Z_1 = \operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha$ e $Z_2 = \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha$, onde α é um número real. Mostre que, se $Z = Z_1 Z_2$, então $-1 \leq \mathrm{R_e}(Z) \leq 1$ e $-1 \leq \mathrm{I_m}(Z) \leq 1$, onde $\mathrm{R_e}(Z)$ e $\mathrm{I_m}(Z)$ indicam, respectivamente, as partes real e imaginária de Z.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Considere todos os pontos de coordenadas (x, y) que pertençam à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$. Determine o maior valor possível de $\frac{y}{x}$.

IME 2006/2007 - Objetiva

1ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam z e w números complexos tais que:

$$\begin{cases} w^2 - z^2 = 4 + 12i \\ \overline{z} - \overline{w} = 2 + 4i \end{cases}$$

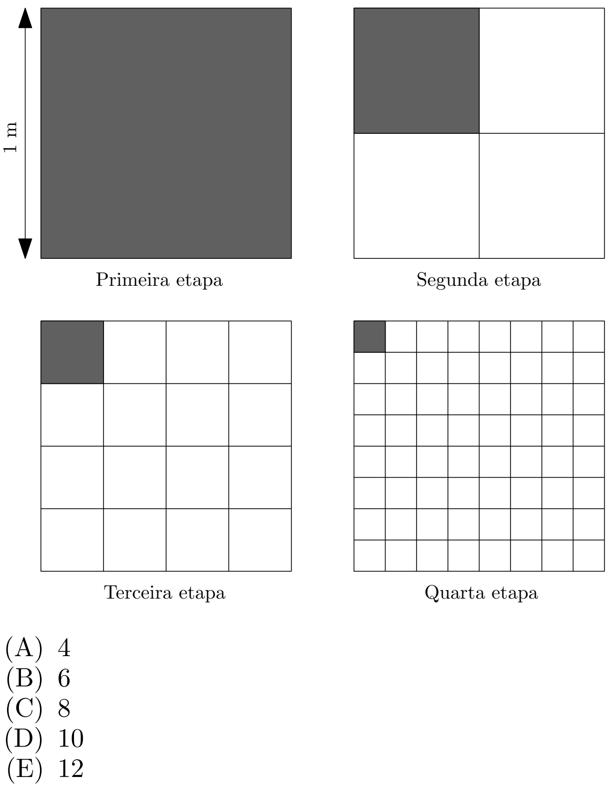
onde $\overline{z}$ e $\overline{w}$ representam, respectivamente, os números complexos conjugados de z e w. O valor de $z + w$ é:

(A) $1 - i$
(B) $2 + i$
(C) $-1 + 2i$
(D) $2 - 2i$
(E) $-2 + 2i$

2ª Questão [Valor: 0,25]
Seja N um número inteiro de 5 algarismos. O número P é construído agregando-se o algarismo 1 à direita de N e o número Q é construído agregando-se o algarismo 1 à esquerda de N. Sabendo-se que P é o triplo de Q, o algarismo das centenas do número N é:

(A) 0
(B) 2
(C) 4
(D) 6
(E) 8

3ª Questão [Valor: 0,25]
Um quadrado de lado igual a um metro é dividido em quatro quadrados idênticos. Repete-se esta divisão com os quadrados obtidos e assim sucessivamente por n vezes. A figura abaixo ilustra as quatro primeiras etapas desse processo. Quando $n \to \infty$, a soma em metros dos perímetros dos quadrados hachurados em todas as etapas é:



Primeira etapa Segunda etapa Terceira etapa Quarta etapa

(A) 4
(B) 6
(C) 8
(D) 10
(E) 12

4ª Questão [Valor: 0,25]
Se r_1 e r_2 são raízes reais distintas de $x^2 + px + 8 = 0$, é correto afirmar que:

(A) $|r_1 + r_2| > 4\sqrt{2}$
(B) $|r_1 + r_2| < \sqrt{2}$
(C) $|r_1| \geq 2$ e $|r_2| \geq 2$
(D) $|r_1| \geq 3$ e $|r_2| \leq 1$
(E) $|r_1| < 1$ e $|r_2| < 2$

5ª Questão [Valor: 0,25]
Considere o sistema de equações dado por:

$$\begin{cases} x + y + 2z = b_1 \\ 2x - y + 3z = b_2 \\ 5x - y + az = b_3 \end{cases}$$

Sendo b_1, b_2 e b_3 valores reais quaisquer, a condição para que o sistema possua solução única é:

(A) $a = 0$
(B) $a \neq 2$
(C) $a \neq 8$
(D) $a \neq b_1 + b_2 - b_3$
(E) $a = 2b_1 - b_2 + 3b_3$

6ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, tal que:

$$\begin{cases} f(4) = 5 \\ f(x+4) = f(x).f(4) \end{cases}$$

O valor de $f(-4)$ é:

(A) $-\frac{4}{5}$
(B) $-\frac{1}{4}$
(C) $-\frac{1}{5}$
(D) $\frac{1}{5}$
(E) $\frac{4}{5}$

7ª Questão [Valor: 0,25]
Um grupo de nove pessoas, sendo duas delas irmãos, deverá formar três equipes, com respectivamente dois, três e quatro integrantes. Sabendo-se que os dois irmãos não podem ficar na mesma equipe, o número de equipes que podem ser organizadas é:

(A) 288
(B) 455
(C) 480
(D) 910
(E) 960

8ª Questão [Valor: 0,25]
Seja a matriz D dada por:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ \text{sen}(\hat{P}) & \text{sen}(\hat{Q}) & \text{sen}(\hat{R}) \end{bmatrix}$$

na qual p, q e r são lados de um triângulo cujos ângulos opostos são, respectivamente, $\hat{P}$, $\hat{Q}$ e $\hat{R}$. O valor do determinante de D é:

(A) -1
(B) 0
(C) 1
(D) π
(E) $p+q+r$

9ª Questão [Valor: 0,25]
Sabendo que $\log 2 = 0{,}3010$, $\log 3 = 0{,}4771$ e $\log 5 = 0{,}6989$, o menor número entre as alternativas abaixo é:

(A) 4^{30}
(B) 9^{24}
(C) 25^{40}
(D) 81^{20}
(E) 625^{15}

10ª Questão [Valor: 0,25]
Considere os conjuntos $A = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ e $B = \{1,2,3,4,5\}$, e seja a função $f : A \to B$ tal que:

$$f(x,y) = x+y$$

É possível afirmar que f é uma função:

(A) injetora
(B) sobrejetora
(C) bijetora
(D) par
(E) ímpar

11ª Questão [Valor: 0,25]
O volume do octaedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um tetraedro regular de volume V é:

(A) $\dfrac{V}{2}$
(B) $\dfrac{V}{4}$
(C) $\dfrac{V}{8}$
(D) $V\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(E) $V\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

12ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ um polinômio do terceiro grau cujas raízes são termos de uma progressão aritmética de razão 2. Sabendo que $p(-1) = -1$, $p(0) = 0$ e $p(1) = 1$, os valores de α e γ são, respectivamente:

(A) 2 e -1
(B) 3 e -2
(C) -1 e 2
(D) $-\frac{1}{3}$ e $\frac{4}{3}$
(E) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

13ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $p(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as cinco raízes de $p(x)$ são números inteiros positivos, sendo quatro deles pares e um ímpar. O número de coeficientes pares de $p(x)$ é:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

14ª Questão [Valor: 0,25]
Considere uma circunferência C fixa de raio R. A partir de dois pontos A e B pertencentes a C, traçam-se retas tangentes a C que se interceptam num ponto P, tal que $\overline{PA} = \overline{PB} = k$. Sendo k um valor constante, o lugar geométrico de P é uma:

(A) reta
(B) circunferência
(C) parábola
(D) hipérbole
(E) elipse

15ª Questão [Valor: 0,25]
Um homem nascido no século XX diz a seguinte frase para o filho: "seu avô paterno, que nasceu trinta anos antes de mim, tinha x anos no ano x^2". Em conseqüência, conclui-se que o avô paterno nasceu no ano de:

(A) 1892
(B) 1898
(C) 1900
(D) 1936
(E) 1942

IME 2006/2007 - Matemática

1ª Questão [Valor: 1,0]
Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, e seja P uma matriz inversível tal que $B = P^{-1}AP$. Sendo n um número natural, calcule o determinante da matriz A^n.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma seqüência de triângulos retângulos cuja lei de formação é dada por

$$a_{K+1} = \frac{2}{3}\,a_K$$
$$b_{K+1} = \frac{4}{5}\,b_K$$

onde a_K e b_K, para $K \geq 1$, são os comprimentos dos catetos do K-ésimo triângulo retângulo. Se $a_1 = 30$ cm e $b_1 = 42$ cm, determine o valor da soma das áreas de todos os triângulos quando $K \to \infty$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere o sistema de equações dado por

$$\begin{cases} 3\log_3 \alpha + \log_9 \beta = 10 \\ \log_9 \alpha - 2\log_3 \beta = 10 \end{cases}$$

onde α e β são números reais positivos. Determine o valor de $P = \alpha\beta$.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam C e C^* dois círculos tangentes exteriores de raios r e r^* e centros O e O^*, respectivamente, e seja t uma reta tangente comum a C e C^* nos pontos não coincidentes A e A^*. Considere o sólido de revolução gerado a partir da rotação do segmento AA^* em torno do eixo OO^*, e seja S a sua correspondente área lateral. Determine S em função de r e r^*.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a equação

$$\log_{(\operatorname{sen} x + \cos x)}(1 + \operatorname{sen} 2x) = 2, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
O quadrilátero $BRAS$, de coordenadas $A(1,0)$, $B(-2,0)$, $R(x_1,y_1)$ e $S(x_2,y_2)$ é construído tal que $R\hat{A}S = R\hat{B}S = 90^{\circ}$. Sabendo que o ponto R pertence à reta t de equação $y = x + 1$, determine a equação algébrica do lugar geométrico descrito pelo ponto S ao se deslocar R sobre t.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 + (m-15)x + m = 0$. Sabendo que x_1 e x_2 são números inteiros, determine o conjunto de valores possíveis para m.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Considere o conjunto formado por m bolas pretas e n bolas brancas. Determine o número de seqüências simétricas que podem ser formadas utilizando-se todas as $m + n$ bolas.
Obs: Uma seqüência é dita *simétrica* quando ela possui a mesma ordem de cores ao ser percorrida da direita para a esquerda e da esquerda para a direita.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam a, b e c números reais não nulos. Sabendo que $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{a+c}{b}$, determine o valor numérico de $\dfrac{a+b}{c}$.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) = 2008\frac{(n+1)}{(n+2)}$, onde $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ são, respectivamente, o conjunto dos números naturais e o dos números reais. Determine o valor numérico de $\dfrac{1}{f(2006)}$.

IME 2005/2006

1ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam $a_1 = 1 - i$, $a_n = r + si$ e $a_{n+1} = (r - s) + (r + s)i$ $(n > 1)$ termos de uma seqüência. Determine, em função de n, os valores de r e s que tornam esta seqüência uma progressão aritmética, sabendo que r e s são números reais e $i = \sqrt{-1}$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Considere o polinômio

$$p(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 27x^2 - 44x + 30$$

Sabendo que o produto de duas de suas raízes complexas é igual a $3 - i$ e que as partes reais e imaginárias de todas as suas raízes complexas são inteiras e não-nulas, calcule todas as raízes do polinômio.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Um trapézio $ABCD$, de base menor AB e base maior CD, possui base média MN. Os pontos M' e N' dividem a base média em três segmentos iguais, na ordem $MM'N'N$. Ao se traçar as retas AM' e BN', verificou-se que as mesmas se encontraram sobre o lado CD no ponto P. Calcule a área do trapézio $M'N'CD$ em função da área de $ABCD$.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $D_n = \det(A_n)$, onde

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Determine D_n em função de n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Determine os valores de x, y, z e r que satisfazem o sistema

$$\begin{aligned} C_{r+y}^{r} &= \log_y x \\ \log_y z &= 4 + \log_x z \\ C_{r+y}^{y} &= \log_x z + \log_z z \end{aligned}$$

onde C_m^p representa a combinação de m elementos tomados p a p e $\log_c B$ representa o logaritmo de B na base c.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Os ângulos de um triângulo estão em progressão aritmética e um deles é solução da equação trigonométrica

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x) = 1$$

Determine os valores destes ângulos (em radianos).

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere os pontos $A(-1, 0)$ e $B(2, 0)$ e seja C uma circunferência de raio R tangente ao eixo das abscissas na origem. A reta r_1 é tangente a C e contém o ponto A e a reta r_2 também é tangente a C e contém o ponto B. Sabendo que a origem não pertence às retas r_1 e r_2, determine a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção de r_1 e r_2 ao se variar R no intervalo $(0, \infty)$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um tetraedro regular de arestas de comprimento a e uma esfera de raio R tangente a todas as arestas do tetraedro. Em função de a, calcule:
a) O volume total da esfera.
b) O volume da parte da esfera situada no interior do tetraedro.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o conjunto solução $S = \{(x, y) | x \wedge y \in \mathbb{Z}\}$ da equação

$$(x + y)k = xy$$

sabendo que k é um número primo.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam as somas S_0 e S_1 definidas por

$$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots + C_n^{3[n/3]}$$

$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \ldots + C_n^{3[(n-1)/3]+1}$$

Calcule os valores de S_0 e S_1 em função de n, sabendo que $[r]$ representa o maior inteiro menor ou igual ao número r.
Obs: Utilize o desenvolvimento em binômio de Newton de $(1 + \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3})^n$.

IME 2004/2005

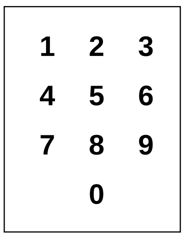
1ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a função $f(x) = \frac{(156^x+156^{-x})}{2}$, demonstre que:

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura. Um ladrão observa de longe e percebe que:

- A senha utilizada possui 4 dígitos.
- O primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha.
- O segundo e o terceito dígitos encontram-se na linha imediatamente superior.

Calcule o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que com certeza ele consiga entrar na casa.



Teclado numérico

3ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam a, b, c, e d números reais positivos e diferentes de 1. Sabendo que $\log_a d$, $\log_b d$ e $\log_c d$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética, demonstre que:

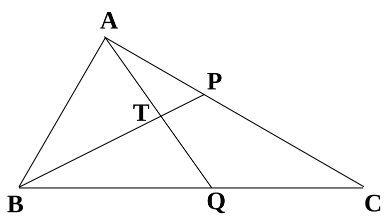
$$c^2 = (ac)^{\log_a d}$$

sln: Esta questão foi anulada por erro no enunciado.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o valor das raízes comuns das equações $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 18x + 18 = 0$ e $x^4 - 12x^3 - 44x^2 - 32x - 52 = 0$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a equação $2\,\text{sen}\,11x + \cos 3x + \sqrt{3}\,\text{sen}\,3x = 0$.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um triângulo ABC de área S. Marca-se o ponto P sobre o lado AC tal que $\overline{PA}/\overline{PC} = q$, e o ponto Q sobre o lado BC de maneira que $\overline{QB}/\overline{QC} = r$. As cevianas AQ e BP encontram-se em T, conforme ilustrado na figura. Determine a área do triângulo ATP em função de S, q e r.



7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma elipse de focos F e F', e M um ponto qualquer dessa curva. Traça-se por M duas secantes $\overline{MF}$ e $\overline{MF'}$, que interceptam a elipse em P e P', respectivamente. Demonstre que a soma $(\overline{MF}/\overline{FP}) + (\overline{MF'}/\overline{F'P'})$ é constante.
Obs: Calcule inicialmente a soma $(1/\overline{MF})+(1/\overline{FP})$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam a, b, e c as raízes do polinômio $p(x) = x^3 + rx - t$, onde r e t são números reais não nulos.

a) Determine o valor da expressão $a^3+b^3+c^3$ em função de r e t.

b) Demonstre que $S^{n+1} + rS^{n-1} - tS^{n-2} = 0$ para todo número natural $n \geq 2$, onde $S^k = a^k + b^k + c^k$ para qualqure número natural k.

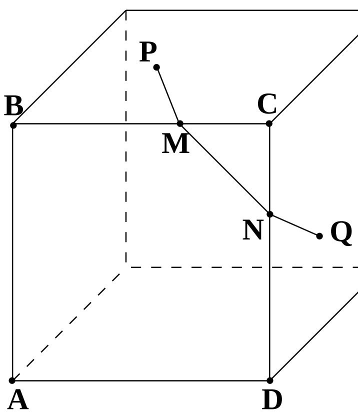
9ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o determinante da matrix $n \times n$ em função de b, onde b é um número real tal que $b^2 \neq 1$.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & b^2+1 \end{vmatrix}}_{n \text{ colunas}} \left.\vphantom{\begin{vmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{vmatrix}}\right\} n \text{ linhas}$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Considere os pontos P e Q sobre as faces adjacentes de um cubo. Uma formiga percorre, sobre a superfície do cubo, a menor distância entre P e Q, cruzando a aresta $\overline{BC}$ em M e a aresta $\overline{CD}$ em N, conforme ilustrado na figura abaixo. É dado que os pontos P, Q, M e N são coplanares.

a) Demonstre que $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AC}$.

b) Calcule a área da seção do cubo determinada pelo plano que contém P, Q e M em função de $\overline{BC} = a$ e $\overline{BM} = b$.



IME 2003/2004

1ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o número natural n que torna o determinante abaixo igual a 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n+1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Considere o polinômio $P(x) = x^3 + ax + b$ de coeficientes reais, com $b \neq 0$. Sabendo que suas raízes são reais, demonstre que $a < 0$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma pirâmide regular de altura h, cuja base é um hexágono $ABCDEF$ de lado a. Um plano perpendicular à base e contendo os pontos médios das arestas AB e BC divide a pirâmide em dois poliedros. Calcule a razão entre os volumes destes dois poliedros.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule $\operatorname{sen}(x+y)$ em função de a e b, sabendo que o produto $ab \neq 0$, que $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a$ e que $\cos x + \cos y = b$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Seja uma função $f : \Re - \{0\} \to \Re$, onde $\Re$ representa o conjunto dos números reais, tal que $f(a/b) = f(a) - f(b)$ para a e b pertencentes ao domínio de f. Demonstre que f é uma função par.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Sendo a, b e c números naturais em progressão aritmética e z um número complexo de módulo unitário, determine um valor para cada um dos números a, b, c e z de forma que eles satisfaçam a igualdade:

$$\frac{1}{z^a} + \frac{1}{z^b} + \frac{1}{z^c} = z^9$$

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a parábola P de equação $y = ax^2$, com $a > 0$ e um ponto A de coordenadas (x_0, y_0) satisfazendo a $y_0 < ax_0^2$. Seja S a área do triângulo ATT', onde T e T' são os pontos de contato das tangentes a P passando por A.

a) Calcule o valor da área S em função de a, x_0 e y_0.

b) Calcule a equação do lugar geométrico do ponto A, admitindo que a área S seja constante.

c) Identifique a cônica representada pela equação obtida no item anterior.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Demonstre que o número $\underbrace{11\ldots1}_{\substack{(n-1)\\ \text{vezes}}}\underbrace{22\ldots2}_{n \text{ vezes}}5$ é um quadrado perfeito.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Ao final de um campeonato de futebol, somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de 35 pontos. Cada equipe jogou com todos os outros adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia 3 pontos, cada empate valia 1 ponto e que derrotas não pontuavam.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Um quadrilátero convexo $ABCD$ está inscrito em um círculo de diâmetro d. Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = a$, $\overline{AD} = d$ e $\overline{CD} = b$, com a, b e d diferentes de zero.

a) Demonstre que $d^2 = bd + 2a^2$.

b) Se a, b e d são números inteiros e a é diferente de b, mostre que d não pode ser primo.

IME 2002/2003

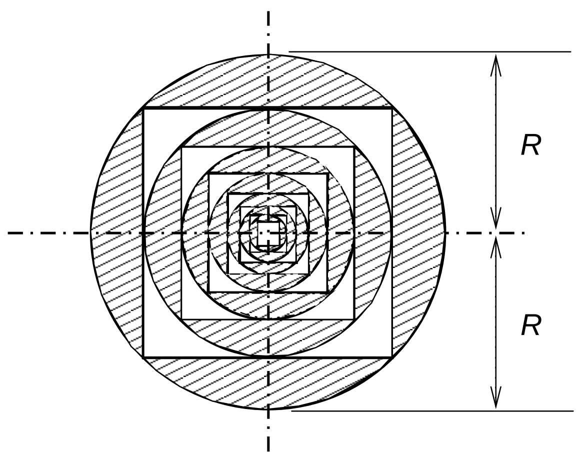
1ª Questão [Valor: 1,0]
Seja z um número complexo de módulo unitário que satisfaz a condição $z^{2n} \neq -1$, onde n é um número inteiro positivo. Demonstre que $\frac{z^n}{1+z^{2n}}$ é um número real.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Determine todos os valores reais de x que satisfazem a equação:

$$\left|\log\left(12x^3 - 19x^2 + 8x\right)\right| = \log\left(12x^3 - 19x^2 + 8x\right),$$

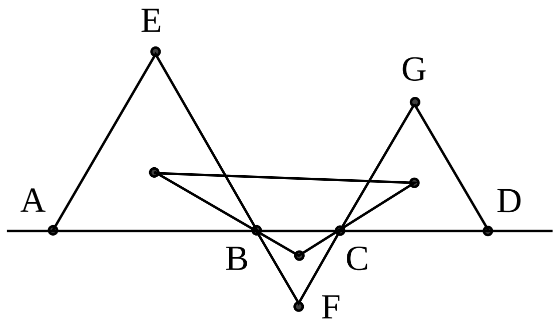
onde $\log(y)$ e $|y|$ representam, respectivamente, o logaritmo na base 10 e o módulo de y.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dada numa circunferência de raio R, inscreve-se nela um quadrado. A seguir, increve-se uma circunferência neste quadrado. Este processo se repete indefinidamente para o interior da figura de maneira que cada quadrado estará sempre inscrito em uma circunferência e simultaneamente circunscrito por outra. Calcule, em função de R, a soma das áreas delimitadas pelos lados dos quadrados e pelas circunferências que os circunscrevem, conforme mostra a figura.



4ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a equação $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(2\alpha) = 2\operatorname{tg}(3\alpha)$, sabendo-se que $\alpha \in [0, \pi/2)$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Sobre uma reta r são marcados os pontos A, B, C e D. São construídos os triângulos equiláteros ABE, BCF e CDG, de forma que os pontos E e G se encontram do mesmo lado da reta r, enquanto que o ponto F se encontra do lado oposto, conforme mostra a figura. Calcule a área do triângulo formado pelos baricentros de ABE, BCF e CDG em função dos comprimentos dos segmentos AB, BC e CD.



6ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um hexágono regular de 6 cm de lado. Determine o valor máximo da área de um triângulo XYZ, sabendo-se que:
a) Os pontos X, Y e Z estão situados sobre lados do hexágono.
b) A reta que une os pontos X e Y é paralela a um dos lados do hexágono.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{N}$. Por definição, uma função $f : A \to B$ é crescente se $a_1 > a_2 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$, para quaisquer a_1 e $a_2 \in A$.
a) Para $A = \{1,2\}$ e $B = \{1,2,3,4\}$, quantas funções de A para B são crescentes?
b) Para $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,2,\ldots,n\}$, quantas funções de A para B são crescentes, onde n é um número inteiro maior que zero?

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja uma pirâmide regular de vértice V e base quadrangular $ABCD$. O lado da base da pirâmide mede l e a aresta lateral $l\sqrt{2}$. Corta-se essa pirâmide por um plano que contém o vértice A, é paralelo à reta BD, e contém o ponto médio da aresta VC. Calcule a área da seção determinada pela interseção do plano com a pirâmide.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Demonstre que $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ é um número inteiro múltiplo de quatro.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma matriz A, $n \times n$, de coeficientes reais, e k um número real diferente de 1. Sabendo-se que $A^3 = kA$, prove que a matriz $A + I$ é invertível, onde I é a matriz identidade $n \times n$.

IME 2001/2002

1ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule a soma dos números entre 200 e 500 que são múltiplos de 6 ou de 14, mas não simultaneamente múltiplos de ambos.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Uma matriz quadrada é denominada ortogonal quando a sua transposta é igual a sua inversa. Considerando esta definição, determine se a matriz $[R]$, abaixo, é uma matriz ortogonal, sabendo-se que n é um número inteiro e α é um ângulo qualquer. Justifique a sua resposta.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\text{sen}(n\alpha) & 0 \\ \text{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma parábola de eixo focal OX que passe pelo ponto $(0,0)$. Define-se a subnormal em um ponto P da parábola como o segmento de reta ortogonal à tangente da curva, limitado pelo ponto P e o eixo focal. Determine a equação e identifique o lugar geométrico dos pontos médios das subnormais dessa parábola.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Sabe-se que $\log_a b = X$, $\log_q b = Y$ e $n > 0$, onde n é um número natural. Sendo c o produto dos n termos de uma progressão geométrica de primeiro termo a e razão q, calcule o valor de $\log_c b$ em função de X, Y e n.

5ª Questão [Valor: 1,0]

a) Encontre as condições a que devem satisfazer os coeficientes de um polinômio $P(x)$ de quarto grau para que $P(x) = P(1-x)$.

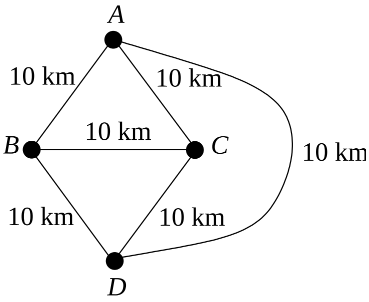
b) Considere o polinômio $P(x) = 16x^4 - 32x^3 - 56x^2 + 72x + 77$. Determine todas as suas raízes sabendo-se que o mesmo satisfaz a condição do item acima.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Um cone e um cilindro circulares retos têm uma base comum e o vértice do cone se encontra no centro da outra base do cilindro. Determine o ângulo formado pelo eixo do cone e sua geratriz, sabendo-se que a razão entre a área total do cilindro e a área total do cone é 7/4.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Quatro cidades, A, B, C e D, são conectadas por estradas conforme a figura abaixo. Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade A, e possuem:

a) Exatamente 50 km?

b) $n \times 10$ km?



8ª Questão [Valor: 1,0]

a) Sejam x, y e z números reais positivos. Prove que:

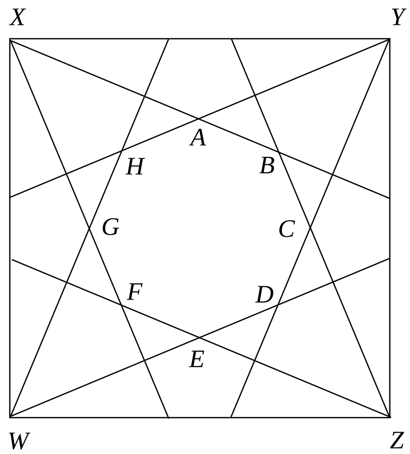
$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x.y.z}$$

Em que condições a igualdade se verifica?

b) Considere um paralelepípedo de lados a, b, c, e área total S_0. Determine o volume máximo desse paralelepípedo em função de S_0. Qual a relação entre a, b e c para que esse volume seja máximo? Demonstre seu resultado.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a equação $\sqrt{5 - \sqrt{5 - x}} = x$, sabendo-se que $x > 0$.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um quadrado $XYZW$ de lado a. Dividindo-se cada ângulo desse quadrado em quatro partes iguais, obtém-se o octógono regular representado na figura abaixo. Determine o lado e área desse octógono em função de a. As respostas finais não podem conter expressões trigonométricas.

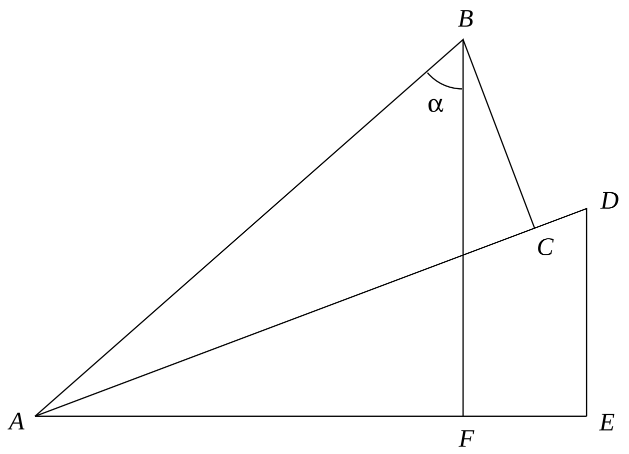


IME 2000/2001

1ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a figura abaixo, onde $\overline{AB} = \overline{AD} = 1$, $\overline{BC} = x$, $\overline{AC} = y$, $\overline{DE} = z$ e $\overline{AE} = w$. Os ângulos $D\hat{E}A$, $B\hat{C}A$ e $B\hat{F}A$ são retos.

a) Determine o comprimento de $\overline{AF}$ e de $\overline{BF}$ em função de x, y, z e w.

b) Determine a tangente do ângulo α em função de x, y, z e w.



2ª Questão [Valor: 1,0]
Considere o polinômio de grau mínimo, cuja representação gráfica passa pelos pontos $P_1(-2,-11)$, $P_2(-1,0)$, $P_3(1,4)$ e $P_4(2,9)$.

a) Determine os coeficientes do polinômio.

b) Calcule todas as raízes do polinômio.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Determine todos os números inteiros m e n para os quais o polinômio $2x^m + a^{3n}x^{m-3n} - a^m$ é divisível por $x + a$.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam a e b números reais positivos e diferentes de 1. Dado o sistema abaixo:

$$\begin{cases} a^x \,.\, b^{1/y} &= \sqrt{ab} \\ 2.\log_a x &= \log_{1/b} y \,.\, \log_{\sqrt{a}} b \end{cases}$$

determine os valores de x e y.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Dois números complexos são ortogonais se suas representações gráficas forem perpendiculares entre si. Prove que dois números complexos Z_1 e Z_2 são ortogonais se e somente se:

$$Z_1\overline{Z_2} + \overline{Z_1}Z_2 = 0$$

Obs: $\overline{Z}$ indica o conjugado de um número complexo Z.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a matrix $A = (a_{kj})$, onde:
$a_{kj} = k$-ésimo termo do desenvolvimento de $(1 + ji)^{54}$, com $k = 1, \ldots, 55$; $j = 1, \ldots, 55$ e $i = \sqrt{-1}$.

a) Calcule $a_{3,2} + a_{54,1}$.
b) Determine o somatório dos elementos da coluna 55.
c) Obtenha uma fórmula geral para os elementos da diagonal principal.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Um comandante de companhia convocou voluntários para a constituição de 11 patrulhas. Todas elas são formadas pelo mesmo número de homens. Cada homem participa de exatamente duas patrulhas. Cada duas patrulhas têm somente um homem em comum. Determine o número de voluntários e o de integrantes de uma patrulha.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o valor exato de:

$$\operatorname{sen}\left[2\operatorname{arc\,cotg}\left(\frac{4}{3}\right)\right] + \cos\left[2\operatorname{arc\,cossec}\left(\frac{5}{4}\right)\right]$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Prove que para qualquer número inteiro k, os números k e k^5 terminam sempre com o mesmo algarismo (algarismo das unidades).

10ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam r, s e t três retas paralelas não coplanares. São marcados sobre r dois pontos A e A', sobre s os pontos B e B' e sobre t os pontos C e C' de modo que os segmentos $\overline{AA'} = a$, $\overline{BB'} = b$ e $\overline{CC'} = c$ tenham o mesmo sentido.

a) Mostre que se G e G' são os baricentros dos triângulos ABC e $A'B'C'$, respectivamente, então $\overline{GG'}$ é paralelo às três retas.
b) Determine $\overline{GG'}$ em função de a, b e c.

IME 1999/2000

1ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 13 \end{vmatrix}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a, b, e c números reais tais que $a < b < c$. Prove que a equação abaixo possui exatamente duas raízes, x_1 e x_2, que satisfazem a condição: $a < x_1 < b < x_2 < c$.

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Represente graficamente a função:

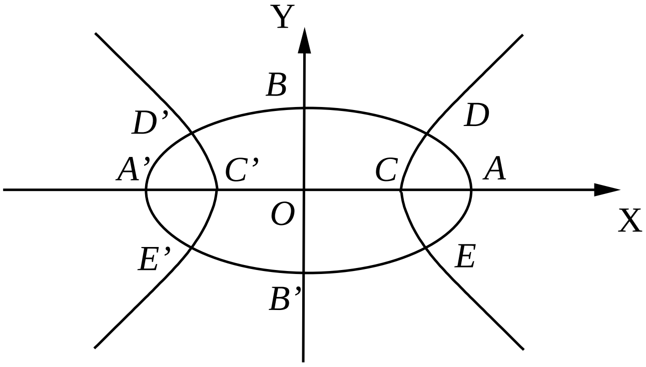
$$F(\theta) = \frac{1}{1+\text{sen}^2\,\theta} + \frac{1}{1+\cos^2\theta} + \frac{1}{1+\sec^2\theta} + \frac{1}{1+\text{cossec}^2\,\theta}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule as coordenadas dos pontos de interseção da elipse com a hipérbole, representadas na figura abaixo, sabendo-se que:

i) Os pontos C e C' são os focos da elipse e os pontos A e A' são os focos da hipérbole.

ii) BB' é o eixo conjugado da hipérbole.

iii) $OB = OB' = 3$ m e $OC = OC' = 4$ m.



5ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o polinômio em n, com no máximo 4 termos, que representa o somatório dos quadrados dos n primeiros números naturais ($\sum_{k=1}^{n} k^2$).

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja o conjunto:

$D = \{(k_1, k_2) | \, 1 \leq k_1 \leq 13;\ 1 \leq k_2 \leq 4;\ k_1, k_2 \in \mathbb{N}\}$.

Determine quantos subconjuntos $L = \{(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), (t_1, t_2), (r_1, r_2)\}$, $L \subset D$, existem com 5 (cinco) elementos distintos, que satisfazem simultaneamente as seguintes condições:
i) $x_1 = y_1 = z_1$.
ii) $x_1 \neq t_1$, $x_1 \neq r_1$, $t_1 \neq r_1$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
As arestas laterais de uma pirâmide regular com n faces têm medida l. Determine:
a) A expressão do raio do círculo circunscrito à base, em função de l, de modo que o produto do volume da pirâmide pela sua altura seja máximo.
b) A expressão desse produto máximo, em função de l e n.

8ª Questão [Valor: 1,0]
As medianas BE e CF de um triângulo ABC se cortam em G. Demonstre que $\text{tg}\, B\hat{G}C = \frac{12S}{b^2+c^2-5a^2}$, onde S é a área do triângulo ABC; $\overline{AC} = b$; $\overline{AB} = c$ e $\overline{BC} = a$.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Três jogadores, cada um com um dado, fizeram lançamentos simultâneos. Essa operação foi repetida cinquenta vezes. Os dados contêm três faces brancas e três faces pretas. Dessas 50 vezes:
i) Em 28 saiu uma face preta para o jogador I.
ii) Em 25 saiu uma face branca para o jogador II.
iii) Em 27 saiu uma face branca para o jogador III.
iv) Em 8 saíram faces pretas para os jogadores I e III e branca para o jogador II.
v) Em 7 saíram faces brancas para os jogadores II e III e preta para o jogador I.
vi) Em 4 saíram faces pretas para os três jogadores.
vii) Em 11 saíram faces pretas para os jogadores II e III.

Determine quantas vezes saiu uma face preta para pelo menos um jogador.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Considere quatro números inteiros a, b, c e d. Prove que o produto:

$$(a-b)(c-a)(d-a)(d-c)(d-b)(c-b)$$

é divisível por 12.

IME 1998/1999

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine as raízes de $z^2+2iz+2-4i=0$ e localize-as no plano complexo, sendo $i=\sqrt{-1}$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam as funções $g(x)$ e $h(x)$ assim definidas: $g(x) = 3x-4$; $h(x) = f(g(x)) = 9x^2-6x+1$. Determine a função $f(x)$ e faça seu gráfico.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o valor de $(1{,}02)^{-10}$, com dois algarismos significativos, empregando a expansão do binômio de Newton.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Determine θ sabendo-se que:

i) $\dfrac{1-\cos^4\theta}{1-\operatorname{sen}^4\theta}.\dfrac{1+\operatorname{cotg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}=\dfrac{2}{3}$;

ii) $0<\theta\leq 2\pi$ radianos.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Determine α para que seja impossível o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (\alpha^2-14)z = \alpha+2 \end{cases}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Determine as possíveis progressões aritméticas para as quais o resultado da divisão da soma dos seus n primeiros termos pela soma dos seus $2n$ primeiros termos seja independente do valor de n.

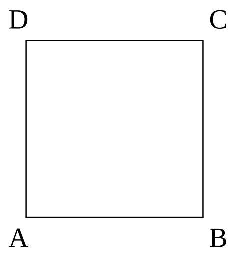
7ª Questão [Valor: 1,0]
Determine uma matriz não singular P que satisfaça a equação matricial $P^{-1}A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja o polinômio $P(x)$ de grau $(2n+1)$ com todos os seus coeficientes positivos e unitários. Dividindo-se $P(x)$ por $D(x)$, de grau 3, obtém-se o resto $R(x)$. Determine $R(x)$, sabendo-se que as raízes de $D(x)$ são raízes de $A(x) = x^4-1$ e que $D(1)\neq 0$.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Uma piscina de base retangular tem, em metros, as seguintes dimensões: base, 5×6 e altura, 3. Dois terços do volume da piscina são ocupados por água. Na superfície superior da água, forma-se uma pequena bolha de ar. A bolha de ar está eqüidistante das paredes de 5m da base. Em relação às paredes de 6m de base, sua posição é tal que a distância a uma das paredes é o dobro da distância à outra. Estabeleça um sistema de coordenadas retangulares que tenha como origem um dos cantos interiores da piscina e como um dos planos coordenados a parede de base de 6m mais próxima da bolha. Em relação a este sistema, determine as coordenadas retangulares do ponto onde se encontra a bolha de ar.

10ª Questão [Valor: 1,0]
$ABCD$ é um quadrado de lado ℓ, conforme figura abaixo. Sabendo-se que K é a soma dos quadrados das distâncias de um ponto P do plano definido por $ABCD$ aos vértices de $ABCD$, determine:

a) O valor mínimo de K e a posição do ponto P na qual ocorre este mínimo.
b) O lugar geométrico do ponto P para $K = 4\ell^2$.



IME 1997/1998

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a solução da equação trigonométrica, $\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = 1, x \in \mathbb{R}$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva e interprete, geometricamente, o sistema matricial abaixo, em função de α e β.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 7 \\ 6 & 8 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ \beta \end{bmatrix}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Determine os valores de λ que satisfaçam a inequação, $27^{2\lambda} - \frac{4}{9}.27^{\lambda} + 27^{-1} > 0$, e represente, graficamente, a função, $y = 27^{2x} - \frac{4}{9}.27^{x} + 27^{-1}$.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Determine os parâmetros α, β, γ e δ da transformação complexa, $W = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$, que leva os pontos $Z = 0; -i; -1$ para $W = i; 1; 0$, respectivamente, bem como, Z para $W = -2 - i$, onde $i = \sqrt{-1}$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma elipse e uma hipérbole centradas na origem, O, de um sistema cartesiano, com eixo focal coincidente com o eixo OX. Os focos da elipse são vértices da hipérbole e os focos da hipérbole são vértices da elipse. Dados os eixos da elipse como 10 cm e $\frac{20}{3}$ cm, determine as equações das parábolas, que passam pelas interseções da elipse e da hipérbole e são tangentes ao eixo OY na origem.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Uma embarcação deve ser tripulada por oito homens, dois dos quais só remam do lado direito e apenas um, do lado esquerdo. Determine de quantos modos esta tripulação pode ser formada, se de cada lado deve haver quatro homens.
Obs: A ordem dos homens de cada lado distingue a tripulação.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Determine α, β e γ de modo que o polinômio, $\alpha x^{\gamma+1} + \beta x^{\gamma} + 1$, racional inteiro em x, seja divisível por $(x-1)^2$ e que o valor numérico do quociente seja igual a 120 para $x = 1$.

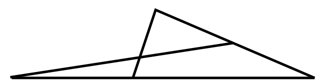
8ª Questão [Valor: 1,0]
Uma soma finita de números inteiros consecutivos, ímpares, positivos ou negativos, é igual a 7^3. Determine os termos desta soma.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Considere o cubo de faces $ABCD$ e $EFGH$, e arestas $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$. Sejam as arestas iguais a 3 m e os pontos M, N e P marcados de forma que:

$M \in \overline{AD}$, tal que $\overline{AM} = 2$ m,
$N \in \overline{AB}$, tal que $\overline{AN} = 2$ m, e
$P \in \overline{BF}$, tal que $\overline{BP} = 0{,}5$ m.

Calcule o perímetro da seção que o plano MNP determina no cubo.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Quatro retas se interceptam formando quatro triângulos conforme figura abaixo. Prove que os círculos circunscritos aos quatro triângulos possuem um ponto em comum.



IME 1996/1997

1ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ y = ax \end{cases} \quad \text{onde } a \neq 1 \text{ e } a > 0$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o termo máximo do desenvolvimento da expressão:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{65}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dados os pontos A e B do plano, determine a equação do lugar geométrico dos pontos P do plano, de tal modo que a razão entre as distâncias de P a A e de P a B seja dada por uma constante k. Justifique a sua resposta analiticamente, discutindo todas as possibilidades para k.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Em cada uma das 6 (seis) faces de um cubo, construiu-se uma circunferência, onde foram marcados n pontos. Considerando que 4 (quatro) pontos não pertencentes à mesma face, não sejam coplanares, quantas retas e triângulos, não contidos nas faces desse cubo, são determinados pelos pontos.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a função $y = f(x) = \text{Ln}(x + \sqrt{x^2+1})$ onde Ln denota o logaritmo neperiano. Responder aos itens a seguir, justificando sua resposta.
a) Se $g(x) = \text{Ln}(2x)$, que relação existe entre os gráficos das curvas f e g?
b) Pode-se afirmar que a função definida por $H(x) = \dfrac{f(x)}{2}$ é uma primitiva para a função $T(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$?

6ª Questão [Valor: 1,0]
Se $\text{tg}\, a$ e $\text{tg}\, b$ são raízes da equação $x^2 + px + q = 0$, calcule, em função de p e q, o valor simplificado da expressão:

$$y = \text{sen}^2(a+b) + p\,\text{sen}\,(a+b)\cos(a+b) + q\cos^2(a+b)$$

Considere $p, q \in \Re$ com $q \neq 1$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere os números ímpares escritos sucessivamente, como mostra a figura abaixo, onde a n-ésima linha compreende n números. Encontre em função de n, nesta linha, a soma de todos os números escritos, bem como o primeiro e o último.

$$\begin{array}{cccccc}
1 \\
3 & 5 \\
7 & 9 & 11 \\
13 & 15 & 17 & 19 \\
21 & 23 & 25 & 27 & 29 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o resto da divisão do polinômio $(\cos\varphi + x\,\text{sen}\,\varphi)^n$ por (x^2+1), onde n é um número natural.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma esfera inscrita e tangente à base de um cone de revolução. Um cilindro está circunscrito à esfera de tal forma que uma de suas bases está apoiada na base do cone. Seja V_1 o volume do cone e V_2 o volume do cilindro. Encontre o menor valor da constante k para o qual $V_1 = kV_2$.
Obs: Considere o ângulo formado pelo diâmetro da base e a geratriz do cone em uma das extermidades deste diâmetro.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Em uma parábola (P), com foco F e parâmetro p, considere uma corda $\overline{MM'}$ normal à parábola em M. Sabendo que o ângulo $M\hat{F}M' = 90^{\text{o}}$, calcule os segmentos $\overline{FM}$ e $\overline{FM'}$.

IME 1995/1996

1ª Questão [Valor: 1,0]
Considerando $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, encontre, em função de a e b, o logaritmo do número $\sqrt[5]{11{,}25}$ no sistema de base 15.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Encontre todas as soluções reais da equação apresentada abaixo, onde n é um número natural.

$$\cos^n x - \operatorname{sen}^n x = 1$$

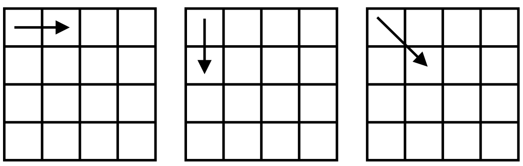
3ª Questão [Valor: 1,0]
Um triângulo ABC tem base AB fixa sobre uma reta r. O vértice C desloca-se ao longo de uma reta s, paralela a r e a uma distância h da mesma. Determine a equação da curva descrita pelo ortocentro do triângulo ABC.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja f uma função real tal que $\forall\, x, a \in \Re :\ f(x+a) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$. f é periódica? Justifique.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule a soma abaixo:

$$\frac{1}{1\times 4} + \frac{1}{4\times 7} + \frac{1}{7\times 10} + \ldots + \frac{1}{2998\times 3001}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
É dado um tabuleiro quadrado 4×4. Deseja-se atingir o quadrado inferior direito a partir do quadrado superior esquerdo. Os movimentos permitidos são os representados pelas setas:



De quantas maneiras isto é possível?

7ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam 5 (cinco) pontos $AOBO'A'$, nesta ordem, pertencentes a uma reta genérica r tal que $AO = OB = 3a$; $BO' = O'A' = 2a$, onde a é um comprimento dado. Traçam-se os círculos (O), com diâmetro AB, e (O'), com diâmetro BA'. Sejam C e D dois pontos quaisquer do círculo (O); as retas BC e BD cortam o círculo (O') respectivamente em C' e D'.

a) Calcule $\dfrac{BC'}{BC}$.

b) Calcule $\dfrac{C'D'}{CD}$.

c) Seja o ângulo $C\hat{B}D$ igual a 30°. Calcule, em função de a, a razão entre as áreas dos segmentos circulares S, no círculo (O) limitado pela corda CD, e S', no círculo (O') limitado pela corda $C'D'$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Determine os números naturais n para os quais existem poliedros convexos de n arestas.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam $w_0 = 1$, $w_1 = j$, $w_2 = j^2$ as raízes cúbicas da unidade no plano complexo (considere w_1 o número complexo de módulo 1 e argumento $2\pi/3$). Sabendo-se que se $c \in \mathbb{C}$, a rotação R em torno do ponto c e amplitude igual a $\pi/3$ é dada por $R(z) = -j^2 z - jc$, $\forall z \in \mathbb{C} - \{c\}$, pede-se:

a) Determinar as relações existentes entre a, b, c, j, j^2, onde $a, b \in \mathbb{C}$, de modo que o triângulo a, b, c seja equilátero.

b) Determinar z para que o triângulo i, z, iz seja equilátero.

Obs: Dado: $i = \sqrt{-1}$.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Dados dois trinômios do segundo grau:
$y = ax^2 + bx + c$ (I)
$y = a'x^2 + b'x + c'$ (II)
Considere, sobre o eixo Ox, os pontos A e B cujas abscissas são as raízes do trinômio (I) e A' e B' os pontos cujas abscissas são as raízes do trinômio (II). Determine a relação que deve existir entre os coeficientes a, b, c, a', b', c' de modo que $A'B'$ divida o segmento AB harmonicamente.

IME 1994/1995

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a condição que o inteiro m deve satisfazer para que exista termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^4 - \frac{1}{x^8}\right)^m$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Seja ABC um triângulo qualquer no qual os vértices B e C são fixos. Determine o lugar geométrico descrito pelo ponto A, variável, sabendo que os ângulos B e C satisfazem a relação $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = k$, k constante real. Discuta a solução para os diversos valores de k.
Obs: Considere como eixos coordenados as retas BC e a mediatriz do segmento BC.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dado $Z = \frac{1}{\sqrt{7+24i}}$, calcule as partes real e imaginária de Z.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Sabendo-se que a função $h(x)$ possui a seguinte propriedade $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(x) = -h(x)$, pedem-se:

a) A solução da equação: $\int tf(t) = xh(x) + h(x) + 1$.

b) Os valores de c e $h(x)$, de tal forma que: $\int_0^c tf(t) = \frac{2-e}{e}$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a equação trigonométrica:

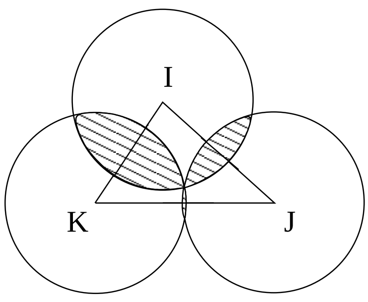
$$\operatorname{sen} x + \cos x + 2\sqrt{2}\operatorname{sen} x \cos x = 0$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Use o teorema do valor médio para derivadas e prove que a equação:

$$\ln(x+1)^5 + 3\ln(x+1)^3 + 2\ln(x+1) - 2 = 0,$$

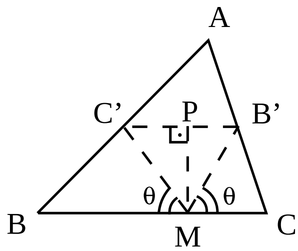
tem uma única raiz real no intervalo $(0, 1)$.
Obs: A notação ln significa logaritmo neperiano.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Três círculos de raio R se interceptam dois a dois, como é mostrado na figura abaixo, constituindo três áreas comuns que formam um trevo. Determine o perímetro do trevo e sua área em função de R e da área S do triângulo IJK.



8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja ABC um triângulo qualquer. Por B' e C' pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, traçam-se duas retas que se cortam em um ponto M, situado sobre o lado BC, e que fazem com esse lado ângulos iguais θ conforme a figura abaixo. Demonstre que:

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{2}(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)$$



9ª Questão [Valor: 1,0]
Seis esferas idênticas de raio R encontram-se posicionadas no espaço de tal forma que cada uma delas seja tangente a quatro esferas. Dessa forma, determine a aresta do cubo que tangencie todas as esferas.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Prove que o polinômio $P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \ldots + x^{111} + 1$ é divisível por $x^9 + x^8 + x^7 + \ldots + x + 1$.

IME 1993/1994

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o termo independente de x de

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sabendo que $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$ são raízes e que $f(1) = -8$, pede-se:

a) Determinar a, b, c.
b) Calcular $f(0)$.
c) Verificar se $f(x)$ apresenta máximo ou mínimo, justificando a resposta.
d) As coordenadas do ponto extremo.
e) O esboço do gráfico.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um octógono convexo. Suponha que quando todas as suas diagonais são traçadas, não há mais de duas diagonais se interceptando no mesmo ponto. Quantos pontos de interseção (de diagonais) existem neste octógono?

4ª Questão [Valor: 1,0]
Considere os números complexos $z = x + y.i$ e $w = y - x.i$, cujos módulos são tais que $|z| = e^{|w|\cdot\frac{\sqrt{3}}{x}}$ e $|w| = e^{|z|\cdot\frac{1}{y}}$, onde e é base dos logaritmos neperianos. Obter a forma polar de z^2.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Um aluno, ao inverter a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 4 & e & f \end{bmatrix} = [a_{ij}],\ 1 \leq i, j \leq 3$$

cometeu um engano, e considerou o elemento a_{13} igual a 3, de forma que acabou invertendo a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 3 & e & f \end{bmatrix} = [b_{ij}]$$

Com esse engano o aluno encontrou

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & -1/2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -5/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Determinar A^{-1}.
Obs: O elemento (3,1) de B^{-1} deve ser $-\frac{3}{2}$.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $y = \dfrac{x^2}{2}$ uma parábola com foco F e diretriz d. Uma reta, cujo coeficiente angular é $m \neq 0$, passa por F e corta a parábola em dois pontos M_1 e M_2, respectivamente. Seja G o conjugado harmônico de F em relação a M_1 e M_2. Pedem-se:

a) As coordenadas de G em função de m.
b) O lugar geométrico do ponto G quando m varia.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Sabendo que $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os ângulos internos de um triângulo, escreva as restrições que devem ser satisfeitas por este triângulo para que se verifique a igualdade abaixo.

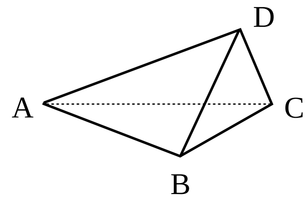
$$\operatorname{sen}\hat{A} + \operatorname{sen}\hat{B} + \operatorname{sen}\hat{C} = 4\cos\frac{\hat{A}}{2}.\cos\frac{\hat{B}}{2}.\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo inscrito num círculo e seja I o ponto de interseção de suas diagonais. As projeções ortogonais de I sobre os lados AB, BC, CD e DA são, respectivamente, M, N, P e Q. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é circunscritível a um círculo com centro em I.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Seja C um semi-círculo com centro O e diâmetro $PQ = 2r$. Sobre o segmento OP, toma-se um ponto N tal que $ON = x$, $0 \leq x \leq r$. Por N traça-se uma reta perpendicular a PQ que encontre o semi-círculo em M. A reta tangente ao semi-círculo em M corta a reta PQ em um ponto T:

a) Calcule, em função de r e x, o volume V_1 gerado pela rotação do triângulo MPQ em torno de PQ.
b) Calcule, em função de r e x, o volume V_2 gerado pela rotação do triângulo MPT em torno de PQ.
c) Considerando a razão $y = \dfrac{V_2}{V_1}$, quando x varia no intervalo $[0, r]$, faça o esboço do respectivo gráfico.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Na exploração de uma mina foi feito o corte indicado na figura abaixo. Para calcular o volume do minério extraído do corte, foram medidos: $CD = 10\sqrt{3}$ dm, CD é perpendicular ao plano ABC, $A\hat{D}C = A\hat{D}B = 60^{\circ}$ e $B\hat{D}C = 30^{\circ}$.



Calcule este volume.

IME 1992/1993

1ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são inteiros positivos. Sabendo-se que uma das raízes dessa função é igual a $2i$, calcular os menores valores de a, b e c para que exista um ponto máximo e um ponto mínimo de reais.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Numa escola há 15 comissões, todas com igual número de alunos. Cada aluno pertence a duas comissões e cada duas comissões possui exatamente um membro em comum. Todos os alunos participam.

a) Quantos alunos tem a escola?

b) Quantos alunos participam de cada comissão?

3ª Questão [Valor: 1,0]
Prove, por indução, que:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n, \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Indique se é verdadeiro (V) ou falso (F) o que se segue e justifique sua resposta.

a) O conjunto dos números reais não tem pontos extremos reais.

b) Existe um número em $\mathbb{Q}$ (racionais) cujo quadrado é 2.

c) O ponto correspondente a $\dfrac{66}{77}$ na escala dos números reais $\mathbb{R}$ está situado entre os pontos $\dfrac{55}{66}$ e $\dfrac{77}{88}$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Determine os valores de x para que:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 4 & 6 \\ x & x+2 & 0 & 10 \\ x^2 & 0 & 4x & 4 \\ x & 4 & 10 & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Faça o que se pede:

a) Calcule o argumento do seguinte número complexo $i(1+i)$.

b) Escreva sob forma trigonométrica o número complexo $Z = 1 + i\sqrt{3}$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma função $L : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ que satisfaz:
1. L é crescente, isto é, para quaisquer $0 < x < y$ tem-se $L(x) < L(y)$.
2. $L(x.y) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y > 0$.

Mostre que:
a) $L(1) = 0$.
b) $L(1/x) = -L(x)$ para todo $x > 0$.
c) $L(x/y) = L(x) - L(y)$ para quaisquer $x, y > 0$.
d) $L(x^n) = nL(x)$ para todo $x > 0$ e natural n.
e) $L(\sqrt[n]{x}) = \dfrac{1}{n} L(x)$ para todo $x > 0$ e natural n.
f) $L(x) < 0 < L(y)$ sempre que $0 < x < 1 < y$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Demonstrar analiticamente que se uma reta, perpendicular a uma corda de uma circunferência, passa pelo seu centro, então ela divide a corda no seu ponto médio.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Provar que a soma das distâncias de um ponto qualquer interior a um triângulo equilátero aos lados é constante.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a equação:

$$\operatorname{sen} x - \cos x = \operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1$$

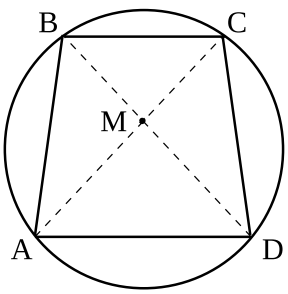
IME 1991/1992

1ª Questão [Valor: 1,0]
Prove que $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$, onde Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{C}$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Encontre todas as soluções de $\sec x - 2\cos x = 1$ em $[0, 2\pi]$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dado o quadrilátero $ABCD$, inscrito num círculo de raio r, conforme a figura abaixo, prove que:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB.AD + BC.CD}{AB.BC + CD.AD}$$



4ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem no sistema de base 7.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a equação da reta que passa por um dos vértices da curva definida por $4y^2 + 8y - x^2 = 4$, formando um ângulo de 45^o com o eixo horizontal.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Dados:

(1) Um cone de revolução com vértice S e cuja base circular está situada num plano π.

(2) Um ponto P exterior ao cone e não pertencente a π.

Pede-se: determinar, pelo ponto P, os planos tangentes ao cone.

7ª Questão [Valor: 1,0]
A partir da função

$$R(t) = e^{-At} + \frac{A}{B-A}\left(e^{-At} - e^{-Bt}\right)$$

onde t é a variável (tempo) e A e B são constantes reais, encontre a expressão de $R(t)$, para o caso em que A tende a B de modo que $R(t)$ seja uma função contínua.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que:
(1) $\mathrm{f(0)} = 0$.
(2) $\mathrm{f'(x)} = \dfrac{x^2 - 1}{(x^2+1)^2}$, $\forall x \in]0, \infty[$.
(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{f(x)} = 0$.

Pedem-se:
a) Os intervalos onde f é crescente (respectivamente, descrescente).
b) Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima (respectivamente, para baixo).
c) Onde ocorrem os pontos de máximo e mínimo absolutos e de inflexão?

Defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(x), & x < 0 \end{cases}$$

Esboce o gráfico de g.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o valor do determinante abaixo:

$$D_n = \begin{vmatrix} m+x & m & m & m & \ldots & m \\ m & m+x & m & m & \ldots & m \\ m & m & m+x & m & \ldots & m \\ m & m & m & m+x & m & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & m & m & \ldots & m+x \end{vmatrix}$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam $E_0 = [0, 1]$ e f_1, f_2: $E_0 \to E_0$ funções definidas por $f_1(x) = \dfrac{1}{3}x$ e $f_2(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$. Se $P(E_0)$ é o conjunto das partes de E_0, seja $F : P(E_0) \to P(E_0)$ a função definida por $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A)$, onde $f_i(A)$ é a imagem de A por f_i, $i = 1, 2$. Agora, para cada $n \geq 1$ definimos $E_n = F(E_{n-1})$.
a) Esboce graficamente E_0, E_1, E_2 e E_3. Mostre que $E_n \subset E_{n-1}$.
b) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} |E_n|$, onde $|E_n|$ é a soma dos comprimentos dos intervalos que formam E_n.

IME 1990/1991 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine todas as matrizes X reais, de dimensões 2×2, tais que $AX = XA$, para toda matriz A real 2×2.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 102\}$, pede-se o número de subconjuntos de A, com três elementos, tais que a soma destes seja um múltiplo de três.

3ª Questão [Valor: 1,0]
A coleção de selos de Roberto está dividida em três volumes. Dois décimos do total de selos estão no primeiro volume, alguns sétimos do total estão no segundo volume e 303 selos estão no terceiro volume. Quantos selos Roberto tem?

4ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que o número

$$\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$$

é racional.

5ª Questão [Valor: 1,0]

a) Sendo dada a equação $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, que relação deverá existir entre p e q para que uma das raízes seja igual ao produto das outras duas?

b) Mostre que a equação $x^3 - 6x - 4$ satisfaz a relação encontrada e, em seguida, encontre suas raízes.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1\}$ e $F : D \to \mathbb{R}^2$ uma função tal que $\forall (x, y) \in D$ associa $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ onde

$$\begin{cases} x = y \\ y = (1-y)x \end{cases}$$

a) Sendo $T = \{(x, y) |\ x > 0,\ y > 0,\ x+y < 1\}$, mostre que F é uma bijeção de D sobre T.

b) Esboce a imagem dos conjuntos da forma $\{(x, y) \in D |\ y = \lambda x\}$ para os seguintes valores de $\lambda :\ \lambda_0 = \frac{1}{4};\ \lambda_1 = \frac{1}{2};\ \lambda_2 = 1$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen} \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a função racional

$$f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$$

e sabendo que a, b, c, m, n, $p \in \mathbb{Z}$ e que

i) $f(2) = 0$.
ii) Para $x = -1$ tem-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.
iii) $\lim_{x \to -1} f(x) = -6$.
iv) $x = 1$ é raiz do polinômio $mx^2 + nx + p$.
v) $f(3) = \frac{1}{f(4)}$.

Determine os coeficientes a, b, c, m, n e p.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o quadrado $OABC$ cujos vértices são a origem e os pontos $A(1, 1)$, $B(0, 2)$ e $C(-1, 1)$. Seja $F(0, 1)$ o centro desse quadrado e P a parábola de foco F e cuja diretriz é o eixo das abscissas. Pede-se:

a) Mostre que P passa por A e C.
b) Determine a equação dessa parábola.
c) Calcule as coordenadas do ponto D, segundo ponto de interseção da reta BC com P.
d) Seja M um ponto qualquer de P cuja abscissa é x. Mostre que a potência de M em relação ao círculo (c) de diâmetro $\overline{CD}$ é $\frac{1}{4}(x+1)^3(x-3)$.
e) A partir do resultado anterior, encontre o conjunto dos pontos de P interiores a (c).

10ª Questão [Valor: 1,0]

a) A partir do estudo da variação do sinal das funções

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{e} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

deduza a relação

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x,\ \forall x \in\ ]0, +\infty[$$

b) Sendo $n \in \mathbb{Z}^+$, seja

$$P(n) = (1 + \frac{1}{n^2})(1 + \frac{2}{n^2}) \ldots (1 + \frac{n-1}{n^2})$$

Mostre que se $n \to \infty$, $P(n)$ admite um limite e calcule esse limite.

IME 1990/1991 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam um círculo, com centro O e raio R, e um ponto P tal que $\overline{OP} = 3R$.

a) Determine o diâmetro $\overline{MN}$ de modo que o triângulo PMN seja retângulo com ângulo reto em M.

b) Calcule, em função de R, os lados e a área do triângulo PMN.

c) PN intercepta a circunferência em um segundo ponto K. Calcule $\overline{PK}$.

d) O diâmetro $\overline{MN}$ gira em torno de O. Qual o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P sobre $\overline{MN}$?

e) Determine a posição do diâmetro $\overline{MN}$ para que a área do triângulo PMN seja máxima.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um círculo e uma reta que não se interceptam, ambos contidos num plano. Determine o lugar geométrico dos centros dos círculos que são tangentes ao círculo dado (exteriormente) e à reta dada.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam dois quadrados $ABCD$ e $ABEF$, tendo um lado comum AB, mas não situados num mesmo plano. Sejam M e N pertencentes, respectivamente, às diagonais AC e BF tais que $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$. Mostre que MN é paralelo a DE.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam A, B e C os ângulos de um triângulo. Mostre que

$$\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C = 4 \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que se num triângulo ABC vale a relação

$$\frac{\cos(B-C)}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen}(C-B)} = \operatorname{tg} B$$

então o triângulo é retângulo com ângulo reto em A.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um cone reto de base circular, vértice V, altura h e raio de base r e seja ABC um triângulo equilátero circunscrito à base do cone. Pede-se:

a) Determinar a relação entre h e r para que o tetraedro, com vértices $VABC$, seja regular.

b) Satisfeitas essas condições, calcule, em função de r, o volume limitado pela superfície do cone, pelo plano de sua base e pelos dois planos tangentes que passam pela aresta VA.

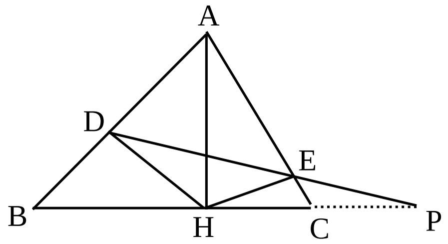
7ª Questão [Valor: 1,0]
Resolver o sistema

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 6 \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} + \dfrac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} = -6 \end{cases}$$

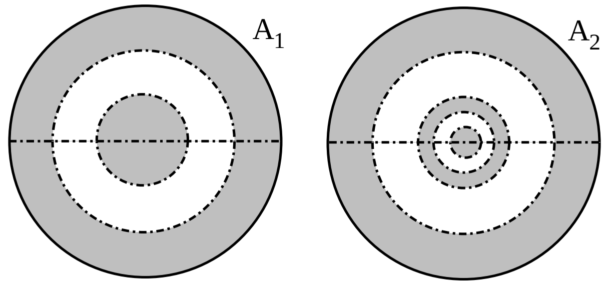
Sabendo que x e y pertencem ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja, sobre uma esfera, um círculo máximo (C) com diâmetro $\overline{AB} = 2R$. Traçam-se uma corda $\overline{MN}$ do círculo (C), paralela a AB, e duas retas x e y perpendiculares ao plano do círculo de diâmetro $\overline{AB}$ e passando, respectivamente, por M e N. Os planos definidos pelo ponto A e a reta x e o definido pelo ponto A e a reta y cortam a esfera segundo dois círculos. Mostre que quando MN varia, mantendo-se paralela a AB, a soma dos quadrados de seus raios é constante.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Num triângulo ABC traçamos a altura $\overline{AH}$ e do pé H dessa altura construímos as perpendiculares $\overline{HD}$ e $\overline{HE}$ sobre os lados AB e AC. Seja P o ponto de interseção DE com BC. Construindo as alturas relativas aos vértices B e C determinam-se também, de modo análogo Q e R sobre os lados AC e AB. Demonstre que os pontos P, Q e R são colineares.



10ª Questão [Valor: 1,0]
No plano, considere um disco de raio R, chame este conjunto de A_0. Divida um raio de A_0 em três segmentos congruentes e retire de A_0 a coroa circular de raios $\frac{1}{3}R$ e $\frac{2}{3}R$, chame este conjunto de A_1. O conjunto A_1 contém um disco de raio $R_1 = \frac{1}{3}R$, divida um raio deste disco em três segmentos e, mais uma vez retire de A_1 a coroa circular de raios $\frac{1}{3}R_1$ e $\frac{2}{3}R_1$, chame este conjunto de A_2. Continue este processo indefinidamente e seja A o conjunto resultante.



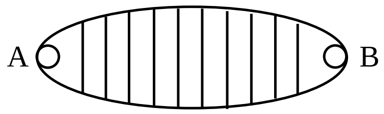
a) Calcule a área do conjunto A_n obtido após a n-ésima etapa do processo descrito acima.

b) Calcule a área do conjunto resultante A.

IME 1989/1990 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o determinante da matriz $n \times n$ que possui zeros na diagonal principal e todos os outros elementos iguais a 1.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Ligando as cidades A e B existem duas estradas principais. Dez estradas secundárias de mão dupla, ligam as duas estradas principais, como mostra a figura. Quantos caminhos, sem auto-interseções, existem de A até B?
Obs: Caminho sem auto-interseções é um caminho que não passa por um ponto duas ou mais vezes.



3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a família de retas representada pela equação

$$y = mx - \frac{p(1+m^2)}{2m}$$

onde p é uma constante positiva dada e m um número real variável.

a) Determine a condição para que num ponto $M = (x_0, y_0)$ do plano cartesiano passem duas retas dessa família.

b) Determine o lugar geométrico dos pontos M para os quais as retas que por eles passem sejam perpendiculares.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Considere as funções:

$$f(x) = a^x, \text{ onde } a > 1$$
$$g(x) = \sqrt{2px}, \text{ onde } p > 0$$

Mostre que uma condição necessária e suficiente para que seus gráficos se tangenciem é

$$a = e^{\frac{p}{e}}$$

Neste caso, determine, em função de p, a equação da tangente comum.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Na elipse de excentricidade $\frac{1}{2}$, foco na origem e reta diretriz dada por $3x + 4y = 25$, determine

a) Um dos focos da elipse.

b) O outro foco.

c) A equação da outra reta diretriz.

sln: Quantos focos tem esta elipse?

6ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a função

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

definida em $0 < x < \infty$. Calcule o valor de f em cada ponto e esboce o seu gráfico.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a equação

$$z^5 = \overline{z}$$

onde $\overline{z}$ é o conjugado do número complexo z.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja f uma função definida nos inteiros positivos satisfazendo

i) $f(1) = 1$.
ii) $f(2n) = 2f(n) + 1$.
iii) $f(f(n)) = 4n - 3$.

Calcule $f(1990)$.

9ª Questão [Valor: 1,0]
IMEBOL é um jogo de três jogadores. Em cada partida o vencedor marca a pontos, o segundo colocado marca b pontos e o terceiro colocado marca c pontos, onde $a > b > c$ são inteiros positivos. Certo dia, Marcos, Flávio e Ralph resolvem jogar IMEBOL e após algumas partidas a soma dos pontos foi: Marcos: 20, Flávio: 10, Ralph: 9. Sabe-se que Flávio venceu a segunda partida. Encontre quantos pontos cada um marcou em cada partida disputada.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Para que valores de p a equação $x^4 + px + 3$ tem raiz dupla? Determine, em cada caso, as raízes da equação.

IME 1989/1990 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o valor de

$$p = \operatorname{sen}\frac{\pi}{24}\ \operatorname{sen}\frac{5\pi}{24}\ \operatorname{sen}\frac{7\pi}{24}\ \operatorname{sen}\frac{11\pi}{24}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $\overline{AB}$ um diâmetro de um círculo de centro O e raio R. Sobre o prolongamento de $\overline{AB}$ escolhemos um ponto $P(\overline{PB} < \overline{PA})$. Partindo de P tomamos uma secante que corta o círculo nos pontos M e N ($\overline{PM} < \overline{PN}$), de modo que $\overline{PM} = \overline{AN} = R$.

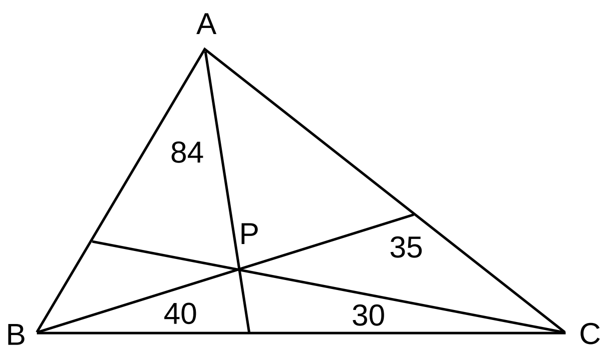
a) Mostre que a corda $\overline{MB}$ é um lado de um polígono regular inscrito de dezoito lados.

b) Encontre uma equação (do 3º grau) que determina a distância de P ao centro do círculo em função de R.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma esfera de raio R. Determine a figura geométrica à qual pertence o lugar geométrico dos vértices dos triedros nos quais as três arestas são tangentes a essa esfera e formam, duas a duas, ângulos de 60º.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Dois círculos de raios R e r são, ao mesmo tempo, bases de um tronco de cone e bases de dois cones opostos de mesmo vértice e mesmo eixo. Seja K a razão entre o volume do tronco e a soma dos volumes dos dois cones opostos e seja m a razão $\frac{R}{r}$. Determine m em função de K.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Seja P um ponto no interior de um triângulo ABC, dividindo-o em seis triângulos, quatro dos quais têm áreas 40, 30, 35 e 84, como mostra a figura. Calcule a área do triângulo ABC.



6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um segmento fixo OA de comprimento a e uma semi-reta variável Ox tal que $A\hat{O}x = \alpha$, α ângulo agudo, pertencente a um plano fixo π. Seja a perpendicular ao plano π em A e seja B pertencente a esta perpendicular tal que $AB = a$. Seja C o pé da perpendicular traçada de B sobre Ox. Pedidos:
a) Qual a propriedade comum a todas as faces do tetraedro $OABC$?
b) Calcule o comprimento das seis arestas de $OABC$ em função de a e α.
c) Calcule o volume v do tetraedro em função de a e α.
d) Determine α de modo que $v = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ (existem dois valores).
e) Determine o volume comum aos dois sólidos encontrados no item anterior.

7ª Questão [Valor: 1,0]

a) Obtenha a expressão para $\operatorname{tg} 3\alpha$ em função de $\operatorname{tg}\alpha = x$.
b) Utilize o item anterior para determinar as soluções da equação

$$x^3 - 3mx^2 - 3x + m = 0$$

onde m é um número real dado.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Os lados de um triângulo estão em progressão aritmética e o lado intermediário mede ℓ. Sabendo-se que o maior ângulo excede o menor em 90º, calcule a razão entre os lados.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Prove que as tangentes ao círculo circunscrito a um triângulo, passando nos seus vértices, interceptam os lados opostos em três pontos colineares.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um triângulo ABC cujos lados são tangentes a uma parábola. Prove que o círculo circunscrito ao triângulo passa pelo foco.

IME 1988/1989 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o coeficiente de x^{-9} no desenvolvimento de

$$\left(x^2+\frac{1}{x^5}\right)^2 \cdot \left(x^3+\frac{1}{x^4}\right)^5$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Esboce o gráfico da função

$$y = f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$$

assinalando os pontos críticos.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Um ponto se move de modo que o quadrado de sua distância à base de um triângulo isósceles é igual ao produto de suas distâncias aos outros dois lados do triângulo. Determine a equação da trajetória deste ponto, identificando a curva descrita e respectivos parâmetros.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Três números, cuja soma é 126, estão em progressão aritmética e outros três em progressão geométrica. Somando os termos correspondentes das duas progressões obtêm-se 85, 76 e 84 respectivamente. Encontre os termos destas progressões.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a equação

$$x^2 + y^2 - 2mx - 4(m+1)y + 3m + 14 = 0$$

a) Determine os valores de m, para que esta equação corresponda a um círculo.

b) Determine o lugar geométrico dos centros destes círculos.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que todas as raízes da equação

$$(z+1)^5 + z^5 = 0$$

pertencem a uma mesma reta paralela ao eixo imaginário.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Em cada uma das faces de um cubo constrói-se um círculo e em cada círculo marcam-se n pontos. Unindo-se estes pontos,

a) Quantas retas, não contidas numa mesma face do cubo, podem ser formadas?
b) Quantos triângulos, não contidos numa mesma face do cubo, podem ser formados?
c) Quantos tetraedros, com base numa das faces do cubo, podem ser formados?
d) Quantos tetraedros, com todos os vértices em faces diferentes, podem ser formados?

Obs: Suponha que, se 4 pontos não pertencem a uma mesma face, então não são coplanares.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{bmatrix}$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva o sistema

$$\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja uma elipse cujo eixo maior $AA' = 2a$ e cuja excentricidade é $1/2$. Seja F o foco da elipse, correspondente ao vértice A. Considere a parábola, cujo vértice é o ponto O, centro da elipse, e cujo foco coincide com o foco F da elipse. Determine o ângulo entre as duas curvas nos pontos de interseção.

IME 1988/1989 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a seguinte desigualdade:

$$\frac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} \geq 2,$$

para $0 \leq x \leq \pi$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Numa circunferência de centro O e de diâmetro $AB = 2R$, prolonga-se o diâmetro AB até um ponto M, tal que $BM = R$. Traça-se uma secante MNS tal que $MN = NS$, onde N e S são os pontos de interseção da secante com a circunferência. Determine a área do triângulo MOS.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam ABC e ACD dois triângulos retângulos isósceles com o lado AC comum, e os vértices B e D situados em semiplanos distintos em relação ao lado AC. Nestes triângulos $AB = AC = a$ e $AD = CD$.

a) Calcule a diagonal BD do quadrilátero $ABCD$.

b) Seja E o ponto de interseção de AC com BD. Calcule BE e ED.

c) Seja F a interseção da circunferência de diâmetro BC com a diagonal BD. Calcule DF e EF.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que a área total do cilindro equilátero inscrito em uma esfera é média geométrica entre a área da esfera e a área total do cone equilátero inscrito nessa esfera.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que, se os ângulos de um triângulo ABC verificam a igualdade $\operatorname{sen} 4A + \operatorname{sen} 4B + \operatorname{sen} 4C = 0$, então o triângulo é retângulo.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja ABC um triângulo retângulo isósceles, com $AB = AC = a$. Sejam BB' e CC' dois segmentos de comprimento a, perpendiculares ao plano ABC e situados no mesmo semi-espaço em relação a este plano.

a) Calcule a área total da pirâmide de vértice A e base $BCC'B'$.

b) Calcule o volume desta pirâmide.

c) Mostre que os pontos A, B, C, C' e B' pertencem a uma esfera.

d) Determine o centro e o raio desta esfera.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $ABCD$ um trapézio cuja base maior $AB = a$ é fixa e cuja base menor CD tem comprimento constante igual a b. A soma dos lados não paralelos é constante e igual a L. Os prolongamentos dos lados não paralelos se cortam em I.

a) Demonstre que o lugar geométrico decrito pelo ponto I, quando a base CD se desloca, é uma cônica.

b) Determine os eixos e a distância focal.

8ª Questão [Valor: 1,0]
São dados um segmento AB e os pontos C e D, que o dividem, internamente e externamente na mesma razão. Mostre que as circunferências de diâmetros AB e CD são ortogonais.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um quadrado de lado a e um ponto P, exterior ao quadrado. Chame de "ângulo sob o qual o quadrado é visto pelo ponto P" o menor ângulo com vértice em P que contenha o quadrado. Determine o lugar geométrico dos pontos P, de onde o quadrado é visto sob um ângulo de 45^o.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $ABCD$ um tetraedro regular de aresta a. Seja O o baricentro da face ABC. Efetua-se uma translação do tetraedro igual a $AO/2$, obtendo-se um novo tetraedro $A'B'C'D'$.

a) Determine o volume da esfera inscrita no sólido comum aos tetraedros $ABCD$ e $A'B'C'D'$.

b) Determine o volume da esfera circunscrita a este sólido.

IME 1987/1988 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o valor de a para que o sistema abaixo tenha mais de uma solução e resolva-o neste caso:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Para que valores de x a função

$$f(x) = |x|^{\frac{1}{\ln x^4}} . \ln x^2$$

assume o valor $e^{\frac{1}{4}}$?
Obs: ln denota logaritmo neperiano.

3ª Questão [Valor: 1,0]

a) Mostre que se $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_1 x^3 + a_0 x^4$, então existe um polinômio $g(x)$ do 2º grau, tal que $p(x) = x^2 g(x + x^{-1})$.
b) Determine todas as raízes do polinômio $p(x) = 1 + 4x + 5x^2 + 4x^3 + x^4$.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja a função

$$f(x) = 6\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$$

a) Determine os pontos de máximo, mínimo e de inflexão de $f(x)$, caso existam.
b) Trace o gráfico desta função.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a seqüência cujos primeiros termos são: $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$ Seja a_n seu n-ésimo termo. Mostre que

$$a_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

para todo $n \geq 2$.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a equação e o raio do círculo de menor diâmetro, que possui com o círculo $x^2 + y^2 - 8x - 25 = 0$, eixo radical $y - 2x - 5 = 0$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um torneio de xadrez com 10 participantes. Na primeira rodada cada participante joga somente uma vez, de modo que há 5 jogos realizados simultaneamente. De quantas formas distintas esta primeira rodada pode ser realizada? Justifique sua resposta.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que por todo ponto não situado no eixo OX passam exatamente duas parábolas com foco na origem e eixo de simetria OX e que estas parábolas interceptam-se ortogonalmente.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam A, B e C matrizes 5×5, com elementos reais. Denotando-se por A' a matriz transposta de A:
a) Mostre que se $A.A' = \mathbf{0}$, então $A = \mathbf{0}$.
b) Mostre que se $B.A.A' = C.A.A'$, então $B.A = C.A$.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Considere os seguintes conjuntos de números complexos: $A = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1, \text{Im}(z) > 0\}$ e $B = \{z \in \mathbb{C}/\text{Re}(z) = 1, \text{Im}(z) > 0\}$, onde $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$ são as partes real e imaginária do número complexo z, respectivamente.
a) Mostre que para cada $z \in A$, o número $\dfrac{2z}{z+1}$ pertence a B.
b) Mostre que cada $w \in B$ pode ser escrito da forma $\dfrac{2z}{z+1}$ para algum $z \in A$.

IME 1987/1988 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Demonstre que num triângulo ABC

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\cos B + \cos C}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Dado um círculo de raio R e centro O, constroem-se três círculos iguais de raios r, tangentes dois a dois, nos pontos E, F e G e tangentes interiores ao círculo dado. Determine, em função de R, o raio destes círculos e a área da superfície EFG, compreendida entre os três círculos e limitada pelos arcos EG, GF e FE.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Demonstre a identidade

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 2\left(\frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x}\right)$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o lado c de um triângulo ABC, em função de sua área S, do ângulo C e de $k = a + b - c$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Secciona-se um cubo de aresta a por planos passando pelos pontos médios das arestas concorrentes em cada vértice. Considere o sólido formado ao retirar-se as oito pirâmides obtidas. Calcule a soma das arestas, a área e o volume deste sólido.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Sobre os catetos AB e AC de um triângulo retângulo ABC constroem-se dois quadrados $ABDE$ e $ACFG$. Mostre que os segmentos CD, BF e a altura AH são concorrentes.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um semi-círculo de diâmetro $AB = 2R$. Por A, traça-se uma reta que forma um ângulo de 30º com o diâmetro AB e que corta o semi-círculo em C. Por C, traça-se a tangente ao semi-círculo, que intercepta a reta que contém AB no ponto D. Fazendo-se uma rotação em torno da reta que contém AB, o semi-círculo gera uma esfera (E) e o triângulo ACD gera um sólido (S).

a) Calcule o volume deste sólido (S), em função do raio R.

b) Seja M um ponto sobre AB tal que $AM = \frac{R}{3}$. Considere um plano (π) passando por M e perpendicular à reta AB, seccionando-se a esfera (E) e o sólido (S). Calcule a razão entre a área destas duas secçes.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Dadas duas retas reversas r e s, ortogonais e sua perpendicular comum t, que corta r em I e s em K. Considere um segmento AB, de comprimento constante, que se move apoiando suas extremidades A e B, respectivamente sobre r e s. Unindo-se A a K e I a B, forma-se um tetraedro variável $ABIK$.
a) Demonstre que a soma dos quadrados das arestas deste tetraedro é constante.
b) Calcule o raio da esfera circunscrita ao tetraedro em função da distância AB.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Seja o semi-círculo de diâmetro $AB = 2R$ e r sua tangente em A. Liga-se um ponto P da reta r ao ponto B, interceptando o semi-círculo no ponto C.
a) Demonstre que o produto $PB.BC$ é constante.
b) Determine o lugar geométrico do ponto médio de AC, quando P desloca-se sobre a tangente.
c) Seja $AP = \frac{PB}{2}$, calcule a área da porção do triângulo PAB situada no exterior do semi-círculo.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Considere as esferas cuja interseção com um plano (π) é um círculo fixo (C). Seja r uma reta do plano (π), exterior ao círculo. Determine o lugar geométrico dos pontos de contato dos planos tangentes a tais esferas e que contêm a reta r.

IME 1986/1987 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Dois números complexos Z_1 e Z_2, não nulos, são tais que

$$|Z_1 + Z_2| = |Z_1 - Z_2|$$

Mostre que $\dfrac{Z_2}{Z_1}$ é imaginário puro.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Determine as soluções reais do sistema

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 70 \\ (x+y).(x^2+y^2) = 203 \end{cases}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dados dois conjuntos A e B, define-se

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Prove que dados três conjuntos arbitrários X, Y e Z

$$X \cap (Y\Delta Z) = (X \cap Y)\Delta(X \cap Z)$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Dados um sistema de eixos ortogonais XOY e um ponto A, de coordenadas (x_0, y_0), $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, considere dois pontos variáveis P e Q, P pertencente ao eixo OX e Q pertencente ao eixo OY, tais que a área do triângulo APQ seja constante e igual a K, $K \in \mathbb{R}$. Calcule e identifique a equação do lugar geométrico do ponto médio do segmento PQ.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Seja f uma função de uma variável real definida por

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 3)$$

onde ln é o logaritmo neperiano.

a) Calcule o domínio e a imagem de f.
b) Determine uma função $\varphi(x)$ com $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x) = 0$, tal que $f(x) = 2x + \varphi(x)$, para todo x pertencente ao domínio de f.
c) Faça o gráfico de $f(x)$, indicando seus mínimos e máximos relativos e suas assíntotas.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja f uma função bijetora de uma variável real e a relação h, definida por

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \to & \big(x^3, x - f(y)\big) \end{array}$$

Verifique se h é bijetora e calcule uma relação g, tal que

$$\begin{array}{l} g \circ h(x, y) = (x, y) \\ h \circ g(x, y) = (x, y),\ \forall x,\ \forall y \in \mathbb{R} \end{array}$$

7ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam a, b, c números inteiros tais que $100a+10b+c$ seja divisível por 109. Mostre que $(9a - c)^2 + 9b^2$ também é divisível por 109.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que para todo número natural n maior ou igual a 2,

$$2^{\frac{5n}{4}} < \binom{2n}{n}$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & j & l & m \\ n & o & p & q \end{pmatrix}$$

duas matrizes de elementos inteiros. Verifique se a matriz AB é inversível.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $p(x)$ um polinômio de grau 16 e coeficientes inteiros.

a) Sabendo-se que $p(x)$ assume valores ímpares para $x = 0$ e $x = 1$, mostre que $p(x)$ não possui raízes inteiras.
b) Sabendo-se que $p(x) = 7$ para quatro valores de x, inteiros e diferentes, para quantos valores inteiros de x, $p(x)$ assume o valor 14?

IME 1986/1987 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível. Demonstre que os círculos inscritos nos triângulos ABC e ACD têm, com a diagonal AC, um mesmo ponto em comum.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a inequação

$$\frac{2\cos x + 2\,\mathrm{sen}\,x + \sqrt{2}}{\cos x - \mathrm{sen}\,x} < 0$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Sobre uma reta r marcam-se, nesta ordem, os pontos A, B, C e D. Em um dos semiplanos determinados por r, traçam-se as semicircunferências de diâmetros AB, CD e AD; no outro semiplano traça-se a semicircunferência de diâmetro BC. Calcule a razão entre a área delimitada por estas semicircunferências e a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos médios das semicircunferências. Mostre que esta razão independe dos pontos A, B, C e D.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja uma hipérbole equilátera de centro O e focos F e F'. Mostre que o segmento determinado por O e por um ponto M qualquer da hipérbole é média proporcional entre os segmentos MF e MF'.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Dado um triângulo ABC de lados a, b, c opostos aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ respectivamente e de perímetro $2p$, mostre que

$$a = \frac{p\,\mathrm{sen}\,\frac{\hat{A}}{2}}{\cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam duas circunferências, não ortogonais, de centros O e O' que se interceptam em A e B. Sendo D e D' os pontos onde as retas $O'A$ e OA interceptam, respectivamente, as circunferências de centro O e O', demonstre que o pentágono $BODD'O'$ é inscritível.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Num plano π tem-se um retângulo $ABCD$ de dimensões $AB = 2a$ e $AD = a$. Consideram-se a superfície prismática, cujas arestas são as retas perpendiculares a π, passando por A, B, C, D e um ponto C', sobre a aresta traçada por C, tal que $CC' = b$. Seccionando-se esta superfície por um plano passando por AC':

a) Mostre que é possível obter-se para seção plana um losango $AB'C'D'$, onde B' e D' são pontos das arestas que passam respectivamente por B e D.
b) Determine, em função de a e b, uma condição necessária e suficiente para que o losango esteja situado em um mesmo semiespaço em relação ao plano π.
c) Calcule o volume do tronco de prisma $ABCDB'C'D'$, supondo satisfeitas as condições do item anterior.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice V e base $ABCDEF$, de lado da base igual a ℓ e altura h:

a) Mostre que existem duas esferas tangentes aos planos das faces dessa pirâmide.
b) Calcule os raios dessas esferas.
c) Mostre que o produto desses raios independe de h.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam duas retas ortogonais r e r' não coplanares. Considere sobre r dois pontos fixos A e B e sobre r' dois pontos variáveis M e M', tais que a projeção de M' sobre o plano que contém o triângulo MAB é o ortocentro H deste triângulo. Determine o lugar geométrico dos centros das esferas circunscritas ao tetraedro $ABMM'$.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam A, B, C, D, E os vértices de um pentágono regular inscrito num círculo e M um ponto qualquer sobre o arco $\overset{\frown}{AE}$. Unindo-se M a cada um dos vértices do pentágono, mostre que os segmentos satisfazem

$$MB + MD = MA + MC + ME$$

IME 1985/1986 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine $\log_{\sqrt{0{,}333\ldots}} \sqrt{0{,}037037\ldots}$

2ª Questão [Valor: 1,0]
No produto abaixo, o "*" substitui algarismos diferentes de "3" e não necessariamente iguais. Determine o multiplicando e o multiplicador.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & * & * & 3 & * \\
 & & & & * & * & 3 \\
\hline
 & & & 3 & * & * & * \\
 & * & * & * & 3 & 3 & \\
 & * & * & * & * & & \\
\hline
* & * & * & * & * & * & *
\end{array}
$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais não nulos e $n \in \mathbb{N}^*$. Mostre que a relação $R_n = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{N}^*$ e $|a - b|$ é múltiplo de $n\}$ é uma relação de equivalência.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Uma padaria trabalha com 4 tipos de farinha cujos teores de impureza são os seguintes:

TIPO	TEOR
A	8%
B	12%
C	16,7%
D	10,7%

Para fabricar farinha tipo D, o padeiro mistura uma certa quantidade de farinha A com 300 gramas de farinha tipo B; em seguida, substitui 200 gramas dessa mistura por 200 gramas de farinha tipo C. Determine a quantidade de farinha tipo A utilizada.

5ª Questão [Valor: 1,0]
A derivada de ordem n de uma função $y = f(x)$ é a primeira derivada da derivada de ordem $n-1$ da mesma função, ou seja:

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y^{(n-1)}$$

Calcule $\left[(x^2 + 1)\operatorname{sen} x\right]^{(20)}$.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a equação e identifique o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos determinados pela interseção da cônica

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$$

com as retas de coeficiente angular igual a $\frac{1}{2}$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja a curva representada pela equação

$$y = \frac{w\ell}{1 + w\ell} + \frac{1}{1 + w\ell} \sum_{i=1}^{4} \frac{w}{w + \lambda_i}$$

onde ℓ, λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 são constantes reais, tais que $1 > \lambda_{i+1} > \lambda_i > \ell > 0$. Esboce o gráfico de y, caracterizando as assíntotas, num sistema cartesiano ortogonal.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que os números 12, 20 e 35 não podem ser termos de uma mesma progressão geométrica.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sabendo-se que x é um número real, $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq \arccos x \leq \pi$ e n é um número inteiro positivo, mostre que a expressão

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

pode ser desenvolvida como um polinômio em x, de grau n, cujo coeficiente do termo de maior grau é igual a 2^{n-1}.

10ª Questão [Valor: 1,0]
12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

IME 1985/1986 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um paralelepípedo retângulo de bases $ABCD$ e $A'B'C'D'$, cujas arestas AA', BB', CC' e DD' tenham por comprimento h e os lados da base sejam, respectivamente, $AB = a$ e $AD = b$. Por DD' considere dois planos $DD'MM'$ e $DD'NN'$.

a) Determine as distâncias $AM = x$ e $CN = y$ para que esses dois planos dividam o paralelepípedo em três partes de mesmo volume.

b) Determine a razão entre os volumes dos sólidos $MBNM'B'N'$ e $MDNM'D'N'$.

c) Encontre a relação entre a e b, que estabeleça a condição necessária e suficiente para que o diedro de aresta MM', cujas faces passem por DD' e NN', seja reto.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um triângulo ABC, retângulo em A. Por B, traça-se uma reta perpendicular ao plano do triângulo. Sobre esta, fixa-se um ponto S. Por B, passa-se um plano que intercepta SC em C' e seja perpendicular a SC. O plano corta SA em A'. Demonstre que os cinco pontos A, B, C, A' e C' pertencem a uma mesma esfera.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dadas duas esferas de raios respectivamente iguais a R e r, tangentes exteriores, e um cone circunscrito a elas. Calcule a área da superfície lateral do tronco do cone que tenha por bases os círculos de contato das esferas com o cone.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Dados dois pontos fixos A e B ($\overline{AB} = d$), considere as elipses passando por B, com foco em A e eixo maior de comprimento $2a$, tal que $2a > d$.

a) Determine o lugar geométrico do segundo foco F das elipses.

b) Determine o lugar geométrico dos centros de gravidade dos triângulos ABF.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um triângulo ABC qualquer e três pontos X, Y e Z, tais que $X \in BC$, $Y \in AC$ e $Z \in AB$. Considere os círculos (C_1), (C_2) e (C_3) que passam respectivamente pelos pontos CXY, AYZ e BXZ. Demonstre que (C_1), (C_2) e (C_3) se encontram em um ponto W.

6ª Questão [Valor: 1,0]

a) Demonstre que a diferença entre os quadrados de dois lados de um triângulo é igual ao dobro do produto do terceiro lado pela projeção, sobre ele, da mediana correspondente.
b) Determine o lugar geométrico dos centros dos círculos que cortam dois círculos exteriores, de centros O_1 e O_2 e raios respectivamente iguais a R_1 e R_2, em pontos diametralmente opostos.

7ª Questão [Valor: 1,0]

a) Resolva a equação

$$m \cos x - (m+1) \operatorname{sen} x = m, \quad m \in \mathbb{R}$$

b) Determine m de modo que essa equação admita raízes x' e x'' cuja diferença seja $\pi/2$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Num triângulo ABC ($\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$) traçam-se as bissetrizes externas AA' do ângulo $\hat{A}$, com A' sobre o prolongamento de BC, e CC' do ângulo $\hat{C}$, com C' sobre o prolongamento de AB. Se $AA' = CC'$ mostre que

$$c \operatorname{sen} \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} = a \operatorname{sen} \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Dado um tronco de pirâmide triangular de bases paralelas, demonstre que as retas que ligam os vértices da base inferior aos pontos médios dos lados opostos da base superior são concorrentes.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja uma parábola de foco F e diretriz d. Por um ponto $P \in d$, traçam-se tangentes à parábola que a interceptam em M_1 e M_2. Demonstre que M_1, M_2 e F estão em linha reta.

IME 1984/1985 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam as funções

$$z = \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{1-x^4}$$

Mostre que no subconjunto dos reais onde as funções são definidas

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{z}{x^4}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Encontre o valor de k para que a reta determinada pelos pontos $A(0,3)$ e $B(5,-2)$ seja tangente à curva $y = \dfrac{k}{x+1}$ para $x \neq -1$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o valor de b tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \log_p 5^{t+1} = 4$$

onde $p = b^{(t+1)2^t}$.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja A uma relação definida sobre os reais, contendo os pontos pertencentes às retas $y = \frac{1}{2}x$ e $y = 2x$. Determine os pontos que necessariamente devem pertencer à A para que A seja transitiva.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam z_1 e z_2 complexos de raios vetores OP_1 e OP_2, respectivamente. Mostre que OP_1 e OP_2 são perpendiculares se e somente se $z_1\overline{z_2}$ é um imaginário puro.
Obs: $\overline{z}$ é o conjugado complexo de z.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Sabe-se que as raízes do polinômio abaixo são todas reais e distintas

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0;$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,\ldots,n$; $a_n \neq 0$. Mostre que a derivada $f'(x)$ possui também todas as suas raízes reais e distintas.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja a sequência $\{v_n\}$, $n = 0,1,2,\ldots$, definida a partir de seus dois primeiros termos v_0 e v_1 e pela fórmula geral

$$v_n = 6v_{n-1} - 9v_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 2$$

Define-se uma nova sequência $\{u_n\}$, $n = 0,1,2,\ldots$, pela fórmula $v_n = 3^n u_n$.

a) **[Valor: 0,4]** Calcule $u_n - u_{n-1}$ em função de u_0 e u_1.
b) **[Valor: 0,3]** Calcule u_n e v_n em função de n, v_1 e v_0.
c) **[Valor: 0,3]** Identifique a natureza das sequências $\{v_n\}$ e $\{u_n\}$ quando $v_1 = 1$ e $v_0 = \frac{1}{3}$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Dois clubes do Rio de Janeiro participaram de um campeonato nacional de futebol de salão onde cada vitória valia um ponto, cada empate meio ponto e cada derrota zero ponto. Sabendo que cada participante enfrentou todos os outros apenas uma vez, que os clubes do Rio de Janeiro totalizaram, em conjunto, oito pontos e que cada um dos outros clubes alcançou a mesma quantidade k de pontos, determine a quantidade de clubes que participou do torneio.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Um exame vestibular se constitui de 10 provas distintas, 3 das quais da área de Matemática. Determine de quantas formas é possível programar a seqüência das 10 provas, de maneira que duas provas da área de Matemática não se sucedam.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Uma reta m_1 passa pelo ponto fixo $P_1(-1,-3)$ e intercepta a reta $m_2 : 3x + 2y - 6 = 0$ no ponto A e a reta $m_3 : y - 3 = 0$ no ponto B. Determinar a equação do lugar geométrico do ponto médio do segmento retilíneo AB à medida que a reta m_1 gira em torno do ponto P_1.

IME 1984/1985 - Geometria

1ª Questão [Valor: 0,6]
Dá-se um triângulo retângulo isósceles de catetos $AB = AC = \ell$. Descreve-se um quarto de círculo (Q) de centro A, ligando os vértices B a C. Com diâmetro BC, descreve-se um semi-círculo (S) exterior ao triângulo e que não contém A. Traçam-se duas semicircunferências de diâmetros AB e AC, (S_b) e (S_c), ambas passando pelo ponto D, meio de BC. Seja M a superfície compreendida entre (Q) e (S). Seja N a superfície entre (Q) e o arco BD de (S_b) e o arco CD de (S_c). Seja P a superfície limitada pelos arcos AD de (S_c) e AD de (S_b). Demonstre que:

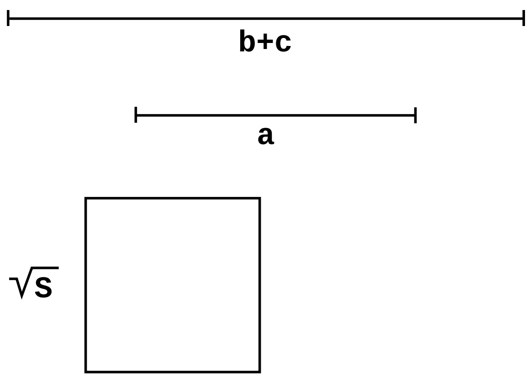
a) A área M é igual a área do triângulo ABC.

b) As áreas N e P são iguais.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Em um triângulo ABC são dados o lado a, a soma dos outros dois lados, $b + c = \ell$, e a área S.

a) Construa o triângulo com régua e compasso.

b) Calcule os ângulos A, B e C e os lados b e c.



3ª Questão [Valor: 1,0]
Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice V e base $ABCDEF$, de lado da base igual a ℓ e altura h, determine, em função de ℓ e h, a posição do centro da esfera que é tangente às doze arestas da pirâmide.

4ª Questão [Valor: 1,4]
Em um plano π dão-se uma circunferência de centro O e raio r, um ponto fixo A sobre ela e um diâmetro variável BC tal que o ângulo $\widehat{ABC}$ seja igual a Θ $(0 \leq \Theta \leq \pi/2)$. Sobre a perpendicular a π em A, marca-se um ponto V tal que $AV = 2r$. Considere-se um tetraedro $ABCV$.

a) Calcule em função de r e Θ as arestas do tetraedro.

b) Mostre que a soma dos quadrados destas arestas é constante quando Θ varia.

c) Qual o lugar geométrico do ponto H de π, pé da altura VH do triângulo VBC?

d) Para que posição de BC a área do triângulo VBC é máxima e qual o valor desse máximo?

e) Calcule, em função de Θ, a tangente de α, onde α é igual ao ângulo $\widehat{VHA}$.

f) Deduza o valor de Θ que corresponde ao mínimo do diedro de aresta BC.

g) Calcule Θ para que se tenha tangente de α igual a $4/\sqrt{3}$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Dão-se um plano π e dois pontos A e B não pertencentes a π, situados em um mesmo semi-espaço de π, sendo:

i) $AB = \ell$.

ii) a e b as cotas de A e B em relação a π.

iii) $a < b$.

Determine um triângulo ABC isósceles, retângulo em C, tal que o vértice C pertença ao plano π. Discuta a possibilidade da existência desse triângulo e o número de soluções.

6ª Questão [Valor: 1,0]

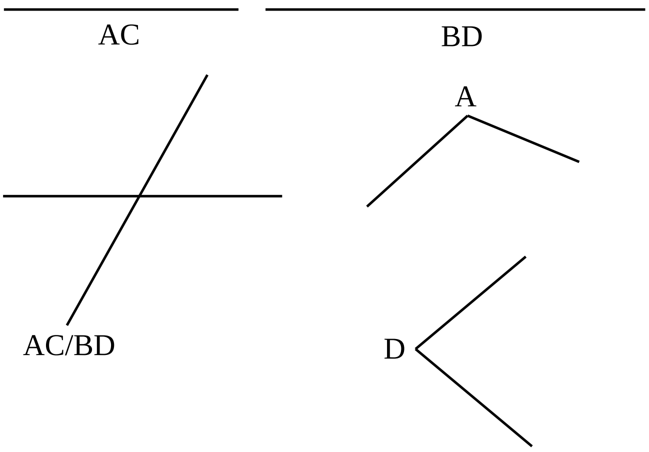
a) **[Valor: 0,5]** Dá-se (P) uma parábola de foco F e diretriz d. Sejam M um ponto qualquer de (P); M_1 sua projeção sobre d; M_2 a projeção de M_1 sobre FM. Identifique o lugar geométrico de M_2 quando M descreve a parábola (P).

b) **[Valor: 0,5]** Em uma hipérbole (H) são dados um foco F e a diretriz correspondente d, que distam entre si 5 cm. A direção de uma assíntota forma um ângulo de 30° com o eixo focal. Pede-se calcular os valores dos semi-eixos de (H).

7ª Questão [Valor: 0,8]
Em um triângulo ABC retângulo em A, é dada a razão k entre o produto das bissetrizes internas dos ângulos B e C e o quadrado da hipotenusa. Calcule B, em função de k. Determine entre que valores pode variar a razão k para que o problema tenha solução.

8ª Questão [Valor: 1,0]

a) [**Valor: 0,5**] Construa um quadrilátero convexo $ABCD$, dados: os comprimentos das diagonais AC e BD; o ângulo de AC com BD; os ângulos adjacentes A e D.



b) [**Valor: 0,5**] São dados dois círculos concêntricos, (C_1) e (C_2), de raios r_1 e r_2 $(r_1 > r_2)$ e centro O. Por um ponto A de (C_1) determine uma corda AD de (C_1), que corta (C_2) em B e C, tal que $AD = 3BC$. Discuta a possibilidade e o número de soluções.

9ª Questão [Valor: 1,0]

Seja um triângulo acutângulo $A_1A_2A_3$. Traça-se um círculo de diâmetro A_2A_3 e de A_1 traçam-se tangentes a ele, com pontos de contato T_1 e T_1'. Analogamente procede-se com os lados A_3A_1 e A_1A_2, obtendo-se os pontos de contato T_2, T_2' e T_3, T_3'. Mostre que os seis pontos de contato obtidos pertencem a um círculo de centro G (baricentro de $A_1A_2A_3$).

10ª Questão [Valor: 1,2]

Dão-se um plano horizontal π, um de seus pontos O e a vertical em O, OV. A cada ponto P de π faz-se corresponder um ponto P_1 sobre a vertical em P, tal que $\dfrac{PP_1}{OP} = k$ (constante). Com essa correspondência, π transforma-se em uma superfície (S).

a) Deduza a natureza de (S), as seções de (S) por planos passando por OV e as seções de (S) por planos perpendiculares a OV; identifique o plano tangente a (S) em um ponto qualquer P_1.

b) De um ponto Q fixo sobre OV tal que $OQ = h$, traça-se uma perpendicular sobre OP_1: considera-se a esfera (E) de centro Q e raio QN. (N é o pé da perpendicular sobre OP_1). Determine a curva comum a (E) e a (S) e calcule o volume compreendido entre (E) e (S).

IME 1983/1984 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $\log a$ o logaritmo decimal de a e $\log_3 a$ o logaritmo de a na base 3. São dados: $\log 2 = \alpha$ e $\log 3 = \beta$. Calcule em função de α e β os valores de $\log N$ e $\log_3 N$ onde

$$N = 243\sqrt[4]{\frac{364{,}5}{\sqrt[3]{2}}}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o polinômio

$$p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tal que $p(x) = p(1-x)$, $p(0) = 0$ e $p(-1) = 6$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Quais as relações entre os coeficientes reais a, b, c, d da equação

$$x^2 + 2(a+ib)x + c + id = 0$$

de modo que ela seja satisfeita para um valor real $x = k$?
Obs: $i^2 = -1$.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Determine os valores de m para os quais as quatro raízes da equação biquadrada

$$x^4 - (3m+5)x^2 + (m+1)^2 = 0$$

sejam reais e estejam em progressão aritmética.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a soma de todos os números inteiros que são obtidos permutando-se, sem repetição, os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja o desenvolvimento $\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\right)^n$ onde n é um inteiro positivo. Determine n sabendo-se que o maior dos coeficientes é o do termo em x^{n-9}.

7ª Questão [Valor: 1,0]
São dadas duas retas paralelas r e r' e um ponto O. Determine o lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas de O aos segmentos da reta AA', vistos de O sob um ângulo reto e tais que A pertence a r e A' pertence a r'. Sabe-se que:
Distância de O a r : d.
Distância de O a r': p.
Distância de r a r': $p - d$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a função definida nos reais por

$$y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$$

a) **[Valor: 0,6]** Estude a sua variação quanto a: continuidade e possível simetria de sua representação, crescimento ou descrescimento, extremos, inflexões e assíntotas.
b) **[Valor: 0,4]** Faça o esboço gráfico da curva representativa da função.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Seja D o determinante da matrix $A = [a_{ij}]$ de ordem n, tal que $a_{ij} = |i - j|$. Mostre que:

$$D = (-1)^{n-1}.(n-1).2^{n-2}$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a matriz $M = (m_{ij})$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, define-se em A uma relação R por:

$$a_i \; R \; a_j \Leftrightarrow m_{ij} = 1$$

Verifique se R é uma relação de equivalência.

IME 1983/1984 - Geometria

1ª Questão [Valor: 0,8]
Um triângulo equilátero ABC, de lado a, gira em torno de um eixo XX' de seu plano, passando por A sem atravessar o triângulo. Sendo S a área total da superfície gerada pelo triângulo e designando por Θ o ângulo $X\hat{A}B$, pede-se determinar os valores de Θ para que:

a) S seja máximo.

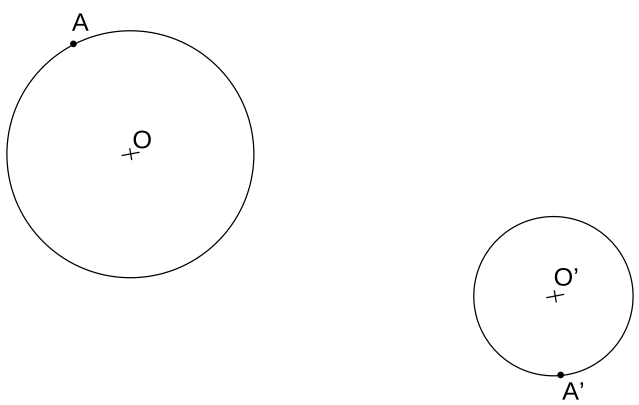
b) S seja mínimo.

c) $S = 3\pi a^2$.

Descreva o sólido obtido em cada um dos três casos.

2ª Questão [Valor: 1,4]

a) **[Valor: 0,8]** São dados dois círculos $C(O, r)$ e $C'(O', r')$, um ponto fixo A sobre C e um ponto fixo A' sobre C'. Traçam-se cordas paralelas AB e $A'B'$ nos círculos C e C', respectivamente. Determine a direção destas cordas para que o produto $AB.A'B'$ seja máximo.



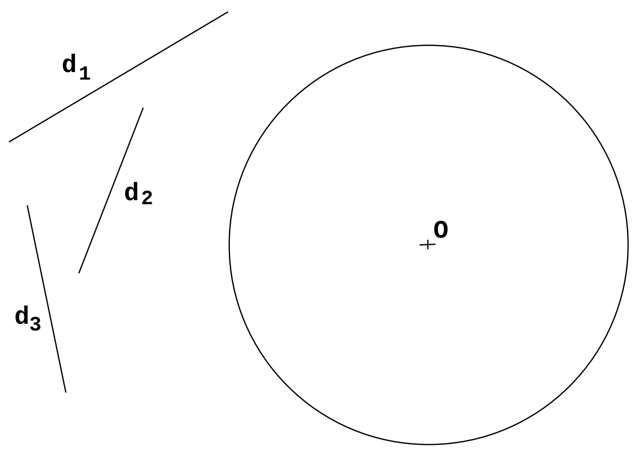
b) **[Valor: 0,6]** Dá-se um triângulo ABC. De um ponto P variável (e não pertencente às retas suportes dos lados do triângulo) traçam-se retas PB e PC. Sejam L e M os pés das perpendiculares de A a estas retas. Com a variação de P, o comprimento LM também varia. Qual o comprimento máximo de LM?
Obs: Para resolver este item não é necessário determinar a posição de P, correspondente a este máximo de LM.

3ª Questão [Valor: 0,5]
Sejam ℓ o lado de um polígono regular de n lados, r e R, respectivamente, os raios dos círculos inscrito e circunscrito a este polígono. Prove que

$$r + R = \frac{\ell}{2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2n}$$

4ª Questão [Valor: 0,8]
Um paralelepípedo tem a base $ABCD$ sobre um plano horizontal e as arestas verticais são AA', BB', CC' e DD'. As três arestas concorrentes $AB = a$, $AD = b$ e $AA' = c$ formam um triedro tri-retângulo, sendo $a > b > c$. Um plano secante corta a aresta AB em seu ponto médio M, a aresta BB' no ponto N, tal que $\frac{NB'}{NB} = \frac{1}{3}$ e a aresta $B'C'$ em P, tal que $B'P = x$, com $0 < x \leq b$. Pede-se estudar a forma das seções obtidas pelo plano secante MNP no paralelepípedo, quando a distância x varia nas condições dadas.

5ª Questão [Valor: 0,6]
Dão-se um círculo (c), de centro O, e três direções d_1, d_2 e d_3. Inscreva em (c) os triângulos cujos lados AB, BC e CA têm, respectivamente, as direções d_1, d_2 e d_3 e cujos vértices A, B e C se sucedem no círculo (c), no sentido do movimento dos ponteiros do relógio.



6ª Questão [Valor: 0,6]
Dão-se um quadrado de vértices A, B, C e D e o seu centro O. Mostre que os incentros dos triângulos, cujos vértices são cada 3 pontos não colineares deste conjunto de 5 pontos, são vértices de um polígono regular convexo e calcule, em função do lado ℓ do quadrado, o raio do círculo no qual está inscrito o polígono.

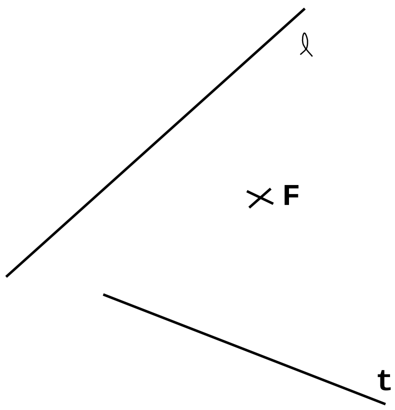
7ª Questão [Valor: 1,4]

a) **[Valor: 0,8]** São dados um cone de revolução de vértice V, cuja geratriz faz com o eixo do cone um ângulo β e uma elipse de semi-eixos a e b.

(1) Mostre que esta elipse pode ser sempre obtida como seção plana do cone dado.

(2) Sendo AB o traço do plano secante com o plano meridiano AVB, que lhe é perpendicular, demonstre a relação $VA.VB = b^2 \operatorname{cossec}^2 \beta$.

b) **[Valor: 0,6]** Em uma hipérbole (h) são dados: um foco F, uma assíntota (ℓ) e uma tangente (t). Pede-se determinar graficamente o outro foco, a outra assíntota e os comprimentos dos eixos, justificando a construção executada.



8ª Questão [Valor: 1,4]

a) **[Valor: 0,8]** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que os dois pares de lados opostos não são paralelos; AB encontra CD em E e AD encontra BC em F. Sejam L, M e N os pontos médios dos segmentos AC, BD e EF, respectivamente. Prove que L, M e N são colineares.

b) **[Valor: 0,6]** Dá-se um quadrilátero convexo inscritível em um círculo, cujos lados são cordas deste círculo e de comprimentos a, b, c e d e que se sucedem na ordem a, b, c, d.

(1) Calcule, em função de a, b, c, d os comprimentos das diagonais x e y.

(2) Permutando a ordem de sucessão das cordas, deduza, com auxílio de figuras, se as diagonais dos novos quadriláteros obtidos têm comprimentos diferentes de x e de y.

(3) Sabendo-se que a área de um quadrilátero inscritível é $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ e supondo que o quadrilátero, além de inscritível também é circunscritível, mostre que a fórmula de sua área reduz-se a $S = \sqrt{abcd}$.

9ª Questão [Valor: 0,8]
Determine os ângulos de um triângulo, dados o perímetro $2p$, o lado a e a altura correspondente ao lado a, h_a.

10ª Questão [Valor: 0,6]
Determine o lugar geométrico do vértice V de um triedro cujas faces medem 60° cada e cujas arestas tangenciam uma esfera (e) dada, de raio r e centro O.

11ª Questão [Valor: 0,6]
Numa circunferência são dadas uma corda fixa AB, igual ao lado do triângulo equilátero inscrito e uma corda móvel CD, de comprimento constante e igual ao lado do dodecágono regular convexo inscrito. As duas cordas são os lados opostos de um quadrilátero convexo inscrito $ABCD$. Determine o lugar geométrico do ponto de encontro dos outros dois lados, especificando a delimitação deste lugar.

12ª Questão [Valor: 0,5]
Obtenha uma relação entre a, b e c, eliminando x entre as duas equações abaixo:

$$a \operatorname{sen} x - b \cos x = \frac{1}{2} c \operatorname{sen} 2x$$
$$a \cos x + b \operatorname{sen} x = c \cos 2x$$

IME 1982/1983 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a equação, identificando a sua natureza, do lugar geométrico de um ponto que se desloca de tal forma que o quadrado de sua distância ao ponto $(1,1)$ é proporcional à sua distância à reta $x+y=0$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a equação $2mx^2-2x-3m-2=0$, onde $m \in \mathbb{R}$:

a) **[Valor: 0,3]** Determine m tal que uma raiz seja nula; calcule a outra raiz.

b) **[Valor: 0,3]** Mostre que a equação dada tem sempre duas raízes distintas.

c) **[Valor: 0,4]** Determine m para que uma raiz seja inferior a 1 e a outra seja superior a 1.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Seja F o conjunto das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que satisfazem $f(xy)=f(x)+f(y)$. Dados $f \in F$ e $a \in \mathbb{R}$ define-se a função $g_a:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $g_a(x)=f(ax)-f(x)$.

a) **[Valor: 0,4]** Mostre que $f(1)=0, \forall f \in F$.

b) **[Valor: 0,6]** Mostre que $\forall a \in \mathbb{R}$, g_a é função constante.
Obs: Para o item (b), desenvolver $g_a(xy)$ e leve em conta o item (a).

4ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o polinômio $p(x)$ do 4º grau, sabendo que $p''(x)=ax^2+bx+c$ e que $p(x)$ é divisível por $p''(x)$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a função $y:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $y=\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}$:

a) **[Valor: 0,6]** Estude a sua variação quanto a: continuidade, crescimento, assíntota e pontos notáveis, inclusive o ponto em que a curva corta a assíntota.

b) **[Valor: 0,4]** Faça o esboço do gráfico da curva representativa da função.
Obs: Para determinação da assíntota é conveniente colocar x em evidência para fora do radical e desenvolver a função pelo binômio de Newton.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Uma rua possui um estacionamento em fila com N vagas demarcadas junto ao meio-fio de um dos lados. N automóveis, numerados de 1 a N, devem ser acomodados, sucessivamente, pela ordem numérica no estacionamento. Cada carro deve justapor-se a um carro já estacionado, ou seja, uma vez estacionado o carro 1 em qualquer uma das vagas, os seguintes se vão colocando imediatamente à frente do carro mais avançado ou atrás do carro mais recuado. Quantas configurações distintas podem ser obtidas desta maneira? A figura abaixo mostra uma das disposições possíveis.

11	10	8	7	6	2	1	3	4	5	9

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a função f definida nos reais por

$$f(x)=(x-1)\ln|x-1|-x\ln x:$$

a) **[Valor: 0,5]** Dê seu domínio e calcule $\lim\limits_{x\rightarrow\infty} f(x)$.

b) **[Valor: 0,5]** Dada a função g definida nos reais por

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{se } x \notin \{0,1\} \\ 0, & \text{se } x \in \{0,1\} \end{cases}$$

verifique se g é contínua em $x=1$ e se é derivável neste ponto.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um determinante definido por $\Delta_1=|1|$ e

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

a) **[Valor: 0,5]** Pede-se a fórmula de recorrência (isto é, a relação entre Δ_n e Δ_{n-1}).

b) **[Valor: 0,5]** Calcule a expressão de Δ_n em função de n.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Seja m um inteiro positivo. Define-se uma relação Θ_m por

$$R_{\Theta_m}=\{(i,j)|\ i=j+km,\ k \text{ inteiro}\}.$$

Mostre que Θ_m é uma relação de equivalência.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja

$$S_n=\sum_{1}^{n} a_n$$

onde os a_n são complexos. Os módulos dos a_n estão em progressão geométrica. Os argumentos dos a_n estão em progressão aritmética. São dados:

$$a_1=13{,}5(\sqrt{3}+i)$$
$$a_4=\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$$

Calcule o $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} S_n$.

IME 1982/1983 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que o lado do icoságono regular convexo é igual à diferença, dividida por $\sqrt{2}$, entre o lado do decágono regular estrelado e o lado do pentágono regular convexo. Todos os três polígonos estão inscritos em um mesmo círculo de raio r.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a equação

$$\cos(2x + \frac{\pi}{6}) - m \operatorname{sen}^2 x = 0,$$

determine a condição a que deve satisfazer m para que ela tenha pelo menos uma solução x_0, tal que $0 < x_0 < 2\pi$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Consideram-se todos os pares de pontos do espaço M, M', tais que o ângulo $\widehat{MOM'} = 90^o$, sendo O um ponto fixo dado.

a) **[Valor: 0,5]** Qual o lugar geométrico de M', sendo M e M' variáveis porém fixo o ponto médio I, de MM'?

b) **[Valor: 0,5]** Considere outro ponto fixo O', tal que também $\widehat{MO'M'} = 90^o$. O ponto M sendo fixo, obtenha o lugar geométrico de M'.

4ª Questão [Valor: 1,5]
Em um triângulo ABC dão-se o ângulo $\hat{A}$, o raio do círculo ex-inscrito r_a (relativo ao ângulo $\hat{A}$) e a altura h_a (relativa ao lado a).

a) **[Valor: 0,8]** Indique a construção do triângulo ABC e conclua daí a condição que deve haver entre os elementos dados para que a construção seja possível, isto é, para que exista o triângulo ABC, escaleno.

b) **[Valor: 0,7]** Deduza as expressões de a, $b.c$ e de $b + c$, em função dos elementos dados.

5ª Questão [Valor: 1,0]
É dada uma elipse de eixo focal $2a$ e excentricidade igual a $\sqrt{2/3}$. Essa elipse é seção de um cone de revolução: o ângulo que o plano da elipse forma com o eixo do cone é $\beta = 45^o$. Pede-se, em função de a, a distância do vértice V do cone ao plano da elipse.

6ª Questão [Valor: 1,5]
São dadas duas superfícies cônicas de revolução, congruentes e de eixos paralelos. Seccionam-se essas duas superfícies por dois planos π e π' perpendiculares ao eixo de revolução, passando cada qual pelo vértice de uma das superfícies. Designam-se por (c) e (c') os cones resultantes situados entre os dois planos. Seja h a distância entre π e π'. Cortam-se (c) e (c') por um terceiro plano σ, paralelo a π e π', a uma distância variável x de π.

a) **[Valor: 0,7]** Mostre que a soma dos perímetros das seções (k) e (k'), determinadas por σ em (c) e (c') é constante.

b) **[Valor: 0,8]** Determine x de forma que a soma das áreas das duas seções (k) e (k') seja igual ao produto de um número real m pela área da base de um dos cones (c) ou (c'). Entre que valores poderá variar m?

7ª Questão [Valor: 1,5]
Dados dois círculos externos de raios distintos, mostre que o conjunto de secantes que determinam em ambos cordas iguais, é tal que, cada uma dessas secantes é tangente a uma parábola, que se pede identificar.

8ª Questão [Valor: 1,5]
Uma pirâmide de vértice V e base $ABCD$ constitue a metade de um octaedro regular de aresta a.

a) **[Valor: 0,8]** Determine em função de a, os raios das esferas medial (esfera que passa pelos pontos médios das arestas deste poliedro), circunscrita e inscrita.

b) **[Valor: 0,7]** Marcam-se sobre VA e VB os segmentos $VA' = VB' = x$; marcam-se sobre VC e VD os segmentos $VC' = VD' = y$; Supõe-se que x e y variam sob a condição de $x + y = a$. Determine x e y, em função de a, de forma que a área do quadrilátero $A'B'C'D'$ seja igual a $\frac{a^2}{4}$.

IME 1981/1982 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,5]

a) **[Valor: 1,1]** Seja a função:

$$y = mx^2 - (1+8m)x + 4(4m+1)$$

onde m é um número dado, mas variável. Mostre que todas as curvas representativas da função passam por um ponto A fixo e que são todas tangentes entre si, neste ponto. Calcule as coordenadas do ponto A e dê a equação da tangente comum.

b) **[Valor: 0,4]** Determine os dois valores de m para os quais a razão entre as raízes da equação:

$$mx^2 - (1+8m)x + 4(4m+1) = 0$$

é igual a $(-\frac{1}{4})$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $M_n(R)$ o conjunto de matrizes quadradas de ordem n, de coeficientes reais. Define-se a função,

$$\begin{aligned} \Psi : M_n(R) \times M_n(R) &\rightarrow M_n(R) \\ \Psi(A,B) &= AB - BA \end{aligned}$$

Calcule:

$$\Psi(\Psi(A,B),C) + \Psi(\Psi(B,C),A) + \Psi(\Psi(C,A),B)$$

3ª Questão [Valor: 1,5]
Dado o número $m = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$, determine quantos números inteiros positivos não maiores que m são primos relativos com m.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o coeficiente do termo em x^3, no desenvolvimento de:

$$(2x-3)^4(x+2)^5.$$

5ª Questão [Valor: 1,5]
Seja a função f definida, no conjunto dos reais, por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \quad \text{para } x \leq -2 \\ \cos\frac{\pi x}{2}, \quad \text{para } -2 < x \leq 0 \\ e^{-2x}, \quad \text{para } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, \quad \text{para } x > 1 \end{cases}$$

a) **[Valor: 0,3]** Determine o domínio e a imagem de f.
b) **[Valor: 0,4]** Determine os pontos de descontinuidade e os pontos onde f não é derivável.
c) **[Valor: 0,4]** Determine os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente.
d) **[Valor: 0,4]** Determine os pontos e os valores de máximo e mínimo de f. Calcule o supremo e o ínfimo da imagem de f.

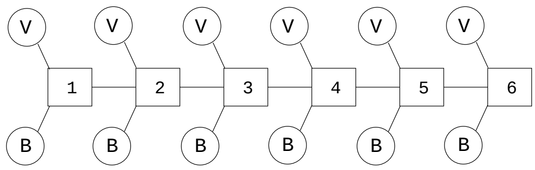
6ª Questão [Valor: 1,0]
Determine as equações de uma circunferência com centro no ponto $(-2,2)$ e tangente à circunferência:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$$

7ª Questão [Valor: 1,5]

a) **[Valor: 0,7]** O quadrado de qualquer número par $2n$ pode ser expresso como a soma de n termos, em progressão aritmética. Determine o primeiro termo e a razão desta progressão.
b) **[Valor: 0,8]** Três progressões geométricas têm mesma razão q e primeiros termos diferentes a, b, c. A soma dos n primeiros termos da primeira é igual à soma dos $2n$ primeiros termos da segunda e igual à soma dos $3n$ primeiros termos da terceira. Determine a relação que liga as razões $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$, em função somente de a, b e c.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Deseja-se transmitir sinais luminosos de um farol, representado pela figura abaixo. Em cada um dos seis pontos de luz do farol existem uma lâmpada branca e uma vermelha. Sabe-se que em cada ponto de luz não pode haver mais que uma lâmpada acesa e que pelo menos três pontos de luz devem ficar iluminados. Determine o número total de configurações que podem ser obtidas.



IME 1981/1982 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,5]
Sejam duas retas paralelas (r) e (s), e um segmento AB (A pertencente a (r) e B pertencente a (s)), perpendicular a ambas. Sobre (r) e (s), e à direita de AB, marcam-se os pontos C e D, tais que $\overline{AC}.\overline{BD} = \frac{\overline{AB}^2}{4}$. Tomando-se C e D como centros, traçam-se os círculos (c) e (d) tangentes a AB.

a) **[Valor: 0,7]** Sendo O o meio de AB, mostre que o triângulo COD é retângulo e que (c) e (d) são tangentes entre si em um ponto M, cujo lugar geométrico é pedido.

b) **[Valor: 0,8]** Prolongando-se AM até B', pertencente a (s), e BM até A', pertencente a (r), calcule $\overline{AC}$, tal que $\overline{AA'} + \overline{BB'} = 4\overline{AB}$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Dado um retângulo $ABCD$, de lados a e b, divide-se a diagonal $\overline{BD}$ em n segmentos iguais, marcando-se os pontos $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ (na ordem $B, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, D$). Estabeleça a expressão geral dos segmentos $\overline{CM_k} = \ell_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, em função de a, b, n e k.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considera-se um quadrado $ABCD$ pertencente a um plano (π). Traçam-se pelos quatro vértices perpendiculares ao plano (π). Sobre o prolongamento de DA (no sentido de D para A), marca-se a partir de A um segmento $\overline{AI}$ igual a a e sobre o prolongamento de CB (no sentido de C para B), marca-se a partir de B um segmento $\overline{BJ}$ igual a b, tal que $a > b$. Um plano qualquer, passando por IJ, corta as perpendiculares ao plano (π), formando um quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ (A_1 correspondendo a A, B_1 a B, C_1 a C e D_1 a D).

a) **[Valor: 0,5]** Determine a natureza do quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ e estabeleça a relação existente entre as razões $\frac{\overline{AA_1}}{a}$ e $\frac{\overline{BB_1}}{b}$.

b) **[Valor: 0,5]** Supondo as razões iguais a k e $\overline{AB}$ igual a unidade, calcule os lados e as diagonais do quadrilátero em função de k, a e b.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja (T) um triângulo retângulo em A, sendo os outros vértices B e C.

a) **[Valor: 0,5]** Dá-se a razão $m = \frac{2p}{a}$, onde a é a hipotenusa e p o semiperímetro. Indique entre que valores m pode variar para que o problema tenha solução, e calcule $\hat{B}$ e $\hat{C}$ em função de m.

b) **[Valor: 0,5]** São dados a hipotenusa a de (T) e volume $V = \frac{\pi a^3}{48}$, gerado quando (T) gira em torno da hipotenusa. Calcule $\hat{B}$ e $\hat{C}$ em graus ou o valor numérico de uma de suas linhas trigonométricas.

5ª Questão [Valor: 1,5]

a) **[Valor: 0,8]** Seja (d) a diretriz e F o foco de uma parábola. Seja $\overline{MM'}$ uma corda focal qualquer. Mostre que as tangentes em M e M' encontram-se em P, pertencente a (d) e que a reta PF é perpendicular a $\overline{MM'}$.

b) **[Valor: 0,7]** Sejam uma elipse (e) e uma hipérbole (h) tendo os mesmos focos e o mesmo eixo não focal. Estabeleça a relação na forma $f(\varepsilon, \varepsilon') = 0$, sendo ε e ε' as excentricidades de (e) e (h), respectivamente.

6ª Questão [Valor: 1,5]
Em um plano (π) dá-se uma circunferência (c) de centro O e raio r. Por um ponto A pertencente a (c), tira-se a perpendicular a (π) e marca-se $\overline{AV} = x$, V acima de (π).

a) **[Valor: 0,4]** Seja $\overline{BD}$ um diâmetro de (c): mostre que no tetraedro $VABD$ os três pares de retas que ligam os meios das arestas opostas concorrem em um ponto, ponto esse que parmanece fixo quando BD gira em torno de O.

b) **[Valor: 0,3]** Mostre que as arestas opostas de $VABD$ são perpendiculares duas a duas.

c) **[Valor: 0,4]** Ache o lugar geométrico do pé da altura tirada de V no triângulo VBD, quando $\overline{BD}$ gira em torno de O.

d) **[Valor: 0,4]** Determine o centro e o raio da esfera circunscrita ao tetraedro $VABD$ em função de r e x.

7ª Questão [Valor: 1,5]
Sejam (k) e (k') os círculos das bases e O o centro do cilindro de raio R e altura h. No círculo (k), inscreve-se um triângulo equilátero ABC. Um ponto A', pertencente ao círculo (k'), projeta-se paralelamente ao eixo do cilindro, em um ponto D do arco de (k) que subentende BC. Determine a posição de A' para que área do triângulo $A'BC$ seja máxima, e nessa posição de A' calcule a distância de O (centro do cilindro) ao plano de $A'BC$.

8ª Questão [Valor: 1,0]

Por um ponto C, ponto médio de um arco $\overset{\frown}{AB}$ qualquer, de uma circunferência (k) de centro O ($\overset{\frown}{AB} < 180^o$), traça-se a corda CDE, paralela ao raio AO (D interseção de CDE com AB e E pertence a (k)). Determine o valor do ângulo $A\hat{O}B$ (definido pelo valor numérico de alguma de suas linhas trigonométricas), para que o ponto D seja o ponto médio de CE.

IME 1980/1981 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x},\ x \neq 0$$
$$f(x) = 1,\ x = 0$$

determine os valores de m para os quais o gráfico de f admite tangente paralela à reta $y = mx$.
Obs: $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Determine os valores de h, de modo que a desigualdade

$$-3 < \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$$

seja válida para qualquer x real.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dados dois triângulos equiláteros ABC e $A'BC$, traça-se por A' uma reta qualquer que encontra os lados AC e AB, ou os seus prolongamentos, nos pontos D e E, respectivamente. Determine o lugar geométrico dos pontos de encontro das retas BD e CE.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que não existem matrizes quadradas A e B, que verifiquem $AB - BA = I$, onde I é a matriz identidade de uma ordem n qualquer.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que o número $\underbrace{4444\ldots4}_{n \text{ vezes}}\underbrace{8888\ldots8}_{(n-1) \text{ vezes}}9$ é um quadrado perfeito.

6ª Questão [Valor: 1,0]
O professor Sah Bido quer oferecer jantares para 3 alunos de cada vez. O professor tem 7 alunos e quer oferecer 7 jantares, com a restrição de que um mesmo par de alunos não pode ser convidado para mais de um jantar, isto é, se os alunos A, B e C comparecerem a um jantar, então a presença do aluno A, por exemplo, em outro jantar, impedirá a presença de C ou de B neste jantar. Chamando-se de programa a um conjunto de 7 jantares nas condições especificadas, pergunta-se: quantos programas diferentes poderão ser formados?

7ª Questão [Valor: 1,0]
A população de um país, no ano t, $t \geq 1860$, é dada, aproximadamente, por:

$$N(t') = \frac{L}{1 + e^{\frac{\lambda - t'}{\alpha}}};\quad \text{onde}\quad t' = t - 1860$$

L, λ, α são constantes reais e $10^6 \times N(t')$ é o número de habitantes.

a) **[Valor: 0,7]** Calcule a população do país no ano 2000, sabendo-se que em 1860, ele tinha 15 milhões de habitantes, em 1895, 18 milhões de habitantes e em 1930, 20 milhões de habitantes.
Obs: e é a base do sistema de logaritmos neperianos.
b) **[Valor: 0,3]** Ao longo do tempo, a população tenderá a um número finito de habitantes? Justifique sua resposta.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e seja $h \in \mathbb{C}$. Diz-se que um ponto h é um ponto de Hurwitz se $|h| = 1$ e, para todo número natural n, $h^{n+1} \neq 1$. Prove que o ponto $z = \frac{2-i}{2+i}$ é um ponto de Hurwitz.
Obs: $i^2 = -1$.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Prove a seguinte identidade:

$$\binom{n+1}{2m+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{m}\binom{k}{m},$$

onde n e m são inteiros positivos e

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},\quad \text{para } n \geq m$$
$$\text{e}\ \binom{n}{m} = 0,\quad \text{para } n < m$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $M = (m_{ij})$ uma matriz quadrada real $n \times n$ de termos positivos. Define-se o "permanente de M" como

$$\text{perm } M = \sum_{S} m_{1t(1)} m_{2t(2)} \ldots m_{nt(n)}$$

onde S é o conjunto das permutações $(t(1), t(2), \ldots, t(n))$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ tem, por exemplo, como permanente

$1{\times}5{\times}9 + 4{\times}8{\times}3 + 2{\times}6{\times}7 + 3{\times}5{\times}7 + 2{\times}4{\times}9 + 1{\times}6{\times}8.$

Seja a matriz $n \times n$, $H = (h_{ij})$ onde $h_{ij} = i(j + 1)$. Calcule o permanente de H.

IME 1980/1981 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam (c) um círculo de raio r, distante h de um plano (π), I o traço nesse plano do eixo (Δ) do círculo (isto é, a perpendicular ao plano de (c) pelo centro de (c)), e P um ponto fixo de (π) distante h de I. Liga-se P a um ponto M, móvel, que percorre toda a circunferência de (c), e define-se um plano (σ) variável, normal a (π), que conterá sempre PM. Na interseção de (σ) com (π) existem dois pontos distantes $h\sqrt{3}$ de M. Seja A aquele cuja distância a P é a maior. Determine:

a) O lugar geométrico de A quando M percorre toda a circunferência de (c).

b) O máximo valor de IA.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice V e base $ABCDEF$, de lado da base igual a b e altura igual a $\frac{3b}{2}$, traça-se o plano perpendicular à aresta VB no ponto M, tal que este plano contenha os vértices A e C. Determine, para a pirâmide de vértice M e base ABC assim formada:

a) O comprimento da aresta AM.

b) O volume.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam ℓ_9 o lado do eneágono regular convexo, ℓ_9^* e ℓ_9^{**} os lados dos eneágonos estrelados ($\ell_9^* < \ell_9^{**}$), todos inscritos em um círculo de raio r. Mostre que:

$$\ell_9 = \ell_9^{**} - \ell_9^*$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Determine todos os valores de x, y e z, situados no intervalo fechado $[0, \pi]$, satisfazendo o sistema:

$$\begin{aligned} \cos x + \cos 2y &= 0 \\ \cos y + \cos 2z &= 0 \\ \cos z + \cos 2x &= 0 \end{aligned}$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Um ângulo α de grandeza constante, situado em um plano (π), gira em torno de seu vértice A, que é fixo, permanecendo no plano (π). De um ponto B, fixo, no plano (π), tiram-se perpendiculares BC e BD aos lados do ângulo α. Determine o lugar geométrico dos pontos C e D. Mostre que CD tem comprimento constante e determine o lugar geométrico do ponto médio de CD.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Uma esfera (ε) de raio r e centro O tangencia um plano (π) em M. Sobre a reta OM, no mesmo semi-espaço determinado pelo plano (π) em que se acha a esfera (ε), marca-se um ponto V tal que $VO = x > r$, e traçam-se 3 retas, partindo de V, que tangenciam a esfera em A, B e C, sendo $A\hat{V}B = B\hat{V}C = C\hat{V}A = \frac{\pi}{2}$. Calcule x em função de r e determine, também em função de r, as dimensões da calota seccionada na esfera pelo plano VAB (isto é: o raio da base da calota e sua altura).

7ª Questão [Valor: 1,0]
Dá-se uma elipse de vértices A_1 e A_2, definida por: $A_1A_2 = 2a$ (eixo focal), $B_1B_2 = 2b$ (eixo não focal). Sejam F_1 e F_2 os focos da elipse, e uma tangente à elipse em um ponto M qualquer ($M \neq A_1$ e $M \neq A_2$). Esta tangente é cortada nos pontos T_1 e T_2 respectivamente pelas tangentes à elipse nos vértices A_1 e A_2. Mostre que o quadrilátero $T_1F_1F_2T_2$ é inscritível e que o produto $A_1T_1.A_2T_2$ é constante.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Dado o triângulo escaleno ABC, sejam respectivamente D, E, F os pontos de contato do círculo inscrito ao triângulo ABC, com os lados BC, AC e AB. Mostre que os triângulos ABC e DEF não são semelhantes, e estabeleça a relação $\frac{EF}{BC}$ em função de sen $\frac{b}{2}$ e sen $\frac{c}{2}$.

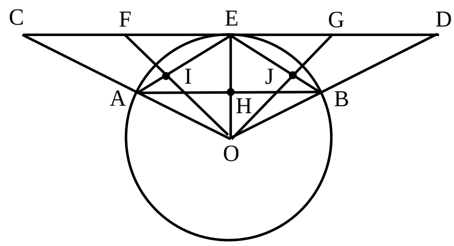
9ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a sucessão

$$\mathbb{P}_n \ , \ p_n \ , \ \mathbb{P}_{2n} \ , \ p_{2n} \ , \ \mathbb{P}_{4n} \ , \ p_{4n} \ , \ \mathbb{P}_{8n} \ , \ p_{8n} \ldots \quad (1)$$

na qual $\mathbb{P}_k$ é o semi-perímetro do polígono regular de k lados circunscrito ao círculo unitário, e p_k é o semi-perímetro do polígono regular de k lados inscrito no mesmo círculo.

a) Usando a figura abaixo, estabeleça a fórmula

$$\mathbb{P}_{2n} = \frac{2\mathbb{P}_n p_n}{\mathbb{P}_n + p_n}$$



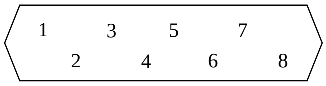
b) Calcule o limite da sucessão (1).

10ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule os eixos e a excentricidade da cônica, seção por um plano (π) em um cone de revolução (Γ), de vértice V, sabendo-se:

1) A excentricidade da seção por (π) é a maior possível para o cone (Γ).
2) V dista de (π) 6 unidades de comprimento.
3) (Γ) é tal que a seção por um plano perpendicular a uma geratriz é uma hipérbole equilátera.

IME 1979/1980 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um barco com 8 lugares, numerados como no diagrama seguinte:



Há 8 remadores disponíveis para guarnecê-lo, com as seguintes restrições: Os remadores A e B só podem sentar no lado ímpar e o remador C, no lado par. Os remadores D, E, F, G, H podem ocupar quaisquer posições. Quantas configurações podem ser obtidas com o barco totalmente guarnecido?

2ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $I = [-1, 2] \in \mathbb{R}$. Dê exemplo de uma função contínua em I tal que não exista um ponto $a \in]-1, 2[$ que satisfaça a condição:

$$f(x) - f(-1) = 3f'(a)$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o polinômio $f(x)$ de coeficientes racionais e do 7º grau, sabendo-se que: $f(x) + 1$ é divisível por $(x-1)^4$ e que $f(x) - 1$ é divisível por $(x+1)^4$.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja a seqüência, real (x_n), $n = 0, 1, \ldots$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0,\ n = 2, 3, \ldots$$

Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{n}\right) = 0$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva as equações:

$$x^3 - 7x^2 - 204x + 1260 = 0 \qquad x^3 - 15x^2 - 394x + 840 = 0$$

sabendo-se que a primeira tem uma raiz cujo valor é o triplo do valor de uma raiz da segunda.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ a coleção $B(n) = \{M | M = [m_{ij}]$ é matriz quadrada de ordem n e $|m_{ij}| = 1\}$. (Note que $B(2)$ tem $2^4 = 16$ elementos). Prove que, se $M \in B(n)$ então o determinante de M é múltiplo de 2^{n-1}, para $n = 1, 2, 3, \ldots$

7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja f uma função real de variável real, não constante, contínua, tal que existe uma função ϕ, $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = \phi(f(x), y)$, para todos x e y reais. Prove que f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Prove que: $n^3 = \sum_{i=1}^{n} a_i$, onde $a_i = (n-1)n + 2i - 1$.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Um velho manuscrito descrevia a localização de um tesouro enterrado: Há somente duas árvores, A e B, em um terreno plano, e um canteiro de tomates. A é uma mangueira, e B uma jaboticabeira. A partir do centro K do canteiro, meça a distância em linha reta até a mangueira. Vire 90º à esquerda e percorra a mesma distância até o ponto C. Volte ao canteiro. Meça a distância em linha reta até a jaboticabeira. Vire 90º à direita e percorra a mesma distância até o ponto D. O tesouro está no ponto médio T do segmento CD. Um aventureiro achou o manuscrito, identificou as árvores mas, como o canteiro desaparecera com o passar do tempo, não conseguiu localizá-lo, e desistiu da busca. O aluno Sá Bido, do IME, nas mesmas condições, diz que seria capaz de localizar o tesouro. Mostre como você resolveria o problema, isto é, dê as coordenadas de T em função das coordenadas de $A = (5, 3)$ e $B = (8, 2)$.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Por um ponto M qualquer de uma hipérbole (h), traça-se uma paralela a uma assíntota (a) de (h): esta paralela encontra uma diretriz (d) de (h) em D. Sendo F o foco de (h) correspondente à diretriz (d), mostre que:

$$MD = MF$$

IME 1979/1980 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Seja ABC um triângulo no qual se supõe que a mediana AM é tal que o triângulo ABM é semelhante ao triângulo ABC.

a) [**Valor: 0,5**] Calcule a razão de semelhança, e determine o lugar geométrico do vértice B supondo A e C fixos.

b) [**Valor: 0,5**] Mostre que o círculo que passa pelos pontos A, C e M tangencia a reta AB.

2ª Questão [Valor: 1,0]
São dados um círculo (c) de centro K, raio R e um ponto fixo A, tal que $0 < AK < R$. Por A traçam-se duas semi-retas (d) e (d'): (d) corta a circunferência de (c) em M e (d') em N. M e N se deslocam ao longo da circunferência de (c) de modo que AM e AN são sempre perpendiculares. Ache o lugar geométrico do ponto médio I do segmento MN.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dão-se duas circunferências de raios 8 e 3, tangentes internas. Pelo ponto T de contato se traça a tangente comum e sobre ela se toma uma distância $TA = 6$. Seja (s) uma secante aos círculos que passa por A. (s) faz com TA um ângulo α $(\alpha \neq 0)$, e corta a circunferência maior nos pontos D e E e a menor nos pontos P e Q. Calcule α de modo que $DE = 2PQ$.

4ª Questão [Valor: 1,5]
São dadas duas esferas (e_1) de centro O_1 e raio 3, e (e_2) de centro O_2 e raio 9. O_1 dista de O_2 de 20. Essas esferas são focais de uma seção elítica (E) de um cone de revolução. Determine a excentricidade e a distância focal de (E).
Obs: Esferas focais de uma seção são esferas inscritas num cone que tangenciam o plano seção.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Um quadrilátero reverso $ABCD$ é constituído pela justaposição de dois triângulos isósceles ABC e BCD $(AB = AC$ e $DB = DC)$ cujos planos são perpendiculares e cujas alturas medem respectivamente 6 e $6\sqrt{3}$. A base comum dos dois triângulos é $BC = 8$. Projeta-se ortogonalmente o quadrilátero $ABCD$ sobre um plano de modo que a projeção seja um paralelogramo (P). Como deve ser feita a projeção e qual é a área do paralelogramo (P)?

6ª Questão [Valor: 1,0]
Dão-se um paralelogramo $ABCD$ num plano π e um outro $EFGH$ num plano π' de modo que se obtém um paralelepípedo (P) de vértices A, B, C, D, E, F, G e H, oblíquo, com todas arestas de comprimento a. O plano que contém os pontos A, E e F forma com π um ângulo de 60º e $AEF = 120º$. Calcular em função de a e do ângulo $FEH = \theta$ o volume de (P).

7ª Questão [Valor: 1,5]
Dão-se um hexágono de lado ℓ num plano π e, num plano π' paralelo a π, um triângulo equilátero de lado ℓ, numa posição tal que cada altura do triângulo é paralela à uma diagonal maior do hexágono. Os baricentros do hexágono e do triângulo estão na mesma perpendicular comum aos seus planos. A distância entre π e π' é ℓ. Dê, em função de ℓ, o volume do sólido que se obtém, quando se liga cada vértice do triângulo aos três vértices mais próximos do hexágono.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Determine x na equação

$$\frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,x = \text{arc tg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam ℓ_4 , ℓ_6 e ℓ_{10} os lados do quadrado, do hexágono e do decágono regulares, inscritos todos no mesmo círculo (C). Com esses três lados, constrói-se um triângulo ABC, não inscrito em (C), tal que $BC = \ell_4$, $AC = \ell_6$ e $AB = \ell_{10}$. Pede-se calcular o ângulo A do triângulo ABC.

IME 1978/1979 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Admita $Y = (a, b, c)$ e seja a função h: $Y \times Y \to Y$ definida por:

$$\begin{array}{lll} h(a,a) = a & h(b,a) = b & h(c,a) = c \\ h(a,b) = b & h(b,b) = c & h(c,b) = a \\ h(a,c) = c & h(b,c) = a & h(c,c) = b \end{array}$$

Considere uma função $f : \mathbb{Z} \to Y$ tal que:

$$\begin{array}{l} f(0) = a \\ f(1) = b \\ \text{ e } \forall n, m \in \mathbb{Z}, f(n+m) = h(f(n), f(m)). \end{array}$$

Sabe-se que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(3n) = a$.

a) Determine $y \in Y$, tal que $h(y, f(52)) = f(45)$.

b) Encontre um $H \subset \mathbb{Z}$, tal que $f(H) = \{c\}$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+x \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

determine x, sabendo-se que existe uma matriz inversível P, tal que $A = P^{-1}.B.P$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Seja a equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ cujas raízes são: a, b, c. Determine s, t e u, em função de p, q e r, para que a equação $x^3 + sx^2 + tx + u = 0$ tenha raízes bc, ca e ab.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a família de curvas:

$$y(m) = mx^2 - (1 + 8m)x + 4(4m + 1).$$

Determine:

a) As coordenadas do ponto P, comum a todas essas curvas.

b) A curva da família, tal que a tangente no ponto de abscissa $x = 1$ tenha coeficiente angular igual a 1.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Determine os valores máximo e mínimo de $|z - 4|$, sabendo-se que $|z + 3i| \leq 1$, onde $z \in \mathbb{C}$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja uma progressão aritmética de 1º termo $a_1 \neq 0$ e último termo a_{10} tal que $a_1 \neq a_{10} \neq 0$. Seja a progressão aritmética de 1º termo $b_1 = \dfrac{1}{a_1}$ e último termo $b_{10} = \dfrac{1}{a_{10}}$. Calcule $\dfrac{a_5}{b_6}$ em função de a_1 e a_{10}.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Um elevador com 7 pessoas parte do andar térreo de um prédio e faz 4 paradas em andares diferentes. Determinar de quantas maneiras diferentes, todas aquelas 7 pessoas podem desembarcar até a 4ª parada, inclusive.
Obs: Seja n_i o número de pessoas que desembarcam na i-ésima parada $\{i = 1, 2, 3, 4\} : \sum\limits_{i=1}^{4} n_i = 7, n_i \geq 0$.

9ª Questão [Valor: 1,0]
É dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+k}{\sqrt[3]{x^2-1}}, & \text{se } x \neq \pm 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \\ -1, & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

a) Se $k = -1$, determine os pontos de descontinuidade de f.

b) Se $k = 0$:
   i) Determine as raízes de $f'(x) = 0$.
   ii) Determine as raízes de $f''(x) = 0$.
   iii) Faça o esboço do gráfico da função em coordenadas ortonormais.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a área da superfície finita entre as curvas de equações: $y = 16 - x^4$ e $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

IME 1978/1979 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Achar os valores de x que satisfazem a equação:

$$\sqrt{\pi^2 - 4x^2} = \operatorname{arc\,sen}(\cos x)$$

2ª Questão [Valor: 1,5]
Seja uma circunferência (C) na qual está inscrito um pentágono regular convexo $ABCDE$ (nesta ordem sobre (C) e no sentido trigonométrico). Considere M o ponto médio do arco $AE < 180^o$ e P um ponto qualquer do mesmo arco:

a) Sendo $P \neq M$, $P \neq A$ e $P \neq E$, prove que

$$PA + PE + PC = PB + PD \qquad (1)$$

b) Se P coincidir com A, mostre o que acontece com a relação (1).

c) Se P coincidir com M, mostre que de (1) pode-se obter uma relação entre o raio da circunferência (C) e os lados dos decágonos regulares inscritos convexo e estrelado.

Obs: As soluções dos três sub-itens acima são independentes.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Seja (T) um triângulo ABC tal que $\hat{C} = 2\hat{A}$:

a) Calcule, em função do $\cos \hat{A}$, as excentricidades da elipse e da hipérbole de focos A e B e que passam por C.

b) Supondo-se existir (T), qual a relação de igualdade que devem satisfazer os lados AB, BC e CA.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Dado um triângulo ABC de área S, prolongam-se seus lados CA, AB e BC:
CA, no sentido de C para A, até A', tal que $AA' = k.CA$;
AB, no sentido de A para B, até B', tal que $BB' = k.AB$;
BC, no sentido de B para C, até C', tal que $CC' = k.BC$.
Onde k é uma constante positiva. Sendo o triângulo $A'B'C'$ de área S', determine k para que $S' = 19S$.

5ª Questão [Valor: 1,5]
Dá-se num plano π um triângulo equilátero ABC de lado a, $a > 0$, e tira-se por A uma semi-reta AX perpendicular ao plano π. Seja V a extremidade do segmento AV de comprimento a, situado nessa semi-reta:

a) Calcule o volume da pirâmide $VABC$ e, caso a mesma admita um plano de simetria, identifique-o.

b) Considere uma reta r do plano VBC paralela à reta BC, tal que o plano VBC e o plano determinado por r e pelo ponto A sejam perpendiculares. Sejam D a interseção de r com VB e E a interseção de r com VC. Calcule o volume da porção da pirâmide $VABC$ que está compreendida entre os planos ABC e ADE.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a família de triângulos ABC onde $BC = a$, $AB = c$ e $AC = b$. Os pontos B e C são fixos e A varia de tal maneira que $b - c = k$ (constante).

a) Pede-se o lugar geométrico do ponto D, encontro da bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ com a perpendicular baixada do vértice C àquela bissetriz.

b) Supondo o caso particular $\hat{A} = 60^o$, $a = 4\sqrt{3}$ e $b - c = 4$, calcule os valores em radianos dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

7ª Questão [Valor: 1,5]
Um cone de revolução de vértice V é seccionado por um plano que determina uma seção parabólica (P). Sejam respectivamente S e F o vértice e o foco de (P). São dados: $VS = 12$ e $SF = 3$:

a) Determine α (ângulo do eixo do cone com sua geratriz).

b) Determine a área do segmento parabólico compreendido entre a parábola e a corda focal perpendicular ao seu eixo.

8ª Questão [Valor: 1,5]
Sejam (C) uma superfície cônica de revolução, de vértice V, cujo semi-ângulo no vértice é 45^o, r uma reta paralela ao eixo de revolução de (C) e π o plano passando por V e perpendicular a r. A reta r atravessa o plano π em O. VO tem comprimento $2a$, $a > 0$. Seja ℓ a perpendicular comum a r e à geratriz g de (C); ℓ corta g em A e r em B.

a) A' sendo a projeção ortogonal de A sobre π, ache o lugar do ponto A' quando g varia.

b) Identifique as retas ℓ situadas em um plano ρ paralelo a π. Examine o que ocorre quando varia a distância entre os planos π e ρ.

c) Mostre que os pontos A (quando g varia) pertencem a uma esfera (e) de centro (O).

IME 1977/1978 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 0,5]
Determine as soluções da equação

$$36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$$

dado que uma de suas raízes é a soma das outras duas.

2ª Questão [Valor: 0,5]
Seja um polinômio

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

com coeficientes reais. Sabe-se que $p(0) = 0$, $p(2) = 4$, que a reta tangente a $p(x)$ no ponto (1,1) é paralela à reta $y = 2x + 2$ e que a reta tangente a $p(x)$ no ponto (2,4) é perpendicular à reta $y = -\frac{1}{3}x - 4$. Determine os coeficientes a_3, a_2, a_1, a_0.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que, em toda reunião constituída de seis pessoas, uma das hipóteses necessariamente ocorre (podendo ocorrer ambas):

I) Existem três pessoas que se conhecem mutuamente (isto é, das três cada duas se conhecem).

II) Existem três pessoas que se desconhecem mutuamente (isto é, das três cada duas se desconhecem).

4ª Questão [Valor: 0,5]
Seja h uma função contínua, real de variável real. Sabe-se que $h(-1) = 4$; $h(0) = 0$; $h(1) = 8$. Defino uma função g como $g(x) = h(x) - 2$. Prove que a equação $g(x) = 0$ admite, pelo menos, duas soluções distintas.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Seja o conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$$

Determine a imagem de A pela função g, complexa de variável complexa, tal que $g(z) = (4 + 3i)z + 5 - i$.
Obs: $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos. $|z|$ é o valor absoluto de z.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Para $t > 0$ e $x \geq 1$, defino a função f_t, real de variável real, como:

$$f_t(x) = x \left[\frac{x^t - (t+1)}{t} \right]$$

Supondo-se que o limite indicado exista, define-se

$$f(x) = \lim_{t \to 0} f_t(x), \quad x \geq 1$$

Determine $f(e^2)$, onde e é a base dos logaritmos neperianos.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam A, B, C, D matrizes reais 2×2.

$$A = (a_{ij}); \quad A^{-1} = B = (b_{ij})$$
$$C = (c_{ij}); \quad c_{ij} = a_{ij}^{-1}$$
$$D = (d_{ij}); \quad d_{ij} = b_{ij}^{-1}$$

Sabe-se que $a_{ij}.b_{ij} \neq 0$, $1 \leq i \leq 2$; $1 \leq j \leq 2$, e que C é matriz singular (não admite inversa). Calcule o determinante de D.

8ª Questão [Valor: 0.5]
Seja m uma função real de variável real definida como: $m(x) = |7 - x|$. Diz-se que uma função u, real de variável real, é contínua no ponto a de seu conjunto de definição se, para todo número real $\epsilon > 0$, existe um número real $\delta > 0$ tal que, se y é ponto do conjunto de definição de u e se $|y - a| < \delta$, então $|u(y) - u(a)| < \epsilon$. Quer-se testar a continuidade de m no ponto $x = -2$. Escolhe-se um $\epsilon = 0{,}01$. Determine um δ conveniente, para este valor de ϵ. Justifique sua resposta.
Obs: $|h|$ é o valor absoluto de h.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam R e S duas retas quaisquer. Sejam $p_2 = (x_2, y_2)$; $p_4 = (x_4, y_4)$; $p_6 = (x_6, y_6)$ três pontos distintos sobre R e $p_1 = (x_1, y_1)$; $p_3 = (x_3, y_3)$; $p_5 = (x_5, y_5)$ três pontos distintos sobre S. O segmento p_2p_3 não é paralelo ao segmento p_1p_4; o segmento p_1p_6 não é paralelo ao segmento p_2p_5 e o segmento p_3p_6 não é paralelo ao segmento p_4p_5. Sejam: A, a interseção dos segmentos p_2p_3 e p_1p_4; B, interseção de p_1p_6 com p_2p_5 e C, interseção de p_3p_6 com p_4p_5. Prove que os pontos A, B e C estão em linha reta.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Dadas as parábolas y_1 e y_2, $y_1(x) = 51 - x^2$ e $y_2(x) = x^2 + 1$, sabe-se que a área entre y_1 e y_2, medida entre $x = 0$ e $x = 5$ é igual a 3 vezes a área entre y_1 e y_2, medida entre $x = 5$ e $x = a$. Determine a.

11ª Questão [Valor: 1,0]
Se $x(t)$ é o número de parasitas existentes no tempo t, em uma população hospedeira $y(t)$, a relação entre as duas populações pode ser descrita por

$$y^A e^{By} = kx^R e^{Sx}$$

onde A, B, R e S são constantes apropriadas. Pede-se determinar $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

12ª Questão [Valor: 1,0]
Uma seqüência $(x_n)_{n \in n^*}$ de números racionais diz-se regular se $|x_m - x_n| \leq m^{-1} + n^{-1}, m, n \in n^*$. Dada uma seqüência regular $t = (t_n)_{n \in n^*}$, defino K_t = menor inteiro maior que $|t_1| + 2$. Sejam x e y seqüências regulares e K = máximo $\{K_x, K_y\}$. Defino a seqüência $z = (z_n)_{n \in n^*}$ como $z_n = x_{2Kn} \cdot y_{2Kn}, n \in n^*$. Prove que $(z_n)_{n \in n^*}$ é uma seqüência regular.
Obs: n^* é o conjunto dos naturais sem o número zero, isto é, $n^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

IME 1977/1978 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Dados os arcos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$, todos do primeiro quadrante, e tais que $\operatorname{tg}\hat{A} = 1/3$, $\operatorname{tg}\hat{B} = 1/5$, $\operatorname{tg}\hat{C} = 1/7$ e $\operatorname{tg}\hat{D} = 1/8$, verificar se $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \pi/4$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Designa-se por (T) um triângulo ABC no qual sua altura AD é cortada ao meio no ponto H, pela altura CE.

a) Demonstrar que as tangentes dos ângulos internos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo (T) verificam a relação $\operatorname{tg}\hat{B}.\operatorname{tg}\hat{C} = 2$ (*)

b) Suponha satisfeita a relação (*), dá-se o ângulo $\hat{A}$ do triângulo (T). Calcular os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Qual a condição que deve ser satisfeita pelo ângulo $\hat{A}$ para que o triângulo (T) exista?

3ª Questão [Valor: 1,5]
Sejam um círculo (O) de centro O, um ponto A fixo exterior a (O), e um diâmetro BC móvel.

a) Mostrar que o círculo circunscrito ao triângulo ABC passa por um ponto fixo I (I distinto de A).

b) As retas AB e AC cortam o círculo (O) nos pontos D e E respectivamente, e DE corta OA em P. Comparar os ângulos $B\hat{I}A$, $B\hat{C}A$ e $B\hat{D}E$ e mostrar que o quadrilátero $IBDP$ é inscritível, sendo o ponto P fixo.

Obs: Sugere-se que entre as propriedades a serem aplicadas na solução deste problema, estejam as da potência de um ponto em relação a um círculo.

4ª Questão [Valor: 1,5]
Dá-se um icosaedro (I) regular convexo de aresta ℓ.

a) Calcular o ângulo diedro $\hat{d}$ de (I). (Apresentar uma expressão trigonométrica, numérica, que permita calcular o valor do ângulo diedro $\hat{d}$).

b) Seja V um vértice de (I): V e os vértices de (I) adjacentes (isto é, os que são ligados a V por arestas de (I)), determinam um poliedro (P) cujas arestas são arestas do icosaedro. Calcular o volume de (P) em função de ℓ.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Dado um triedro de vértice S, consideram-se duas seções paralelas: uma fixa ABC, com o triângulo $A_1B_1C_1$ traçado pelo meio dos lados BC, AC e AB, e outra seção móvel $A_2B_2C_2$. (A_1 é meio de BC, C_1 de AB e B_1 de AC, e AA_2, BB_2 e CC_2 estão respectivamente nas arestas SA, SB e SC). Mostrar que as retas A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 passam por um mesmo ponto e determinar o lugar geométrico desse ponto.

6ª Questão [Valor: 1,0]
A tangente e a normal em um ponto M de uma elipse cortam o eixo focal respectivamente em T e N, sendo os focos F e F'.

a) Mostre que o segmento FF' é dividido harmonicamente por T e N, bem como a razão das distâncias de F aos pontos N e M é igual à excentricidade da elipse.

b) Se a tangente e a normal citadas cortam o eixo não focal em T' e N' respectivamente, mostre que o círculo $MT'N'$ passa pelos focos F e F'.

7ª Questão [Valor: 1,5]
Considere um cone de revolução de vértice V, altura h, tendo por base um círculo de centro O e raio r. No plano da base desse cone toma-se um ponto A, a uma distância x do ponto O ($x > r$). Pelo segmento VA traçam-se dois planos tangentes contendo as geratrizes do cone VB e VC (B e C são pontos das geratrizes, e pertencem ao plano da base).

a) Calcule em função de x, de h e de r o comprimento BC, e as distâncias dos pontos B e C ao segmento VA.

b) Determine x de modo que o ângulo dos dois planos VAB e VAC seja reto. Qual a condição para que este problema tenha solução?

8ª Questão [Valor: 1,5]
Dá-se uma semi-esfera cuja base é um círculo (C) de raio r. Corta-se a semi-esfera por um plano π paralelo à base, o qual determina sobre a semi-esfera um círculo (C_1) de raio x. Estabeleça a relação entre x e r para tornar possível traçar sobre a semi-esfera três círculos tangentes aos círculos (C) e (C_1) e também tangentes entre si dois a dois.

IME 1976/1977 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]

a) **[Valor: 0,5]** Seja $x \in \mathbb{R}$. Determine o conjunto A, onde $A \subset \mathbb{R}$, domínio de definição da função f, onde

$$f : x \longrightarrow \log_2(x^2 - x - 1)$$

b) **[Valor: 0,5]** Seja

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \det \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ e^x & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Desenvolva a função f dada, em torno da origem, com uso da fórmula de Taylor até o termo de segundo grau em x.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam x_1 e x_2 raízes da equação

$$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Determine A de modo que x_1^3 e x_2^3 sejam raízes da equação:

$$y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + A = 0$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam $A, B \in \mathbb{R}^2$ de coordenadas cartesianas $(2,5)$ e $(1,3)$, vértices fixos de um conjunto de triângulos de área 12. Determine a equação do lugar geométrico do conjunto de pontos C, terceiro vértice destes triângulos.
Obs: A área é considerada positiva qualquer que seja a orientação do triângulo, de acordo com a definição axiomática.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longrightarrow iz + 2 + 3i \end{aligned}$$

Seja o conjunto

$$A = \left\{ x + iy \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \right\}$$

Determine o conjunto B imagem de A pela função f.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam as regiões definidas pelos conjuntos de pontos A e B onde

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 < mx, m \in \mathbb{R}^+\}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < ny, n \in \mathbb{R}^+\}$$

Determine a área do conjunto $C = A \cap B$.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Sendo $x \in \mathbb{R}$, calcule:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[x^2]{\cos x}$$

7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $a, b \in \mathbb{R}^+$. Mostre que a equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = 0$$

possui todas suas raízes reais, sendo uma no intervalo $]-b, 0[$ e a outra no intervalo $]0, a[$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Divide-se um quadrado de lado 1 em nove quadrados iguais e remove-se o quadrado central. Procede-se da mesma forma com os 8 quadrados restantes. Este processo é realizado n vezes.
a) Quantos quadrados de lado $1/3^n$ são conservados?
b) Qual a soma das áreas dos quadrados removidos quando n tende a infinito?

9ª Questão [Valor: 1,0]
São dados n pontos em um plano, supondo-se:
i) Cada três pontos quaisquer não pertencem a uma mesma reta.
ii) Cada par de retas por eles determinado não é constituído por retas paralelas.
iii) Cada três retas por eles determinadas não passam por um mesmo ponto.

Pede-se o número de interseções das retas determinadas por esses pontos distintos dos pontos dados.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja

$$P_3(x) = (x+1)(x+3)(x+5) + k(x+2)(x+4)$$

onde $x \in \mathbb{C}$. Determine o lugar geométrico das raízes de $P_3(x)$ quando k assume todos os valores em $\mathbb{R}^+$, desenhando este lugar geométrico no plano complexo.

IME 1976/1977 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
De um ponto exterior E a um círculo O qualquer traçam-se duas tangentes t e t' a esse círculo e os pontos de tangência P e P'. O ângulo $P\hat{E}P'$ mede 140°. De P traça-se a corda PA cujo arco mede 10° no sentido do maior arco PP' sobre o círculo. De A traça-se a corda AB cujo arco mede 30°, no mesmo sentido do arco PA. Pedem-se:

a) O ângulo $E\hat{P}P'$.

b) O ângulo $B\hat{P}'E$.

c) O número de lados do polígono inscrito no círculo O cujo lado é a corda BP.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Traçam-se dois círculos de raio r e centros em O e O' ($OO' = r$) que se cortam em I e J. Com centro em I e raio $2r$ traça-se um arco de círculo que tangencia O em A e O' em A'. Com centro em J e raio $2r$ traça-se um arco de círculo que tangencia O em B e O' em B'. Em O o diâmetro $O'O$ tem a outra extremidade em C; em O' o diâmetro OO' tem a outra extremidade em C'. Os arcos $\overset{\frown}{AA'}$, $A'\overset{\frown}{C'}B'$, $\overset{\frown}{B'B}$ e $B\overset{\frown}{C}A$ formam uma oval com quatro centros. Pede-se a área desta oval em função de r.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Determine todos os arcos x tais que:

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Prove que para todo arco x cada uma das relações abaixo é verdadeira:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x + \frac{2\pi}{3}) + \operatorname{sen}(x + \frac{4\pi}{3}) = 0$$

$$\cos x + \cos(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos(x + \frac{4\pi}{3}) = 0$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Traçam-se as bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ que se denominam respectivamente t_A, t_B, t_C e t_D e que determinam os pontos $M = t_A \cap t_B$, $N = t_B \cap t_C$, $P = t_C \cap t_D$, $Q = t_A \cap t_D$. Prove que:

a) O quadrilátero $MNPQ$ é inscritível.

b) As retas AB, CD e NQ são concorrentes em um ponto U, bem como as retas AD, BC e MP em um outro ponto V.

Obs: $\cap$ significa interseção.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam A e B dois pontos do espaço que se projetam ortogonalmente sobre um plano π em A' e B'. Dão-se $AA' = a$, $BB' = b$ e $A'B' = 2d$. Seja M um ponto de π tal que $A\overset{\frown}{M}A' = B\overset{\frown}{M}B'$. Ache o lugar geométrico do ponto M e as distâncias a C' (ponto médio de $A'B'$), em função de a, b e d, dos pontos em que o lugar geométrico do ponto M corta a reta que contém o segmento $A'B'$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja I um icosaedro regular de aresta a. Secciona-se o icosaedro por todos os planos tais que destaquem de cada vértice de I uma pirâmide regular, cujo vértice é vértice de I e cujas arestas laterais são arestas de I medindo $a/3$. Retiradas estas pirâmides resulta um poliedro P do qual se pedem:

a) Número e natureza de suas faces.

b) Número e natureza de seus ângulos poliedros.

c) Número de suas arestas e de suas diagonais.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Um cone de revolução tem ângulo de abertura $2a$. Faz-se uma seção parabólica (determinando uma parábola P) por um plano que dista d de V, vértice do cone. Pede-se em função de d e a o comprimento da corda focal perpendicular ao eixo da parábola P.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Em um triângulo qualquer ABC são dados: o lado a, a altura h e a bissetriz interna ℓ relativas a esse lado. Determine os lados b e c assim como os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ em função de a, h e ℓ.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Dá-se uma pirâmide quadrangular regular P cujo lado da base mede ℓ, e cujo apótema mede 7ℓ. Um plano passando por uma das arestas da base divide a área total dessa pirâmide em duas partes equivalentes. Determine a posição desse plano e o volume do prisma que ele determinou.

IME 1975/1976 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
A soma dos 50 primeiros termos de uma progressão aritmética é igual a 200 e a soma dos 50 seguintes é igual a 2700. Calcule a razão da progressão e seu primeiro termo.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a família de curvas C, definida pela equação:

$$y = x^2 - 2(n-5)x + n + 1$$

a) **[Valor: 0,5]** Sabendo que a curva intercepta o eixo x em dois pontos, determine os valores que n pode assumir.
b) **[Valor: 0,5]** Determine a equação do lugar geométrico dos vértices das curvas da família C, apresentando um esboço deste lugar geométrico.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Sabendo que $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ e que

$$z_1^2 + az_1^2 + b = 0$$
$$z_2^2 + az_2^2 + b = 0$$

Determine a relação $r = \frac{a^2}{b}$ para que os pontos z_1, z_2 e $z_0 = (0,0)$ do plano complexo formem um triângulo equilátero, esboçando as soluções no plano complexo.
Obs: $z_0 = (0,0)$ é a origem no plano complexo. O símbolo $\in$ significa "pertence".

4ª Questão [Valor: 1,0]
Dado o polinômio $2x^4 + x^3 + px^2 + qx + 2$, determine p e q de modo que ele seja divisível por $(x-1)^2$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a equação:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a^{(1-n)y^3} = b$$

onde a é um número real maior que 1, calcule todos os valores reais ou complexos de y que satisfazem essa equação, sabendo-se que a^4 é média geométrica entre $(1+b)$ e $(\frac{1}{b})$.

6ª Questão [Valor: 1,0]

a) **[Valor: 0,5]** Dada a equação:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Determine a relação entre os seus coeficientes para que a soma de duas raízes seja igual à soma das outras duas.

b) **[Valor: 0,5]** Encontre as raízes da equação

$$x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x - 5 = 0$$

sabendo que seus coeficientes satisfazem as relações do item anterior.

7ª Questão [Valor: 1,0]
São dados os conjuntos $E = \{a, b, c, d\}$ e $F \subset E$, tal que $F = \{a, b\}$. Denote por $P(E)$ o conjunto das partes de E e considere, em $P(E)$, a relação R, tal que

$$X\ R\ Y \Leftrightarrow F \cap X = F \cap Y$$

a) **[Valor: 0,4]** Verifique se R é uma relação de equivalência.
b) **[Valor: 0,3]** $Z \subset P(E)$. Determine Z, sabendo-se que $Z \cap F = \{b\}$.
c) **[Valor: 0,3]** $W \subset P(E)$. Determine W, sabendo-se que $F \cap W = \emptyset$.

Obs: $P(E)$ tem 16 elementos. $\Leftrightarrow$ significa "se e somente se".

8ª Questão [Valor: 1,0]
Considere

$$y = \frac{x(x+1)}{x^2+1}$$

Determine os pontos de máximo, de mínimo, de inflexão, as suas assíntotas e verifique se os pontos de inflexão pertencem a uma mesma reta, apresentando, em caso afirmativo, a equação desta reta. Faça um esboço da função indicando os pontos e retas acima aludidos.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Considere as progressões geométrica e aritmética abaixo, as quais se prolongam indefinidamente nos dois sentidos:

$$\ldots, a^{-\frac{2m}{4}}, a^{-\frac{m}{4}}, a^0, a^{\frac{m}{4}}, a^{\frac{2m}{4}}, \ldots$$
$$\ldots, (1-\frac{5m}{4}), (1-\frac{3m}{4}), (1-\frac{m}{4}), (1+\frac{m}{4}), (1+\frac{3m}{4}), \ldots$$

Verifique se elas podem definir o núcleo de um sistema de logaritmos. Em caso negativo, justifique a resposta. Em caso afirmativo, determine a base do sistema.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Determine quantos números M existem satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:
i) $10^6 < M < 10^7$.
ii) O algarismo 4 aparece pelo menos 2 vezes em M.
iii) O algarismo 8 aparece pelo menos 3 vezes em M.

Obs: Os números M são inteiros escritos na base 10.

IME 1975/1976 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,25]
Considere um triângulo ABC, com os ângulos internos representados por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. São dados:

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2} = m \ \text{ e } \ \operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2} = n$$

a) **[Valor: 0,5]** Determine $\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}$ em função de m e n, especificando a condição a ser imposta ao produto mn para que o triângulo ABC exista.

b) **[Valor: 0,75]** Determine o valor do produto mn, para que o lado oposto ao ângulo $\hat{A}$ seja igual à média aritmética dos outros dois lados.

2ª Questão [Valor: 1,25]
Considere um triângulo equilátero ABC e um ponto M em seu interior. A partir de M traçam-se três retas perpendiculares aos lados do triângulo ABC. Estas retas encontram os lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ do triângulo nos pontos D, E e F, respectivamente. Sabendo que

$$\frac{\overline{MF}}{2} = \frac{\overline{ME}}{3} = \frac{\overline{MD}}{5}$$

e que o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC é igual a 20 metros, calcule a área do triângulo AEF.

3ª Questão [Valor: 1,25]

a) **[Valor: 1,0]** Em um triângulo ABC são dados o perímetro $2p$, o raio da circunferência inscrita r e a altura h sobre o lado $\overline{BC} = a$. Deduza as fórmulas que permitem calcular, em função de p, r e h, o lado $\overline{BC} = a$, a soma $\overline{AC} + \overline{AB} = b + c$ e o produto $\overline{AC}.\overline{AB} = bc$, dos outros dois lados.

b) **[Valor: 0,25]** Em um triângulo ABC, de perímetro $2p$, o raio da circunferência inscrita é igual a r e a altura sobre o lado $\overline{BC} = a$ é igual a h. Determine p em função de r e h para que o triângulo ABC seja retângulo em A.

4ª Questão [Valor: 1,25]
Considere um triângulo equilátero ABC, de lado $2k$. O lado $\overline{AB}$ está contido na interseção dos planos π_1 e π_2. H_1 é a projeção ortogonal de C sobre π_1 e H_2 é a projeção ortogonal de C sobre π_2.

a) **[Valor: 0,5]** Calcule $\overline{CH_1}$ em função de k, supondo que o ângulo $\widehat{AH_1B} = 120^\circ$.

b) **[Valor: 0,75]** Calcule o volume V do tetraedro $ABCH_2$, em função de k, sabendo que o quadrado da área de uma das faces do tetraedro é igual à soma dos quadrados das áreas das outras faces.

5ª Questão [Valor: 1,25]
Em um plano são dados A e F', tais que $\overline{AF'} = 3$. Represente a mediatriz do segmento $\overline{AF'}$ por d'. Seja h uma hipérbole que tem A como vértice de um dos ramos, F' como foco situado na concavidade do outro ramo e d' a diretriz associada a F'. Calcule a excentricidade de h, a distância de A ao centro de h e o ângulo (no interior do qual está um ramo de h) que as assíntotas de h formam entre si.

6ª Questão [Valor: 1,25]
Considere um trapézio isósceles $ABCD$. A base maior $\overline{AB} = 2$ é constante. A altura x do trapézio é variável e os lados não paralelos são $\overline{AD} = \overline{BC} = 2x$. S_1 e S_2 são as áreas totais dos sólidos de revolução obtidos girando-se o trapézio, respectivamente, em torno das bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Suponha que $k = \frac{S_1}{S_2}$. Exprima x em função de k, determine o valor de k que corresponde a um trapézio circunscritível T e calcule o raio da circunferência na qual este trapézio T está inscrito.

7ª Questão [Valor: 1,25]
Considere duas retas reversas ortogonais, r_1 e r_2. A_1 é um ponto de r_1, A_2 é um ponto de r_2, $\overline{A_1A_2} = k$ é perpendicular comum a r_1 e r_2. Sejam e a esfera de diâmetro $\overline{A_1A_2}$ e t uma reta tangente a e em um ponto M variável de e, com a condição de t encontrar r_1 em P_1 e r_2 em P_2.

a) **[Valor: 0,5]** Sendo $\overline{A_1P_1} = x_1$ e $\overline{A_2P_2} = x_2$, calcule o produto x_1x_2 em função de k.

b) **[Valor: 0,75]** π_1 é o plano que contém r_1 e A_2. π_2 é o plano que contém r_2 e A_1. Calcule as distâncias de M aos planos π_1 e π_2, em função de $\overline{A_1P_1} = x_1$ e $\overline{A_2P_2} = x_2$, especificando o lugar geométrico descrito pelo ponto M.

8ª Questão [Valor: 1,25]
Considere,

$$E = \left[\operatorname{sen}\frac{1\pi n}{N}\right]^2 + \left[\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{N}\right]^2 + \ldots + \left[\operatorname{sen}\frac{N\pi n}{N}\right]^2 = \sum_{k=1}^{N}\left[\operatorname{sen}\frac{k\pi n}{N}\right]^2$$

N e n são números inteiros, tais que $0 < n < N$. Calcule E em função de N.

IME 1974/1975 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine todas as soluções da equação trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 9x + \operatorname{sen} 5x + 2\operatorname{sen}^2 x = 1$$

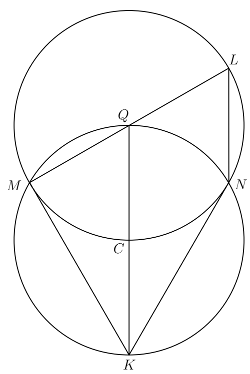
2ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam o segmento de reta $\overline{MQ}$ e os pontos N e P sobre $\overline{MQ}$, na ordem M, N, P e Q. Considere um ponto K não situado sobre a reta suporte de $\overline{MQ}$. Suponha que:

$$\overline{MN} = 2\overline{NP} = 2\overline{PQ} = d \text{ e } \widehat{MKN} = \widehat{NKP} = \widehat{PKQ}$$

Determine o valor numérico da relação $\frac{h}{d}$, sendo h a distância do ponto K à reta suporte de $\overline{MQ}$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um triângulo ABC, tal que $\hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{2}$.
a) **[Valor: 0,5]** Os lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do triângulo ABC não são conhecidos, mas é conhecido o valor de m, sendo $m = \frac{\overline{AC}+\overline{AB}}{\overline{BC}}$. Calcule $\operatorname{sen} A$, $\operatorname{sen} B$ e $\operatorname{sen} C$, em função de m.
b) **[Valor: 0,5]** Calcule o ângulo que a altura do triângulo ABC, traçada a partir de A, forma com o raio $\overline{OA}$ da circunferência de centro O, circunscrita ao triângulo ABC.

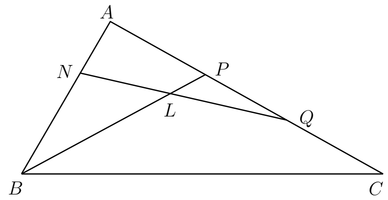
4ª Questão [Valor: 1,0]
A figura abaixo mostra duas circunferências, ambas de raio R, as quais se interceptam nos pontos M e N. Uma circunferência tem centro em C; a outra tem centro em Q, sendo $\overline{KQ}$ um diâmetro da circunferência de centro C, tal que $\widehat{MQ}=\widehat{QN}$. Calcule a área do quadrilátero $KMLN$ em função de R.



5ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um quadrado $QACB$, de centro I, e um ponto P de posição variável situado sobre a diagonal $\overline{AB}$, tal que $P \neq I$. Com centro em P e raio $\overline{PQ}$ traça-se uma circunferência que corta $\overline{QA}$ (ou seu prolongamento) em M e $\overline{QB}$ (ou seu prolongamento) em N. Considere os triângulos CMA, CNB e CPI e calcule os valores numéricos das relações $r_1 = \frac{\overline{AM}}{\overline{BN}}$ e $r_2 = \frac{\overline{AM}}{\overline{IP}}$ e do ângulo formado por $\overline{CP}$ e $\overline{MN}$.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma circunferência K de centro O e raio R e uma corda fixa $\overline{AB}$. Seja M um ponto variável da circunferência K. Uma reta que passa por B e M corta a circunferência C, de centro em M e raio $\overline{MA}$, nos pontos P e Q. Determine o lugar geométrico de P e Q, quando M descreve a circunferência K.

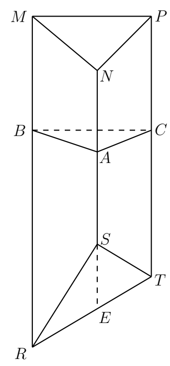
7ª Questão [Valor: 1,0]
Na figura abaixo é dado um triângulo ABC, retângulo em A, cujos lados têm as seguintes medidas: $\overline{AB} = 1$ e $\overline{BC} = 2$. Sabe-se que $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$ e que $\overline{AN} = \frac{\overline{NB}}{2}$. Calcule a área do triângulo LPQ.



8ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um cubo K de aresta a. Suponha que L é o ponto em que as diagonais do cubo K se interceptam e que M é o ponto médio de uma aresta do cubo K. Com centro em L e raio $\overline{LM}$ é construída uma esfera E. O plano tangente à esfera E e perpendicular a uma diagonal do cubo K destaca do cubo K uma pirâmide P. Calcule o volume da pirâmide P, em função de a.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um cone de revolução, cujo eixo forma com uma geratriz o ângulo α.
a) **[Valor: 0,5]** Determine o lugar geométrico dos focos de todas as parábolas, seções planas deste cone.
b) **[Valor: 0,5]** Seja P uma parábola, seção do cone dado, cujo vértice dista d do vértice do cone. Calcule, em função de d e de α, a área do segmento parabólico de P, compreendido entre P e uma corda que é perpendicular ao eixo de P e que encontra o eixo do cone.

10ª Questão [Valor: 1,0]
A figura abaixo mostra um prisma em que uma seção reta é o triângulo retângulo isósceles ABC, no qual $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ e $\overline{AB} = b$. A base superior do prisma é o triângulo equilátero MNP, de lado a. A base inferior do prisma é o triângulo RST, sendo E o ponto médio de $\overline{RT}$ e sendo $\overline{SE} = b$, por construção. A menor distância entre as bases se encontra sobre a aresta $\overline{NS} = \overline{NA}+\overline{AS}$, sendo, por construção, $\overline{NA} = b$. O comprimento $\overline{AS} = d$ é escolhido de tal forma que o volume V_1, do semi-prisma superior $BACMNP$, seja igual ao volume V_2, do semi-prisma inferior $BACRST$. Calcule:
a) **[Valor: 0,5]** V_1 em função de b.
b) **[Valor: 0,5]** d em função de b.



sln: As figuras desta prova foram escaladas para efeito de diagramação.

IME 1973/1974 - Álgebra

1ª Questão, Item 1 [Valor: 0,6]
Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{R}_0^+$ o subconjunto de $\mathbb{R}$ formado pelos reais positivos. Seja $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação bijetiva.
a) Determine f sabendo-se que:

$$f(y^x) = xf(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{e} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$f^{-1}(1) = e$$

onde e é a base dos logaritmos neperianos.
b) Calcule

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x$$

1ª Questão, Item 2 [Valor: 0,4]
Em uma pesquisa realizada entre 500 pessoas foram obtidos os seguintes dados:
200 pessoas gostam de música clássica;
400 pessoas gostam de música popular;
75 pessoas gostam de música clássica e de música popular.
Verifique a consistência ou inconsistência dos dados desta pesquisa.

2ª Questão, Item 1 [Valor: 0,5]
Seja $p(x)$ um polinômio a coeficientes reais de grau maior ou igual a 1 e $q(x) = 2x^2 + x$. Determine todos os possíveis máximos divisores comuns de $p(x)$ e $q(x)$.

2ª Questão, Item 2 [Valor: 0,5]
Determine os parâmetros reais de m, n, p de modo que as equações:

$$(m+1)x^3 + (n-2)x^2 - (m+n-p)x + 1 = 0$$
$$(m-1)x^3 + (n+2)x^2 - (m-n+p)x + 3 = 0$$

tenham as mesmas raízes.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dado um ponto fixo, A, sobre uma circunferência C, de raio r, determine o lugar geométrico das interseções das circunferências que têm por diâmetros duas cordas da circunferência C, perpendiculares entre si e que passam pelo ponto A.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e seja $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} - \{0\}$. Definimos uma relação D, sobre $\mathbb{Z}_0$, por:
$m\ D\ n$ se e somente se n divide m.
a) Mostre que, se $a, b \in \mathbb{Z}$, a relação E definida por:
$a\ E\ b$ se e somente se existe $m \in \mathbb{Z}_0$ tal que $b = am$ e $m\ D\ 1$, é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$.
b) Seja $\mathbb{Z}_0^+$ o conjunto dos números inteiros positivos. Se $n \in \mathbb{Z}_0^+$, mostre que qualquer n-ésima raiz da unidade é uma m-ésima raiz primitiva da unidade para exatamente um $m \in \mathbb{Z}_0$ tal que $m\ D\ n$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Para cada inteiro $k \geq 0$ seja $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f_0(x) = x + \ln(\sqrt{x^2+1} - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e se $k > 0$,

$$f_k(x) = \frac{x + \ln(\sqrt{x^2+1} - x)}{x^k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R} - \{0\}$$

e $f_k(0) = a$.
a) Desenvolva $f_0(x)$ em série de potências de x até o termo de quarta ordem.
b) Determine os valores de k para os quais $\lim_{x \rightarrow 0} f_k(x)$ existe e é finito e calcule os valores de a de modo que f_k seja contínua.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $f(a,b,c,d) = c - a - 3b + 3d$ onde a, b, c, d são números reais.
a) Dadas as matrizes quadradas A, B, C tais que:
i) $A.B = I$, onde I é a matriz identidade;
ii) B é uma matriz triangular cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1, exceto um deles que vale 2;
iii) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & 4 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

Mostre que, se $|A|$ e $|C|$ denotam os determinantes de A e C, então:

$$f(a,b,c,d) = |A|.|C|$$

b) Mostre que $f(a,b,c,d) = 0$ é condição necessária e suficiente para que exista um polinômio $p(x)$ com coeficientes reais, de grau menor ou igual a 2 e tal que $p(-1) = a$, $p(1) = b$, $p(2) = c$, $p(0) = d$

7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja a equação geral do 2º grau em duas variáveis:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Prove que o determinante:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

é invariante por mudança de eixos coordenados.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x \text{ é racional, } x \neq 0 \\ -\frac{1}{x}, & \text{se } x \text{ é irracional} \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Seja $f^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) > 0 \\ 0, & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Seja $f^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f^-(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) < 0 \\ 0, & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcule, caso exista:

$$I_1 = \int_1^2 f^+(x)\,\mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_1^2 [f^+(x) - f^-(x)]\,\mathrm{d}x$$

b) Determine $M = \max(g, h)$, onde:

$$g = \mathrm{Sup}\{f(x)|x \in \mathbb{R}\} - \mathrm{Sup}\{f^+(x)|x \in \mathbb{R}\}$$

$$h = \mathrm{Sup}\{f(x)|x \in \mathbb{R}\} - \mathrm{Sup}\{f^-(x)|x \in \mathbb{R}\}$$

9ª Questão, Item 1 [Valor: 0,5]
Seja $\mathbb{Z}_0^+$ o conjunto dos inteiros positivos e seja

$$A = \left\{ \frac{1}{n + \frac{1}{m}} \mid m, n \in \mathbb{Z}_0^+ \right\}$$

Determine o conjunto A' dos pontos de acumulação de A e o conjunto A'' dos pontos de acumulação de A'.

9ª Questão, Item 2 [Valor: 0,5]
Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definimos $\min(f, g)$ como a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$h(x) = \min\left(f(x), g(x)\right), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Se $f(x) = x^2 + 8$ e $g(x) = 6x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, calcule:

$$I = \int_1^5 h(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \operatorname{sen}^{2n} \frac{1}{k}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Calcule, caso exista, a primeira derivada de $x^k f(k)$ no ponto $x = 0$, para k inteiro e $k \geq 0$.

IME 1973/1974 - Geometria

1ª Questão, Item 1 [Valor: 0,4]
Mostrar que o conjunto de igualdades

$$\begin{cases} a+d=\pi-(c+b) \\ \dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b}=\dfrac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} d} \end{cases}$$

acarreta a igualdade:

$$\operatorname{cotg} a-\operatorname{cotg} b=\operatorname{cotg} c-\operatorname{cotg} d$$

1ª Questão, Item 2 [Valor: 0,6]
Considerando $a=\frac{\pi}{17}$, calcule o número racional representado pela expressão:

$$\frac{\cos a\,.\cos 13a}{\cos 3a+\cos 5a}$$

2ª Questão, Item 1 [Valor: 0,6]
Resolver a seguinte equação trigonométrica, determinando todas as soluções:

$$\operatorname{sen}^2(x-\frac{\pi}{4})=\cos^2(3x+\frac{\pi}{2})$$

2ª Questão, Item 2 [Valor: 0,4]
Para que valores de m a expressão

$$y=\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x+m(\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x)$$

é independente do valor de x? Qual o valor de y correspondente?

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere-se um triângulo ABC e suas alturas AD, BE e CF que cortam o círculo circunscrito em D', E' e F', respectivamente. Exprimir os comprimentos de AD, BE, CF, AD', BE' e CF' em função dos ângulos do triângulo e do raio R do círculo circunscrito.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam um círculo $C(O,r)$ e $A\in C$; t uma tangente a C em A; $B\in t$, tal que $AB=a$. Seja também um círculo C' variável, tangente em B a t e $C\cap C'=\{M,N\}$.

a) Mostrar que a reta MN passa por um ponto fixo quando C' varia.
b) Calcule entre que limites varia o raio de C'.
c) Determinar o lugar geométrico do ponto médio de MN.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Sobre o lado BC de um triângulo ABC e exteriormente ao triângulo, constrói-se um quadrado $BCDE$. Sejam: $AE\cap BC=\{F\}$; $AD\cap BC=\{G\}$; $BC=a$; h a altura correspondente a BC. Por F e G tiram-se perpendiculares FH e GK a BC, sendo $\{H\}=FH\cap AB$ e $\{K\}=GK\cap AC$. Pedem-se:

a) Provar que $FGKH$ é um quadrado.
b) Calcular o lado x deste quadrado em função de a e h.
c) A mesma construção efetuada a partir do lado AC fornece um segundo quadrado análogo ao $FGKH$, de lado y. Que particularidade deve apresentar o triângulo ABC para que se tenha $x=y$?

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um triângulo ABC. De B e de C tiram-se duas cevianas BN e CP. Seja $BN\cap CP=\{O\}$. De A tira-se a ceviana AO que corta BC em M. Seja $PN\cap BC=\{S\}$. Demonstre que os pontos M e S dividem harmonicamente o lado BC.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Dá-se um icosaedro regular. Secciona-se cada ângulo sólido por um plano que corta as arestas à distância de $\frac{1}{3}$ de seu comprimento, contada a partir dos vértices. Destacadas estas porções, considera-se o sólido resultante. Pedem-se:

a) Dizer qual a natureza das diferentes faces e dos diferentes ângulos sólidos.
b) O número de faces, de arestas e de vértices deste sólido.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam $ABCD$ e $A'B'C'D'$ dois quadrados, de lado a e centros O e O', situados em planos paralelos π e π' distantes d, sendo OO' perpendicular a ambos. Cada diagonal de um quadrado é paralela a dois lados do outro quadrado. Liga-se cada vértice de cada quadrado aos 2 vértices mais próximos do outro, Obtêm-se, assim, triângulos que, com os dois quadrados, formam um sólido S. Pedem-se:

a) Determinar d em função de a, de modo que os triângulos acima descritos sejam equiláteros.
b) Determinar d em função de a, de modo que exista uma esfera com centro no ponto médio de OO' e passando pelos pontos médios de todas as arestas de S.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Dá-se, num plano π, um hexágono regular $ABCDEF$ de centro O e lado a. Toma-se sobre uma perpendicular ao plano π em O um ponto S tal que $\overline{SO}=\frac{3}{2}a$ e considera-se a pirâmide $SABCDEF$, a qual se corta um plano σ passando por AB. A seção é um hexágono $ABMNPQ$. Pedem-se:

a) Mostrar que MN passa por um ponto fixo quando a inclinação de σ varia, e determinar a distância desse ponto a O.
b) Fixando-se P e N nos pontos médios das arestas a que pertencem, determinar a razão $\frac{SO}{SE}$ e a área da seção $ABMNPQ$.

10ª Questão [Valor: 1,0]

IME 1972/1973 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a curva de equação

$$5x^2 - y^2 + 6xy + 4x + 8y + 10 = 0$$

obtenha as equações dos seus eixos de simetria.
Obs: $\text{tg}^{-1} \dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Dado o sistema

$$\begin{aligned}
4x_1 - 4x_2 - 17x_3 + 17x_4 + 4x_5 - 4x_6 &= 0 \\
x_1 - mx_2 &= 0 \\
x_2 - mx_3 &= 0 \\
x_3 - mx_4 &= 0 \\
x_4 - mx_5 &= 0 \\
x_5 - mx_6 &= 0
\end{aligned}$$

determine os valores de m para os quais $x_i \neq 0$, com $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere os algarismos 1, 2, 3, 4, 5. Uma das permutações possíveis destes algarismos origina o número 42351. Determine a soma dos números formados, quando os algarismos acima são permutados de todos os modos possíveis.

4ª Questão [Valor: 1,0]
$P(x)$ é um polinômio do quarto grau e sua segunda derivada é $P''(x)$. Determine $P(x)$, sabendo que $P''(x) = x^2 + x + 1$ e que $P(x)$ é divisível por $P''(x)$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a cônica

$$x^2 - y^2 = 1$$

Suponha que T é a tangente à cônica dada. Suponha ainda, que N é uma reta que contém o ponto de coordenadas $(0, 0)$ e é normal a T. Determine o lugar geométrico dos pontos do plano xy que pertencem, simultaneamente, a N e a T.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule a soma dos quadrados dos coeficientes de $(x + a)^n$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{7x}\right)^x$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o determinante

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1+M & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1+N & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1+P & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1+R
\end{vmatrix}$$

Sendo

$$M = \log_a a^a$$

$$N = e^{\ln a}$$

$$P = \log_{10} 10^{(\frac{1}{a})^2}$$

$$R = (2a)^{2 \log_a a}$$

Obs:
$\log_a y$: logaritmo de y na base a;
$\ln x$: logaritmo de x na base e;
e: base dos logaritmos neperianos.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma curva de equação

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Suponha que esta curva tem um ponto de inflexão em $(0, 4)$ e que é tangente ao eixo dos xx em $(2, 0)$. Determine os valores de a, b, c, d, esboçando o gráfico da curva.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule

$$S = \sum_{n=0}^{n=30} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$$

Obs: $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=30}$ significa somatório de $n = 0$ a $n = 30$.

IME 1972/1973 - Geometria

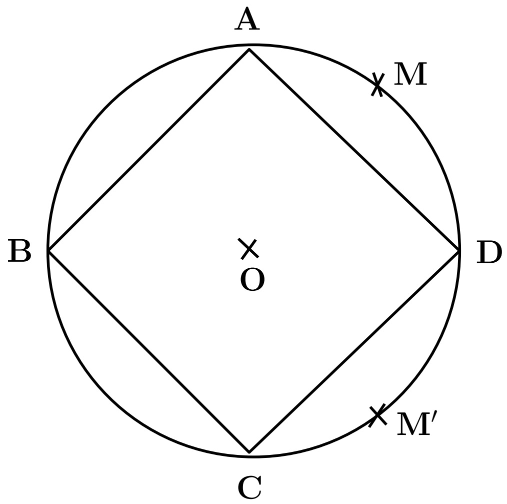
1ª Questão [Valor: 1,0]
Do vértice A do triângulo ABC, traçam-se a mediana $\overline{AD}$ e a bissetriz $\overline{AE}$. Considere a circunferência circunscrita ao triângulo ADE, que corta $\overline{AB}$ em B' e $\overline{AC}$ em C'. Prove que $\overline{BB'} = \overline{CC'}$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Um quadrado $ABCD$ está inscrito numa circunferência de centro O e raio R. Um ponto variável M se desloca sobre o arco ADC tal que $\overline{MB}$ corta $\overline{AC}$ em um ponto P, também variável; qualquer que seja a posição do ponto M, $\overline{MB}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{M}C$ e os triângulos MBC e MAP são semelhantes; para uma posição M' do ponto M, P ocupa a posição P', tal que os triângulos $M'BC$ e $M'AP'$ são iguais. Pedem-se

a) Os ângulos do triângulo $M'P'C$.

b) Os segmentos $\overline{P'C}$ e $\overline{P'B}$ em função de R.

c) Sendo Q o ponto onde $\overline{AM'}$ corta $\overline{CD}$, demonstrar que o ângulo $A\hat{P'}Q$ é reto.



3ª Questão [Valor: 1,0]
Seja uma elipse de focos F e F' e um ponto M qualquer da elipse. A tangente à elipse em M corta em T e T' as tangentes aos vértices A e A' do eixo maior. Provar que a circunferência de diâmetro $\overline{TT'}$ passa pelos focos e que o produto $\overline{AT}\times\overline{A'T'}$ permanece constante quando o ponto M percorre a elipse.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Considere o diedro $PABQ$, no qual o ângulo entre os planos P e Q vale 45º, sendo A e B pontos da aresta de interseção dos planos. Traçam-se $\overline{Ax}$ e $\overline{By}$ perpendiculares a $\overline{AB}$ e sobre os semi-planos P e Q respectivamente; sobre $\overline{Ax}$ toma-se o ponto M cuja projeção ortogonal sobre $\overline{By}$ é M'. Dados: $\overline{AB} = d$ e $\overline{AM} = L$, determine os comprimentos $\overline{BM'}$ e $\overline{MM'}$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma diagonal do cubo de aresta a e um plano perpendicular a esta diagonal que, passando pelo centro do cubo, intercepta-o segundo uma seção S. Determine o raio da esfera circunscrita ao sólido que tem por base S e por vértice um dos vértices do cubo na extremidade da diagonal considerada.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Pelo vértice V de um tetraedro regular $VABC$ de aresta a, traça-se um plano $VB'C'$ que corta a base do tetraedro paralelamente a $\overline{BC}$ e divide o seu volume em partes iguais. Calcular em função de a, o perímetro da seção $VB'C'$, segundo a qual o plano corta o tetraedro.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considera-se uma esfera de centro O e raio R, inscrita num cone de vértice S, tendo o ângulo do vértice igual a 2Θ. Seja um plano P tangente à esfera em A, tal que o eixo de revolução do cone intercepta em N o plano, segundo um ângulo φ ($\varphi < 90^o$). Admitindo o ponto O entre S e N, tal que $\overline{SO} > \overline{ON}$, mostre que o eixo maior $2a$ da seção cônica determinada pelo plano P no cone de geratrizes infinitas coincidentes com as geratrizes do cone dado é:

$$2a = \frac{2R\cos\Theta}{\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\Theta}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Num triângulo obtusângulo, o ângulo obtuso mede 105º. Determine o valor de n de modo que os ângulos agudos sejam raízes da equação:

$$3\sec x + n\left(\frac{1}{\sec x} - \frac{1}{\operatorname{cosec} x}\right) = 3\left(\frac{1}{\operatorname{cosec} x} + \frac{1}{\sec x}\right)$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Resolver o sistema:

$$\begin{cases} \sec^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 5 \\ \operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cotg}^2 y = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Sabendo-se que:
- os pontos P, Q e A pertencem a um mesmo plano horizontal;
- os pontos P, Q e B pertencem a um mesmo plano vertical (B exterior a $\overline{PQ}$);
- os pontos A e B pertencem a um plano vertical que é perpendicular ao plano vertical que contém P, Q e B;
- a distância entre os pontos P e Q é de 80 metros;
- os ângulos $A\hat{P}B$ e $A\hat{Q}B$ valem 30º e 33º15′ respectivamente.

Calcular, com erro de ± 1 metro, a distância entre A e B.
Obs:
$\operatorname{sen} 33^o15' = 0{,}55$; $\cos 33^o15' = 0{,}84$; $\operatorname{tg} 33^o15' = 0{,}66$.

IME 1971/1972 - Álgebra

1ª Questão, Item 1 [Valor: 0,5]
Seja E a elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e t uma tangente variável. Sejam M $(x', 0)$ e N $(0, y')$ as interseções de t com os eixos coordenados Ox e Oy, respectivamente. Determine a equação cartesiana do lugar geométrico descrito pelo ponto P (x', y') e esboce o seu gráfico.

1ª Questão, Item 2 [Valor: 0,5]
Seja $m \in \mathbb{R}$, fixado, e

$$(k+1)^2 y^2 + x^2 + 2(k-1)xy + mk^2 y = 0$$

a equação cartesiana de uma família F de cônicas de parâmetro k. Determine a equação cartesiana do lugar geométrico dos centros das cônicas da família F.

2ª Questão, Item 1 [Valor: 0,5]
Sejam $b \in \mathbb{Z}_+$, $b > 1$ e $M \in \mathbb{N}$. Suponhamos M expresso sob a forma

$$M = a_p b^p + a_{p-1} b^{p-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0,$$

onde os coeficientes satisfazem a relação

$$0 \leq a_i \leq b - 1, \ \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, p\}$$

Dizemos, então, que a representação de M na base de numeração b é

$$M = (a_p a_{p-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_b,$$

onde o índice b indica a base considerada.
a) Determine, com a notação exposta acima, a representação de 1347 na base 10 e de 929 na base 5.
b) Determine em que base(s) de numeração é verificada a igualdade

$$(2002)_b + (21)_5 = (220)_b + (1121)_b$$

c) Mostre que se $M = (14641)_b$, então independentemente da base considerada, M é quadrado perfeito. Determine a representação de $\sqrt{M}$ na base $b+1$ (b mais um).
d) Determine a representação de $M = (14654)_b$ na base $b+1$ (b mais um).

2ª Questão, Item 2 [Valor: 0,5]
Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função exponencial se

$$f(x) = a^x, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

onde a é uma constante real estritamente positiva. Determine as funções exponenciais que satisfazem a equação

$$6f(x+5)+f(x+4)-43f(x+3)-43f(x+3)+f(x+1)+6f(x) = 0$$

3ª Questão, Item 1 [Valor: 0,5]
Prove, aplicando o Princípio da Indução, que se $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Z}_+$ é um número primo, então $n^p - n$ é divisível por p.

3ª Questão, Item 2 [Valor: 0,5]
Seja A um conjunto tal que $n(A) = p > 0$. Determinar justificando:

a) O número de relações reflexivas distintas em A.

b) O número de relações simétricas distintas em A.

c) O número de relações antisimétricas distintas em A.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\sum_{i=|)x(|}^{i=\infty} \frac{x}{a^i}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

onde $a > 1$ é uma constante fixada. Determine, justificando:

a) Os pontos de descontinuidade de f.

b) O domínio da função f', derivada de f.

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f$.

Obs: $)x($ é maior inteiro menor ou igual a x.

5ª Questão, Item 1 [Valor: 0,5]
Seja $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right], \ \forall x \in A$$

Mostre que se $f^{(n)}$ designa a derivada de ordem n de f, então podemos expressá-la sob a forma

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{n+1}},$$

onde P_n é um polinômio de grau n. Determine todas as raízes de P_n.

5ª Questão, Item 2 [Valor: 0,5]
Seja $u = \sum u_n$ uma série definida por

$$u_n = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a^p b^p}{p}, \text{ se } n = 2p \\ a^{p+1} b^p, \text{ se } n = 2p+1 \end{array} \right. ,$$

onde a e b são números reais.

a) Determine o conjunto A, de todos os produtos da forma ab (a vezes b), $b \geq 0$, para os quais a série converge.

b) Calcule

$$\sup \{ax \mid x \in A\}$$

$$\inf \{ax \mid x \in A\}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Dizemos que uma matriz A é triangular se todos os seus elementos acima (ou abaixo) da diagonal principal são nulos. Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja $T(x)$ uma matriz triangular de dimensão $n > 1$, cujos elementos da diagonal principal são definidos como se segue:

Se $1 \leq i \leq n-1$, então $t_{ii}(x) = |x|^{\overline{n-1}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Se n é ímpar, então $t_{nn}(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Se n é par, então $t_{nn}(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = [\det T(x)]^2, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Calcule, caso exista, a derivada de f no ponto $x = 0$.

b) Esboce o gráfico de f assinalando suas principais características, quando $n = 2$.

7ª Questão, Item 1 [Valor: 0,5]
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \frac{1}{|x|+1} + \frac{1}{|x-a|+1}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

onde $a > 0$. Determine o valor máximo de f.

7ª Questão, Item 2 [Valor: 0,5]
Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definimos $\min\{f, g\}$ como sendo a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Se $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = 4x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, calcule

$$\int_0^4 \min\{f, g\}\, \mathrm{d}x$$

b) Seja $h(x) = -e^{-(1+x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Determine f sabendo-se que: $h = \min\{f, g\}$; $f(0) = 1$; f é positiva e decrescente em $\mathbb{R}$; f é primitiva de g em $\mathbb{R}$.

8ª Questão, Item 1 [Valor: 0,5]
Determinar, justificando, o menor inteiro positivo p para o qual

$$\int_0^{\ln p})e^x(\, \mathrm{d}x > \ln p$$

Obs: $)x($ é maior inteiro menor ou igual a x.

8ª Questão, Item 2 [Valor: 0,5]
Dado um cilindro circular reto de raio da base igual a r, secciona-se o mesmo por um plano P que passa pelo centro da base formando um ângulo $\hat{A} < 90^{\circ}$ com a mesma. Determine a área da superfície cilíndrica compreendida entre os planos P e o da base.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ definamos

$$A_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n - 1 = 0\}.$$

Se $p, q \in \mathbb{Z}_+$ e (p, q) designa o seu máximo divisor comum, prove que

$$A_p \cap A_q = A_{(p,q)}$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja A um conjunto não vazio e R uma relação em A, reflexiva e transitiva. Definimos a relação S, em A, por: xSy se e somente se xRy e yRx.

a) Mostre que S é uma relação de equivalência em A. Caracterize as classes de equivalência determinadas por S em A, quando R é uma relação de ordem.

b) Determine explicitamente o conjunto quociente A/S, quando

$$R = [(A \cap B) \times (A \cap B)] \cup [(A - B) \times (A - B)],$$

onde B é um conjunto não vazio.

IME 1971/1972 - Geometria

1ª Questão [Valor: 0,5]
Determinar os valores do arco x que satisfazem a equação:

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{3}(\sec x - \cos x)$$

2ª Questão [Valor: 0,5]
Calcular o lado c dos triângulos que tenham:

$$a = 4\text{cm}$$

$$b = 4(1+\sqrt{3})\text{cm}$$

$$\hat{A} = 15^{\text{o}}$$

3ª Questão [Valor: 0,5]
Dois círculos tangentes entre si têm raios R e r, sendo $R > r$. As tangentes exteriores comuns e esses dois círculos formam um ângulo $2a$. Exprimir R em função de r e da tangente de $a/2$.

4ª Questão [Valor: 0,5]
Demonstrar que um triângulo ABC, qual os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ verificam a relação

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \hat{B}}{\operatorname{sen}^2 \hat{C}} = \frac{\tan \hat{B}}{\tan \hat{C}}$$

é retângulo ou isósceles.

5ª Questão [Valor: 0,5]
Determinar o seno e o coseno do ângulo, menor que 180^{o}, formado pelos ponteiros de um relógio que marca 12 horas e 15 minutos.

6ª Questão [Valor: 0,5]
Considere-se um ponto móvel M, sobre uma semicircunferência de diâmetro AB. Sobre os lados MA e MB do triângulo MAB e exteriormente a este, constroem-se os quadrados de centros O e O'. Supondo-se que M percorre a semicircunferência, pedem-se:

a) Mostrar que M, O e O' permanecem sobre uma reta e que esta passa por um ponto fixo.

b) Determinar os lugares geométricos de O e O'.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um círculo de centro O e raio R igual a $4a$. Por um ponto A sobre um diâmetro DE, tal que OA igual a $3a$, traça-se uma corda BAC fazendo com OA um ângulo de 60^{o} ($O\hat{A}B = 60^{\text{o}}$). Pedem-se:

a) Calcular os segmentos AB e AC ($AB > AC$).

b) Calcular o percurso total descrito pelo ponto M, médio da corda BC, quando esta dá um giro de 360^{o} em torno de A.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Um quadrado $ABCD$ tem lado unitário e centro O. Sejam (A), (B), (C) e (D) as circunferências com centro em cada vértice e que passam por O. Pedem-se
a) Identificar o polígono (P) cujos vértices são determinados por (A), (B), (C) e (D) sobre os lados do quadrado, calculando os seus lados e seus ângulos internos.
b) Identificar o polígono (P') cujos vértices são determinados por (A), (B), (C) e (D) sobre os prolongamentos dos lados do quadrado, calculando os seus lados e os seus ângulos internos.
c) Demonstrar que (P) e (P') são homotéticos e calcular as possíveis razões de homotetia.

9ª Questão [Valor: 1,0]
A base de um prisma oblíquo é um semi-hexágono regular $ABCD$ inscrito em um círculo de diâmetro $AD = 2R$. Seja a face oposta o polígono $A'B'C'D'$. A face $ADD'A'$ é um retângulo tal que $AA' = R$ e a projeção ortogonal do vértice A sobre o plano da base está sobre o prolongamento de BC. Calcular o volume e a área total do prisma, em função de R.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Uma seção plana de um cone de revolução é uma elipse de excentricidade $\sqrt{3}/3$ cujo eixo maior é perpendicular a uma geratriz deste sólido. Pedem-se:
a) Determinar o ângulo entre o eixo do cone e suas geratrizes.
b) Considere-se sobre o mesmo cone a hipérbole H, de excentricidade máxima, cujo eixo transverso, $2a$, é igual a 10cm. Calcular no plano de H, a área da superfície compreendida entre as assíntotas e uma tangente qualquer à hipérbole.

11ª Questão [Valor: 1,0]
Tem-se um octaedro (O) regular, de aresta a; seja (E) a esfera cuja superfície passa pelos pontos médios das arestas de (O). Pedem-se
a) Calcular a porção do volume de (E) exterior a (O).
b) Calcular a porção do volume de (O) exterior a (E).

12ª Questão [Valor: 1,0]
Uma pirâmide tem por base uma das faces de um cubo de aresta a e o seu vértice S está sobre uma diagonal deste cubo. Calcular o volume da pirâmide, sabendo que a soma dos quadrados das arestas concorrentes em S é igual a $4a^2$.

13ª Questão [Valor: 1,0]
Considere-se uma pirâmide de vértice V cuja base é um hexágono regular, $ABCDEF$, com 4cm de lado; a aresta VA mede 24cm e é perpendicular ao plano da base; seja e o eixo de simetria do hexágono, que passa por A; sejam π_1, π_4 e π_6 os planos perpendiculares a e que interceptam a pirâmide e distam respectivamente 1, 4 e 6 cm de A. Pede-se fazer o esboço das seções determinadas na pirâmide por esses planos, indicando as distâncias dos vértices dos polígonos seções ao plano da base da pirâmide.

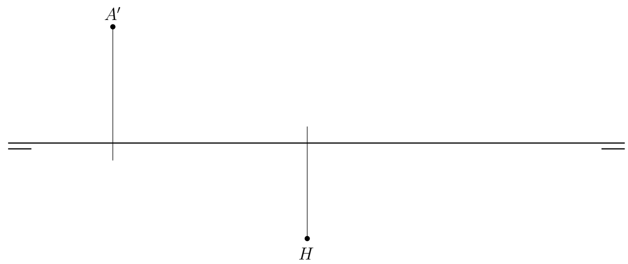
IME 1971/1972 - Desenho

IME 1971/1972, Questão 1, Item 1 [valor 0,7]:

a) Trace as projeções de uma reta (r) paralela ao bissetor ímpar (β_I) sendo conhecidas as projeções A' (de um ponto da reta) e H (do traço horizontal).

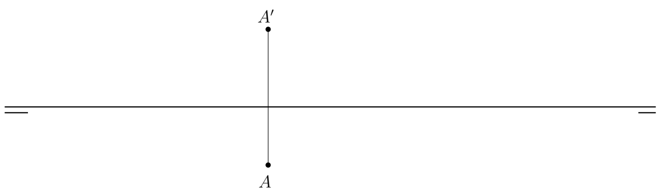
b) Determine as projeções dos pontos notáveis da reta.

c) Determine a verdadeira grandeza do segmento $(A)(H)$ e a verdadeira grandeza dos ângulos que a reta faz com os planos de projeção.



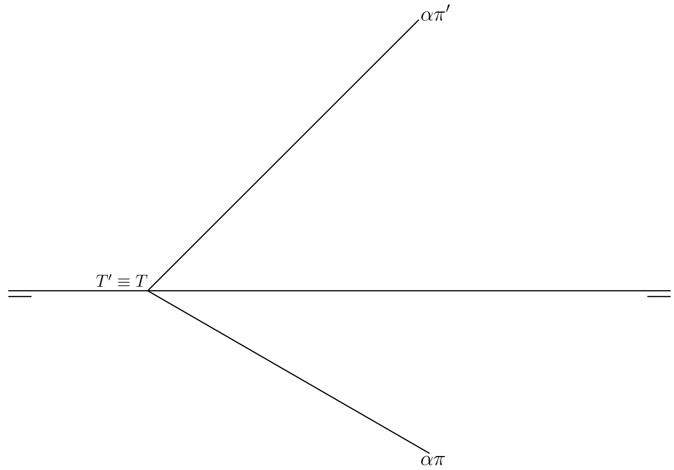
IME 1971/1972, Questão 1, Item 1.

IME 1971/1972, Questão 1, Item 2 [valor 0,3]: Dado um ponto (A), determine as projeções de um segmento $(A)(B)$ igual a 5 cm e perpendicular ao bissetor par (β_P). O ponto (B) tem maior afastamento do que o ponto (A).



IME 1971/1972, Questão 1, Item 2.

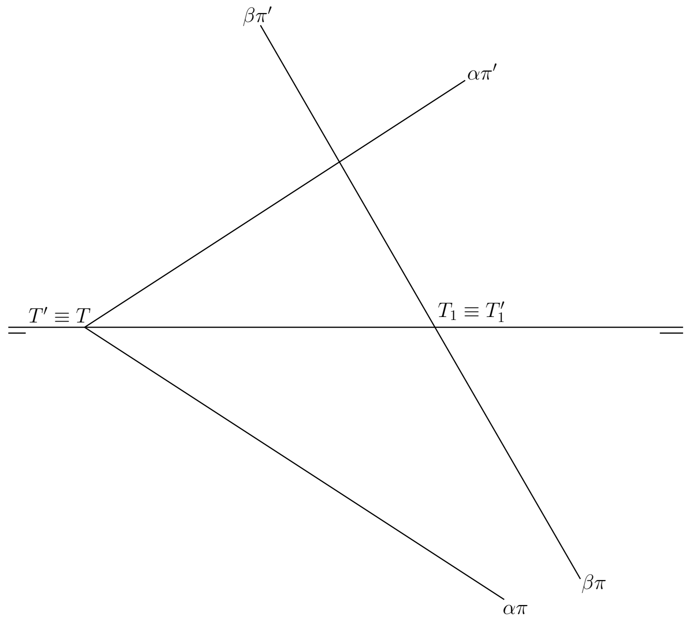
IME 1971/1972, Questão 2 [valor 1,0]: Determine, no primeiro diedro, as projeções de um círculo do plano (α) sabendo-se que é tangente aos dois planos de projeção e seu raio em verdadeira grandeza mede 3,5 cm.



IME 1971/1972, Questão 2.

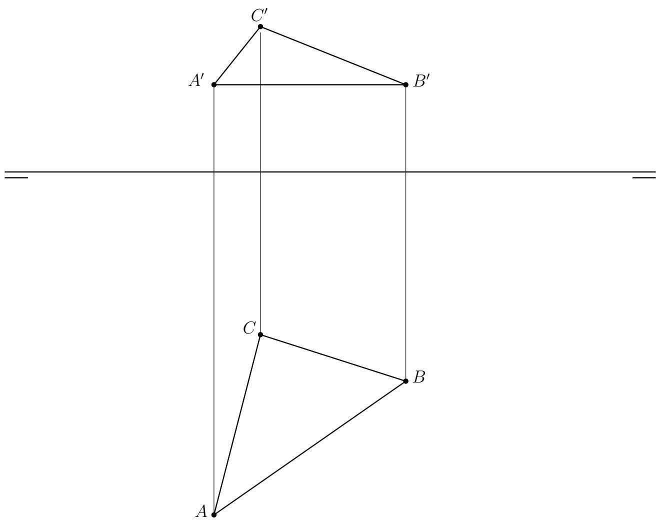
IME 1971/1972, Questão 3 [valor 1,0]: Determinar, sobre o plano (β), um ponto (P) equidistante das faces do triedro formado pelos planos (α), (π) e (π'). Justifique sucintamente a solução.

- (π') plano vertical de projeção;
- (π) plano horizontal de projeção.



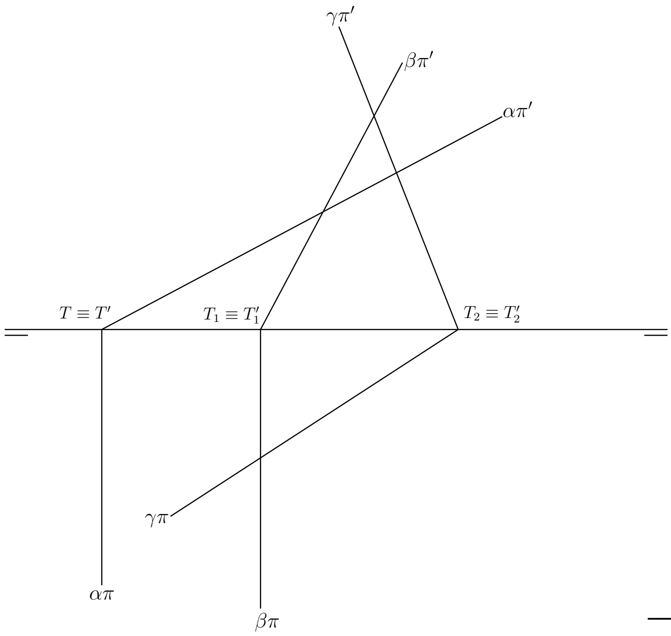
IME 1971/1972, Questão 3.

IME 1971/1972, Questão 4 [valor 1,0]: Faça uma rotação do triângulo $(A)(B)(C)$ em torno de seu lado horizontal $(A)(B)$ até uma posição para a qual as áreas de suas projeções horizontal e vertical sejam iguais. Após a rotação a nova posição do ponto (C) deverá ter a maior cota e o menor afastamento possíveis.



IME 1971/1972, Questão 4.

IME 1971/1972, Questão 5 [valor 1,0]: Determine a verdadeira grandeza do ângulo da rotação em torno de um único eixo, necessária para que o plano (γ) se transforme em bissetor do ângulo diedro formado pelos planos de topo (α) e (β).

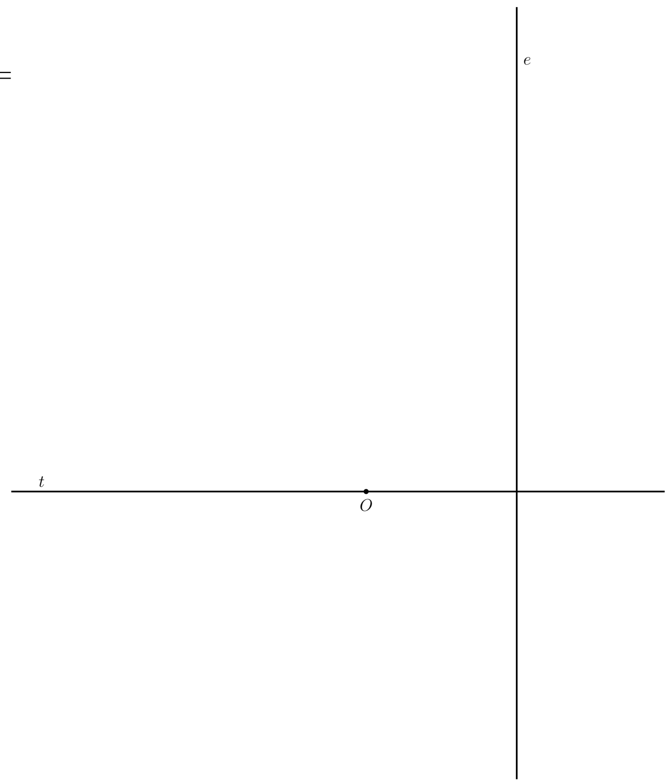


IME 1971/1972, Questão 5.

IME 1971/1972, Questão 6 [valor 1,0]: Um feixe de círculos F é dado por: um círculo de centro O, com dois centímetros de raio; eixo radical e, distante quatro centímetros de O e comum a todos os círculos de F. Pedem-se:

a) Construir o menor círculo que seja ortogonal a todos os círculos de F.

b) Construir um círculo de F tangente a uma reta r perpendicular ao eixo radical e e distante seis centímetros de O.



IME 1971/1972, Questão 6.

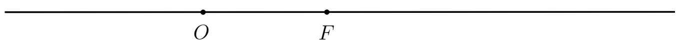
IME 1971/1972, Questão 7 [valor 1,0]: Construir um quadrilátero inscritível convexo cujos lados medem $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 5$ cm e $DA = 8$ cm.

IME 1971/1972, Questão 8 [valor 1,0]: Dão-se o centro O e o foco F de uma elipse. Sabe-se que de um ponto P distante 6,5 cm do ponto O podem ser traçadas duas tangentes à elipse, perpendiculares entre si. Pedem-se:

a) Determinar, graficamente, com os dados acima, os vértices da elipse;

b) Construir uma tangente à elipse inclinada de 45° com seus eixos;

c) Achar o ponto de contato M desta mesma tangente.



IME 1971/1972, Questão 8.

IME 1971/1972, Questão 9 [valor 1,0]: Em uma espiral hiperbólica são dados: (i) O ponto assintótico O; (ii) A direção assintótica orientada OX no sentido do ramo infinito da espiral; (iii) A distância de O ao ponto P, sendo P o ponto mais afastado da espiral sobre a perpendicular à assíntota: $OP = 4$ cm. Pedem-se:

a) Construir os pontos M_1, M_2 e M_3 da curva, mais afastados de O e tais que $M_1\hat{O}X = \pi$, $M_2\hat{O}X = \frac{\pi}{4}$, $M_3\hat{O}X = \frac{\pi}{8}$.

b) Construir a assíntota da espiral;

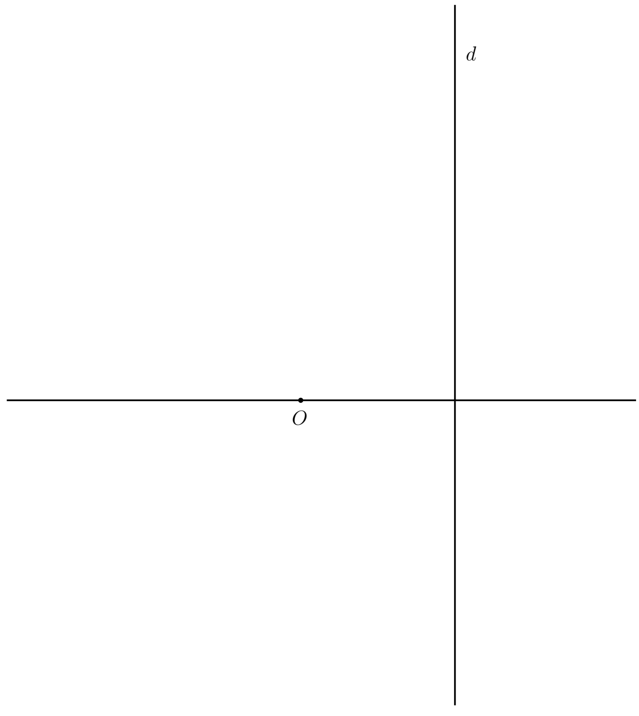
c) Construir a tangente no ponto M_1.

IME 1971/1972, Questão 9.

IME 1971/1972, Questão 10 [valor 1,0]: Uma hipérbole equilátera H tem a diretriz distante 4 cm do seu centro O.

a) Determinar graficamente, com os dados acima, os focos e as extremidades dos eixos de H.

b) Sabendo-se que: (i) Uma diretriz da hipérbole H e seu foco são a diretriz e o foco de uma parábola P_1; (ii) A mesma diretriz, acima citada, da hipérbole H e um vértice do seu eixo não transverso, são a diretriz e o foco de uma parábola P_2. Pede-se construir as tangentes comuns às parábolas P_1 e P_2.



IME 1971/1972, Questão 10.

IME 1970/1971 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 0,4]
Assinale abaixo o valor da expressão

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5x}$$

(A) e^{10}

(B) $e^{2/5}$

(C) $e^{5/2}$

(D) 1

(E) $e^{1/10}$

(F) N.R.A.

2ª Questão [Valor: 0,4]
Indique abaixo o valor da expressão

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1-x)}{\operatorname{sen} x}$$

(A) e

(B) 0

(C) -1

(D) 1

(E) $-e$

(F) N.R.A.

3ª Questão [Valor: 0,4]
Assinale abaixo o valor da expressão

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

(A) $1/\sqrt{2}$

(B) $\sqrt{2}$

(C) 2

(D) 1/2

(E) $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$

(F) N.R.A.

4ª Questão [Valor: 0,4]
Assinale abaixo o valor que deve ser atribuído à função $y=\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}\pi x$ no ponto de abscissa $x=0$ para tornar a mesma contínua no intervalo $(-\infty,+\infty)$.

(A) 1

(B) $1/\pi$

(C) π

(D) $\pi/2$

(E) 0

(F) N.R.A.

5ª Questão [Valor: 0,4]
No plano xy uma curva é definida pelas equações

$$x = 10 + 6\cos 2t$$

$$y = -6\operatorname{sen} 2t$$

Marcar abaixo o coeficiente angular de uma reta que tangencia a curva dada num ponto de abscissa $x=13$ e de ordenada $y>0$.

(A) $+1/\sqrt{3}$

(B) $+\sqrt{3}$

(C) $-\sqrt{3}$

(D) $-1/\sqrt{3}$

(E) $3\sqrt{3}$

(F) N.R.A.

6ª Questão [Valor: 0,4]
Um corpo se move no plano xy descrevendo a trajetória $y=Ax^2-C$. Sua projeção no eixo dos x se move com a velocidade de B u.v. (unidades de velocidade). A velocidade da projeção vertical será, portanto:

(A) $2Ax$

(B) $2Ax+B$

(C) $2ABx$

(D) $2Ax-B$

(E) $2\frac{A}{B}x$

(F) N.R.A.

7ª Questão [Valor: 0,4]
Dada a função $z=\dfrac{u^v}{v^u}$, onde $u=\dfrac{1}{3}x^3$ e $v=x^2$, assinalar, entre os valores abaixo, o correspondente a $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ no ponto em que $x=1$.

(A) $-\frac{3}{2}\log_e 2-\frac{7}{9}$

(B) $\frac{3}{2}\log_e 2+\frac{7}{9}$

(C) $-\frac{2}{3}\log_e 3+\frac{7}{9}$

(D) $\frac{2}{3}\log_e 3-\frac{7}{9}$

(E) $-\frac{2}{3}\log_e 2+\frac{9}{7}$

(F) N.R.A.

8ª Questão [Valor: 0,4]
Resolver a equação

$$2^{y+1}-\frac{7}{2^{y-1}}+2^{y-2}=\frac{1}{2^{y-2}}$$

e assinalar abaixo o seu resultado.

(A) $y=1{,}2$

(B) $y=1{,}5$

(C) $y=2$

(D) $y=0{,}3$

(E) $y=0{,}5$

(F) N.R.A.

9ª Questão [Valor: 0,4]
Resolver a equação

$$y^4 - 16 = 0$$

e assinalar abaixo o conjunto de suas raízes.

(A) $\begin{cases} +2,\ -2 \\ i,\ -i \end{cases}$
(B) $\begin{cases} +2,\ -2 \\ -2i,\ +2i \end{cases}$
(C) $\begin{cases} +1,\ -1 \\ +2i,\ -2i \end{cases}$
(D) $\begin{cases} +2,\ -2 \\ -i,\ +2i \end{cases}$
(E) $\begin{cases} +2,\ -2 \\ +2i,\ i \end{cases}$
(F) N.R.A.

10ª Questão [Valor: 0,4]
Resolver a equação e assinalar abaixo o resultado

$$3^{\log_{10} x^2} - 4.3^{\log_{10} x} + 3 = 0$$

(A) $x_1 = 2;\ x_2 = 3$
(B) $x_1 = 0;\ x_2 = 1$
(C) $x_1 = 1;\ x_2 = -1$
(D) $x_1 = 0{,}5;\ x_2 = 1{,}0$
(E) $x_1 = 2;\ x_2 = 0$
(F) N.R.A.

11ª Questão [Valor: 0,4]
Achar o limite da soma dos termos da série abaixo. (O valor absoluto de a é maior que 1).

$$\frac{a}{a} + \frac{2a}{a^2} + \frac{3a}{a^3} + \frac{4a}{a^4} + \ldots$$

(A) $a + 1$
(B) $\frac{a-1}{a}$
(C) $a - 1$
(D) $\frac{a}{a-1}$
(E) $(\frac{a}{a-1})^2$
(F) N.R.A.

12ª Questão [Valor: 0,4]
Resolva o sistema de equações abaixo.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-x+2y} - \dfrac{1}{x+2y-1} = 0 \\ \dfrac{1}{\dfrac{1}{1-x+2y} - \dfrac{1}{1-x-2y}} = 2 \end{cases}$$

(A) $x = 1;\ y = 2$
(B) $x = -1;\ y = 1$
(C) $x = 2;\ y = 2$
(D) $x = 2;\ y = -1$
(E) $x = 0;\ y = 1$
(F) N.R.A.

13ª Questão [Valor: 0,4]
Verifique a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^3(\frac{1}{n})$$

(A) Divergente
(B) Harmônica
(C) Convergente
(D) Oscilante
(E) Alternada
(F) N.R.A.

14ª Questão [Valor: 0,4]
Verifique a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n}$$

(A) Harmônica
(B) Divergente
(C) Alternada
(D) Convergente
(E) Oscilante
(F) N.R.A.

15ª Questão [Valor: 0,4]
Resolva o sistema de equações abaixo

$$\begin{cases} x^{1/4} + y^{1/5} = 3 \\ x^{1/2} + y^{2/5} = 5 \end{cases}$$

(A) $\begin{cases} x = -1,\ y = 32 \\ x = 16,\ y = 1 \end{cases}$
(B) $\begin{cases} x = 2,\ y = 0 \\ x = 16,\ y = 32 \end{cases}$
(C) $\begin{cases} x = 1,\ y = 1 \\ x = 16,\ y = -16 \end{cases}$
(D) $\begin{cases} x = 1,\ y = 32 \\ x = 16,\ y = 1 \end{cases}$
(E) $\begin{cases} x = 0,\ y = -1 \\ x = 32,\ y = 32 \end{cases}$
(F) N.R.A.

16ª Questão [Valor: 0,4]
Resolver a equação

$$6x^6 + 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 - 35x - 6 = 0$$

(A) $x = \left\{-1;\ +1;\ -2;\ -\frac{1}{2};\ +3;\ +\frac{1}{3}\right\}$
(B) $x = \left\{-1;\ +1;\ -2;\ -\frac{1}{2};\ -3;\ -\frac{1}{3}\right\}$
(C) $x = \left\{+2;\ +\frac{1}{2};\ +3;\ +\frac{1}{3};\ +1;\ -1\right\}$
(D) $x = \left\{+1;\ -1;\ +2;\ +\frac{1}{2};\ -3;\ -\frac{1}{3}\right\}$
(E) $x = \left\{+1;\ -1;\ +4;\ +\frac{1}{4};\ -3;\ -\frac{1}{3}\right\}$
(F) N.R.A.

17ª Questão [Valor: 0,4]
Num sistema de numeração duodecimal quantos números de 3 algarismos diferentes existem, cuja soma desses 3 algarismos seja ímpar? (Considerar 012, 014, 016 etc., números de 3 algarismos diferentes).

(A) 680
(B) 360
(C) 660
(D) 720
(E) 800
(F) N.R.A.

18ª Questão [Valor: 0,4]
5 rapazes e 5 moças devem posar para uma fotografia, ocupando 5 degraus de uma escadaria, de forma que em cada degrau fique um rapaz e uma moça. De quantas maneiras diferentes podemos arrumar este grupo?

(A) 70.400
(B) 128.000
(C) 460.800
(D) 332.000
(E) 625
(F) N.R.A.

19ª Questão [Valor: 0,4]
Com 10 espécies de frutas, quantos tipos de salada contendo 6 espécies diferentes podem ser feitas?

(A) 240
(B) 360
(C) 320
(D) 160
(E) 210
(F) N.R.A.

20ª Questão [Valor: 0,4]
Calcular o termo de maior coeficiente no desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}+y^2\right)^{10}$.

(A) $240x^{5/2}y^{10}$
(B) $210x^2y^{12}$
(C) $252x^{5/2}y^{10}$
(D) $252x^2y^{12}$
(E) $210x^{5/2}y^{10}$
(F) N.R.A.

21ª Questão [Valor: 0,4]
Calcule o 1º termo de coeficiente negativo no desenvolvimento em série da expressão

$$\left[\sqrt{\frac{y}{x}}+(xy)\right]^{9/2}$$

(A) $-\frac{63}{512}\,x^{21/4}y^{27/4}$
(B) $-\frac{21}{1024}\,x^{27/4}y^{21/4}$
(C) $-\frac{21}{1024}\,x^{21/4}y^{27/4}$
(D) $-\frac{63}{512}\,x^{27/4}y^{21/4}$
(E) $-\frac{21}{1024}\,x^{27/2}y^{21/2}$
(F) N.R.A.

22ª Questão [Valor: 0,4]
Determinar os números reais m, n e r de tal modo que a expressão

$$\frac{(2-m)x^3+(m-1)x^2+(n+1)x+(r-3)}{x^2+6x+1}$$

seja independente de x.

(A) $m=1;\ n=4;\ r=4$
(B) $m=2;\ n=5;\ r=1$
(C) $m=2;\ n=5;\ r=4$
(D) $m=1;\ n=5;\ r=4$
(E) $m=2;\ n=4;\ r=5$
(F) N.R.A.

23ª Questão [Valor: 0,4]
A é número real. Entre que limites deverá estar situado A para que $(1+i)$ seja raiz do polinômio

$$P(x)=x^3+mx^2+Anx+A?$$

Obs: m e n são números inteiros não negativos.

(A) $1\leq A\leq 4$
(B) $4\leq A\leq 2$
(C) $2\leq A\leq 4$
(D) $0\leq A\leq 4$
(E) $0\leq A\leq 2$
(F) N.R.A.

24ª Questão [Valor: 0,4]
Resolva o sistema

$$\begin{cases}(1-i)\overline{z}_1+iz_2=i\\ 2z_1+(1+i)\overline{z}_2=0\end{cases}$$

onde z_1 e z_2 são números complexos de partes reais iguais.
Obs: $\overline{z}$ é o conjugado de z.

(A) $z_1=2-i;\ z_2=2+i$
(B) O sistema não tem solução
(C) $z_1=2-i;\ z_2=2+i$
(D) O sistema é indeterminado
(E) $z_1=2-i;\ z_2=2+i$
(F) N.R.A.

25ª Questão [Valor: 0,4]
Sejam $f(x)=e^{(a-1)x}$ e $g(s)=\displaystyle\int_0^1 sf(x)\,\mathrm{d}x$ funções reais de variáveis reais. Calcular a para que $g(s)$ seja o inverso de $(a-1)$.

(A) $a=e^{1+\frac{1}{s}}$
(B) $a=e^{s+1}$
(C) $a=\log_e(s+1)$
(D) $a=1+\log_e(1+\frac{1}{s})$
(E) $a=1-\log_e(1+s)$
(F) N.R.A.

IME 1970/1971 - Geometria

sln: Todas as 15 questões têm o mesmo valor.

1ª Questão
A área de uma elipse é igual a quatro quintos da área de seu círculo principal. Calcule a excentricidade da elipse, sabendo-se que o arco de 2160 minutos da circunferência do círculo principal tem o comprimento de π centímetros.

(A) 0,3
(B) 0,4
(C) 0,5
(D) 0,6
(E) 0,8
(F) N.R.A.

2ª Questão
Um cubo de aresta a é seccionado por um plano que contém a diagonal de uma das faces e passa pelo ponto médio de uma aresta da face oposta. Calcule o volume do menor dos sólidos resultantes.

(A) $2(a^3-2)$
(B) $\frac{1}{3}(a^3-1)$
(C) $\frac{1}{3}a^3$
(D) $3(a^3-1)$
(E) $\frac{\sqrt{3}}{3}(1-a^3)$
(F) N.R.A.

3ª Questão
Determine os valores de x que satisfazem a equação:

$$\operatorname{arc\,sen}(x\sqrt{3}) = \operatorname{arc\,sen} 2x - \operatorname{arc\,sen} x$$

(A) $x=0$
(B) $x=\pm 1$
(C) $x=0,\ x=\pm 1$
(D) $x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$
(E) $x=0,\ x=\pm 1/2$
(F) N.R.A.

4ª Questão
Sejam 8 (oito) esferas de raio r tangentes entre si 3 a 3 inscritas em uma esfera de raio R. Calcule r em função de R.

(A) $\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$
(B) $\sqrt{3}R$
(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}R$
(D) $\frac{R\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$
(E) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$
(F) N.R.A.

5ª Questão
Determine os valores de x e y que satisfazem as equações:

$$x+y=\pi/5$$
$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 1-\cos\pi/5$$

(A) $x=0,\ y=\pi/5$
(B) $x=y=K\pi\pm\pi/10$
(C) $x=2K\pi+\pi/5,\ y=2K\pi-\pi/5$
(D) $x=K\pi+\pi/10,\ y=\pi/10-K\pi$
(E) $x=\pi/2+K\pi,\ y=-K\pi-3\pi/10$
(F) N.R.A.

6ª Questão
Dois cones retos C e C' que têm ângulos do vértice iguais a 120º e geratrizes respectivamente iguais a 4 e 2 metros, interceptam-se de modo que os vértices coincidem e uma geratriz de C' é a altura de C. Determine a corda máxima na base de C' contida no cone C.

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m
(B) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ m
(C) $3\sqrt{2}$ m
(D) 1 m
(E) $\sqrt{6}$ m
(F) N.R.A.

7ª Questão
A perpendicular às retas paralelas D e D' determina respectivamente sobre as mesmas os pontos A e B, distantes de $2a$. Toma-se um ponto M sobre D tal que $\overline{AM}=x$. Traça-se por O, meio de $\overline{AB}$, uma perpendicular a $\overline{OM}$ que encontra D' em M'. Calcule, em função de a e x, o volume gerado pelo triângulo OMM' quando gira em torno de $\overline{AB}$.

(A) $\pi(a+x)^3$
(B) $a(\frac{a^2+x^2}{\pi})$
(C) $\frac{a^2(a+x)}{\pi}$
(D) $\frac{\pi a}{3x^2}(a^2+x^2)^2$
(E) $\frac{\pi}{6x}(a^2+x^2)^2$
(F) N.R.A.

8ª Questão
Dadas as expressões:

$$a_1 = A\,\mathrm{sen}\,(x + \theta)$$

$$a_2 = A\,\mathrm{sen}\,(x + 2\pi/3 + \theta)$$

$$a_3 = A\,\mathrm{sen}\,(x - 2\pi/3 + \theta)$$

$$b_1 = B\,\mathrm{sen}\,(x + \theta + \varphi)$$

$$b_2 = B\,\mathrm{sen}\,(x + 2\pi/3 + \theta + \varphi)$$

$$b_3 = B\,\mathrm{sen}\,(x - 2\pi/3 + \theta + \varphi)$$

Calcule $C = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

(A) $(3AB/2)\cos\varphi$

(B) $3AB\,\mathrm{sen}\,(x + \theta)$

(C) $(3AB/2)\cos(2x + \theta + \varphi)$

(D) $AB\,\mathrm{sen}\,(\varphi + \theta)$

(E) $(AB/2)\cos(x + \theta + \varphi)$

(F) N.R.A.

9ª Questão
Uma esfera de raio R é tangente às faces de um dos triedros de um cubo de aresta a. Um vértice do cubo pertence à superfície esférica. Calcule o raio r da interseção da esfera com o plano de uma das faces do cubo que cortam a esfera, em função apenas da aresta a do cubo.

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

(B) $(\sqrt{2} - 1)a$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)a$

(D) $(1 - \sqrt{3})a$

(E) $\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}a$

(F) N.R.A.

10ª Questão
Um quadro retangular de $17(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ metros de altura, com sua borda inferior apoiada em uma parede vertical, faz com a mesma um ângulo α. Um observador, a $34\sqrt{2}$ metros de distância da parede, vê o quadro segundo um ângulo de 15º. A borda inferior do quadro e os olhos do observador estão em um mesmo plano horizontal. Calcule o ângulo α.

(A) 15º

(B) 30º

(C) 45º

(D) 60º

(E) 75º

(F) N.R.A.

11ª Questão
Um retângulo $ABCD$ de lados $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$ m e $\overline{BC} = \sqrt{6}$ m, gira em torno de um eixo, coplanar e externo ao retângulo, que passa por A e faz um ângulo de 30º com o lado $\overline{AB}$. Calcule a superfície total do sólido gerado pela rotação do retângulo.
(A) $\sqrt{3}/2$ m^2
(B) $2\pi/\sqrt{3}$ m^2
(C) $12\pi(\sqrt{3} + 3)$ m^2
(D) $\pi/2(\sqrt{3} + 6)$ m^2
(E) $\pi/6$ m^2
(F) N.R.A.

12ª Questão
Determine os valores de x que satisfazem a equação

$$7\,\mathrm{sen}^2\,x - 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x\cos x - \cos^2 x = 4$$

(A) $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ e $x = k\pi + \frac{3\pi}{5}$
(B) $x = k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
(C) $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$ e $x = k\pi + \frac{5\pi}{6}$
(D) $x = \pi$ e $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$
(E) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{8}$
(F) N.R.A.

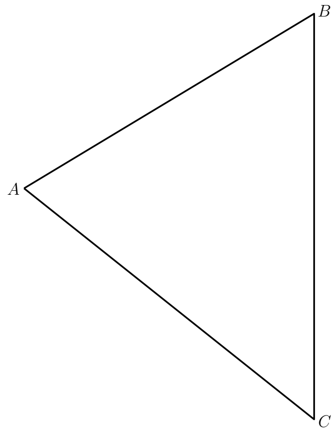
13ª Questão
As faces de um paralelepípedo são losangos de lado igual a $\ell = \sqrt{2}$ metros e diagonal menor igual ao lado. Calcule o volume do paralelepípedo.
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m^3
(B) 2 m^3
(C) 3 m^3
(D) $2\sqrt{3}$ m^3
(E) $2\sqrt{2}$ m^3
(F) N.R.A.

14ª Questão
Sejam n circunferências de raio R, tangentes entre si duas a duas e tendo seus centros sobre os vértices de um polígono regular. Calcule a área exterior às circunferências e compreendida entre elas, em função de R e n.
(A) $R^2(n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n} - \,\mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{n})$
(B) $R^2\,\mathrm{tg}\,\frac{(n-1)}{2}\pi$
(C) $R^2\left[n\,\mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{n} - (\frac{n-2}{2})\pi\right]$
(D) $R^2(\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi}{n})$
(E) $R^2(\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi}{n})$
(F) N.R.A.

15ª Questão
Seja M um ponto da circunferência de círculo de diâmetro $\overline{AB}$ e H a projeção de M sobre o diâmetro. Traçando-se um segundo círculo com centro em M e raio $r = \overline{MH}$, a corda $\overline{CD}$ comum aos dois círculos intercepta o segmento $\overline{MH}$ em um ponto P. Determine o valor da razão $\dfrac{\overline{PM}}{\overline{PH}}$.
(A) 1/2
(B) 1/8
(C) 2
(D) 3/2
(E) 1/4
(F) N.R.A.

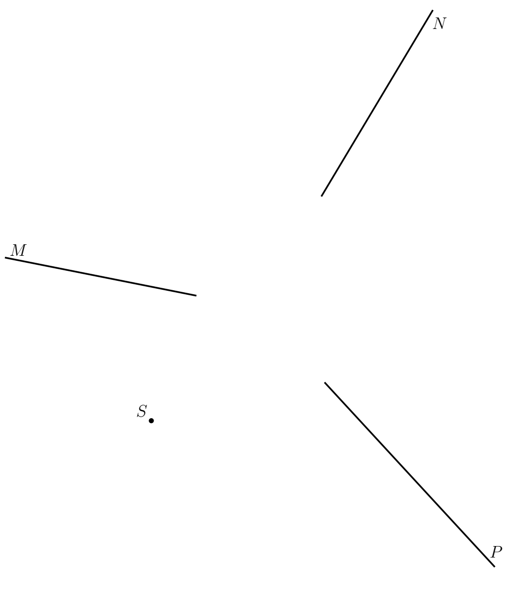
IME 1970/1971 - Desenho

IME 1970/1971, Questão 1, Item 1 [valor 0,5]: Dado o triângulo ABC, ache no seu interior um ponto tal que a soma das distâncias aos três vértices seja mínima.



IME 1970/1971, Questão 1, Item 1.

IME 1970/1971, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]: As retas M, N e P são as mediatrizes de um triângulo. O ponto S está sobre um dos lados. Construa o triângulo.

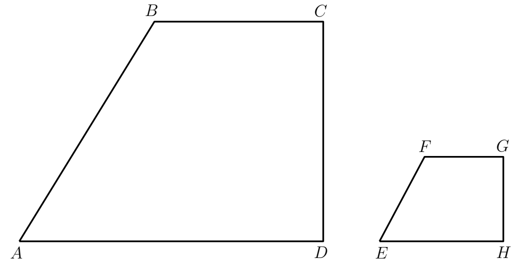


IME 1970/1971, Questão 1, Item 2.

IME 1970/1971, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]: Construa um trapézio retângulo que satisfaça as seguintes condições:

(i) Altura igual à diferença das alturas dos trapézios $ABCD$ e $EFGH$.

(ii) Área igual à diferença das áreas dos trapézios $ABCD$ e $EFGH$.

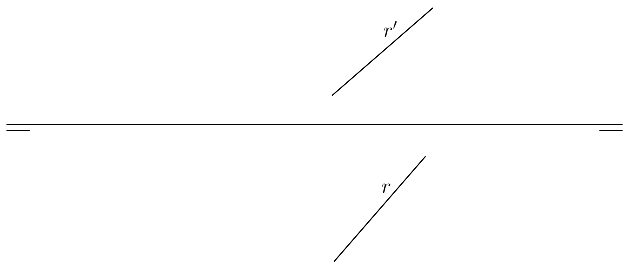


IME 1970/1971, Questão 1, Item 3.

IME 1970/1971, Questão 2, Item 1 [valor 1,0]: Determine os traços dos planos (α) e (β), sabendo que:

(i) Os traços de mesmo nome são perpendiculares entre si;

(ii) (r) é a reta interseção de (α) e (β).



IME 1970/1971, Questão 2, Item 1.

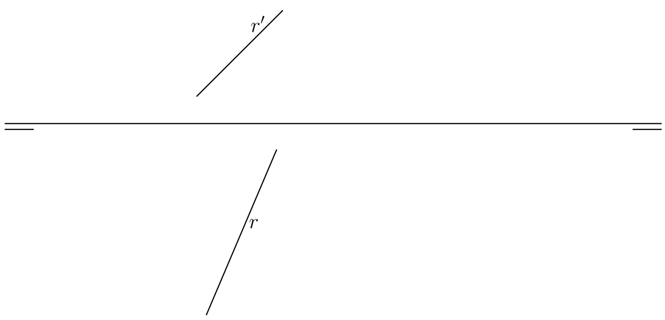
IME 1970/1971, Questão 2, Item 2 [valor 1,0]: Trace uma reta (s) do 1º diedro, que satisfaça as seguintes condições:

(i) Encontre a reta (r) dada;

(ii) Diste 3 cm da linha de terra;

(iii) Faça ângulos de 30º com os planos de projeção;

(iv) O traço vertical da reta (s) tenha maior abscissa que o traço horizontal.



IME 1970/1971, Questão 2, Item 2.

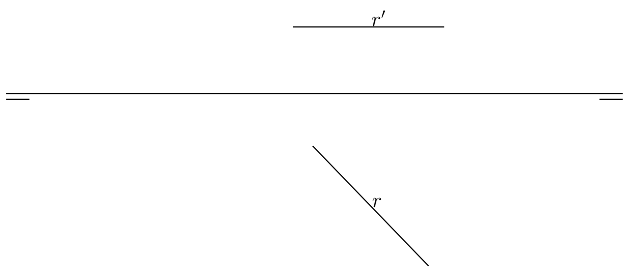
IME 1970/1971, Questão 2, Item 3 [valor 1,0]: Determine os traços dos planos (α) e (β) sabendo que:

(i) (r) é a reta interseção dos dois planos;

(ii) O traço vertical de (α) faz um ângulo de 45º com o traço vertical de (β);

(iii) O traço horizontal de (α) dista 3 cm do traço horizontal de (β);

(iv) As interseções de (α) e (β) com a linha de terra têm abscissas menores que o traço da reta (r).



IME 1970/1971, Questão 2, Item 3.

IME 1970/1971, Questão 2, Item 4 [valor 1,0]: Dê as projeções de segmento de uma reta (s) que satisfaça as seguintes condições:

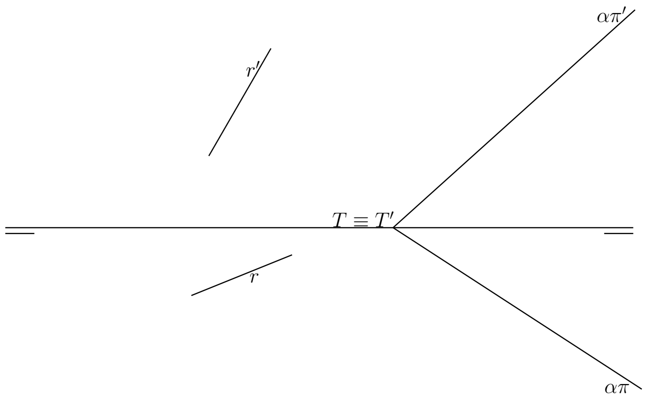
(i) Seja paralelo ao plano (α);

(ii) Faça um ângulo de 45º com o plano horizontal;

(iii) Seja o maior segmento contido no 1º diedro;

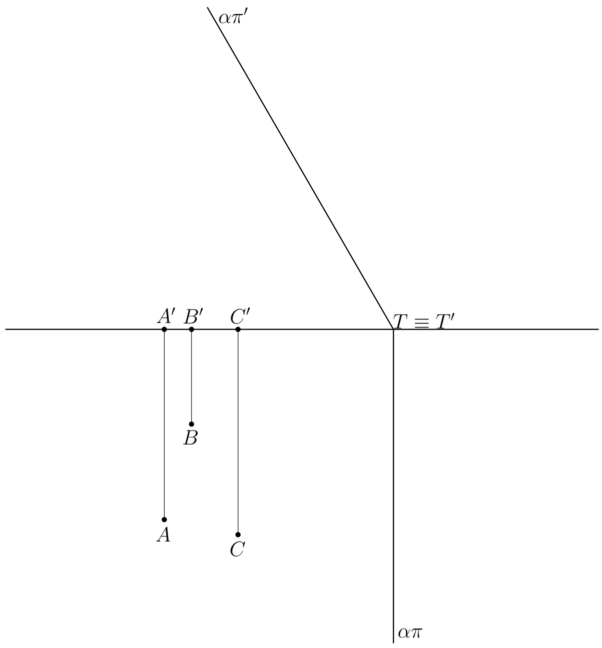
(iv) Tenha seu meio sobre a reta (r);

(v) Tenha a abscissa do traço horizontal maior que a do traço vertical.



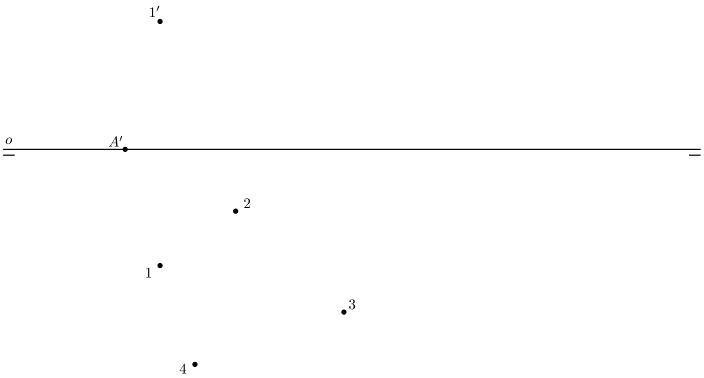
IME 1970/1971, Questão 2, Item 4.

IME 1970/1971, Questão 2, Item 5 [valor 1,0]: Determine o ponto (O), do 1º diedro, equidistante dos pontos (A), (B), (C) e do plano (α).



IME 1970/1971, Questão 2, Item 5.

IME 1970/1971, Questão 3, Item 1 [valor 1,0]: Represente as projeções da pirâmide regular $(V)-(A)(B)(C)(D)$, no 1º diedro, apoiada pela base no plano horizontal de projeção. Determine as projeções e a verdadeira grandeza da seção feita pelo plano (α), indicando os seus traços. Dados: 1, 2, 3, 4 projeções horizontais dos vértices da seção; A' e $1'$ pertencentes à mesma aresta.

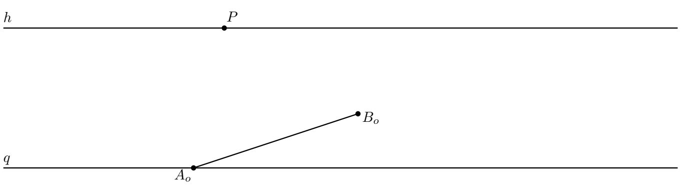


IME 1970/1971, Questão 3, Item 1.

IME 1970/1971, Questão 3, Item 2 [valor 0,5]: Faça a perspectiva do cubo apoiado por uma face no plano geometral. Dados:

- h - linha do horizonte;
- q - traço do quadro;
- p - ponto principal;
- A_oB_o - aresta no geometral, já em perspectiva, e que em verdadeira grandeza faz 30º com o traço do quadro;
- A_o pertence à aresta vertical mais próxima do observador.

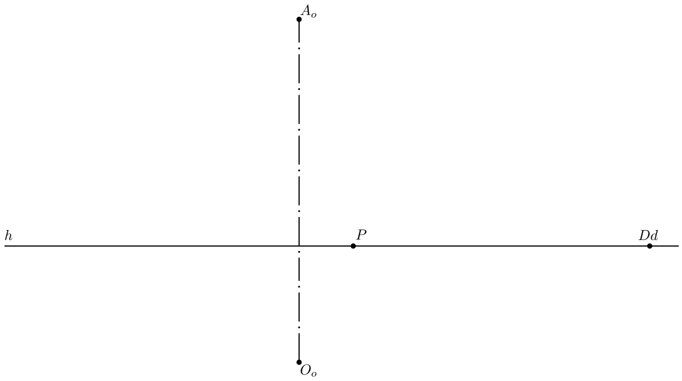
Observação: Indique a visibilidade das arestas.



IME 1970/1971, Questão 3, Item 2.

IME 1970/1971, Questão 3, Item 3 [valor 1,0]: Faça a perspectiva do cone de revolução com a base apoiada no plano geometral. Dados:

- h - linha do horizonte;
- p - ponto principal;
- Dd - ponto de distância da direita;
- O_oA_o - altura do cone, em perspectiva;
- O raio da base do cone é igual a $\frac{1}{3}$ da altura.



IME 1970/1971, Questão 3, Item 3.

IME 1969/1970 - Álgebra

1ª Questão, Item 1 [Valor 0,4]
$C = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x)$. Calcule C.

(A) 0
(B) 1
(C) ∞
(D) π
(E) e
(F) Nenhum dos valores acima

1ª Questão, Item 2 [Valor 0,4]
$D = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+2}{x-1} \right)^{x+2}$. Calcule D.

(A) e^2
(B) 1
(C) e^3
(D) 0
(E) $e(e-1)$
(F) Nenhum dos valores acima

1ª Questão, Item 3 [Valor 0,4]
$E = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Calcule E.

(A) $4/5$
(B) $5/6$
(C) $6/7$
(D) $7/8$
(E) 1
(F) ∞

1ª Questão, Item 4 [Valor 0,4]
Determinar os pontos de inflexão da Gaussiana $y = e^{-x^2}$.
Obs: e é base dos logaritmos neperianos.

(A) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$
(B) $(0, 1)$
(C) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-0{,}5}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-0{,}5}\right)$
(D) Não existem pontos de inflexão
(E) $(-\infty, 0)$ e $(+\infty, 0)$
(F) Nenhuma das respostas acima

1ª Questão, Item 5 [Valor 0,4]
Uma bola é lançada na vertical, de encontro ao solo, de uma altura h. Cada vez que bate no solo, ela sobe até a metade da altura de que caiu. Calcular o comprimento total percorrido pela bola em suas trajetórias, até atingir o repouso.

(A) $3h$
(B) $1{,}5h$
(C) h
(D) $2h$
(E) $1{,}75h$
(F) Nenhum dos valores acima

1ª Questão, Item 6 [Valor 0,4]
Sendo, $A_{n+1}^8 = A_n^7 + yA_n^6$ e $n > 7$, determinar y em função de n.
Obs: n é inteiro positivo.

(A) n^2
(B) $(n-7)(n-8)$
(C) $n(n-6)$
(D) $(n-6)(n-7)$
(E) $(n-6)(n-8)$
(F) Nenhum dos valores acima

1ª Questão, Item 7 [Valor 0,4]
Dada a curva $4x^2 + y^2 - 4 = 0$, determine as equações das retas tangentes a esta curva que contêm o ponto $(-3, -2)$.

(A) $x + 2 = 0$ e $-12x + 8y = 20$
(B) $y + 2 = 0$ e $-12x + 8y = 20$
(C) $x + y + 2 = 0$ e $-12x + 8y - 20 = 0$
(D) $1 + x + y = 0$ e $12x - 8y + 20 = 0$
(E) $2x + y + 2 = 0$ e $12x - 8y + 20 = 0$
(F) Nenhuma das respostas anteriores

1ª Questão, Item 8 [Valor 0,4]
Estabeleça as equações das retas que distam 10 (dez) unidades da origem e que contêm o ponto $(5, 10)$.

(A) $\begin{array}{l} 3x - 2y = 20 \\ y = -6 \end{array}$
(B) $\begin{array}{l} 3x + 4y = 60 \\ x + 2 = 0 \end{array}$
(C) $\begin{array}{l} x - y = 2 \\ y = 10 \end{array}$
(D) $\begin{array}{l} 4x + 3y = 50 \\ y = 10 \end{array}$
(E) $\begin{array}{l} 4x + 2y = 50 \\ x + 2y = 10 \end{array}$
(F) Nenhuma das respostas acima

1ª Questão, Item 9 [Valor 0,4]
Dado o sistema de equações abaixo

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = k^2 \\ \dfrac{x}{a} + y + bz = k^2 \\ \dfrac{x}{a^2} + \dfrac{y}{b} + z = k^2 \end{cases}$$

onde $a, b, k \neq 0$, pedem-se os valores de a e b, que tornem o sistema indeterminado.

(A) $a = k^2;\ b = k^2$
(B) $a = 2;\ b = 1$
(C) $a = 1;\ b = 2$
(D) $a = 1;\ b = 1$
(E) $a = b;\ b \neq 1$
(F) Nenhuma das respostas acima

1ª Questão, Item 10 [Valor 0,4]
Calcule o valor do determinante de ordem n abaixo, em função de a e n.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

(A) $n^2 + a(n-1)(a+1)^n$
(B) $(a-1)^{(n+1)}(a+1-n)$
(C) $(n+1)(n-1)(a+n)^{(n-1)}$
(D) $(a+n-1)(a-1)^{(n-1)}$
(E)
(F) Nenhuma das respostas acima

2ª Questão, Item 11 [Valor 0,4]
Dada a equação $x - \cos(xy) = 0$, calcule $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(A) $-\dfrac{1}{x \operatorname{sen}(xy)}$
(B) $-\dfrac{1}{y \operatorname{sen}(xy)}$
(C) y/x
(D) x/y
(E) $-(1+y)$
(F) Nenhuma das respostas acima

2ª Questão, Item 12 [Valor 0,4]
Determine quantos números de 4 algarismos diferentes podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5.
Obs: Considere os números iniciados com o algarismo 0 (por exemplo, 0123), números de 3 algarismos.

(A) 360
(B) 720
(C) 300
(D) 5
(E) 15
(F) Nenhuma das respostas acima

2ª Questão, Item 13 [Valor 0,4]
Determine as assíntotas da curva $y = x + 2 - \dfrac{3}{x}$.

(A) A única assíntota é $x = 0$
(B) $x = 0$ e $y = x - 2$
(C) $x = 0$, $y = 0$ e $y = x + 2$
(D) $x = 0$ e $y = x + 2$
(E) $x = 0$ e $y = 0$
(F) Nenhuma das respostas acima

2ª Questão, Item 14 [Valor 0,4]
$F = \sqrt{-15 - 8i}$. Calcule F, escrevendo a resposta sob a forma $a + bi$, com a e b inteiros.
Obs: $i = \sqrt{-1}$.

(A) $1 + 4i$ e $1 - 4i$
(B) $-1 \pm 3i$
(C) $-1 - 3i$
(D) $-4i + 1$ e $-1 + 4i$
(E) $\pm 4 \pm i$
(F) Nenhuma das respostas acima

2ª Questão, Item 15 [Valor 0,4]
Determine os pontos do plano complexo que satisfazem simultaneamente as equações

$$|z-2| = |z+4|$$
$$|z-3| + |z+3| = 10$$

Obs: $|z|$ é módulo de z.

(A) $x = 2;\ y = 3$
(B) $x = \pm 2;\ y = 0$
(C) $x = -1;\ y = \pm 8/5\sqrt{6}$
(D) $x = -3;\ y = \pm 2$
(E) $x = -1;\ y = 1$
(F) Nenhuma das respostas acima

2ª Questão, Item 16 [Valor 0,4]
As três raízes da equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ são a, b, c. Se, $S_n = a^n + b^n + c^n$, com n inteiro e $n > 3$, calcule K, sendo $K = S_n + pS_{n-1} + qS_{n-2} + rS_{n-3}$.

(A) $a + b$
(B) 0
(C) $a^n\, b^n\, c^n$
(D) $(a+b+c)^n$
(E) 3
(F) Nenhuma das respostas acima

2ª Questão, Item 17 [Valor 0,4]
Calcule as raízes da equação $2x^3 - 7x^2 + 10x - 6 = 0$, sabendo que uma das raízes é real, da forma n/d, sendo n e d, inteiros, positivos e primos entre si.

(A) $-3/2;\ 4/3;\ 7/5$
(B) $3/2;\ 1 \pm i$
(C) $3/2;\ 2 \pm 2i$
(D) $2/3;\ \pm i$
(E) $3/2;\ \pm i$
(F) Nenhuma das respostas acima

2ª Questão, Item 18 [Valor 0,4]
Sabendo que a equação $x^3 + mx^2 + n = 0$, em que m e n são reais, admite raízes complexas de módulo β, exprima m em função de n e β.

(A) $m = \dfrac{n^2 - \beta^5}{n^2\beta^2}$
(B) $m = \dfrac{n^4 - \beta^3}{\beta^2}$
(C) $m = \dfrac{n^5 - \beta^6}{n\beta^2}$
(D) $m = \dfrac{n^2 - \beta^6}{n\beta^2}$
(E) $m = \dfrac{n^2 - \beta^4}{n^2\beta^2}$
(F) Nenhuma das respostas acima

2ª Questão, Item 19 [Valor 0,4]

Calcule o coeficiente de x^6 no desenvolvimento $\left(1+x+x^2\right)^5$.

(A) 40

(B) 12

(C) 45

(D) 30

(E) 15

(F) Nenhuma das respostas acima

2ª Questão, Item 20 [Valor 0,4]

De um disco de raio $R = \frac{1}{2\pi}$ retire um setor cujo arco é x. Com o restante do disco forme um cone. Calcule o valor de x para que o volume do cone seja máximo.

Obs: $V = \frac{1}{3}Bh$, sendo B a área da base e h a altura do cone.

(A) $1 - \sqrt{2/3}$

(B) 4

(C) $1 + \sqrt{2/3}$

(D) $\pi/6$

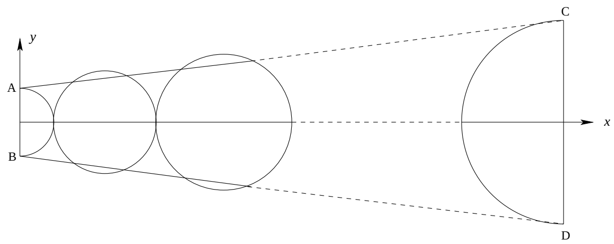
(E) $2\pi + 2$

(F) Nenhuma das respostas acima

3ª Questão, Item 21 [Valor 0,4]

Na figura abaixo, temos n círculos consecutivos e tangentes, cujos diâmetros estão em progressão aritmética de razão 1 e os centros sobre o eixo dos x. Seja $ABCD$ um trapézio cujas bases $\overline{AB} = 2$ e $\overline{CD}$ são respectivamente os diâmetros do primeiro e do enegésimo círculo. Calcule a área de $ABCD$ em função de n.

Obs: Área do trapézio $= \frac{\text{(Base maior)+(Base menor)}}{2} \times$ altura.



(A) $(n-1)(2+n+1)^2$

(B) $1/2(n^3 + 5n^2 + 4)$

(C) $1/4(n^3 + 5n^2 + 3n - 9)$

(D) $1/4(n^3 + 5n^2 + 4n)$

(E) n^3

(F) Nenhuma das respostas acima

3ª Questão, Item 22 [Valor 0,4]

Calcule os valores de X e Y sabendo que:

$X > Y$

$\log_5(X+Y) - 2\log_{25} 5 = 0$

$5^{\log_5(X+Y)} + \text{antiln}\left(\frac{\log_3 XY}{\log_3 e}\right) + \text{colog}_5(X+Y) - 5\log_3 9 = 0$

Obs: O símbolo ln significa logaritmo neperiano; e é base dos logaritmos neperianos.

(A) $X = 3$ e $Y = 2$
(B) $X = 3$ e $Y = 1$
(C) $X = 5$ e $Y = 0$
(D) $X = 4$ e $Y = 1$
(E) Solução impossível
(F) Nenhuma das respostas acima

3ª Questão, Item 23 [Valor 0,4]

$G = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$. Calcule G.

(A) 0
(B) 1
(C) ∞
(D) 1/3
(E) 1/2
(F) Nenhuma das soluções acima

3ª Questão, Item 24 [Valor 0,4]

Uma cônica tem por equação $9y^2 - 18y + 25x^2 + 50x - 191 = 0$. Identifique-a e calcule sua excentricidade, se for o caso.

(A) Uma hipérbole de excentricidade 0,7
(B) Uma elipse com focos no eixo dos yy
(C) Uma hipérbole equilátera
(D) Uma elipse de excentricidade 0,8
(E) Uma parábola de diretriz $x = -1$
(F) Nenhuma das curvas acima

3ª Questão, Item 25 [Valor 0,4]

Seja $A = \left(\sqrt{3}+i\right)^{2\alpha}$, onde α é um número real, inteiro e positivo. Sendo A um número real, calcule o valor de α para que as raízes da equação $(\alpha+i)^2x + (3+i)^2y = 0$ sejam também reais.

Obs: $i = \sqrt{-1}$.

(A) 1
(B) 10
(C) 12
(D) 4
(E) Impossível
(F) Nenhuma das respostas acima

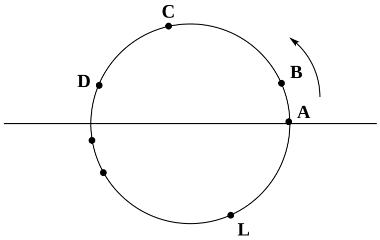
IME 1969/1970 - Geometria

1ª Questão, Item 1 [Valor 0,4]
Calcule as diagonais $\alpha = AC$ e $\beta = BD$ do quadrilátero $ABCD$ inscrito numa circunferência de raio R. Dados:
$a = AB = 2$m; $b = BC = 5$m;
$c = CD = 6$m; $d = DA = 3$m.

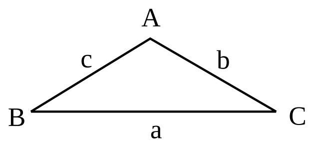
1ª Questão, Item 2 [Valor 0,4]
Calcule a mediana que parte do vértice comum aos lados de 7 e 3 metros do triângulo ABC, cujo perímetro é de 18 metros.

1ª Questão, Item 3 [Valor 0,4]
Calcule a bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ no triângulo ABC de lados $a = 6$, $b = 3$ e $c = 5$ metros.

1ª Questão, Item 4 [Valor 0,4]
Escreva a relação geral de Chasles para a soma dos arcos trigonométricos consecutivos da figura:



1ª Questão, Item 5 [Valor 0,4]
Dado o triângulo da figura, calcule a em função do semi-perímetro p e das linhas trigonométricas dos arcos metade.



2ª Questão, Item 1 [Valor 0,4]
A bissetriz interna e a altura, traçadas a partir do vértice C de um triângulo ABC, formam um ângulo de 47°. Dado $C = 34°$, calcule os ângulos A e B.

2ª Questão, Item 2 [Valor 0,4]
Em um círculo de raio R e centro O traçam-se dois diâmetros perpendiculares $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$. Com centro em B e raio BA traça-se uma circunferência que determina sobre BB' o ponto C, interior à circunferência de raio R. Calcule a área da lúnula $ACA'B'A$.

2ª Questão, Item 3 [Valor 0,4]
Calcule a altura do trapézio equivalente ao triângulo ABC (de lados 4, 5 e 7 metros), sabendo-se que a base menor do trapézio é igual ao lado do hexágono circunscrito ao círculo inscrito no triângulo ABC. O segmento que une os pontos médios das diagonais do trapézio mede $\sqrt{6}$ metros.

2ª Questão, Item 4 [Valor 0,4]
Duas retas paralelas cortadas por uma terceira formam pares de ângulos suplementares dos quais um é 3/7 do outro. Que relação com o ângulo reto tem cada um destes ângulos?

2ª Questão, Item 5 [Valor 0,4]
Resolva a equação abaixo para $\text{tg}\, x$:
$$15 \sec^2 x \,\text{tg}^2 x + \text{tg}^3 x (\text{tg}^3 x + 20) + \sec^2 x - \text{tg}^2 x + 6\, \text{tg}\, x (\text{tg}^4 x + 1) = 0$$

3ª Questão, Item 1 [Valor 0,4]
Calcule a relação entre o raio do círculo ex-inscrito a um triângulo equilátero e o lado deste polígono.

3ª Questão, Item 2 [Valor 0,4]
Verifique se:
$$\text{arc sen} \sqrt{\frac{1}{1+m}} = \text{arc tg} \sqrt{\frac{1}{m}}$$

3ª Questão, Item 3 [Valor 0,4]
A interseção de um plano com as arestas de um prisma reto triangular determina, a partir da base, segmentos de 3, 4 e x metros sobre as arestas. Calcule o valor de x para que os dois volumes resultantes sejam equivalentes. Aresta do prisma: igual a 10 metros.

3ª Questão, Item 4 [Valor 0,4]
O raio da base de um cone mede 2,5 metros e o volume 30 metros cúbicos. Calcule:
a) A superfície lateral do cone.
b) O ângulo do setor obtido desenvolvendo a superfície lateral deste cone sobre um plano.

3ª Questão, Item 5 [Valor 0,4]
Determine o comprimento das arestas da pirâmide formada pela interseção de um plano com todas as arestas de um triedro tri-retângulo, de modo que a seção seja um triângulo de lados 5, 5 e 6 metros.

4ª Questão, Item 1 [Valor 0,4]
Calcule a área da seção máxima obtida pelo corte de um tetraedro regular, de aresta 6 metros, por um plano paralelo às duas arestas opostas.

4ª Questão, Item 2 [Valor 0,4]
Calcule a distância do centro do círculo de raio $R = 4$ metros ao ponto de interseção de duas cordas perpendiculares que medem, respectivamente, 6 e 7 metros.

4ª Questão, Item 3 [Valor 0,4]
Um relógio possui três ponteiros que giram ao redor de um centro comum, o das horas, o dos minutos e o dos segundos. A que horas, pela primeira vez depois das doze horas, o ponteiro dos segundos fica situado entre o das horas e o dos minutos, formando com eles ângulos adjacentes suplementares.

4ª Questão, Item 4 [Valor 0,4]
Um triângulo de área 2π metros quadrados tem, por base, a base média de um trapézio e, por altura, a distância dessa base média a uma das bases do trapézio. Calcule a área deste trapézio.

4ª Questão, Item 5 [Valor 0,4]
Calcule a área da calota esférica cuja corda do arco gerador mede 2 metros.

5ª Questão, Item 1 [Valor 0,4]
Resolva a equação:
$$2 \cos x + 3 = 4 \cos \frac{x}{2}$$

5ª Questão, Item 2 [Valor 0,4]
Prove a identidade:
$$\text{sen}\,(a+b)\,\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}^2\, a - \text{sen}^2\, b$$

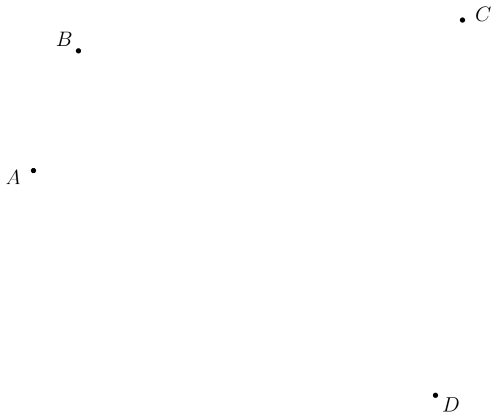
5ª Questão, Item 3 [Valor 0,4]
Um prisma reto, de base hexagonal regular, tem 4,5 centímetros cúbicos de volume e 12 centímetros quadrados de superfície lateral. Calcule o lado do hexágono e a altura do prisma.

5ª Questão, Item 4 [Valor 0,4]
Calcule a área de um triângulo obliquângulo, de medianas $m_A = 9$cm, $m_B = 6$cm, $m_C = 5$cm.

5ª Questão, Item 5 [Valor 0,4]
Calcule o ângulo a da cunha de 1 metro cúbico, que pertence à esfera de volume 4,8 metros cúbicos.

IME 1969/1970 - Desenho

IME 1969/1970, Questão 1, Item 1 [valor 1,5]: O quadrilátero $ABCD$ inscritível tem os vértices A e B num dos ramos de uma hipérbole equilátera e os vértices C e D no outro ramo da hipérbole. Ache as assíntotas e focos da hipérbole.

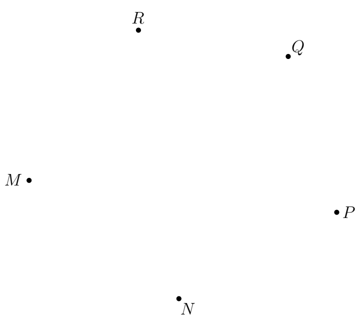


IME 1969/1970, Questão 1, Item 1.

IME 1969/1970, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]: Os pontos O_1 e O_2 são os centros de duas circunferências de raios 2 cm e 1 cm respectivamente. Ache um ponto tal que as tangentes mais inclinadas, traçadas às circunferências, sejam iguais e formem um ângulo de 100°.

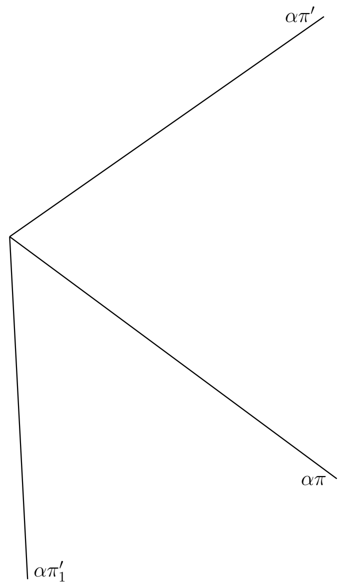
IME 1969/1970, Questão 1, Item 2.

IME 1969/1970, Questão 1, Item 3 [valor 0,5]: Os pontos M, N, P, Q e R são os pontos médios dos lados de um pentágono qualquer. Ache o pentágono.



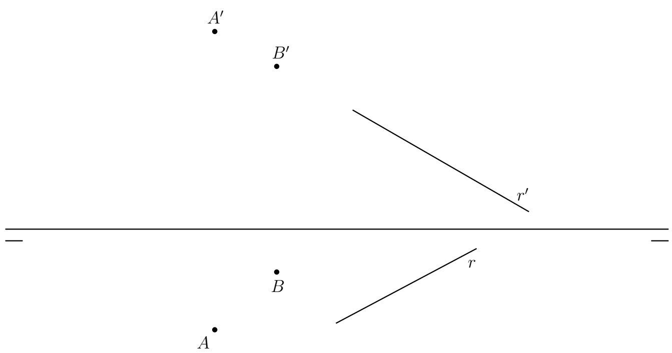
IME 1969/1970, Questão 1, Item 3.

IME 1969/1970, Questão 2, Item 1 [valor 0,5]: Dados o plano (α) e seu traço vertical rebatido $(\alpha\pi'_1)$ sobre o plano horizontal de projeção, determine a linha de terra.



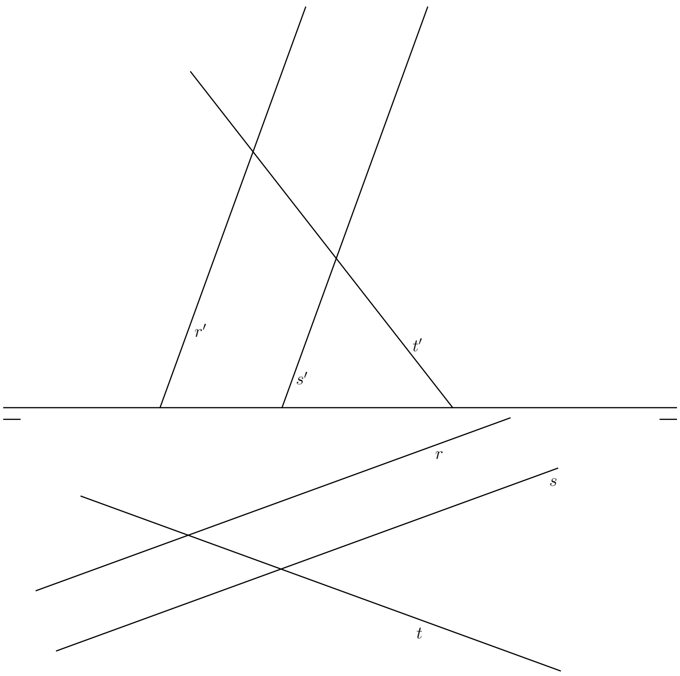
IME 1969/1970, Questão 2, Item 1.

IME 1969/1970, Questão 2, Item 2 [valor 1,0]: Dados os pontos (A) e (B) e a reta (r), trace pelo ponto (A) uma reta que se apóie em (r) e que diste 2 cm do ponto (B).



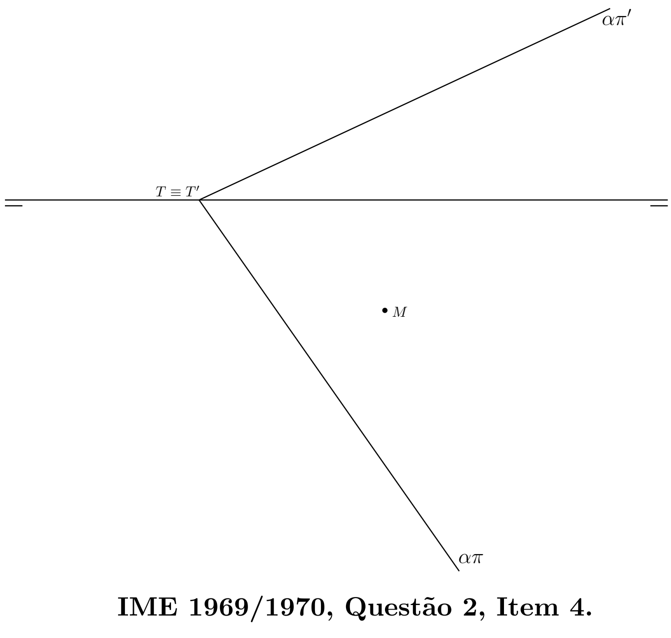
IME 1969/1970, Questão 2, Item 2.

IME 1969/1970, Questão 2, Item 3 [valor 1,0]: Dadas as retas (r), (s) e (t), sendo as duas primeiras paralelas, determine o traço do plano horizontal de menor cota que corta estas três retas em três pontos, vértices de um triângulo retângulo. O vértice de ângulo reto do triângulo está sobre a reta (t).



IME 1969/1970, Questão 2, Item 3.

IME 1969/1970, Questão 2, Item 4 [valor 1,5]: Um tetraedro regular do 1º diedro e de 4 cm de aresta possui a face $(A)(B)(C)$ no plano (α). (M) é o centro da face $(A)(B)(C)$ que possui o lado BC, de menor cota, paralelo ao plano horizontal de projeção. Determine as projeções do tetraedro e a verdadeira grandeza de sua altura.



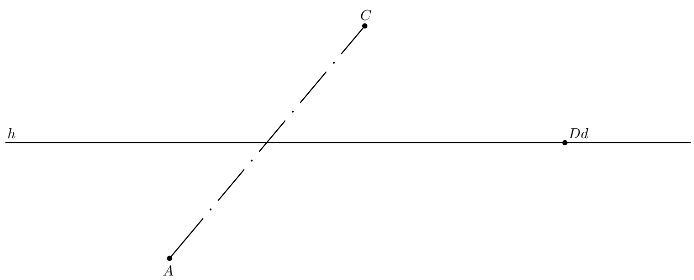
IME 1969/1970, Questão 2, Item 4.

IME 1969/1970, Questão 3, Item 1 [valor 1,5]: Represente as projeções e a verdadeira grandeza da seção feita por um plano genérico (α) em uma pirâmide de base retangular (V) – $(A)(B)(C)(D)$, apoiada pela base no plano horizontal de projeção. As arestas laterais se projetam horizontalmente segundo as diagonais da base. Dados:

- Linha de terra $\pi\pi'$; R_o ponto de origem;
- (A) vértice de menor afastamento: $(A)[7;1;0]$;
- $(A)(D) = 5$ e o seu suporte faz ângulo de -150^o com a linha de terra, sendo (D) o vértice de menor abscissa;
- $(A)(B) = 3{,}5$, sendo (B) o vértice de maior abscissa;
- $(V)[?;?;7]$;
- Plano secante (α): $\alpha\pi\widehat{\ }\pi\pi' = -135^o$, com $\alpha\pi$ passando pela projeção horizontal de (B); $\alpha\pi'\widehat{\ }\pi\pi' = 150^o$.

IME 1969/1970, Questão 3, Item 2 [valor 1,0]: Represente a perspectiva cônica do quadrado $ABCD$, vertical em relação ao geometral e a 45º com o quadro. Dados:

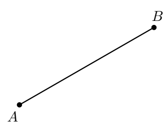
- h - linha do horizonte;
- Dd - ponto de distância da direita;
- AC - diagonal do quadrado já em perspectiva;
- A - vértice mais próximo do ponto de vista, pertencente ao lado AD no geometral.



IME 1969/1970, Questão 3, Item 2.

IME 1969/1970, Questão 3, Item 3 [valor 0,5]: Represente a perspectiva cavaleira, segundo a direção de 30º e coeficiente de redução de $1/3$, de um cone de revolução apoiado pela base na face superior de um cubo assente no geometral e de aresta igual ao diâmetro da base do cone. Os dois sólidos têm eixo vertical comum. Dados:

- AB diâmetro da base do cone já em perspectiva;
- Altura do cone igual a 8 cm;
- Escala do desenho = 1:1.



IME 1969/1970, Questão 3, Item 3.

IME 1968/1969 - Álgebra

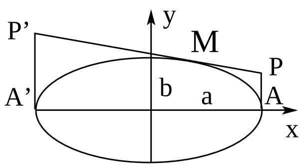
1ª Questão, Item 1 [Valor: 0,7]
Em um triângulo são dados dois lados a e b. Determinar a expressão do lado c em função de a e b, para que a área do triângulo seja máxima.

1ª Questão, Item 2 [Valor: 0,7]
Seja n um número inteiro positivo, tal que os coeficientes dos 5º, 6º e 7º termos, em relação a x, do desenvolvimento de

$$\left(\frac{\log_n \sqrt{2}^n}{\log_e n . \log_n \sqrt{2}^e} + x\right)^n,$$

segundo as potências decrescentes de x, estão em progressão aritmética. Determinar n.
Obs: e é a base do sistema de logaritmos neperianos.

1ª Questão, Item 3 [Valor: 0,7]
Seja E uma elipse de semi-eixos a e b conforme ilustra a figura. Considere-se uma tangente variável PP' em um ponto M de E, compreendido entre duas tangentes fixas às extremidades do eixo focal de E. Calcular o produto $\overline{AP}.\overline{A'P'}$.



1ª Questão, Item 4 [Valor: 0,7]
Calcular o determinante de 4ª ordem:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

completando os quadros abaixo, de forma que o 6º quadro indique imediatamente a resposta, sem recurso necessário à operação de adição.

1ª Questão, Item 5 [Valor: 0,7]
Sejam:
i) A e B números reais, $B \neq 0$.
ii) n e k, inteiros, maiores que zero.
iii) Para cada n, seja r_n a raiz principal (menor determinação) de índice n do número $i^{4n+1} + i^{4n}$.

Admitamos que: $\dfrac{Ae^{4\pi i} + Be^{\left(\frac{3\pi i}{4}\right)}}{r_n} = k.$
Determinar o valor de n de tal forma que A/B seja mínimo.
Obs: $i = \sqrt{-1}$.

1ª Questão, Item 6 [Valor: 0,7]
Seja $P(x)$ um polinômio de 4º grau, em x, cujo coeficiente do termo de maior grau é 1 e cujas raízes são racionais. Adicionando-se $3/4$ e 3 a essas raízes, obtêm-se transformadas de $P(x) = 0$ desprovidas dos termos do 3º grau e do 1º grau, respectivamente. Determinar o polinômio $P(x)$ sabendo-se que ele possui duas raízes iguais e que a tangente ao gráfico na origem tem coeficiente angular igual a -15.

2ª Questão, Item 1 [Valor: 0,8]
Sejam F, G e H funções reais de variável real, tais que:
i) $F = \{(x,y) |\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ e } y = +\sqrt{x+1}\}$
ii) para cada $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$: $G(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$
iii) $H(x) = F(G(x))$, isto é, H é a função composta de F e G.

Determinar a coleção de argumentos (domínio) da função derivada de H.
Obs: $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x.

2ª Questão, Item 2 [Valor: 0,8]
Sendo f e g funções reais de variável real, tais que:
i) $f(x) = \begin{cases} g(x) \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
ii) g é derivável em $x = 0$ e $g(0) = g'(0) = 0$.

Calcular $f'(0)$.

2ª Questão, Item 3 [Valor: 0,8]
Para cada número real r, seja $\hat{r}$ o arco de r grados. Calcular:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} \hat{x} - \operatorname{sen} \hat{\pi}}{x - \pi}$$

2ª Questão, Item 4 [Valor: 0,8]
Determinar os valores de a para que a função

$$f(x) = x^{\frac{a^2-a+4}{3}} . \left[\left(x^2+1\right)^{1/3} - x^{2/3}\right]$$

tenha limite:
i) Finito.
ii) Nulo.
iii) Infinito.
quando $x \to +\infty$.

2ª Questão, Item 5 [Valor: 0,8]
Sejam C_0, C_1, C_2, C_3 números reais. Calcular S, sendo:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_0 + C_1 n + C_2 n^2 + C_3 n^3}{n!}$$

2ª Questão, Item 6 [Valor: 0,8]
Seja R a região dos pontos (x_1, x_2) do plano, delimitada pelas inequações:

$$x_1^2 - 4x_1 + 4x_2 - 24 < 0$$
$$x_2 - x_1 - 3 > 0$$
$$x_1 > 0$$
$$x_2 > 0$$

Calcular a área de R.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Seja A um conjunto e F a coleção das bijeções f de A sobre A. Calcular o número total de funções de F que não admitem nenhum ponto fixo, supondo-se A finito com n elementos.
Obs:
i) x é ponto fixo de f se e só se $f(x) = x$.
ii) Uma bijeção f de A sobre A é uma função biunívoca cujas coleções de argumentos e valores são ambas iguais a A.

IME 1968/1969 - Geometria

1ª Questão, Item 1 [Valor: 0,5]
Um triângulo tem um ângulo interno de 75° e os outros ângulos internos definidos pela equação

$$3 \sec x + m(\cos x - \operatorname{sen} x) - 3(\operatorname{sen} x + \cos x) = 0$$

Determine o valor de m.

1ª Questão, Item 2 [Valor: 0,5]
Um plano corta um triedro de vértice V e faces iguais a 60°, resultando um sólido de arestas de comprimentos $VA = 2$m, $VB = 5$m e $VC = 12$m. Calcule o volume deste sólido.

1ª Questão, Item 3 [Valor: 0,5]
Os volumes gerados pelas rotações de um paralelogramo em torno de seus lados de comprimentos x centímetros e de 40 centímetros são, respectivamente, 12π e 600π centímetros cúbicos. Calcule a área de uma elipse de eixos de comprimentos x centímetros e 40 centímetros.

1ª Questão, Item 4 [Valor: 0,5]
Transformou-se um triângulo ABC qualquer, com dois lados $CA = 8$ e $CB = 10$, em um triângulo isósceles equivalente CDE, ambos com o ângulo comum C. Calcule os lados iguais CD e CE do triângulo isósceles.

1ª Questão, Item 5 [Valor: 0,5]
Um quadrilátero inscritível e circunscritível tem um lado igual a 5 metros, área $6\sqrt{5}$ metros quadrados e diagonais inversamente proporcionais a 9 e 3. Calcule os outros lados do quadrilátero.

1ª Questão, Item 6 [Valor: 0,5]
Um triângulo de perímetro igual a 15 metros, lados em progressão aritmética, tem a bissetriz externa do ângulo $A = 120°$ medindo $\frac{\sqrt{675/2}}{2}$ metros. Calcule a altura em relação ao lado a.

2ª Questão, Item 1 [Valor: 1,0]
Uma hélice se desenvolve sobre a superfície de um cilindro reto de raio $\sqrt{2}/\pi$. Calcule o seu passo, sabendo-se que as tangentes traçadas por dois de seus pontos, situados sobre duas geratrizes do cilindro, diametralmente opostas, são perpendiculares.

2ª Questão, Item 2 [Valor: 1,0]
Calcule as menores determinações de x que satisfazem:

$$4 \operatorname{sen} x + 2 \cos x - 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0$$

Dados:

$\operatorname{tg} 12° = 0{,}212$	$\operatorname{tg} 23°30' = 0{,}435$
$\operatorname{tg} 14° = 0{,}249$	$\operatorname{tg} 26°36' = 0{,}500$
$\operatorname{tg} 15° = 0{,}268$	$\operatorname{tg} 29°18' = 0{,}560$
$\operatorname{tg} 17° = 0{,}306$	$\operatorname{tg} 37°30' = 0{,}767$
$\operatorname{tg} 19°30' = 0{,}354$	$\operatorname{tg} 50°12' = 1{,}200$

2ª Questão, Item 3 [Valor: 1,0]
Calcule o volume de um tronco de cone circunscrito a uma esfera de raio r, sabendo que a circunferência de tangência da esfera com a superfície lateral do tronco está em um plano cuja distância à base maior do tronco é o dobro da distância à base menor.

3ª Questão, Item 1 [Valor: 2,0]
Calcule, exatamente, o volume de uma lente esférica biconvexa de espessura 1 metro e superfície π metros quadrados, para $\pi = 3{,}141$.

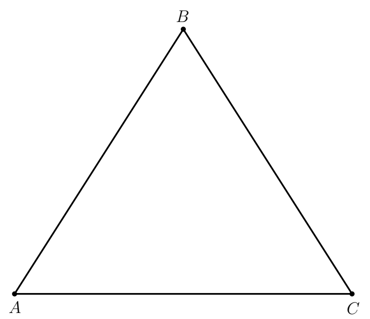
3ª Questão, Item 2 [Valor: 2,0]
Calcule o volume do tetraedro regular, sabendo que sua aresta é igual à distância dos centros dos círculos inscrito e circunscrito ao triângulo de lados 4m, 6m e 8m.

IME 1968/1969 - Desenho

IME 1968/1969, Questão 1, Item 1 [valor 1,0]: Dados os três pontos A, B e C, passar por A e B uma circunferência tal que a tangente tirada por C tenha um comprimento de 5 cm.

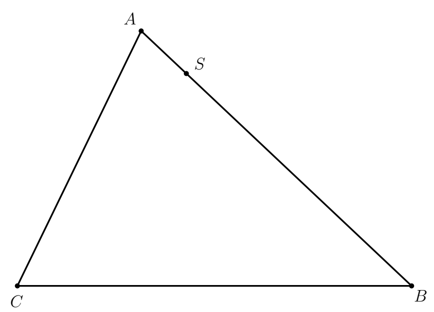
IME 1968/1969, Questão 1, Item 1.

IME 1968/1969, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]: No triângulo isósceles ABC, inscrever um retângulo cujo perímetro seja duplo do perímetro do triângulo isósceles que fica na parte superior do retângulo.



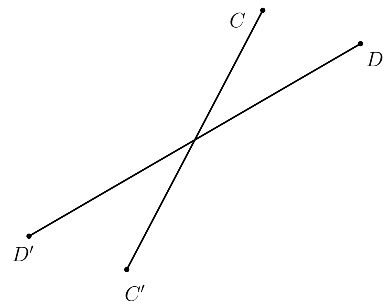
IME 1968/1969, Questão 1, Item 2.

IME 1968/1969, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]: Pelo ponto comum S dividir o triângulo ABC em três áreas iguais.



IME 1968/1969, Questão 1, Item 3.

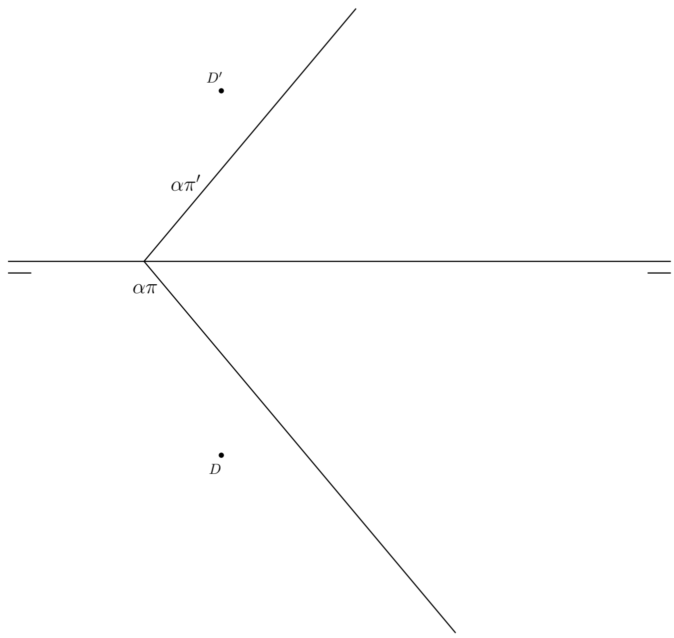
IME 1968/1969, Questão 1, Item 4 [valor 0,5]: Determinar a direção e tamanho dos eixos de uma hipérbole de diâmetros conjugados CC' e DD'.



IME 1968/1969, Questão 1, Item 4.

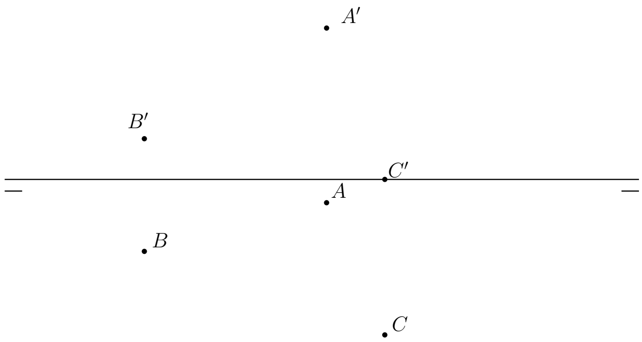
IME 1968/1969, Questão 2, Item 1 [valor 0,5]: Duas arestas paralelas $(A)(B)$ e $(C)(D)$ da mesma face de um cubo do primeiro diedro acham-se sobre os traços de um plano paralelo à linha da Terra. Este plano faz um ângulo de 30º com o plano vertical. Determinar as projeções do cubo e a verdadeira grandeza de sua diagonal empregando um método descritivo.

IME 1968/1969, Questão 2, Item 2 [valor 0,5]: Determinar as projeções de um tetraedro regular de vértice (D), sabendo-se que a face oposta a (D) está no plano (α). Esta face tem um lado paralelo ao traço $\alpha\pi$, estando o mais próximo possível deste traço.



IME 1968/1969, Questão 2, Item 2.

IME 1968/1969, Questão 2, Item 3 [valor 0,5]: Determinar as projeções da circunferência inscrita no triângulo $(A)(B)(C)$.



IME 1968/1969, Questão 2, Item 3.

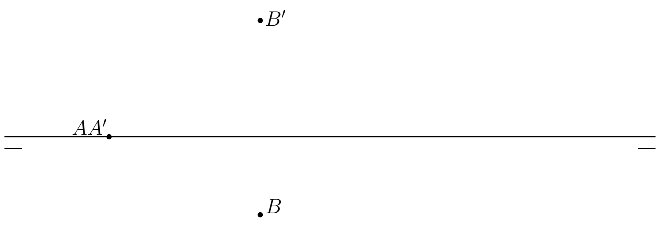
IME 1968/1969, Questão 2, Item 4 [valor 1,0]: Determinar a linha de terra. Dados:

(i) Projeções do ponto (A);

(ii) Rebatimento $(A)_1$ do ponto (A) em torno da linha de terra, sobre o plano horizontal de projeção.

IME 1968/1969, Questão 2, Item 4.

IME 1968/1969, Questão 2, Item 5 [valor 1,0]: Dado o segmento de reta $(A)(B)$ da bissetriz dos traços de um plano, determinar estes traços.



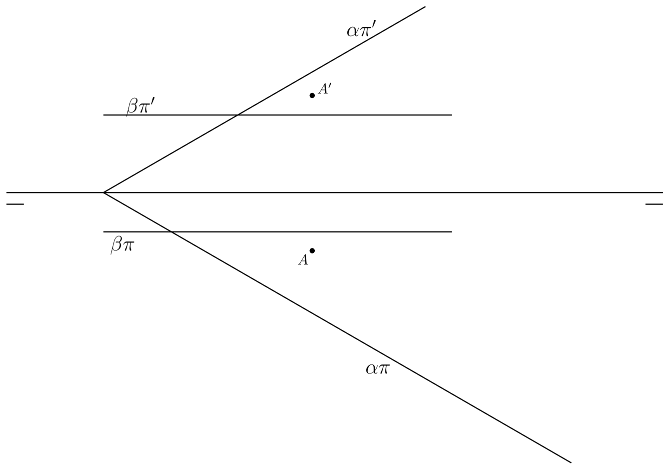
IME 1968/1969, Questão 2, Item 5.

IME 1968/1969, Questão 2, Item 6 [valor 1,5]: Sendo dados o ponto (A) e os planos (α) e (β), determine as projeções da reta que:

(i) Passe pelo ponto (A);

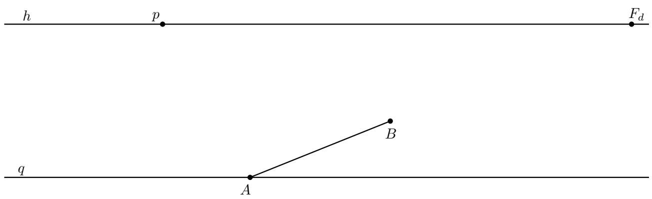
(ii) Seja ortogonal à interseção dos planos (α) e (β);

(iii) Seus traços sobre os planos dados sejam equidistantes do ponto (A).



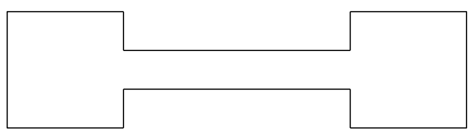
IME 1968/1969, Questão 2, Item 6.

IME 1968/1969, Questão 3, Item 1 [valor 1,0]: Construir a perspectiva de um quadrado de plano inclinado de 45º com o geometral. É dado o lado AB, no geometral e já em perspectiva. O lado CD está mais afastado do Ponto de Vista e acima do geometral. AB faz ângulo de 30º com o traço do quadro. Dados: h linha do horizonte; q traço do quadro; p ponto principal; Fd Ponto de fuga de AB.



IME 1968/1969, Questão 3, Item 1.

IME 1968/1969, Questão 3, Item 2 [valor 0,5]: Conhecida a projeção horizontal e a altura de um prisma reto, fazer a perspectiva cavaleira, na mesma escala, segundo a direção de 30º e redução de 1/3.



IME 1968/1969, Questão 3, Item 2.

IME 1967/1968 - Álgebra

1ª Questão, Item 1 [Valor: 0,6]
Diga, justificando, se a série

$$1/2 + 3/8 + 15/48 + 105/384 + \ldots$$

é convergente ou divergente.

1ª Questão, Item 2 [Valor: 0,6]
A reta $x - 25/4 = 0$ é uma das diretrizes de uma elipse e $(4, 0)$ é o foco associado. O centro está na origem. Ache a equação da elipse.

1ª Questão, Item 3 [Valor: 0,6]
Seja g uma função real de variável real, par (isto é: $g(x) = g(-x)$) e derivável. Prove que sua derivada g' é uma função ímpar (isto é: $g'(-x) = -g'(x)$).

1ª Questão, Item 4 [Valor: 0,6]
Seja f uma função definida na coleção dos números reais, tal que:
i) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.
ii) $f(0) = 0$.
a) Determine a função f' derivada de f.
b) Diga, justificando, se f' é ou não contínua.

1ª Questão, Item 5 [Valor: 0,6]
Resolva a equação

$$x^{10} - 2x^9 + 2x^8 + x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 12x^2 + 24x - 24 = 0,$$

a qual admite uma raiz complexa de módulo $\sqrt{2}$ e argumento $\pi/4$.

2ª Questão, Item 1 [Valor: 0,7]
Determine a transformação em $kx + h$ da equação $x^3 + 4x^2 - 12x + 160 = 0$, de tal forma que, se $2 - 4i$ fôsse raiz dessa equação, a raiz correspondente da equação transformada seria $0{,}9 + 0{,}2i$.
Obs: $i = \sqrt{-1}$.

2ª Questão, Item 2 [Valor: 0,7]
Seja f uma função real de variável real, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -1 \\ |x|, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

Determine a função F, real de variável real, cuja derivada seja f, de modo que $F(0) = 0$.

2ª Questão, Item 3 [Valor: 0,7]
Seja m um inteiro maior que zero. Calcule o valor do somatório dos inversos dos cubos das raízes da equação $mx^4 + 8x^3 - 139x^2 - 18x + 9 = 0$ (sem resolvê-la).

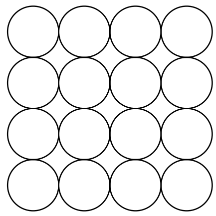
2ª Questão, Item 4 [Valor: 0,7]
Sejam r, m, p números reais maiores que zero, A a coleção dos pares (x, y) de números reais tais que $x + y = r$ e f a função cujo conjunto de definição é A e que associa a cada par (x, y) de A o número $x^m y^p$. Mostre que f tem máximo quando $\frac{x}{m} = \frac{y}{p}$.

2ª Questão, Item 5 [Valor: 0,7]
Sejam: A o conjunto dos números reais x, tais que $x^2 - 7 \neq 0$; B o conjunto dos números reais x, tais que $x^2 + 4x - 5 \geq 0$; F e G funções cujos conjuntos de definição são A e B respectivamente, tais que:

$$F(x) = \frac{x^2}{x^2 - 7} \quad \text{e} \quad G(x) = -\sqrt{x^2 + 4x - 5}.$$

Determine o conjunto de definição da função H, composta de G com F (isto é, $H(t) = F(G(t))$).

2ª Questão, Item 6 [Valor: 0,7]
Uma pilha de esferas iguais é obtida dispondo-se as esferas em camadas sucessivas, de tal forma que a camada inferior forme um "quadrado" com $4n^2$ esferas, conforme é ilustrado pela figura, para $n = 2$, e apoiando-se camadas sucessivas sobrea primeira, de tal modo que cada esfera de uma camada se apoie sobre quatro esferas da imediata abaixo. Sabendo-se que a expressão $An^3 + Bn^2 + Cn + D$ indica o número de esferas contidas nas n primeiras camadas da pilha, determine os valores numéricos das constantes A, B, C e D.



3ª Questão, Item 1 [Valor: 0,7]
Calcule a área da superfície delimitada pelos gráficos de:

$$9x^2 + 16y^2 - 24xy - 20x - 15y = 0$$

$$2x - 11y + 15 = 0$$

3ª Questão, Item 2 [Valor: 0,7]
Sabe-se que

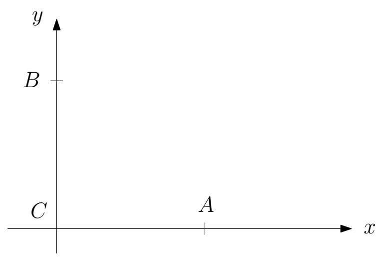
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = e\sqrt{2}; \quad \lim_{k \to +\infty} b_k = 2\sqrt{e};$$

$$\lim_{h \to +\infty} \sum_{j=1}^{h} p_j = +\infty, \quad p_j > 0,$$

qualquer que seja $j = 1, 2, 3, \ldots$ Calcule

$$\lim_{\ell \to +\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{\ell} a_i b_i}{\ell} + \frac{\sum_{i=1}^{\ell} p_i b_i}{\sum_{i=1}^{\ell} p_i} \right)$$

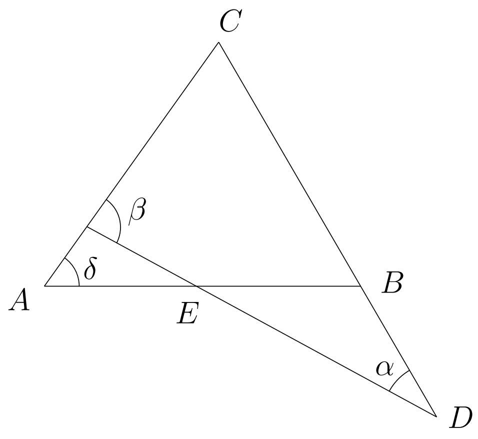
3ª Questão, Item 3 [Valor: 0,7]
Conforme a figura abaixo, considere um triângulo retângulo isósceles ABC e o círculo β a ele circunscrito; sobre a circunferência toma-se um ponto M distinto de A, B ou C de tal modo que as retas MA, MB e MC cortem as retas BC, CA e AB nos pontos A', B' e C' respectivamente. Considere-se o círculo Γ_M que passa por A', B' e C'. Mostre que, quando M descreve o círculo β, nas condições acima, os círculos Γ_M têm os seus centros sobre uma reta fixa e cortam ortogonalmente um círculo fixo.



3ª Questão, Item 4 [Valor: 0,7]
Seja π um polígono plano convexo de $p+1$ lados, $p \geq 2$. Em função explícita exclusivamente de p e de constantes numéricas, determine de quantas maneiras (diferentes) se pode decompor π em triângulos por meio de diagonais que não se cortem no interior de π. Se $p+1=3$, pressupor que o número de decomposições em causa é 1 (um).

IME 1967/1968 - Geometria

1ª Questão [Valor: 0,5]
Na figura ao lado, sendo $AC = BC$ e $BD = BE$, expressar $\alpha = f(\beta)$.

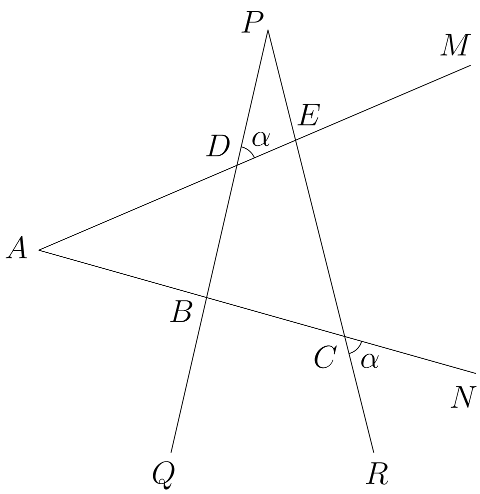


2ª Questão [Valor: 0,5]
No quadrilátero qualquer $ABCD$, P é meio de AD e M é meio de BC. Unindo-se P a C e M a A, obtem-se o quadrilátero $APCM$. Sendo a área de $ABCD = 18$ m^2, calcular a área de $APCM$.

3ª Questão [Valor: 0,5]
Os lados dos ângulos MAN e QPR interceptam-se como na figura ao lado. Sendo $AD = 3$, $AB = 2$ e $BC = 4$, pedem-se

a) O valor de DE.

b) Dizer, justificadamente, se o quadrilátero $BDEC$ é inscritível.



4ª Questão [Valor: 1,0]
Dado o triângulo isósceles, cujos lados são números inteiros de metros, sabe-se que os raios dos círculos ex-inscritos têm um produto 16 vezes o raio do círculo inscrito. Determinar os lados do triângulo.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Sendo y um arco compreendido entre 2π e $5\pi/2$, determinar seu valor, sabendo que:

$$\operatorname{tg} y = \frac{1}{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2} - \frac{4 \operatorname{tg}^2 x}{(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2}$$

6ª Questão [Valor: 1,5]
Dado um prisma reto cuja base é um quadrado de lado 10 m e altura 18 m, passa-se um plano que corta o prisma de modo a que três arestas consecutivas ficam medindo 10m, 12m e 14m. Calcular, em metros quadrados, a área lateral do prisma truncado assim formado.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Consideram-se três esferas tangentes a um plano P em três pontos A, B, C e tangentes duas a duas. Calcular os raios X, Y, Z, das esferas em função das distâncias mútuas a, b, c dos três pontos A, B, C.

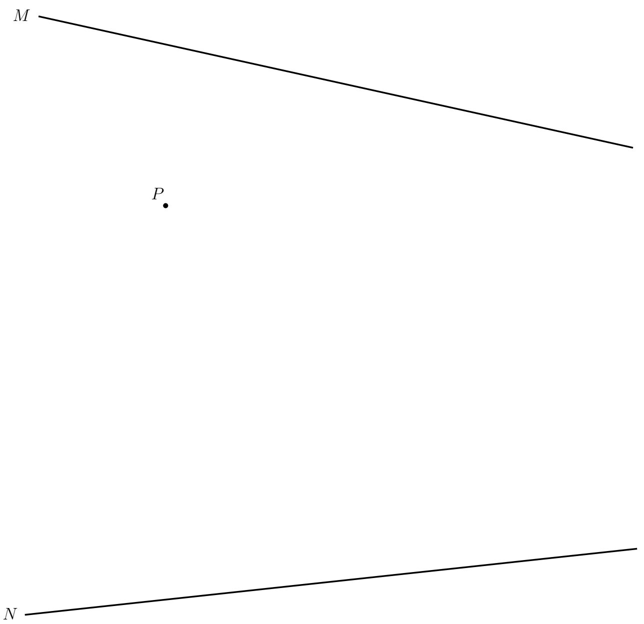
8ª Questão [Valor: 1,0]
Corta-se um cubo de aresta a por 8 planos que passam, cada um, pelo meio das arestas que chegam a cada vértice. Considera-se o sólido S que resta, se retirados os 8 tetraedros obtidos. No mesmo sólido S, inscreve-se um octaedro P que tem por vértices os centros das faces do cubo original. Calcular a relação entre os volumes do sólido S e do octaedro inscrito P.

9ª Questão [Valor: 1,5]
Calcular o raio das esferas circunscrita e inscrita a uma pirâmide regular que tem por altura h e por base um quadrado de lado a.

10ª Questão [Valor: 1,5]
Sejam três pontos A, B, C situados em um plano. De um ponto M do plano, os segmentos AC e BC foram vistos sob ângulos $AMC = \alpha$ e $BMC = \beta$. Sabendo-se que A e B se situam de lados opostos da reta que passa por M e C, e que M e C se situam de lados opostos da reta que passa por A e B, pede-se determinar trigonometricamente a distância $MC = x$, em função exclusivamente das distâncias $AB = c$; $BC = a$ e $AC = b$ e dos ângulos α e β.

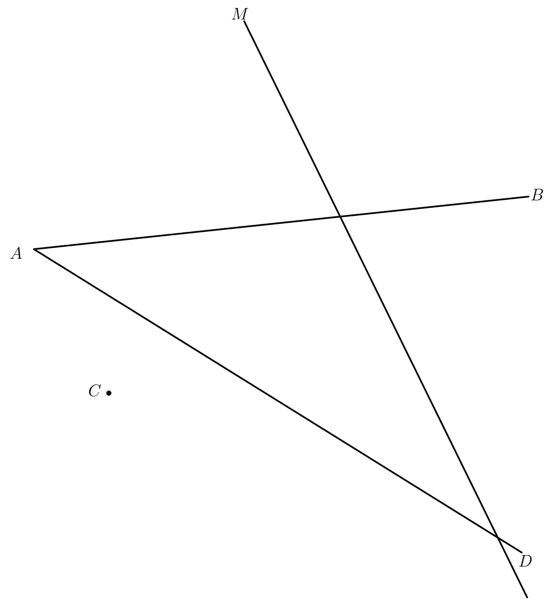
IME 1967/1968 - Desenho

IME 1967/1968, Questão 1, Item 1 [valor 0,5]: Pelo ponto P, traçar uma reta que passe pelo ponto de concorrência das retas M e N que não podem ser prolongadas.



IME 1967/1968, Questão 1, Item 1.

IME 1967/1968, Questão 1, Item 2 [valor 0,5]: Do ponto C como centro, traçar uma circunferência que corte os lados do ângulo BAD, de modo que a corda obtida seja paralela à reta M.



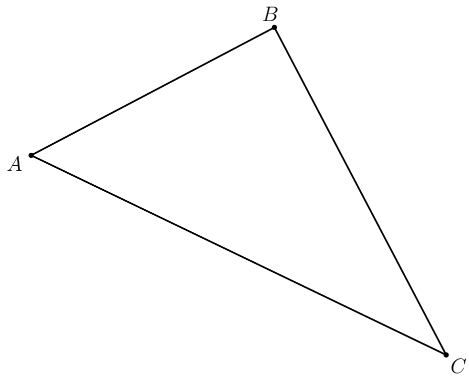
IME 1967/1968, Questão 1, Item 2.

IME 1967/1968, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]: O segmento de reta AE representa a soma da diagonal e do lado de um quadrado. Pede-se construir o quadrado.

IME 1967/1968, Questão 1, Item 3.

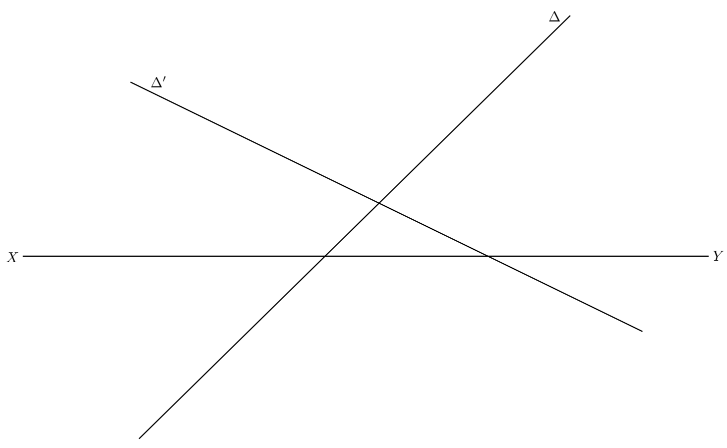
IME 1967/1968, Questão 1, Item 4 [valor 1,0]: Construir um quadrado, equivalente a um círculo cuja área é a soma das áreas de dois círculos de raios 3 e 2 cm.

IME 1967/1968, Questão 1, Item 5 [valor 1,0]: O triângulo ABC, retângulo em B, é formado por três tangentes a uma parábola. O foco da parábola é um ponto da bissetriz interna do ângulo A. Pede-se determinar 5 pontos de passagem da parábola.



IME 1967/1968, Questão 1, Item 5.

IME 1967/1968, Questão 2, Item 1 [valor 0,5]: Determinar a Verdadeira Grandeza do segmento da reta (Δ), limitado pelos planos bissetores.

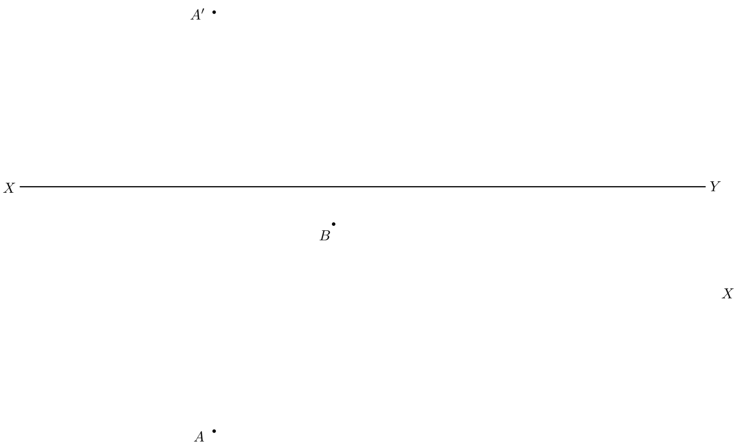


IME 1967/1968, Questão 2, Item 1.

IME 1967/1968, Questão 2, Item 2 [valor 0,5]: Os pontos (A), (B) e (C) pertencem a uma mesma reta. Sabe-se que o ponto (C) está no terceiro diedro e tem 0,8 cm de cota e 6,5 cm de afastamento. Pedem-se:

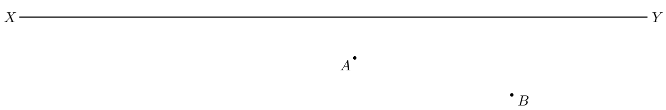
a) Determinar os traços do plano QaQ' perpendicular à reta $(A)(C)$ e que a intercepta no ponto (B);

b) Determinar a verdadeira grandeza do ângulo formado pelos traços do plano QaQ'.



IME 1967/1968, Questão 2, Item 2.

IME 1967/1968, Questão 2, Item 3 [valor 1,0]: Completar as projeções do trapézio retângulo $(A)(B)(C)(D)$ do 1º diedro, sabendo-se que a soma das suas bases é igual a 4 cm e que o seu lado não paralelo maior, $(A)(B)$, pertence ao plano horizontal de projeção e o menor, $(C)(D)$, ao plano vertical de projeção.

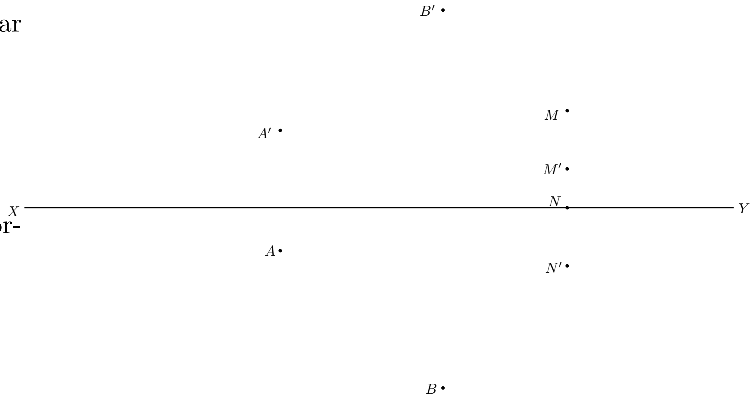


IME 1967/1968, Questão 2, Item 3.

IME 1967/1968, Questão 2, Item 4 [valor 1,0]: Dadas as retas $(A)(B)$ e $(M)(N)$, determinar:

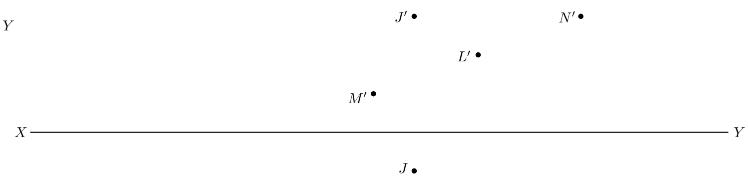
a) Os traços do plano PaP' definido pela reta $(A)(B)$ e pelo ponto (D) de cota conhecida e pertencente à reta $(M)(N)$;

b) O ponto (C), sobre a reta $(A)(B)$, que tem o afastamento três vezes maior que a cota.



IME 1967/1968, Questão 2, Item 4.

IME 1967/1968, Questão 2, Item 5 [valor 1,0]: A reta $(J)(L)$ mede 4 cm e é perpendicular a $(M)(N)$. O ponto (L) é a interseção das duas retas e se acha no 1º diedro. Completar as projeções das referidas retas.



IME 1967/1968, Questão 2, Item 5.

IME 1966/1967 - Álgebra

1ª Questão, Item 1 [Valor 0,3]
Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 5 & 5 & 11 \\ 3 & 6 & -9 & 12 & 1 \end{vmatrix}$$

1ª Questão, Item 2 [Valor 0,3]
Calcule:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$$

1ª Questão, Item 3 [Valor 0,3]
O ponto $Q(2,1)$ pertence à cônica de equação $4x^2 + 30xy + 4y^2 - 40x + 210y = 210$. Determine as novas coordenadas de Q, após a transformação que elimina o termo em xy.

1ª Questão, Item 4 [Valor 0,3]
Seja 64 a soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento de $(x+y)^m$, onde m é um número natural. Supondo-se a e b números positivos, o terceiro e o sétimo termos do desenvolvimento de $(a+b)^m$ segundo as potências decrescentes de b serão $T_3 = 60$ e $T_7 = 64$. Determine a e b.

1ª Questão, Item 5 [Valor 0,3]
Seja uma função f tal que $|f(a)-f(x)| \leq (a-x)^2$, para quaisquer números reais x e a. Calcule a derivada de f no ponto 2.
Obs: $|K|$ indica o valor absoluto do número K; todas as funções são reais de variável real.

1ª Questão, Item 6 [Valor 0,3]
Forme a equação recíproca de menor grau que admite como raiz o maior dos restos das divisões de $P(x)$ por $(2x-1)$ e por $(x+1)$, sendo $P(x) = 16x^6 - 4x^4 + 16x - 1$.

1ª Questão, Item 7 [Valor 0,3]
Calcule, entre os limites $-0{,}7$ e $0{,}8$, a integral da função G definida por

$$G(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+x^{4n}}$$

1ª Questão, Item 8 [Valor 0,3]
Seja A_n a área da superfície do polígono plano P_n cujos vértices são as raízes da equação $\sqrt{7} + 3i - x^{2n} = 0$, $n \geq 2$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

1ª Questão, Item 9 [Valor 0,3]
Calcule a soma da série $\displaystyle\sum \frac{225}{n^2+5n+6}$.

2ª Questão, Item 10 [Valor 0,5]
Calcule m e n de modo que $x^4 + x^3 + mx^2 + nx - 2$ seja divisível por $x^2 - x - 2$.

2ª Questão, Item 11 [Valor 0,5]
Dados $A(2,0)$ e $B(-2,0)$ e a elipse $\dfrac{(x-6)^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, pede-se determinar os pontos P_i $(i = 1,2,3)$ da curva tais que a reta AP_i tenha coeficiente angular igual ao triplo do coeficiente da reta BP_i.

2ª Questão, Item 12 [Valor 0,5]
Seja F uma função tal que

$$\begin{cases} F(x) + F(y) = F(x+y) \\ F(x.y) = x.F(y) \end{cases}$$

Sabe-se que $F(-1) = 2$. Calcule $F(\log 0{,}001 + \operatorname{sen}\pi/2)$.
Obs: $\log N$ é o lagaritmo decimal do número N.

2ª Questão, Item 13 [Valor 0,5]
Calcule

$$\lim_{y\to a}\frac{ay}{(y-a)}\int_a^y e^x.\,\mathrm{d}x$$

Obs: a é uma constante; e é a base dos logaritmos neperianos.

2ª Questão, Item 14 [Valor 0,5]
De quantas maneiras 3 rapazes e 2 moças podem ocupar 7 cadeiras em fila, de modo que as moças sentem juntas umas das outras, e os rapazes juntos uns dos outros.

2ª Questão, Item 15 [Valor 0,5]
Sendo as coordenadas do ponto $P(x,y)$ definidas por

$$\begin{cases} x = 2a\operatorname{tg} u \\ y = 2a\cos^2 u \end{cases}$$

Pede-se calcular o valor de $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ no ponto zero.

2ª Questão, Item 16 [Valor 0,5]
Entre os números 3 e 192 insere-se igual número de meios aritméticos e geométricos com razões r e q respectivamente. Sabe-se que o terceiro termo do desenvolvimento de $(1+1/q)^8$ em potências crescentes de $1/q$ é $r/9q$. Pede-se determinar as progressões.

2ª Questão, Item 17 [Valor 0,5]
Pede-se determinar o termo da sucessão $2/5,\ 8/14,\ 18/29,\ 32/50,\ \ldots$, a partir do qual, inclusive, a distância de qualquer termo ao número um é inferior a $11/32$.

2ª Questão, Item 18 [Valor 0,5]
Seja a parábola $y^2 = 4x$. Uma reta de coeficiente angular positivo contém o foco e intercepta a curva nos pontos A e B. Determine as coordenadas de A ou de B, sabendo que o eixo OX divide o segmento AB em partes proporcionais a 3 e 1.

3ª Questão, Item 19 [Valor 0,7]
De um ponto $Q(0, y_1)$ traçam-se as tangentes à curva de equação $y = 2 - x^2$, que interceptam a reta $y = 0$ nos pontos A e B. Pede-se determinar y_1 de modo que a área do triângulo QAB seja mínima.

3ª Questão, Item 20 [Valor 0,7]
Sabe-se que os números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formam uma progressão aritmética de razão r; e que $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)$ formam uma progressão geométrica de razão 2. Sendo $g(x) = a^{f(x)}$, $a > 1$ e $f(x) = Kx + b$, $K \neq 0$; calcule r para $a = 10$ e $K = \log 2$.

3ª Questão, Item 21 [Valor 0,7]
Resolva o sistema

$$\begin{cases} C_{r+y}^{r} = \log_y x \geq 0 \\ \log_y z = \log_x z + 4 \\ C_{r+y}^{y} = \log_x z + \log_z z \end{cases}$$

Obs: C_m^p é a combinação de m elementos p a p; $\log_c B$ é o logaritmo de B na base c.

3ª Questão, Item 22 [Valor 0,7]
Seja a função F definida por

$$F(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \leq 1 \\ |3x - 5|, & x > 1 \end{cases}$$

Sabe-se que:

i) A função F é contínua sobre seu conjunto de definição.

ii) $\displaystyle\int_0^1 F(x).\,\mathrm{d}x = 1{,}5.$

iii) A função primeira derivada de F é descontínua apenas em um número do conjunto dos reais.

Pede-se determinar os números a, b, c.

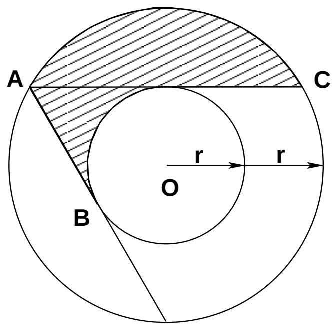
IME 1966/1967 - Geometria

1ª Questão [Valor 1,0]
Determinar a condição que deve ser imposta a b para que seja possível o sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} y = 2 \\ \sec^2 z + \sec^2 y = b \end{cases}$$

2ª Questão [Valor 0,5]
Um prisma A, um prisma B e uma pirâmide C têm ao todo 32 arestas. Sabendo-se que A tem mais arestas que B, dizer o número de lados da base de cada sólido.

3ª Questão [Valor 1,0]
Na figura abaixo, AB e AC são tangentes ao círculo menor. Determinar, em função de r, a área da parte hachurada.



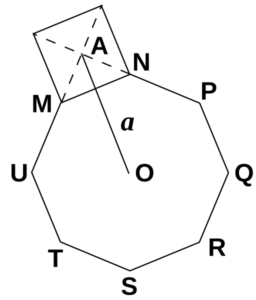
4ª Questão [Valor 0,5]
Determinar, justificando sucintamente, o número de polígonos convexos ou estrelados, não semelhantes, que se pode construir com 15 lados.

5ª Questão [Valor 1,5]
Um trapézio de vértices $ABCD$ está inscrito em um círculo, de raio R, sendo $AB = R$ e $CD = 2R$ e sendo BC e AD lados não paralelos. Traçam-se as bissetrizes dos ângulos internos do trapézio, de modo que a bissetriz de $\hat{A}$ intercepta a de $\hat{D}$ no ponto Q, a de $\hat{B}$ intercepta a de $\hat{C}$ no ponto N e a de $\hat{C}$ intercepta a de $\hat{D}$ no ponto M. Sabendo que os pontos M, N e Q são interiores ao trapézio $ABCD$ e que o ponto P é a interseção das bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$, determine:

a) **[Valor 1,0]**: A relação entre as áreas dos polígonos $MNPQ$ e $ABCD$.

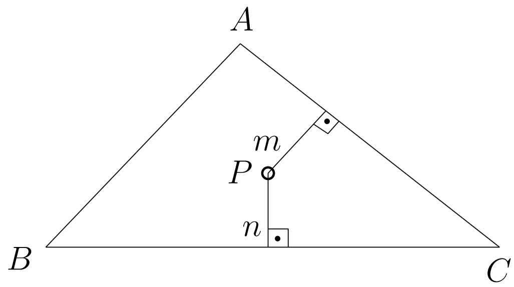
b) **[Valor 0,5]**: O volume gerado pela revolução do polígono $MNPQ$ em torno de um eixo que contém BC.

6ª Questão [Valor 1,0]
A figura abaixo mostra o octógono regular $MNPQRSTU$, e um quadrado construído tendo por base o lado MN. Sabendo-se que a distância entre o centro do círculo inscrito no octógono e o ponto de interseção das diagonais do quadrado é a, determinar a área do quadrado em função de a.



7ª Questão [Valor 1,0]
No triângulo abaixo, as distâncias do ponto P aos lados AC e BC são respectivamente m e n. Verificar, justificando, se:

$$CP^2 = (m^2 + n^2 + 2mn\cos C)\operatorname{cosec}^2 C$$



8ª Questão [Valor 1,0]
Dois círculos exteriores possuem diâmetros de 10m e 2m e seu eixo radical dista 5m de um deles. Pedem-se:
a) **[Valor 0,5]**: O comprimento da tangente comum externa dos dois círculos.
b) **[Valor 0,5]**: Sendo P o ponto em que o eixo radical corta a tangente comum externa e O e O' os centros dos círculos, determinar a área do triângulo POO'.

9ª Questão [Valor 1,0]
O volume de um tronco de pirâmide vale 950 cm^3 e sua altura é de 9 cm. A base maior é um triângulo retângulo cuja altura é 12 cm e cujo perímetro é 60 cm. Calcular:
a) **[Valor 0,5]**: O volume da pirâmide da qual se derivou o tronco.
b) **[Valor 0,5]**: A área da base menor do tronco da pirâmide.

10ª Questão [Valor 1,5]
Dá-se uma elipse de centro O e focos F, F' tendo por distância focal $2c$ e semi-eixos a e b. Um ponto M, variável, da curva projeta-se em H sobre o eixo menor e em I sobre o eixo maior. A tangente e a normal conduzidas por M encontram, respectivamente, o eixo menor em T' e N', e o eixo maior em T e N. Calcular em função de a, b, c e de $y = OH$, o volume do sólido gerado pela superfície do triângulo $MT'N'$ quando girar em torno do eixo menor de uma revolução completa.

IME 1966/1967 - Desenho

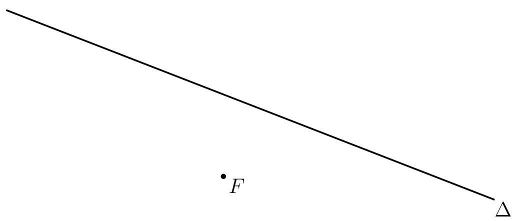
IME 1966/1967, Questão 1 [valor 2,0]: Uma pirâmide reta de base pentagonal regular assentada no plano objetivo é vista por um observador colocado a 6 metros de altura. A pirâmide tem 5 metros de altura. O raio do círculo circunscrito à base tem 3 metros. O centro S deste círculo é (8m; 4m). O lado da base mais próximo ao quadro é paralelo à linha de terra. O ponto de vista está afastado 10 metros do quadro. O ponto principal dista 10 metros da origem. Pede-se a perspectiva cônica na escala 1 : 100 do tronco de pirâmide resultante da interseção de um plano horizontal com a pirâmide a 3 metros de sua base.

IME 1966/1967, Questão 2 [valor 3,0]: A reta Δ e o ponto F são respectivamente uma tangente e o foco direito de uma elipse com 80 mm de distância focal e 0,8 de excentricidade. Pedem-se:

a) Determinar os vértices, o outro foco e o centro da elipse;

b) Traçar o suporte Δ_1 do diâmetro conjugado da direção Δ;

c) Traçar a circunferência do círculo equivalente à elipse e que a tangencie na extremidade superior da corda focal mínima relativa ao foco direito.



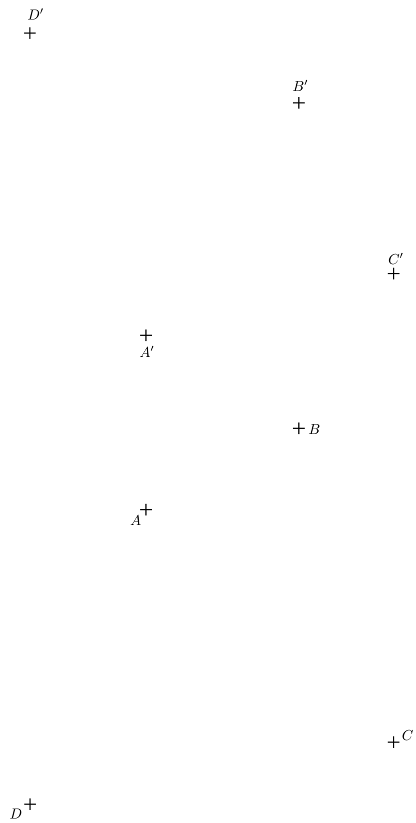
IME 1966/1967, Questão 2.

IME 1966/1967, Questão 3 [valor 2,0]: Um cubo $(A)(B)(C)(D)$–$(E)(F)(G)(H)$, do primeiro diedro, com a face $(A)(B)(C)(D)$ no P.H. tem a diagonal $(B)(D)$ de topo. Secciona-se o cubo pelos planos $(E)(B)(D)$, $(G)(B)(D)$, $(A)(F)(H)$ e $(C)(F)(H)$, retirando-se do corpo primitivo os sólidos que assim se vão obtendo. Pedem-se

a) As projeções do sólido resultante após todos os seccionamentos.

b) Desenhar as verdadeiras grandezas de cada tipo de face do sólido resultante.

IME 1966/1967, Questão 4 [valor 3,0]: Pelos pontos médios (M) e (N) das arestas opostas $(A)(B)$ e $(C)(D)$ de um tetraedro $(A)(B)(C)(D)$ faz-se passar um plano que encontra as arestas $(B)(D)$ e $(A)(C)$ em (P) e (Q) respectivamente. Determinar as projeções do quadrilátero $(M)(P)(N)(Q)$ de área mínima. Justifique a solução.



IME 1966/1967, Questão 4.

IME 1965/1966 - Álgebra

1ª Questão, Item 1
A soma de 3 números que formam uma progressão aritmética crescente é 36. Determine esses números, sabendo que se somarmos 6 unidades ao último, eles passam a constituir uma progressão geométrica.

1ª Questão, Item 2
Resolva a equação

$$10^{2x-1} - 11(10)^{x-1} + 1 = 0$$

1ª Questão, Item 3
Resolva a equação: $x^5 = 16(\sqrt{3} + i)$, apresentando o resultado sob forma polar.

1ª Questão, Item 4
Resolva a equação:

$$\left[x^{6\log_2 \sqrt[3]{2}}\right]^{-\log_x(1/x)} + \log_{10} 0{,}001 = \frac{\log_e y^{2x}}{\log_e y}$$

1ª Questão, Item 5
Determinar os valores de a que tornam o sistema abaixo incompatível:

$$\begin{cases} x + a(y+z) = 0 \\ y + a(x+z) = 0 \\ z + a(x+y) = 0 \end{cases}$$

1ª Questão, Item 6
Determine $P_1(x)$ e $P_2(x)$ na expressão abaixo, sabendo que $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ são binômios:

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

1ª Questão, Item 7
Determine o valor numérico do determinante abaixo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 7 & \log 70 & \log 700 & \log 7000 \\ (\log 7)^2 & (\log 70)^2 & (\log 700)^2 & (\log 7000)^2 \\ (\log 7)^3 & (\log 70)^3 & (\log 700)^3 & (\log 7000)^3 \end{vmatrix}$$

Obs: $\log A$ significa logaritmo decimal de A.

1ª Questão, Item 8
Determinada organização estabeleceu um sistema de código em que os símbolos são formados por um ou mais pontos, até o máximo de 6 pontos, dispostos de maneira a ocuparem os vértices e os pontos médios dos lados maiores de um retângulo. Qual o número total de símbolos obtidos?

1ª Questão, Item 9
Dada a equação $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$, determine, sem resolvê-la, a soma dos quadrados de suas raízes.

1ª Questão, Item 10
Dadas as equações:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$
$$A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1 = 0,$$

sabendo que duas raízes da primeira equação são também raízes da segunda e que $\frac{A_1}{A} = \frac{C_1}{C}$, determine as raízes comuns.

1ª Questão, Item 11
Calcule:

$$\lim_{x\to 0}(\cos mx)^{n/x^2}$$

1ª Questão, Item 12
Dada a função $\sqrt[3]{y^x} = \lim \sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x\ldots}}}}$, determine o valor numérico de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ no ponto $x = 1$.

1ª Questão, Item 13
Calcule a soma da série:

$$\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \ldots$$

1ª Questão, Item 14
Calcule a soma da série:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

1ª Questão, Item 15
Calcule:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}},$$

sabendo que $p + 1 > 0$.

1ª Questão, Item 16
Determine o valor numérico da área delimitada pelas curvas $x = 2y + 3$ e $x = y^2 - 3y + 1$.

2ª Questão, Item 1
A função abaixo é definida para $x > 1$. Sabendo que a é um número real, determine a condição para que a mesma não possua máximo nem mínimo.

$$y = \frac{x^2 - 3ax + 2a}{2ax^2 - 3ax + a}$$

2ª Questão, Item 2
Dada a equação $x^4 + 4x^3 - 4cx + 4d = 0$, sabendo que a mesma possui uma raiz dupla da forma $(a + b\sqrt{3})$ e que c e d são números racionais, determine a, b, c e d.

2ª Questão, Item 3
Determine os valores de x e de y, em função de n, na equação:

$$C_n^0.C_n^2 + C_n^1.C_n^3 + C_n^2.C_n^4 + \ldots + C_n^{n-2}.C_n^n = C_x^y$$

3ª Questão, Item 1
Qual o valor numérico da área do maior retângulo, de lados paralelos aos eixos cartesianos ortogonais, que se pode construir na região limitada pelas duas curvas:

$$\begin{cases} x^2 + 3y - 36 = 0 \\ x^2 - 6y - 36 = 0 \end{cases}$$

3ª Questão, Item 2
Determine a condição para que sejam tangentes as curvas definidas pelas equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ x^2 + y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0 \end{cases}$$

3ª Questão, Item 3
Num sistema de eixos cartesianos ortogonais o vértice A do triângulo ABC está na origem e o eixo dos X é o suporte do lado AB. O coeficiente angular do lado AC é 1. Sabendo que os pontos B, C e M, este último de coordenadas $(0, -4)$, estão em linha reta e que as distâncias BC e BM são iguais, determine a equação da circunferência circunscrita ao referido triângulo.

IME 1965/1966 - Geometria

sln: A pontuação da prova está aproximada.

1ª Questão, Item 1 [Valor 0,4]
Por um ponto distante 7 cm do centro de uma circunferência de 5 cm de raio traça-se uma secante de modo que sua parte externa é 2/3 da secante total. Calcular o comprimento da secante.

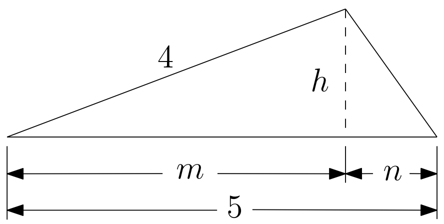
1ª Questão, Item 2 [Valor 0,4]
O volume de uma cunha esférica é igual ao volume do cubo inscrito na mesma esfera. Calcular o ângulo da cunha.

1ª Questão, Item 3 [Valor 0,4]
Num triângulo retângulo a mediana traçada do vértice reto vale que fração da hipotenusa?

1ª Questão, Item 4 [Valor 0,4]
Um cilindro é circunscrito a uma esfera de raio R. Um cone é circunscrito a esse cilindro de modo que sua altura seja $4R$. Calcular a relação entre a área lateral do cone e a área da esfera.

1ª Questão, Item 5 [Valor 0,4]
Inscreve-se um cilindro circular reto numa esfera. Calcular o raio da esfera sabendo que a altura do cilindro é 4m e que a relação entre o raio da base e o raio da esfera é $\sqrt{3}/2$.

1ª Questão, Item 6 [Valor 0,4]
Determinar h, m e n no triângulo abaixo:



1ª Questão, Item 7 [Valor 0,4]
Dar as raízes completas da equação: $x^5 = 32$, em termos de funções trigonométricas.

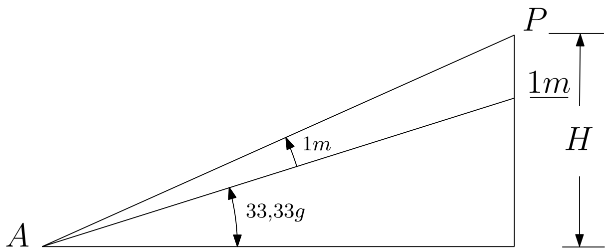
1ª Questão, Item 8 [Valor 0,4]
Calcular: $\operatorname{arc\,tg} 1/7 + 2 \operatorname{arc\,tg} 1/3$.

1ª Questão, Item 9 [Valor 0,4]
Dar módulo e direção da soma dos seguintes vetores:
$\overline{A}$ de módulo $\sqrt{3}$ na direção do eixo dos xx.
$\overline{B}$ de módulo 1 na direção do eixo dos yy.

1ª Questão, Item 10 [Valor 0,4]
Em um círculo de $10\sqrt{2}$ cm de diâmetro temos duas cordas de 2 cm e 10 cm. Achar a corda do arco soma dos arcos das cordas anteriores.

2ª Questão, Item 1 [Valor 1,0]
Calcular $\operatorname{sen} 11^\circ\, 27'\, 33''$ com erro inferior a um milionésimo.

2ª Questão, Item 2 [Valor 1,0]



Calcular:
a) A altura H do ponto P.
b) A distância horizontal de A a P.

Obs: 1m lê-se um milésimo; 33,33g lê-se 33,33 grados.

2ª Questão, Item 3 [Valor 1,0]
Pela diagonal de uma das faces de um cubo de aresta igual a 6m faz-se passar um plano que forme com esta face um diedro de $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{2}$. Calcular os volumes dos sólidos em que fica decomposto o cubo.

3ª Questão, Item 1 [Valor 1,0]
Determinar a bissetriz do ângulo maior de um triângulo cujo perímetro é 38 m e cujos lados são proporcionais a 4, 6 e 9.

3ª Questão, Item 2 [Valor 1,0]
Um cone de 27 cm de raio e 36 cm de altura tem o vértice no centro de uma esfera de 35 cm de raio. Calcular o volume da porção de espaço comum aos dois sólidos.

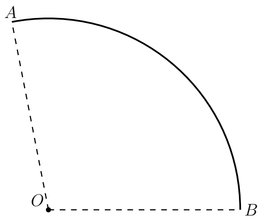
3ª Questão, Item 3 [Valor 1,0]
Quatro esferas de raio R são tangentes entre si e três delas estão apoiadas num plano horizontal. A altura do centro da esfera mais alta referida a este plano é 26,32 cm. Calcular o raio das esferas.

IME 1965/1966 - Desenho

IME 1965/1966, Questão 1, Item (a): Construir um triângulo retângulo sendo dados a hipotenusa = 9 cm e a soma dos catetos = 12 cm.

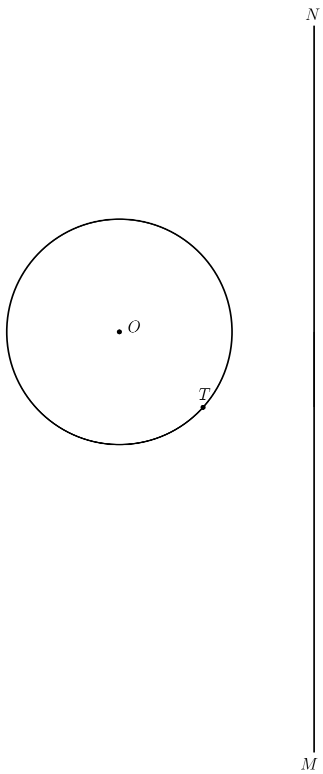
IME 1965/1966, Questão 1, Item (b): Traçar uma falsa espiral de 5 centros, dispostos estes segundo uma circunferência de 4 cm de diâmetro. A espiral deverá ser traçada até o prolongamento do primeiro raio.

IME 1965/1966, Questão 1, Item (c): Retificar a terça parte do arco AB dado.



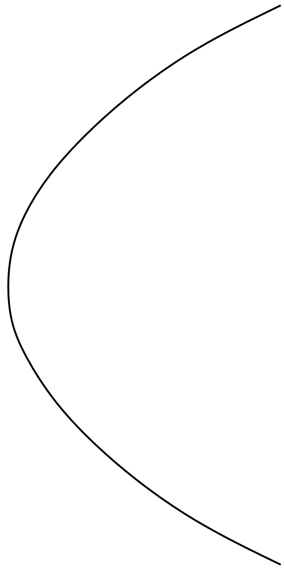
IME 1965/1966, Questão 1, Item (c).

IME 1965/1966, Questão 1, Item (d): Traçar as circunferências tangentes à reta MN dada e tangentes à circunferência O, num ponto T dado sobre esta.



IME 1965/1966, Questão 1, Item (d).

IME 1965/1966, Questão 1, Item (e): Restabelecer o eixo, o vértice, o foco e a diretriz da parábola dada.



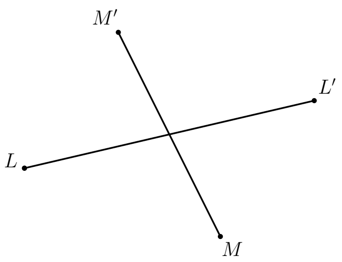
IME 1965/1966, Questão 1, Item (e).

IME 1965/1966, Questão 1, Item (f): Dado um triângulo equilátero ABC de 8 cm de lado, concordar os lados AB e AC com um arco de elipse. Tomar um dos focos da elipse sobre o lado BC.

IME 1965/1966, Questão 1, Item (g): Um observador colocado a 6 m de altura vê uma pirâmide reta de base hexagonal regular assentada no plano objetivo. A pirâmide tem 4 m de altura. O ponto de vista está afastado 9 m do quadro. O ponto principal dista 10 m da origem. Dois vértices consecutivos da base da pirâmide são A_1(7,5m; 1,0m) e B_1(10,5m; 1,5m). Pede-se a perspectiva cônica da pirâmide na escala 1 : 100.

IME 1965/1966, Questão 2, Item (a): Os vértices de um trapézio são os pontos de contatos das tangentes comuns exteriores a duas circunferências tangentes entre si, cujos centros estão afastados de 7 cm, sendo 9 cm o diâmetro de uma delas. Pedem-se:
a) Desenhar o trapézio.
b) Determinar o hexágono regular cuja área seja equivalente à do trapézio.

IME 1965/1966, Questão 2, Item (b): São dados dois diâmetros conjugados LL' e MM' de uma elipse que tangencia os 2 ramos de uma hipérbole, sendo L um dos pontos de tangência. Sabendo-se que o eixo maior da elipse é perpendicular ao eixo não transverso da hipérbole e que os raios vetores desta última fazem em L um ângulo de 50^o, traçar as duas curvas.



IME 1965/1966, Questão 2, Item (b).

IME 1965/1966, Questão 3, Item (a): Um pentágono regular estrelado inscrito num círculo de 1,5 m de raio, está contido num plano $P'\alpha P$, definido por seu traço horizontal, que forma um ângulo de -50^o com a linha de terra, e pelo ponto M de coordenadas (+3,5m; +1,0m; +2,0m), em relação a α. O ponto M é o centro do pentágono que tem dois vértices sucessivos numa linha de frente. Pedem-se as projeções do pentágono.

Observações:

(i) Adotar a escala 1/50;

(ii) A linha de terra deverá ser paralela à menor dimensão do papel e passando pelo meio da folha;

(iii) A ordem das coordenadas é: abscissa, afastamento e cota;

(iv) Na construção deverá ser observado o sentido trigonométrico;

(v) (α) deverá estar a 7 cm da borda esquerda do papel.

IME 1965/1966, Questão 3, Item (b): Um tetraedro regular tem dois vértices no 1^o bissetor e os outros dois no segundo bissetor. Sabendo-se que a altura do tetraedro é 7 cm e que as coordenadas do centro da esfera circunscrita são (+8,0cm; 0,0; ?), determinar as projeções do tetraedro.

Observação: São válidas as observações (ii) e (iii) do Item (a) desta questão.

IME 1964/1965 - Álgebra

1ª Questão, Item 1 [Valor 0,2]
Determine a relação que deve existir entre os números m, n, p e q, para que se verifique a seguinte igualdade entre os termos da mesma progressão aritmética:

$$a_m + a_n = a_p + a_q$$

1ª Questão, Item 2 [Valor 0,2]

Calcule: $\lim_{x\to 2} \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}$

1ª Questão, Item 3 [Valor 0,2]
Calcule o logaritmo de 625 na base $\left(5\sqrt[3]{5}\right)$.

1ª Questão, Item 4 [Valor 0,2]
Determine a raiz positiva da equação:

$$\log(2x^2 + 4x - 4) + \operatorname{colog}(x+1) = \log 4$$

Obs: $\log A$ é logaritmo decimal de A.

1ª Questão, Item 5 [Valor 0,2]
Dados 20 (vinte) pontos do espaço, dos quais não existem 4 (quatro) coplanares, quantos planos ficam definidos?

1ª Questão, Item 6 [Valor 0,2]
Determine a soma dos coeficientes númericos do desenvolvimento de $(x-y)^{11}$

1ª Questão, Item 7 [Valor 0,2]
Calcule o valor de:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

1ª Questão, Item 8 [Valor 0,2]
Determine o valor de a para que o sistema abaixo seja indeterminado.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + az = 0 \\ 3x + 7y + z = 0 \end{cases}$$

1ª Questão, Item 9 [Valor 0,2]
Escreva sob a forma cartesiana o resultado da expressão: $\dfrac{6e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}-i}$.
Obs: $i = \sqrt{-1}$; e é base dos logaritmos naturais.

1ª Questão, Item 10 [Valor 0,2]
Determine as soluções da equação: $x^4 + 16 = 0$.

1ª Questão, Item 11 [Valor 0,2]
Determine m de modo que o polinômio:

$$x^4 - 5x^2 + 4x + m$$

seja divisível por $2x + 1$.

1ª Questão, Item 12 [Valor 0,2]
Desenvolva em potência de $(x-2)$ o polinômio:

$$P(x) = 2x^3 - 14x^2 + 8x + 48$$

1ª Questão, Item 13 [Valor 0,2]
Dada a equação: $x^3 - 4x + 3 = 0$, determine a transformada cujas raízes sejam o triplo das raízes da equação primitiva e de sinais contrários.

1ª Questão, Item 14 [Valor 0,2]
Determine as raízes de:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$$

sabendo-se que: $D_1 = \text{m.d.c. } [f(x), f'(x)] = x^2 - x - 2$.

1ª Questão, Item 15 [Valor 0,2]
Forme a equação recíproca de 2ª (segunda) espécie (classe) e do 4º (quarto) grau que possui uma de suas raízes igual a -2 (menos dois).

1ª Questão, Item 16 [Valor 0,2]
Nos retângulos à direita escreva C ou D conforme a série seja convergente ou divergente:

$$1 + \tfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + \tfrac{1}{\sqrt[3]{3}} + \tfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \ldots$$
$$e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \ldots$$
$$\tfrac{1}{2}\log 2 + \tfrac{1}{3}\log 3 + \tfrac{1}{4}\log 4 + \ldots$$

1ª Questão, Item 17 [Valor 0,2]
Se:

$$y = e^{3t}$$
$$t = \operatorname{sen}^2 x + 3x$$
$$x = 5u,$$

Calcule o valor da derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}u$ no ponto $u = 0$.

1ª Questão, Item 18 [Valor 0,2]
Determine a equação da curva em que o coeficiente angular em cada ponto (x, y) é igual a: $4 - 2x$, e que passa pelo ponto $(2, 5)$.

1ª Questão, Item 19 [Valor 0,2]
Determine a equação cartesiana da elipse de focos $F(2, 0)$ e $F'(-2, 0)$, tal que o valor máximo da área do triângulo definido pelos raios vetores de um mesmo ponto da curva e o eixo dos XX seja igual a oito unidades de área.

1ª Questão, Item 20 [Valor 0,2]
As tangentes traçadas de um ponto $P(x, 0)$ às circunferências de centros $C_1(2, 2)$ e $C_2(7, 7)$ e raios respectivamente $R_1 = 2$ e $R_2 = \sqrt{6}$, são iguais. Determine x.

2ª Questão, Item 1 [Valor 0,6]

Sabendo-se que: $e = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}$; calcule $R = \dfrac{1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n!}}{e}$
Obs: $m!$ é fatorial de m.

2ª Questão, Item 2 [Valor 0,6]
Calcule:

$$T = \frac{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\pi}{x}\right)^x}{i^i}$$

2ª Questão, Item 3 [Valor 0,6]
Seja a função definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é um número racional} \geq 2 \\ 1/2, & \text{se } x \text{ é um número racional} < 2 \\ 0, & \text{se } x \text{ é um número irracional} \geq 3 \\ -4, & \text{se } x \text{ é um número irracional} < 3 \end{cases}$$

Calcule:

$$S=f\left[\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n\right]+f\left[\lim_{x\to 1}\frac{\pi(x-1)}{\ln x}\right]+f\left[\lim_{x\to 0}e^{\frac{2\,\mathrm{sen}\,x}{x}}\right]+4f(\log_2 1)$$

Obs: ln é logaritmo natural; $\log_a$ é logaritmo na base a.

2ª Questão, Item 4 [Valor 0,6]
Se o deslocamento de um móvel, em função do tempo, é dado por: $x=(t.2^t)^2-\sqrt[3]{\sec^2(t^2-1)}$; determine a sua velocidade no instante $t=1$. Use $\ln 2 = 0{,}7$.

2ª Questão, Item 5 [Valor 0,6]
Dada a função: $v(x)=Ax^2.\ln(\frac{1}{x})$; determine a constante A para que o valor máximo de $v(x)$ seja igual a 1 (um).

3ª Questão, Item 1 [Valor 0,6]
Sendo m um número real maior que 1 (um), calcular:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x.\ln x(\ln\ln x)^m}$$

3ª Questão, Item 2 [Valor 0,6]
Calcular em valor absoluto, como aplicação do Cálculo Integral, a soma das áreas das superfícies finitas limitadas pelos gráficos da curva: $x^2+2y=0$; e das assíntotas da hipérbole: $4x^2-y^2+16=0$.

3ª Questão, Item 3 [Valor 0,6]
Dada a função: $F(x)=1+2x+|x-1|$; pede-se calcular a integral definida de $F(x)$ entre os limites -1 (menos um) e 2 (dois).
Obs: $|N|$ é valor absoluto de N.

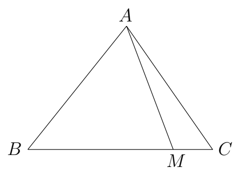
3ª Questão, Item 4 [Valor 0,6]
Determine o ponto C, de coordenadas irracionais, pertencente à curva: $y-2x+8=0$, que forma com os pontos: $\mathrm{A}(3\sqrt{2};2\sqrt{2})$ e $B(4\sqrt{2};3\sqrt{2})$ o triângulo ABC, cuja área é expressa pelo mesmo número que a distância da origem à reta AB.

3ª Questão, Item 5 [Valor 0,6]
Dada a equação: $3x^2+2xy+3y^2=4$; determine a equação resultante da eliminação do termo retângulo (termo em xy), mediante transformação de coordenadas conveniente.

IME 1964/1965 - Geometria

1ª Questão, Item 1 [Valor 0,8]

$\overline{AB} = \overline{AC} \neq \overline{BC}$. Expressar a diferença $\overline{AB}^2 - \overline{AM}^2$ em função dos segmentos aditivos da base.



1ª Questão, Item 2 [Valor 0,8]

Dividida a área de um círculo de raio R, em n partes equivalentes, por meio de circunferências concêntricas de raios $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_i, \ldots, r_{n-1}$, estabelecer o valor de r_i em função de R, n e i.

1ª Questão, Item 3 [Valor 0,8]

Um cone equilátero está inscrito em uma esfera de raio $R = 6$. Deseja-se cortar os dois sólidos por um plano paralelo à base do cone, de tal forma que a diferença entre as áreas das seções obtidas seja igual a 2π. Qual a menor distância do vértice do cone a que deve passar este plano?

1ª Questão, Item 4 [Valor 0,8]

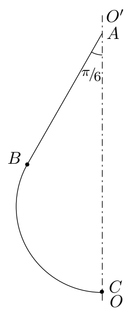
Sobre uma circunferência toma-se um ponto qualquer A. A partir desse ponto, traçam-se retas secantes, tendo como comprimento o dobro das respectivas cordas. Definir, provando, o lugar geométrico das extremidades das retas assim construídas.

1ª Questão, Item 5 [Valor 0,8]

Dado um trapézio de $b = 20$, $B = 30$ e lados $a = 12$, $c = 10$, dividir a área desse trapézio por uma reta paralela às bases, de modo que as áreas resultantes sejam proporcionais a 3 e 7, sendo B a base da área maior. Calcular a distância y da reta divisora à base menor b.

2ª Questão [Valor 3,0]

Na linha plana ABC da figura ao lado, o segmento de reta $\overline{AB}$ e o arco de circunferência BC concordam em B. Em função de $\overline{AC} = \ell$, determinar a área total do sólido gerado pela revolução da linha ABC em torno do eixo $\overline{OO'}$ e o volume, máximo, de um octaedro que tem vértices em A e C e os outros sobre a circunferência gerada pela revolução de B em torno do mesmo eixo.



3ª Questão [Valor 3,0]

Em um trapézio isósceles de área $A_1 = 5$ está inscrito um círculo de área $A_2 = \pi$. Um sólido de revolução é gerado pela rotação do trapézio em torno de um eixo perpendicular às suas bases, contido no plano da figura, e afastado do vértice mais próximo de uma distância igual ao comprimento da base maior. Calcular a área total e o volume deste sólido de revolução.

IME 1964/1965 - Trigonometria

1ª Questão, Item 1 [Valor 0,5]

Um observador situado a h metros acima do nível do mar vê a linha do horizonte segundo um ângulo α com a horizontal. Calcular o raio da Terra, em função de h e α.

1ª Questão, Item 2 [Valor 0,5]

Dados, num triângulo qualquer, um lado a, a diferença dos outros dois lados $(b-c)$ e a diferença de dois ângulos $(B - C)$, calcular $\cos A/2$.

1ª Questão, Item 3 [Valor 0,5]

Calcular x na equação:

$$\operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,sen} x\sqrt{3} = \pi/2$$

1ª Questão, Item 4 [Valor 0,5]

Determinar o arco negativo x, de menor valor abosluto, que resolve

$$\operatorname{sen} x - \cos x = (\operatorname{sen} 2x - \cos 2x) - 1$$

1ª Questão, Item 5 [Valor 0,5]

Dados

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 \\ \operatorname{tg}(x + y) = 4/3 \end{cases}$$

Calcular $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{tg} y$.

1ª Questão, Item 6 [Valor 0,5]

Determinar o menor arco positivo x que satisfaz:

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x - \cos \pi/3 = 1/8$$

1ª Questão, Item 7 [Valor 0,5]

Tornar a expressão $a + b/a - b$ (sendo $a \neq b$) calculável por logaritmos.

1ª Questão, Item 8 [Valor 0,5]

Calcular o menor valor de x positivo, em graus, que satisfaz a igualdade:

$$x = \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$$

2ª Questão, Item 1 [Valor 1,5]

Calcular o menor arco positivo x, diferente de zero, que satisfaz:

$$\operatorname{sen}^2 3x - \operatorname{sen}^2 2x = \operatorname{sen}^2 x$$

2ª Questão, Item 2 [Valor 1,5]

Em um triângulo qualquer ABC, calcular o valor da relação:

$$\frac{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}$$

3ª Questão, Item 1 [Valor 1,0]

Sendo $x > 45^\circ$, calcular os menores arcos positivos x e y que satisfazem:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x - \cos^2 y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \operatorname{sen}^2 y - \cos x = 0 \end{cases}$$

3ª Questão, Item 2 [Valor 2,0]

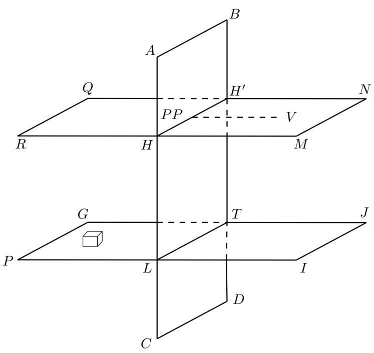
Conhecidas as alturas $h_a = 1/9$, $h_b = 1/7$, $h_c = 1/4$ de um triângulo ABC, calcular os lados a, b, c respectivamente opostos aos ângulos A, B, C.

IME 1964/1965 - Desenho

IME 1964/1965, Questão 1, Item 1 [valor 1,0]: Dada uma circunferência de 5 cm de raio, traçar 5 outras circunferências internas tangentes à ela e tangentes entre si, duas a duas.

IME 1964/1965, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]: Um jato d' água, sob pressão constante, descreve uma parábola no espaço. A interseção desta parábola com o plano horizontal se dá num ponto P, 8 cm à direita do seu eixo, que é vertical. Construir a parábola, sabendo que a tangente à curva, tirada no ponto P, faz um ângulo de 45º com o plano horizontal. (Determinar o vértice e mais 6 pontos da curva).

IME 1964/1965, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]: Dada a figura:



IME 1964/1965, Questão 1, Item 3.

Escreva nos espaços abaixo:

a) O nome dos planos:

$ABCD$ ____________________

$LTGP$ ____________________

$LTIJ$ ____________________

$MNQR$ ____________________

b) O nome das linhas:

LT ____________________

HH' ____________________

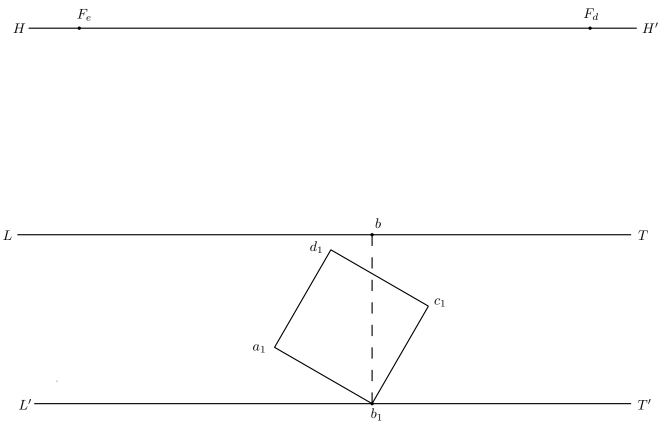
c) A linha que representa a "Visual Principal":

____

d) A definição de Ponto Principal:

____

IME 1964/1965, Questão 1, Item 4 [valor 1,0]: Na figura abaixo, sabe-se que b é a perspectiva de b_1. Determinar a perspectiva de um cubo cuja face sobre o plano objetivo é $a_1b_1c_1d_1$.



IME 1964/1965, Questão 1, Item 4.

IME 1964/1965, Questão 2 [valor 3,0]: Sobre um plano (α), tem-se um triângulo equilátero $(A)(E)(C)$ que representa uma das faces de um octaedro regular. Pedem-se:

a) Determinar as projeções do poliedro no 1º diedro.

b) O desenvolvimento de sua superfície total.

São dados:

(i) Centro da face dada: $(?; 3; 3)$;

(ii) O lado $(A)(E)$ é uma reta de maior declive do plano (α), (A) tem cota nula e (C) tem abscissa maior do que (A);

(iii) As coordenadas descritivas do plano (α) são: $T(29; 0; 0)$, $\alpha\pi' = +135^{\circ}$, $\alpha\pi = -150^{\circ}$;

(iv) A linha de terra deverá ser paralela à maior dimensão do papel e passando pelo meio da folha;

(v) A origem das abscissas será a borda esquerda do papel, sendo abscissa, afastamento e cota a ordem das coordenadas.

IME 1964/1965, Questão 3 [valor 3,0]: Determinar, justificando, as projeções de um triângulo $(A)(D)(E)$, de perímetro mínimo, resultante de uma seção feita na pirâmide regular triangular $(S)(A)(B)(C)$ de altura igual a 9 cm. São dados:

(i) O plano de base $(A)(B)(C)$ faz ângulos de 50º e 75º respectivamente com o P.H. e o P.V.;

(ii) O centro da base tem afastamento e cota menores do que os de (S) e abscissa maior do que a de (S);

(iii) O vértice (C) está no P.H. e sobre a perpendicular baixada do centro da base ao traço horizontal do plano de $(A)(B)(C)$ e o vértice (A) tem afastamento menor do que o de (B);

(iv) Vértice (S) da pirâmide: $S(20; 7; 8)$;

(v) A linha de terra deverá ser paralela à maior dimensão do papel e distante da borda superior de 11 cm;

(vi) A origem das abscissas será a borda esquerda do papel, sendo abscissa, afastamento e cota a ordem das coordenadas.

IME 1963/1964 - Álgebra

1ª Questão, Item 1
Quantas cores diferentes se podem formar, usando as sete cores do espectro fundamental?

1ª Questão, Item 2
Demonstre, usando a fórmula de binômio de Newton, que

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n$$

Obs: O símbolo C_i^n indica combinações de n elementos i a i.

1ª Questão, Item 3
Calcule o limite da função $y = \dfrac{x^m - a^m}{x - a}$, quando x tende para a.

1ª Questão, Item 4
Determine o $\log_2 0{,}125$, sabendo que $\log_{10} 2 = 0{,}30103$.

1ª Questão, Item 5
Decomponha a fração $\dfrac{B}{(x+a)(x+b)}$ numa soma de duas frações.

1ª Questão, Item 6
Demonstre que a multiplicação de um número complexo por i corresponde a uma rotação de $\pi/2$ na sua representação gráfica.

1ª Questão, Item 7
Derive a função $y = e^{x^x}$.

2ª Questão
Dada a curva cuja equação é $y = -2x^2 + 2x + 12$, determinar:

a) A equação da reta tangente a esta curva, que é paralela à corda comum aos círculos

$$x^2 - 4x + y^2 - 10y + 4 = 0$$
$$x^2 + 8x + y^2 - 16y + 76 = 0$$

b) A área da superfície limitada pela curva dada e a reta $2x - y + 4 = 0$ (em cm^2), usando o cálculo integral.

3ª Questão, Item 1
Dar os valores de x que satisfazem a inequação:

$$x^2 - 2 > -x^2 + 4x + 4$$

3ª Questão, Item 2
Um número complexo variável tem, para parte real, os valores $x^2 - 2$ e para parte imaginária os valores $x\sqrt{2}$. Qual o valor mínimo do módulo desse número?

4ª Questão
Determine o valor de x_3 que satisfaz o sistema de equações lineares:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1[(b+c+d)] + x_2[(a+c+d)] + x_3[(a+b+d)] + x_4[(a+b+c)] = 0$$
$$x_1[(bc+bd+cd)] + x_2[(ac+ad+cd)] + x_3[(ab+ad+bd)] + x_4[(ab+ac+bc)] = 0$$
$$x_1 bcd + x_2 acd + x_3 abd + x_4 abc = B$$

IME 1963/1964 - Geometria

1ª Questão, Item 1
Um cone circular reto, de raio da base igual a R e altura h, está circunscrito a uma esfera de raio r. Provar que $\dfrac{2}{rh} = \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{R^2}$

1ª Questão, Item 2
Um corda corta o diâmetro de um círculo segundo um ângulo de 45º. Demonstrar que a soma dos quadrados dos segmentos aditivos m e n, em que a corda fica dividida, é igual ao dobro do quadrado do raio do círculo.

1ª Questão, Item 3
Um tronco de cone de revolução, de bases paralelas, tem a geratriz igual à soma dos raios das suas bases. Sabendo-se que a sua área lateral é igual a 66,56 cm^2, e que a sua altura é de 4 cm, calcular o seu volume. Considerar $\pi = 3{,}14$.

2ª Questão, Item 1
Prolonga-se o raio AO de um círculo, de um comprimento $AB = AO$; traça-se uma tangente ao círculo, sobre a qual se levantam as perpendiculares AN e BC. Supondo que o ângulo $O\hat{A}C = 126^o$, qual o valor do ângulo $A\hat{C}B$?

2ª Questão, Item 2
Um cubo, de área total igual a 24 m^2, é cortado por um plano de modo a se obter uma seção hexagonal regular. Calcular o lado do quadrado inscrito no triângulo equilátero de perímetro igual ao do hexágono obtido. Considerar $\sqrt{2} = 1{,}41 \qquad \sqrt{3} = 1{,}73$

2ª Questão, Item 3
Provar que, em qualquer trapézio, a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados dos lados não paralelos mais o dobro do produto das bases.

IME 1963/1964 - Trigonometria

1ª Questão, Item 1
Simplifique a expressão:

$$\frac{-\operatorname{sen}(-a) + 3\cos(90^o + a) + 2\operatorname{sen}(180^o + a)}{\operatorname{sen}(90^o + a) + \cos(180^o - a) + \operatorname{sen}(90^o - a)}$$

1ª Questão, Item 2
Verifique a exatidão da expressão abaixo:

$$\operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg}^2 2a - \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 2a.\operatorname{tg}^2 a}$$

2ª Questão, Item 1
Os números que medem os três ângulos de um triângulo estão em progressão aritmética. Calcule esses ângulos, sabendo que a soma dos seus senos é

$$\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}}{4}$$

Sabe-se que

$$\cos 15^o = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

2ª Questão, Item 2
Resolva o sistema das equações:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}/3 \\ \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y = -2\sqrt{3}/3 \end{cases}$$

3ª Questão
Que valores devem ser dados a m, na equação abaixo, para que os valores de x sejam os dos ângulos agudos de um triângulo retângulo?

$$3\operatorname{tg} x + m^2 \operatorname{cotg} x = 4m$$

Quais são os ângulos?

IME 1959/1960 - Álgebra

1ª Questão, Item 1
Se $f(x) = \frac{ax+b}{x-a}$, achar a expressão mais simples de: $f[f(x)]$.

1ª Questão, Item 2
Conhecidos $\log 0{,}04 = \overline{2}{,}602$ e $\ln 10 = 2{,}303$, calcular, levando os cálculos até a 3ª casa decimal: $\ln x$, sendo $x = \sqrt[0{,}15]{0{,}00125}$.

1ª Questão, Item 3
Estudar a convergência da série: $\frac{(n+1)!}{(n+1)^n}$.

1ª Questão, Item 4
Discutir e resolver, com emprego de determinantes, o sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \\ x & + & y & + & 3z & = & -5 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 5 \end{array}$$

1ª Questão, Item 5
Dada a equação: $3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 135 = 0$, fazer a separação das raízes e dar a natureza das mesmas.

2ª Questão, Item 1
Calcular a soma da série cujo termo geral é $\frac{3}{2^{2n+2}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

2ª Questão, Item 2
Mostrar, sem fazer a derivação, que as funções:

$$G_1 = \ln(x + \sqrt{x^2 - 64})$$

$$G_2 = \ln(\sqrt{x+8} + \sqrt{x-8}) - \ln(\sqrt{x+8} - \sqrt{x-8})$$

têm a mesma derivada.

2ª Questão, Item 3
O polinômio $P(x)$, dividido por $(x-2)$, dá resto 10 e, por $(x+3)$ dá resto -5. Calcular o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-2)(x+3)$.

2ª Questão, Item 4
Determinar as equações dos círculos concêntricos no ponto $C_1(-2, 1)$ e tangentes ao círculo $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$.

2ª Questão, Item 5
Dada a função: $y = \sqrt{1+x} - \frac{1}{x}$, dar:
a) O campo de definição da função.
b) Os intervalos em que é crescente.
c) A concavidade da curva no intervalo $3 \leq x \leq 4$.

3ª Questão, Item 1
Dada a série de termos positivos: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, demonstrar que a mesma é convergente quando $\frac{\log u_n}{\log n} < -K$, sendo $K > 1$.

3ª Questão, Item 2
Quantos números naturais podem ser escritos, tendo, no máximo, quatro dos seguintes algarismos: 0, 1, 2, 3 e 4, sem os repetir?

3ª Questão, Item 3
Obter graficamente: $-4 + 2i + \frac{6-7i}{3+2i}$.

3ª Questão, Item 4
Calcular: $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$.

3ª Questão, Item 5
Calcular a derivada de: $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

IME 1959/1960 - Cálculo

1ª Questão
Calcular a área delimitada pelos círculos: $\rho = 1$; $\rho = \sqrt{3}$; $\rho = 2 \operatorname{sen} \theta$.

2ª Questão
Duas retas L_1 e L_2 são determinadas pelos pontos:

$$L_1 \begin{cases} P_1\ (0, 0, -4) \\ P_2\ (1, 0, -2) \end{cases} \qquad L_2 \begin{cases} P_3\ (0, -1, 2) \\ P_4\ (1, 1, 8) \end{cases}$$

Pedem-se:
a) O vetor unitário normal às duas retas.
b) A distância entre as retas.

3ª Questão
Sendo

$$\begin{cases} x = e^{2r} \operatorname{sen} \theta \\ y = e^r \cos \theta \end{cases}$$

Pedem-se:
a) Determinar em função de r, θ, $\mathrm{d}r$ e $\mathrm{d}\theta$ as diferenciais $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$.
b) Determinar em função de r, θ, $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ as diferenciais $\mathrm{d}r$ e $\mathrm{d}\theta$.
c) Dos resultados obtidos no item b deduzir as derivadas parciais $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$.

4ª Questão
Dadas as equações $z = 4 - x^2$ e $z = 3x^2 + y^2$, pedem-se:
a) Dizer que superfícies representam e esboçá-las no 1º octante.
b) Calcular o volume por elas delimitado.

5ª Questão
Obter a solução da equação diferencial.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y \operatorname{cotg} x = \operatorname{sen} 2x$$

em que, para $x = \pi/2$ se tenha $y = 0$ e achar os valores máximos e mínimos relativos de y.

IME 1959/1960 - Geometria

1ª Questão, Item 1
Determinar todos os valores de x e y que satisfaçam o sistema:

$$\begin{cases} 2\cos x . \cos y = 1 \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \end{cases}$$

1ª Questão, Item 2
Um cone reto tem por raio da base e por altura, respectivamente, o lado e a diagonal de um quadrado de lado a. Traçam-se a esse cone dois planos tangentes perpendiculares entre si. Pede-se determinar:

a) O ângulo das duas geratrizes de contato.

b) O ângulo dos dois planos tangentes pelo eixo do cone e cada uma das geratrizes.

2ª Questão, Item 1
Demonstrar a identidade:

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c - \operatorname{sen}(a+b+c) = 4 \operatorname{sen}\frac{a+b}{2} \operatorname{sen}\frac{b+c}{2} \operatorname{sen}\frac{a+c}{2}$$

2ª Questão, Item 2
Dá-se um círculo de centro O e raio 4 cm; com um centro O', tal que $\overline{OO'} = 5$ cm, traça-se outro círculo que corta ortogonalmente o primeiro em A e B.

a) Determinar graficamente os centros de semelhança (ou de homotetia) S e S'.

b) Traçar o eixo radical dos dois círculos, justificando.

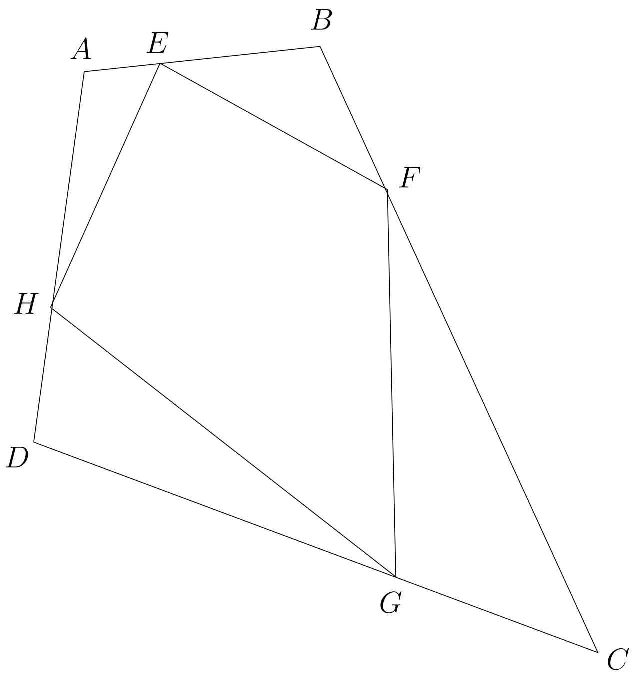
c) Prolongam-se os raios $O'A$ e OB que se encontram em P, e os raios $O'B$ e OA que se encontram em Q. Demonstrar que os pontos S, S', A, B, P, Q estão na mesma circunferência.

3ª Questão, Item 1
Num triedro, cujas faces são ângulos de 60°, inscrevem-se duas esferas de raios r e R ($r < R$) tangentes entre si. Pede-se determinar a relação $\frac{r}{R}$.

3ª Questão, Item 2
Dado o quadrilátero $ABCD$, marcam-se sobre os seus lados os pontos E, F, G e H de modo que se tenha:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{DH}{HA} = \frac{m}{n}$$

Ligam-se estes pontos conforme mostra a figura, formando um novo quadrilátero $EFGH$. Pede-se: Instituir, em função da área S do quadrilátero $ABCD$ e de m e n, a expressão da área do quadrilátero $EFGH$.



IME 1959/1960 - Desenho

1ª Questão

O cone circular reto dado, de vértice S e base no plano horizontal de projeção, e um cilindro de revolução, se interceptam de modo que a seção de contato pertença ao plano definido pela reta de máximo declive $\overline{AB}$. Determinar, em verdadeira grandeza, o diâmetro do cilindro e o ângulo que a seção de contato forma com o eixo do cilindro. Dados:

- Cone:

$$S\left\{\begin{array}{l}\text{abscissa } 8\\ \text{afastamento } 5\\ \text{cota } 7\end{array}\right. \qquad \text{Raio da base do cone : 3}$$

- Reta $\overline{AB}$:

$$A\left\{\begin{array}{l}\text{abscissa } 4\\ \text{afastamento } 4{,}5\\ \text{cota } 1\end{array}\right. \qquad B\left\{\begin{array}{l}\text{abscissa } 10\\ \text{afastamento } 1\\ \text{cota } 5{,}5\end{array}\right.$$

Coordenadas em centímetros.

Obs: 1 - Não é necessário traçar as projeções do cilindro nem da seção de contato. 2 - Traçar a linha de terra ao meio da página e tomar a origem cerca de 4 cm da margem esquerda.

2ª Questão

Dada a peça da figura 1, pedem-se:

a) Representá-la pelas vistas necessárias.

b) Arbitrar dimensões e cotar (cotas em milímetros).

Obs: Devem ser observadas as Normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas.

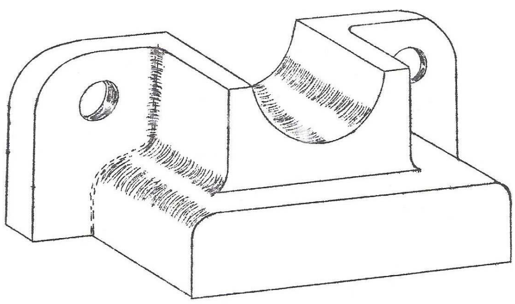


Figura 1

3ª Questão

Traçar a perspectiva Cavaleira da peça dada pela figura 2, na escala 1/1 (cotas em milímetros).

Obs: Não é necessário cotar o desenho.

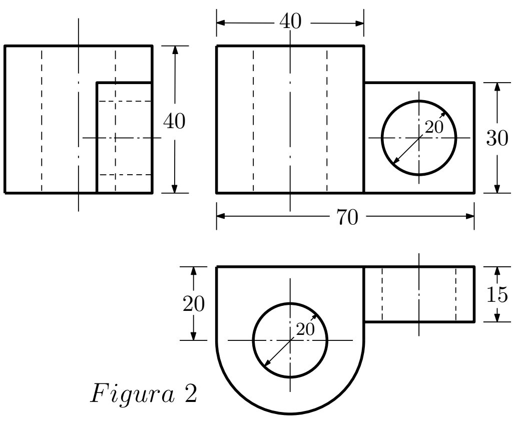


Figura 2

IME 1959/1960 - Descritiva

Obs:

- Deve ser feita uma descrição sucinta da solução dada.
- Utilizar apenas lápis preto.
- Seqüência dos dados: abscissa, afastamento, cota.
- Escala a adotar: 1 cm = 1 unidade.

1ª Questão

Dados os pontos A, B e C

$$A\left\{\begin{array}{l}0\\2\\1\end{array}\right. \quad B\left\{\begin{array}{l}4\\0\\3\end{array}\right. \quad C\left\{\begin{array}{l}7\\0\\6\end{array}\right.$$

Pedem-se:

a) Determinar a verdadeira grandeza:

- Do ângulo formado pela reta AB com o plano horizontal de projeção.
- Do ângulo formado pelas retas AB e BC.
- Da distância do ponto A à reta BC.

b) Mediante mudança de planos de projeção tornar "de topo" a reta AB.

2ª Questão

Um tetraedro regular de aresta 4 tem uma das daces assente num plano paralelo à linha de terra cujos traços horizontal e vertical distam respectivamente 5 e 3 da L.T., estando uma das arestas contida no traço horizontal do referido plano. Pedem-se:

a) Determinar as projeções do tetraedro. (Solução inteiramente contida no 1º diedro.)

b) Determinar os pontos em que o tetraedro é interceptado por uma reta de perfil paralela ao plano dado e que passa pelo ponto médio da altura relativa à face contida no mesmo plano.

3ª Questão

Dados:

- Um cone de revolução cuja base, de diâmetro 6, está assente no plano horizontal de projeção.

$$\text{VÉRTICE}\left\{\begin{array}{l}4\\4\\6\end{array}\right.$$

- Um cilindro de revolução de diâmetro 3, cujo eixo é uma reta fronto-horizontal de afastamento 4 e cota 2.

Pedem-se:

a) Determinar os traços de um plano tangente ao cone e que contenha o ponto M.

$$M\left\{\begin{array}{l}0\\1\\3\end{array}\right.$$

b) Determinar a curva de projeção vertical da interseção do cone com o cilindro. (É suficiente 1 só ramo da curva com determinação de no mínimo 5 pontos).

IME 1958/1959 - Álgebra

1ª Questão
Determinar o significado da expressão $e^{\lambda+2K\pi i}$ e achar as expressões trigonométrica e algébrica equivalentes, sabendo-se que λ é a ordenada do ponto em que a curva $y = f(x)$ corta o eixo dos y, sendo $f(x)$ um polinômio do terceiro grau que passa por um mínimo igual a 2 para $x = 1$ e cujo resto da divisão por $x^2 + 3x + 2$ é igual a $(-x + 3)$.

2ª Questão
Determinar a equação do círculo de centro $O(0, 1)$ e cujo raio é a média aritmética entre os extremos do menor intervalo possível no qual está compreendida a única raiz real positiva da equação: $x^4 + 16x^2 - 8x - 2 = 0$.

3ª Questão
Resolver:

$$\begin{aligned} 2\log x + 2\log y &= p \\ ax + by &= q \end{aligned}$$

sabendo-se que

(i) p é o valor positivo do parâmetro m para o qual as raízes da equação $x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$ formam uma progressão aritmética.

(ii) q é o dobro do coeficiente do 3º termo do desenvolvimento de $(1 + x)^n$ no qual os coeficientes do quinto, sexto e sétimo termos estão em progressão geométrica.

(iii) $a = 10^{-1}$; $b = 10^{-2}$.

IME 1958/1959 - Geometria

1ª Questão

Num triângulo retângulo conhecem-se a hipotenusa a e o produto m^2 das bissetrizes interiores dos ângulos B e C. Pedem-se:

a) O valor do produto $\operatorname{sen} B/2 . \operatorname{sen} C/2$.

b) Calcular os ângulos do triângulo e discutir o valor de m.

c) Demonstrar que, se O é o ponto de encontro das bissetrizes, $BO.CO = m^2/2$.

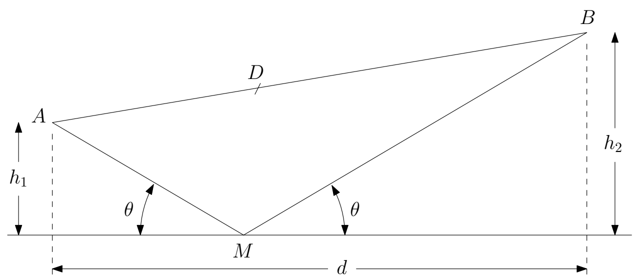
2ª Questão

Um transmissor e um receptor de rádio estão situados a alturas h_1 e h_2, respectivamente, do solo e distantes entre si de d. A onda direta propaga-se segundo AB e a onda refletida segundo AMB, formando em M ângulos θ iguais com o plano do solo. Pedem-se:

a) Expressar a diferença de percursos $AMB - AB$, entre a onda refletida e a direta, em função de d, h_1, h_2.

b) Dados $\theta = 30^o$, $h_1 = 3{,}0$ m e $h_2 = 5{,}0$ m, determinar o comprimento MD. O ponto D divide a reta AB na razão $\overline{AD}/\overline{DB} = 2/3$.

Obs: Os valores do item (b) não se aplicam ao item (a).



3ª Questão

Um cubo é dado pelo comprimento a de uma aresta; sejam O e O' os centros de duas faces opostas $ABCD$ e $A'B'C'D'$; sobre OO' e no sentido OO', tomado como positivo, toma-se um ponto S a uma distância x de O. O cubo e a pirâmide de vértice S e base $ABCD$ têm uma porção comum constituída por um tronco de pirâmide cujo volume é V. Pedem-se:

a) Estabelecer a expressão do volume V em função de x e a, quando S é tomado no exterior do cubo ($x > a$).

b) Mostrar que a fórmula estabelecida no item (a) é válida para $a/2 < x < a$ e representa o volume do sólido comum ao cubo e à dupla pirâmide definida pela base $ABCD$ e o vértice S.

c) Estabelecer a expressão do volume V do sólido comum ao cubo e às pirâmides quando $0 < x < a/2$.

d) Supondo o volume V expresso por uma fração a^3/n, discutir os valores de n para as fórmulas estabelecidas.

IME 1957/1958 - Álgebra

1ª Questão, Item 1
Derivar a função: $y = \log_x[(ex)^x]$.

1ª Questão, Item 2
Sendo $a > 1$ e $b > 1$, estabelecer a relação entre a e b na equação:

$$a^{\log b}.a^{\log b^2}.a^{\log b^3}.a^{\log b^4}\ldots.a^{\log b^x} = b^{6x\log a - 0{,}5.\log b}$$

para que, sendo x_1 e x_2 raízes da equação, se verifique a igualdade

$$\log x_1 = 1 - \log x_2$$

Obs: log = logaritmo decimal.

1ª Questão, Item 3
Sendo p uma raiz complexa de uma equação algébrica do 2º grau, de coeficientes reais, determinar o valor da expressão:

$$P = \frac{p+q}{pq}.\frac{p^2+q^2}{p^2q^2}.\frac{p^3+q^3}{p^3q^3}.\frac{p^4+q^4}{p^4q^4}\ldots.\frac{p^n+q^n}{p^nq^n}$$

onde q é a outra raiz da equação, em função do módulo e do argumento do complexo p.

2ª Questão, Item 1
Determinar os valores de m que satisfaçam a equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & e & m \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & e^2 & m^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & e^3 & m^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & e^4 & m^4 \\ a^5 & b^5 & c^5 & d^5 & e^5 & m^5 \end{vmatrix}$$

sabendo que a, b, c, d, e são os coeficientes, diferentes de zero, da equação cujas raízes são os quadrados das raízes da equação:

$$x^5 + x^4 + 2x^3 - 1 = 0$$

2ª Questão, Item 2
Resolver o sistema:

$$\begin{cases} e^{-L(1/x)} + \text{anti.}\,L\left(\frac{\log x^2}{\log e}\right) + \log 10^{-6} = 0 \\ e^{xy} - e^{-xy} = \sqrt{12} \end{cases}$$

Obs: L = logaritmo neperiano; log = logaritmo decimal.

3ª Questão, Item 1
Determinar a expressão da soma de todos os números de n algarismos, formados com os n primeiros algarismos significativos.

3ª Questão, Item 2
Sabendo que x_1 e x_2 são as raízes de uma equação do 2º grau ($x_1 > x_2 > 0$), determinar, em função dos coeficientes da equação, a soma da série regular:

$$\sum \left[\frac{x_2}{x_1}\right]^{n-1}$$

Calcular o valor numérico da expressão determinada acima, sabendo que x_1 e x_2 são raízes da equação

$$10Sx - 7S + 8 = 0$$

onde S é a soma da série regular $\sum nx^{n-1}$ para $|x| < 1$.

4ª Questão, Item 1
Uma reta se desloca de modo que a soma dos inversos dos segmentos que ela determina sobre dois eixos coordenados é constante e igual a $1/k$. Demonstrar que esta reta passa por um ponto fixo e dizer onde está situado este ponto.

4ª Questão, Item 2
Sendo $x = -\log_{0{,}25}\sqrt[3]{128}$ e $\log_2 y = \frac{3}{2} + \log_4(y + \frac{9}{8})$ e $y > 0$. Determinar dois complexos, sabendo-se que:
(i) Sua soma é $x + yi$.
(ii) A relação entre eles é um imaginário puro.
(iii) A parte real de um deles é $\frac{7+\sqrt{1201}}{12}$.

IME 1957/1958 - Geometria

1ª Questão, Item 1
Dado um círculo de raio R e um ponto A no seu interior, traça-se por esse ponto uma corda, de modo que o ponto A divida essa corda em média e extrema razão. Estabelecer a expressão da distância dessa corda ao centro do círculo. Discutir a solução.

1ª Questão, Item 2
Determinar as relações que devem existir entre os ângulos M, N e P, para que se verifique a igualdade:

$$\cos^2 M + \cos^2 N + \cos^2 P + 2\cos M \cos N \cos P = 1$$

1ª Questão, Item 3
Estabelecer a fórmula da área de um quadrilátero convexo qualquer, em função dos lados e do produto das diagonais.

2ª Questão
A figura abaixo foi construída da seguinte maneira:

(i) Com raio R foram traçadas as circunferências O_2 e O_3, tangentes em O.

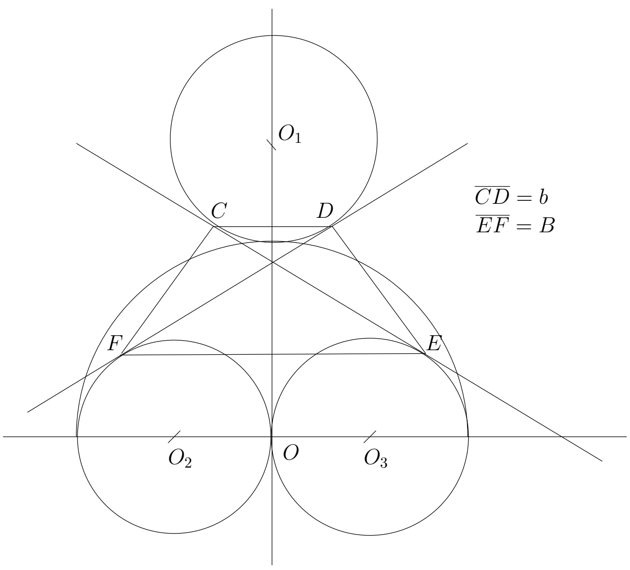
(ii) Por O traçou-se a perpendicular a $\overline{O_2O_3}$.

(iii) Com centro em O e raio $2R$, traçou-se uma semicircunferência.

(iv) Com centro na perpendicular traçada a $\overline{O_2O_3}$ e raio R traçou-se a circunferência O_1, tangente à circunferência de raio $2R$.

(v) Traçando-se as tangentes interiores às circunferências O_1, O_2, O_3, foram determinados os pontos de tangência C, D, E, F.

Pede-se determinar a área do trapézio isósceles $CDEF$, em função de R.



3ª Questão
Quatro esferas de raio r, tangentes entre si duas a duas, repousam sobre um plano horizontal. Um recipiente com a forma de cone reto, contendo no seu interior uma quinta esfera de raio R, é colocado sobre o mesmo plano, de tal forma que a superfície interna do recipiente fique tangente às cinco esferas, e a esfera de raio R tangente às quatro esferas de raio r.

a) Determinar os valores limites de R, para $r = 1$, entre os quais o recipiente conserva a forma cônica.
b) Determinar o raio da base do cone em função de r, para $R = 2r$.

IME 1956/1957 - Álgebra

1ª Questão, Item 1
Dá-se a função

$$f(x) = \ln \frac{x(5-x)}{+\sqrt{x^2-5x+6}}$$

(O símbolo ln representa logaritmo neperiano). Pedem-se:
a) Determinar os valores de x para os quais $f(x)$ é definida (campo de definição da função).
b) Dizer, justificando, se $f(x)$ é derivável no ponto $x = 6$ e se a função referida admite, para algum valor finito de x, derivada infinita.

1ª Questão, Item 2
Determinar o lugar geométrico representado pela equação

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sem desenvolver os determinantes.

2ª Questão
Sabe-se que m e p são respectivamente as bases de dois sistemas de logaritmos, onde cada sistema é representado por duas progressões - uma geométrica e outra aritmética - correspondentes termo a termo. Esses sistemas estão caracterizados abaixo, onde se apresentam alguns termos correspondentes das progressões:

Base m

0	0,5	1	3	7	10	75	∞
$-\infty$	$-0{,}43068$	0	0,68547	1,20908	1,43068	2,68547	∞

Base p

0	0,7	1	3	6	7	∞
$-\infty$	$-0{,}15490$	0	0,47712	0,77815	0,84510	∞

Pedem-se:
1º Calcular:
a) As bases m e p dos sistemas de logaritmos dados, justificadamente.
b) O valor numérico da expressão $\log \sqrt[3]{\frac{125}{2}}$.
2º Supondo conhecido apenas o sistema de base p:
a) Resolver a equação $\log_5 2^{-x} + 5^{\log_5 0{,}43068x^2} = 0$.
3º Dada a equação $x^3 - 10x + \log_m K = 0$:
a) Determinar os valores de K para os quais a equação admite uma das raízes igual à soma dos inversos das outras duas.
b) Discutir os sinais das raízes para esses valores de K.

3ª Questão, Item 1
Determinar o intervalo de convergência da série

$$x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 - \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^9 - \ldots$$

justificando. Dizer quantos termos desta série devemos considerar quando desejamos calcular o valor de sua soma para $x = -0{,}5$ com um erro cujo valor absoluto é menor que $1/300$. Justificar.

3ª Questão, Item 2
Três complexos a, b e c possuem como pontos representativos (ou afixos) os vértices de um triângulo equilátero. Demonstrar, calculando o seu valor, que a expressão $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ é independente da posição do triângulo no plano. Calcular este valor.

IME 1956/1957 - Cálculo

1ª Questão
Resolver a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4} - 2\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + 2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = e^x + e^{2x}$$

2ª Questão
O volume do sólido limitado por duas superfícies é dado por

$$V = 4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{x^2+2y^2}^{4-x^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Pedem-se:
a) Escrever as equações das superfícies, bem como a do cilindro projetante da curva de interseção dessas superfícies sobre o plano xy. Caracterizar as superfícies e esboçá-las no primeiro octante.
b) Calcular V.

3ª Questão
$\overline{P}$ é o vetor de posição de um ponto $P(x;y)$ da curva $y = 2x^2 - x$. $\overline{P_1}$ é o vetor $\overline{P_1} = xf(y)\overline{i} + \frac{x^2}{2}f(y)\overline{j}$. $\overline{i}$ e $\overline{j}$ são respectivamente os unitários dos eixos dos x e dos y. $\mathrm{d}\overline{R} = \mathrm{d}x\,\overline{i} + \mathrm{d}y\overline{j}$ é a diferencial do vetor de posição.
Pedem-se:
a) Determinar a função $f(y)$ para que $\overline{P_1}$ seja o gradiente de alguma função escalar $F(x;y)$.
b) Calcular, para esse valor de $\overline{P_1}$, a integral $\int_c \overline{P_1}\,\mathrm{d}\overline{P}$ ao longo da curva $y = \operatorname{sen} x$, no intervalo $0 \leq x \leq 4\pi$.
c) Sendo $\overline{V} = \lim_{x\to 0}(\frac{\overline{P}}{x})$, determinar em que ponto a derivada $\frac{\partial \overline{P_1}}{\partial y}$ é igual ao vetor $\overline{V}$, tendo $\overline{P_1}$ o valor calculado em (a).

4ª Questão
Dão-se as curvas C e C_1. C é uma curva reversa traçada sobre uma superfíciede um cilindro circular reto; as equações paramétricas de C são da forma

$$x = f_1(\theta); \quad y = f_2(\theta); \quad z = f_3(\theta)$$

O vetor tangente unitário de C, t, está ligado aos unitários $\overline{i}$, $\overline{j}$ e $\overline{k}$, respectivamente dos eixos dos x, y e z, pelas relações

$$\overline{t}.\overline{k} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{(produto escalar)}$$

$$\overline{t} \times \overline{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta.\overline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta.\overline{j} \quad \text{(produto vetorial)}$$

C_1 é uma hélice de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = a\cos u \\ y = a \operatorname{sen} u \\ z = bu \end{cases}$$

Sabe-se que o comprimento de arco contado sobre C_1, quando o parâmetro u varia de 0 a 2π, é igual a 4π. C e C_1 têm um ponto comum.
a) Determinar o vetor tangente unitário $\overline{t}$, de C.
b) Determinar o vetor tangente unitário $\overline{t_1}$, de C_1.
c) Comparando $\overline{t_1}$ com $\overline{t}$, determinar a e b de modo que C_1 coincida com C em todos os seus pontos.

IME 1956/1957 - Geometria

1ª Questão
Um poliedro convexo apresenta faces triangulares, quadrangulares e pentagonais. O número de faces triangulares excede o número de faces pentagonais de duas unidades. Pergunta-se o número de faces de cada espécie, sabendo-se que o poliedro tem sete vértices.

2ª Questão
As bases de um trapézio isósceles são $AB = a$ e $CD = 3a$ e a altura mede a. A partir dos pontos E e F, médios dos lados não paralelos, levantam-se, no mesmo sentido, as perpendiculares ao plano da figura: $EM = 3a$ e $FN = 4a$. Por meio de segmentos retilíneos, unem-se os seguintes pontos: M a N; cada um destes aos pontos P e Q, médios das bases do trapézio; P a Q. Pede-se calcular, em função de a, o volume do tetraedro $MNPQ$.

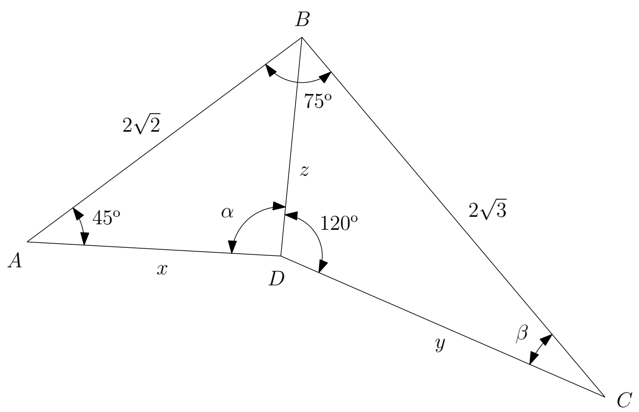
3ª Questão
Um setor circular de 30º e raio R gira em torno de um de seus raios limites, gerando assim um setor esférico, no qual se inscreve uma esfera. Pede-se determinar, em função do raio do setor, o raio de outra esfera, tangente à superfície interna da calota, à superfície cônica do setor, e à esfera nele inscrita.

4ª Questão, Item 1
Resolver o sistema

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a$$

$$\cos x . \cos y = b$$

4ª Questão, Item 2
Dado o quadrilátero $ABCD$ abaixo, determinar os ângulos α e β, os lados x e y, e a diagonal z.

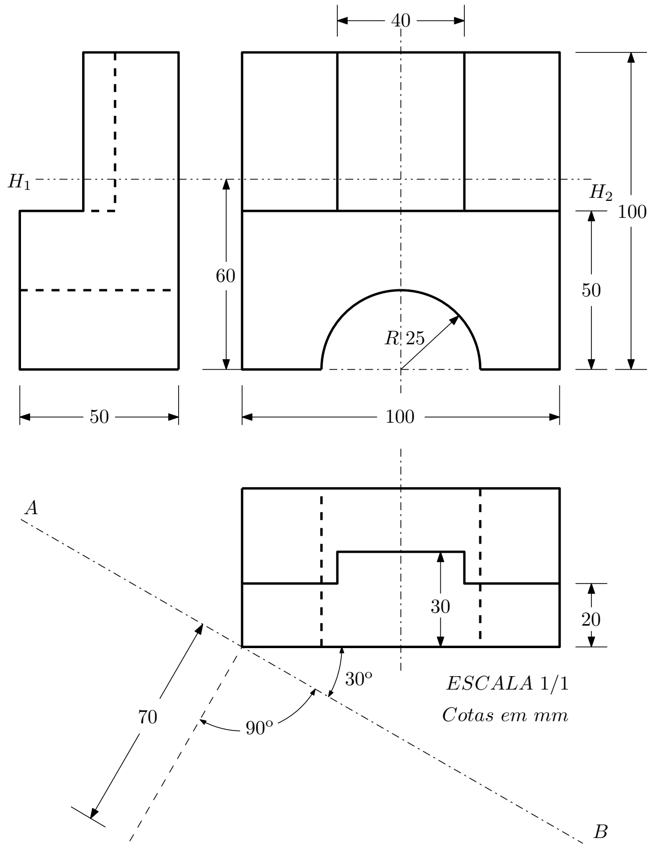


IME 1956/1957 - Desenho

1ª Questão, Item 1

Desenhar a perspectiva exata da peça dada na figura anexa, sendo:

- $\overline{AB}$ o traço horizontal do quadro.
- v a projeção horizontal do ponto de vista.
- $\overline{H_1H_2}$ a linha do horizonte.



2ª Questão, Item 1

Num tetraedro $ABCS$, conhece-se a base ABC e sabe-se que as arestas laterais valem: $\overline{AS} = \overline{AB}$; $\overline{BS} = \overline{BC}$; $\overline{CS} = \overline{AC}$. Sendo dadas as coordenadas dos vértices A, B e C e sabendo-se que o vértice S é um ponto do primeiro diedro, pedem-se:

a) Determinar os traços do plano definido pelos A, B e C e os ângulos que o mesmo faz com os planos de projeção, bem como as projeções do tetraedro.

b) Determinar as projeções da interseção do tetraedro com um plano vertical, paralelo à aresta $\overline{BC}$ e passando pelo centro da esfera circunscrita ao tetraedro.

Dados:

$$A \begin{cases} x = 8{,}5 \text{ cm (abscissa)} \\ y = 6{,}0 \text{ cm (afastamento)} \\ z = 1{,}0 \text{ cm (cota)} \end{cases} ;$$

$$B \begin{cases} x = 10{,}0 \text{ cm} \\ y = 1{,}0 \text{ cm} \\ z = 6{,}0 \text{ cm} \end{cases} ; \quad C \begin{cases} x = 16{,}5 \text{ cm} \\ y = 4{,}0 \text{ cm} \\ z = 3{,}0 \text{ cm} \end{cases} .$$

Obs: I - Descrever sumariamente as construções feitas; II - A linha de terra deve ser traçada aproximadamente a 15 cm da borda inferior da folha colocada na posição vertical e a origem das abscissas deve ser tomada cerca de 1 cm da extremidade esquerda da mesma folha.

IME 1955/1956 - Álgebra

1ª Questão, Item 1
Determinar os valores inteiros de x, y e z que verificam o sistema:

$$\log_2 y + \log_x z = 8$$
$$y = x^2$$
$$x = \frac{\sqrt[3]{z}}{2}$$

1ª Questão, Item 2
Determinar y em função de x, de tal modo que se tenha a igualdade:

$$C_y^x = C_y^{x-1}$$

1ª Questão, Item 3
Achar a soma da série:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \ldots$$

2ª Questão
Dadas as equações

$$(i) \quad x^4 - 16x^3 + 89x^2 - 206x + 168 = 0$$
$$(ii) \quad x^4 - 16x^3 + 91x^2 - 216x + 180 = 0$$
$$(iii) \quad x^4 - mx^3 + nx^2 - 462x + 432 = 0$$

Determinar:
a) As raízes comuns das equações (i) e (ii).
b) Os valores de m e n da equação (iii), sabendo que ela admite as raízes determinadas no item (a).

3ª Questão
Na expressão

$$(x + k)^n - x^n - k^n = 0$$

k é um número real diferente de zero e

$$x = ke^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Que valores pode ter o expoente n para que ela seja satisfeita?

IME 1955/1956 - Geometria

1ª Questão

Os vértices de um cubo de lado L são centros de esferas de raio $1/2$. No espaço interno delimitado pelas superfícies de todas as esferas, inscrevem-se dois poliedros regulares convexos P_1 e P_2. O primeiro, P_1, é tal que suas faces são tangentes às esferas e o segundo, P_2, é tal que todos os seus vértices estão, cada um em uma superfície esférica. Determinar a relação entre os volumes dos dois poliedros.

2ª Questão

Sabendo-se que nos triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura dada, o lado $\overline{AC}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{A}'$ e o lado $\overline{B'C'}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{B}$, pedem-se:

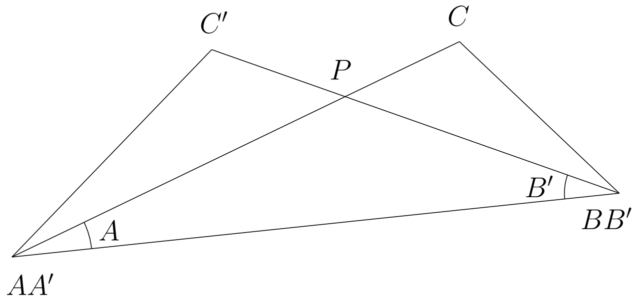
a) Determinar o valor de $\hat{A}' + \hat{B}$ tendo em vista que

$$\operatorname{tg}(\hat{A}+\hat{B}') + \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}+(\hat{A}+\hat{B}')\right] + \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-2(\hat{A}+\hat{B}')\right] = 0$$

b) Mostrar que $\operatorname{sen}\hat{A}.\operatorname{sen}\hat{B}' = \frac{\overline{AC}\times\overline{B'C'}}{4\overline{AB}^2}$.

c) Mostrar que $\cos\hat{A}.\cos\hat{B}' = \frac{2m.n}{\overline{AC}\times\overline{B'C'}}$, sendo m e n as projeções de $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ sobre $\overline{AB}$.

d) Mostrar que em um triângulo retângulo a área é igual ao produto dos segmentos determinados pelo círculo inscrito sobre a hipotenusa.



3ª Questão

Considere a função de x: $y_m(x) = \cos(m \arccos x)$, onde $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Esta função corresponde, para cada valor de m, a um polinômio em x de grau m, de coeficientes inteiros. Isso posto:

a) Determine as raízes da equação: $y_m(x) = 0$.

b) Determine os polinômios em x correspondentes a: $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$. Verifique as raízes de $y_m(x) = 0$ para esses mesmos valores de m, confrontando-as com os resultados obtidos no item (a).

c) Determine a expressão do coeficiente do termo x^n no polinômio correspondente a $m = n$.

IME 1954/1955 - Álgebra

1ª Questão, Item 1
Resolver a equação exponencial

$$5^{x-1} - 5^{-x-1} = \frac{3}{4}$$

sabendo que $\log 20 = 1{,}3010$.

1ª Questão, Item 2
Resolver a equação

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & -5 \\ -1 & x & 0 & 6 \\ 0 & -1 & x & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

2ª Questão, Item 1
Resolver a equação trinômia

$$z^4 + 2z^2 + 4 = 0$$

Dar as raízes complexas na forma $A + Bi$, onde A e B são números reais.

2ª Questão, Item 2
Com os algarismos significativos quantos números constituídos de 3 algarismos ímpares e 3 pares, sem repetição, podem ser formados? Explanar o raciocínio no desenvolvimento da questão.

3ª Questão
Determinar, justificando, a natureza das séries

$$(i)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\pi n}; \quad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n}{n^2}$$

e a soma da primeira delas, no caso de convergência.

4ª Questão
Uma circunferência de círculo passa pelo foco da parábola $x^2 = -8y$, é tangente ao semi-eixo negativo dos x e tem o centro sobre a reta $x - y - 4 = 0$. Pedem-se:

a) Achar a equação da circunferência.

b) Achar as equações das tangentes à circunferência tiradas pela origem.

IME 1954/1955 - Cálculo

1ª Questão
Achar a equação da hipérbole equilátera que passa pelos pontos $A(0,3)$ e $B(3,3)$ e é tangente ao eixo dos x na origem.

2ª Questão
O plano $2x + 2y + z = 6$ é tangente ao parabolóide de vértice no ponto $(0,0,2)$ cujo traço no plano xy é um círculo de raio igual a duas unidades. Pedem-se:
a) Achar a equação do parabolóide e esboçá-lo.
b) Achar as coordenadas do ponto de tangência do plano com o parabolóide.

3ª Questão
Verificar se a expressão

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + yLy\,\mathrm{d}y + x\cos(xy)[x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x] + \operatorname{sen}(xy)\,\mathrm{d}x$$

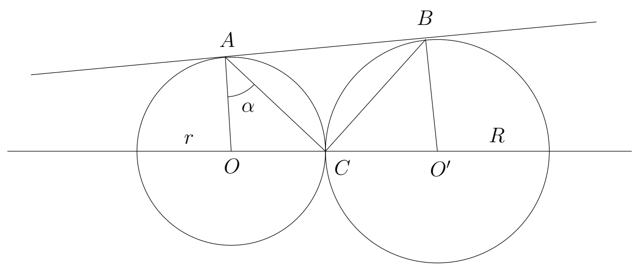
é uma diferencial exata e integrá-la em caso afirmativo. (O símbolo L indica logaritmo neperiano).

4ª Questão
Dados o parabolóide definido pela equação $x^2+y^2 = 2z$ e a superfície cilíndrica $y^2 = 4-2z$. Calcular o volume delimitado por estas duas superfícies.

IME 1954/1955 - Geometria

1ª Questão
Em uma circunferência de diâmetro $AB = 2R$ traça-se uma corda AC que forma com AB um ângulo α. Determinar o valor de α de modo que, fazendo-se girar a figura em torno de AB, a área gerada pela corda AC seja equivalente a 3/2 da área gerada pelo arco BC.

2ª Questão
Duas circunferências de raios R e r, respectivamente, são tangentes em C; traça-se uma tangente externa AB comum às duas circunferências, cujos pontos de contato são A e B. Sabendo-se que $R = 14$ m, que o ângulo formado pela corda AC com o raio AO é $\alpha = 23^{o}\,35'$ e que $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}400$, determinar:
a) Os ângulos internos e os lados do triângulo ABC.
b) O raio r da circunferência menor.



3ª Questão
Os vértices de um octaedro regular são os centros das faces de um cubo de aresta a. Calcular, em função de a, a área, o volume do octaedro e o raio da esfera nele inscrita.

4ª Questão
Um círculo máximo de uma esfera de raio R serve de base a um cone de revolução de altura H. A interseção das superfícies dos dois sólidos determina no cone uma seção paralela à base. Determinar H, em função de R, de modo que a razão do volume do cone destacado por essa seção para o volume do tronco de cone resultante seja igual a 64/61.

IME 1954/1955 - Desenho

1ª Questão
Uma pirâmide pentagonal regular de vértice S e base $ABCDE$ tem a aresta AB horizontal e a sua base situada no plano $P\alpha P'$, sendo A e B os vértices de menores cotas da pirâmide. Pedem-se

a) Traçar as projeções da pirâmide.

b) Traçar e hachurar a base menor do tronco da pirâmide que tem 30 mm de aresta lateral.

Dados:

- Do plano $P\alpha P'$:

  - Coordenadas do ponto α (interseção do plano com a linha de terra xy)

$$\alpha \begin{cases} x = 20 \text{ mm} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

  - Ângulos dos traços do plano com a linha de terra:

$$P'\widehat{\alpha}y = 30^{\circ}; \quad y\widehat{\alpha}P = 45^{\circ}$$

- Da pirâmide:

  - Círculo circunscrito à base:
    Coordenadas do centro $O \begin{cases} x = 120 \text{ mm} \\ y = 40 \text{ mm} \\ z = ? \end{cases}$
    Raio 30 mm
  - Altura da pirâmide: 60 mm

Obs:

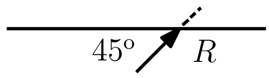
- Usar o papel na vertical.

- Traçar a linha de terra aproximadamente distante 150 mm do limite superior da folha.

- Colocar a origem a cerca de 20 mm do limite esquerdo do papel.

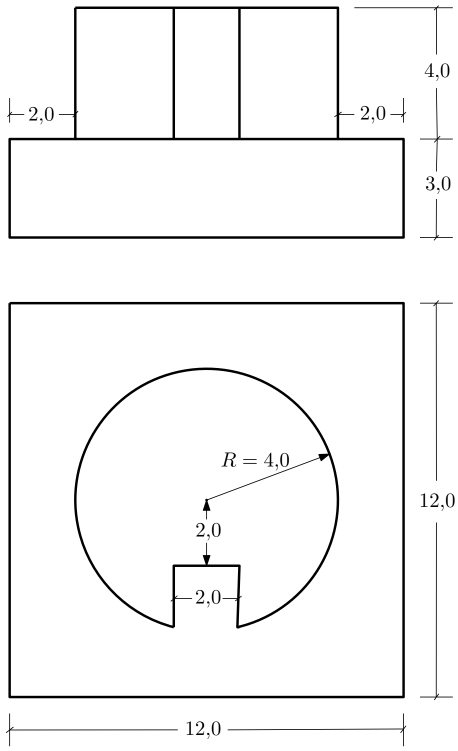
2ª Questão
Sendo dada uma peça de aço por suas projeções desenhadas e cotadas na figura abaixo, pedem-se:

a) A perspectiva cavaleira vista da direita e de cima, sendo dados:



razão de redução: $r - 1/2$.

b) Desenhar um corte vertical, na escala 1/1, que mostre todos os detalhes da peça.



IME 1953/1954 - Álgebra

1ª Questão, Item 1
Na expressão

$$e^{n\ell z} = x + \frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x} + \ldots$$

determinar os valores de z quando $x \to 0$, para:

a) $n = 1{,}5$.

b) $n = 2$.

1ª Questão, Item 2
Sendo $y = i^i$, pedem-se:

a) Demonstrar que y é real.

b) Escrever em forma de série: y e y^{-1}.

1ª Questão, Item 3
Dadas as séries S_1 e S_2, abaixo especificadas,

$$S_1 = 2 - \frac{2x^2}{3} + \frac{x^4}{20} - \frac{x^6}{630} + \ldots$$
$$S_2 = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_i + \ldots + P_n$$

onde P_i é o produto dos i primeiros termos da seqüência:

$$\left(\frac{2}{e}\right), \left(\frac{2}{e}\right)^2, \left(\frac{2}{e}\right)^4, \left(\frac{2}{e}\right)^8, \left(\frac{2}{e}\right)^{16}, \ldots$$

Pedem-se:

a) O termo geral na sua expressão mais simples.

b) Verificar se são convergentes ou não.

2ª Questão, Item 1
Dado o sistema

$$\begin{aligned} &2x + z = m \\ &2y + z = n \\ &2x + 3y = 12 \\ &3x + 2y = 13 \\ &5x + 4y - 3z = 29 \end{aligned}$$

determinar m e n para que o sistema seja compatível, empregando determinantes.

2ª Questão, Item 2
Resolver o sistema:

$$\begin{aligned} &-\tfrac{1}{2}\ell x - \ell z + \tfrac{3}{2}\ell y = 3 \\ &\ell x - \ell y + \ell z = -1 \\ &x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} = e \end{aligned}$$

2ª Questão, Item 3
A matriz de determinante Δ é formada de elementos do tipo

$$A_q^p = (a_q^p + b_q^p + c_q^p)$$

onde: $p = 1, 2, 3, 4, 5$ e $q = 1, 2, 3, 4, 5$. Pede-se o número de grupos de 5 letras que são obtidos depois de efetuado o determinante.

3ª Questão, Item 1
Dá-se, num sistema de eixos ortogonais, o ponto

$$P \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Pedem-se:

a) A equação da reta que passa por este ponto, satisfazendo a condição de que a abscissa no ponto de ordenada nula e a ordenada no ponto de abscissa nula estejam na razão de $1/2$.

b) A equação do círculo circunscrito ao triângulo formado pela reta e pelos eixos coordenados.

3ª Questão, Item 2
Achar, na sua expressão mais simples, a derivada da função

$$y = \frac{1}{\sqrt{a}}\, \ell \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a}}$$

3ª Questão, Item 3
Dada a função

$$y = \frac{a + bx}{b + ax}$$

Determinar a sua derivada aplicando a regra geral de derivação

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Obs: Os símbolos ℓ e e encontrados nos enunciados das questões indicam respectivamente o logaritmo neperiano e a sua base.

IME 1953/1954 - Cálculo

1ª Questão

a) Demonstrar que a área compreendida entre duas parábolas iguais, de vértices comuns e de eixos perpendiculares, é igual a $\frac{4}{3}$ da área do quadrado que tem para lado o parâmetro.

b) Determinar a expressão do volume do sólido gerado pela revolução da área referida no item (a), em torno do eixo de uma das parábolas.

c) Tomando como eixos cordenados ox e oy, os próprios eixos das parábolas e o parâmetro igual a 1 unidade, pedem-se:

(i) Determinar a equação cartesiana do círculo que passa pelos pontos de interseção das duas parábolas e tem o centro sobre a reta que tangencia a parábola de eixo oy, no ponto de interseção das mesmas que não na origem.
(ii) Determinar, em coordenadas polares, a equação do círculo referido no item (i). Tomar como pólo a origem dos eixos e como eixo polar o eixo ox.

2ª Questão

a) Dada a equação da cônica:

$$9x^2 - 4y^2 - 36x + 8y - 4 = 0$$

Pedem-se:

(i) Simplificar a equação, destituindo-a dos termos do primeiro grau das variáveis, mediante uma transformação de coordenadas e identificar a curva.
(ii) Determinar todos os elementos característicos da curva, indicando-os esquematicamente sobre um esboço da mesma, onde devem constar todos os eixos utilizados.

b) Dada a equação:

$$z = x^2 + y^2 + 2$$

Pedem-se:

(i) Determinar a natureza da superfície definida, explicando uma das maneiras pela qual ela pode ser gerada.
(ii) Utilizando o conceito de derivação parcial, determinar em que ponto da superfície a tangente contida no plano $y = 2$ tem o coeficiente angular igual a 4.

c) Determinar:

$$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{3}{4})^x$$

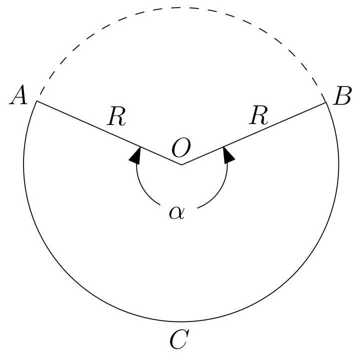
3ª Questão

Um triângulo equilátero de dimensões variáveis, paralelo ao plano yoz e com a liberdade de se deslocar paralelamente a si mesmo, tem um vértice permanentemente em contato com a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ e o lado oposto constantemente situado sobre o plano xoy. Pede-se determinar:

a) A equação da curva do plano xoy, descrita durante o deslocamento, pelos vértices do triângulo que se situam sobre esse plano.
b) A expressão do volume gerado pela superfície do triângulo quando este se desloca desde a origem até o plano $x = a$.
c) A expressão da área varrida pelo lado situado no plano xoy, desde a origem até o ponto de abscissa $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

4ª Questão

a) Certa indústria vai produzir uma série de reservatórios cônicos. Foi escolhido como processo de fabricação o seguinte: retirar de um disco de aço de raio R um setor circular $OACB$ e soldar os seus raios extremos OA e OB.



Pergunta-se qual deve ser o ângulo α desse setor para que o volume do reservatório seja o maior possível.

Obs: Aproximar o resultado até grau.

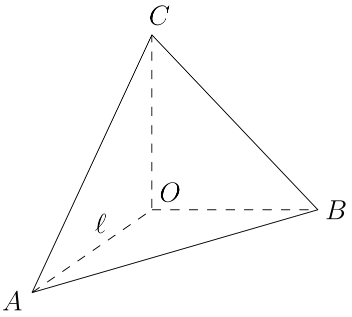
b) Sendo dado:

$$y\,\mathrm{d}x = \frac{x^3 - 8}{8 + 4x - x^2}\,\mathrm{d}y,$$

exprimir y em termos finitos de x, sabendo-se que para $x = 0$, $y = 0{,}5$.

IME 1953/1954 - Geometria

1ª Questão, Item 1
Demonstrar que em um tetraedro triretângulo $OABC$, de arestas OB, OC e OA, iguais a ℓ, a soma das ditâncias de um ponto qualquer M, situado na face ABC, às outras três faces, é constante. Expresse esta soma em função do comprimento ℓ das arestas.



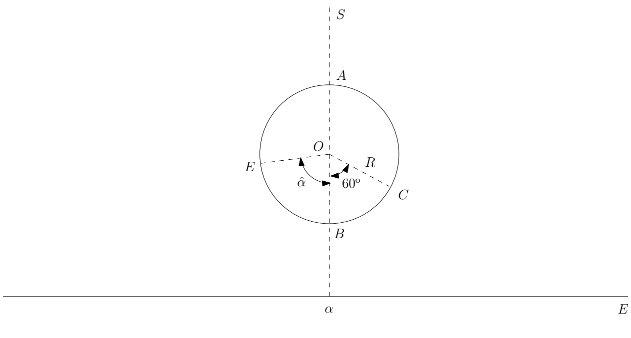
1ª Questão, Item 2
Dadas as três equações abaixo determinar $f(a, b, c) = 0$

$$\operatorname{sen}(x+y)\cos(x-y) = a$$
$$\cos(x+y)\cos(x-y) = b$$
$$\cos 2(x-y) = c$$

1ª Questão, Item 3
Demonstrar que se os senos dos ângulos de um triângulo qualquer estão em progressão aritmética, o mesmo se dará com as cotangentes dos ângulos metade.

2ª Questão, Item 1
É definido um sistema homológico pela figura anexa, sendo $K = -\frac{1}{3}$a razão de homologia.

a) Que espécie de curva será a figura homológica da circunferência de centro em O? (Justificação).
b) Esboce, no desenho fornecido, a figura homológica da circunferência.
c) Qual a situação do ponto E, sobre a circunferência (definida pelo ângulo $\hat{\alpha}$), sabendo ser igual a $3R$ a figura homológica da corda CE?
d) Pode a homotetia ser considerada um caso particular da homologia? (Justificação).
e) Se S for o centro de homotetia, sendo $K = +\frac{1}{3}$ a razão de homotetia, trace a figura homotética da circunferência.



$K = -\frac{1}{3}$; S - Centro de Homologia; E - Eixo de Homologia; $\overline{SA} = \overline{B\alpha} = R$.

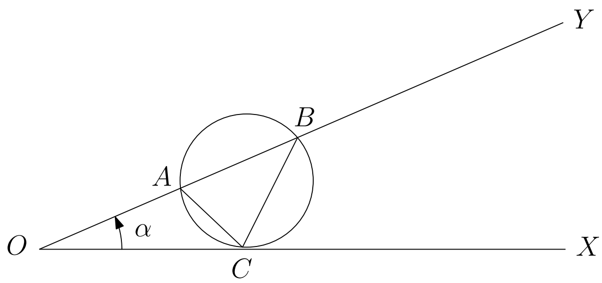
2ª Questão, Item 2

a) Achar um arco x tal que a relação da tangente para sua corda seja igual a um número dado m.
b) Sendo $m \leq 0$ e podendo ser $180^{\circ} \geq x \geq 0$, qual o intervalo de variação de m para que a relação

$$\frac{\tan x}{\text{corda do arco } x} = m$$

seja compatível.

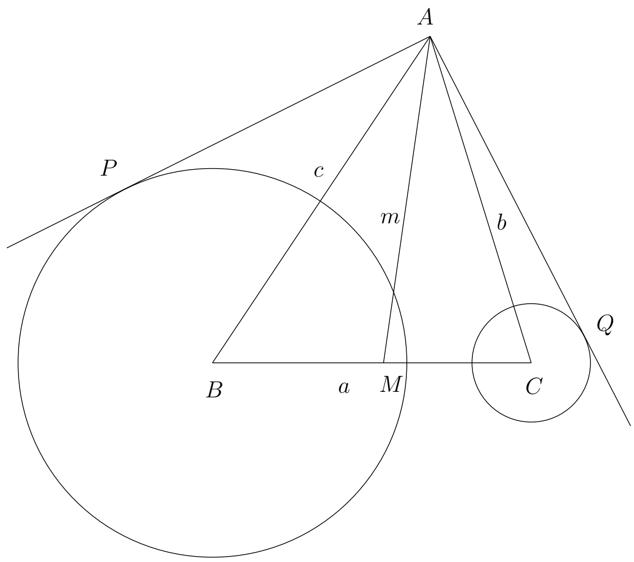
3ª Questão, Item 1
Dão-se dois eixos OX e OY. Sobre o eixo OY marcam-se dois pontos tais que: $OA = \ell_1$; $OB = \ell_2$.



Pelos pontos A e B passa-se uma circunferência tangente em C ao OX. Pedem-se:

a) Determinar o ângulo α, entre 0° e 180°, tal que o volume do sólido gerado pelo triângulo ABC girando em torno do eixo OX seja máximo.
b) O valor desse volume para $\ell_1 = 4$ m e $\ell_2 = 9$ m.

3ª Questão, Item 2
Estabelecer a expressão do comprimento m da mediana do triângulo ABC, em função dos raios R e r dos círculos de centros B e C, respectivamente.



Sabemos:

(i) Constituir A um ponto do eixo radical dos círculos.
(ii) O ângulo das tangentes AP e AQ é reto.
(iii) A distância a, entre os centros B e C satisfaz

$$R + r < a = \sqrt{5}(R - r)$$

IME 1953/1954 - Desenho

1ª Questão
Dados o plano ($L\ T\ M$) formado pela linha de terra e o ponto M e a pirâmide regular de base hexagonal situada no plano horizontal, determinar:

(a) As projeções da seção da pirâmide pelo plano ($L\ T\ M$).

(b) A verdadeira grandeza da seção.

Dados:

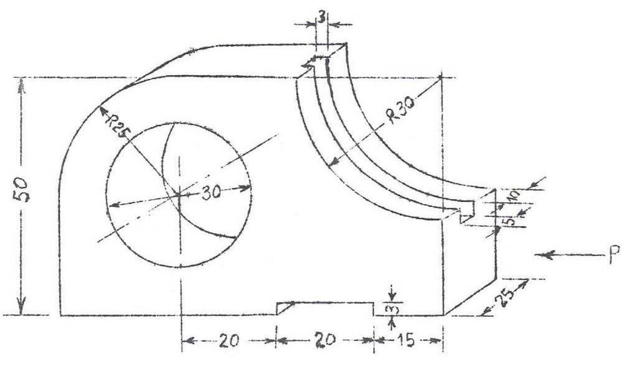
$$\begin{cases} \text{Pirâmide} \begin{cases} \text{base} \begin{cases} \text{dados do círculo circunscrito} \begin{cases} \text{Centro} \begin{cases} x = 4{,}0 \\ c = 4{,}0 \\ c = 0{,}0 \end{cases} \\ \text{raio} \quad r = 2{,}0 \end{cases} \\ \text{dois lados perpendiculares à linha da terra} \end{cases} \\ \text{altura} \quad h = 6{,}0 \end{cases} \\ \text{Plano } LTM \text{...............} \; M \begin{cases} x = 8{,}0 \\ m = 3{,}5 \\ m' = 2{,}0 \end{cases} \end{cases}$$

Obs.:

- As medidas são dadas em centímetros.
- Desenhar na escala 1/1.

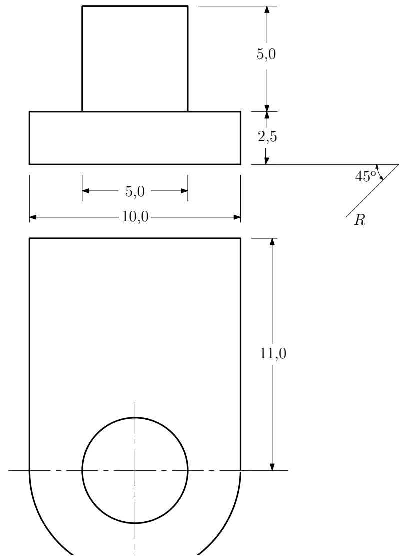
2ª Questão
Desenhar e cotar as vistas A e B e o corte segundo o plano de simetria da peça abaixo:

- Material da peça: Aço.
- Cotas em milímetros.
- Desenhar na escala 1/1.



3ª Questão
Determinar a perspectiva cavaleira da peça abaixo, dada pelas suas projeções, conhecendo-se a direção das linhas de fuga R e a razão de redução $r = 1/2$.
Obs.:

- Cotas da peça em metros.
- Escala da perspectiva 1/100.



IME 1952/1953 - Álgebra

1ª Questão, Item 1

a) Dada a expressão:

$$x = \frac{(1{,}68)^{3/2}\sqrt[3]{0{,}0315}}{(11{,}2)^5}$$

Calcular o $\log x$, sabendo-se que:

$$\log 0{,}5 = \bar{1}{,}6990$$
$$\log 1{,}4 = 0{,}1461$$
$$\log 3 \quad = 0{,}4771$$

Obs: log é o logaritmo na base 10.

b) Sendo

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

exprimir x, explicitamente, como função de y.

Obs: e é a base dos logaritmos neperianos e a função é uma função real da variável real.

1ª Questão, Item 2

Num congresso há 102 representantes do partido A e 81 representantes do partido B. Para uma determinada sessão, foram convocados 99 elementos do partido A e 79 do partido B. De quantas maneiras poderia ter sido efetuada tal convocação?

2ª Questão, Item 1

Dado o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = b \\ x + 2y - z = 6 \\ ax + y + 7z = 3 \end{cases}$$

a) Empregando o Teorema de Rouché, determinar a e b de maneira que o sistema seja indeterminado.

b) Com o emprego dos determinantes, e tendo em vista os valores encontrados para a e b, resolver o sistema, expressando x e y em função de z.

2ª Questão, Item 2

Resolver a equação binômia $x^6 - 64 = 0$, com o emprego de números complexos.

2ª Questão, Item 3

a) Dada a sucessão:

$$a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \;\; \ldots \;\; a_n \;\; \ldots$$

quando é que dizemos que a é o limite da mesma?

b) Achar o limite da sucessão:

$$1 \;\; 4/3 \;\; 6/4 \;\; 8/5 \;\; \ldots \;\; \frac{2n}{n+1} \;\; \ldots$$

e mostrar que tal limite satisfaz a condição estabelecida na alínea anterior.

c) Verificar a convergência ou divergência da série:

$$\sum_1^\infty = \frac{n!}{n^n}$$

3ª Questão, Item 1

a) De acordo com a definição de derivada, dizer, justificando, se a função:

$$y = |x|$$

é ou não derivável no ponto $x = 0$.

b) Responder e justificar os seguintes quesitos:

(i) Qual o campo de definição da função $y = \sqrt{4 - x^2}$?

(ii) A função $y = \frac{1}{x-2}$ é contínua no ponto $x = 2$? Caso não seja, caracterizar a descontinuidade.

Obs: As funções acima são funções reais de variável real.

3ª Questão, Item 2

Dada a equação:

$$x^4 - 13x^3 + 41x^2 + 37x - 210 = 0$$

a) Responder, justificando, os seguintes quesitos:

(i) A equação pode admitir raízes negativas? No caso afirmativo, qual o número máximo dessas raízes?

(ii) idem quanto às raízes positivas.

(iii) Pode a equação admitir raízes fracionárias?

(iv) Quais os números racionais que, de acordo com o Critério da exclusão de Newton, devem ser eliminados na pesquisa das raízes?

b) Resolver a equação.

3ª Questão, Item 3

Achar as coordenadas do ponto de interseção das tangentes a curva $y = x^2$ nos pontos $P(2, 4)$ e $Q(-3, 9)$.

IME 1952/1953 - Geometria

1ª Questão
Em um polígono regular de nove lados (eneágono) pedem-se:

a) Calcular trigonometricamente em função do lado ℓ:
   (i) O apótema a.
   (ii) O raio R do círculo circunscrito ao polígono.

b) Tomando-se um eixo de rotação xx' passando por um vértice da figura e pelo seu centro O, determinar em função de ℓ:
   (i) A superfície S do sólido gerado pela revolução do polígono em torno do eixo xx'.
   (ii) O volume V desse sólido.

Obs: As linhas trigonométricas necessárias à solução desta questão devem ser calculadas partindo-se de linhas conhecidas (dos arcos de 30^{o}, 45^{o}, 60^{o}) e sabendo-se ainda que $\operatorname{tg} 50^{\text{o}} = 1{,}192$.
Obs: Os cálculos devem ser feitos com aproximação de 3 casas decimais.

2ª Questão
Um tetraedro regular de aresta a e uma esfera de raio ρ interceptam-se de tal modo que a superfície esférica tangencia as seis arestas do poliedro em seus pontos médios. Pedem-se:

a) Calcular o raio ρ em função da aresta a.

b) Emprimir em função de ρ o produto do raio R da esfera circunscrita ao tetraedro pelo raio r da esfera inscrita: $R \times r = f(\rho)$.

c) Calcular em função de ρ a parte do volume da esfera que fica situada externamente ao tetraedro.

3ª Questão, Item 1
Resolver o sistema de equações trigonométricas:

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\cos x}{\cos y} = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

3ª Questão, Item 2
Determinar o menor arco positivo cuja soma algébrica das suas seis linhas trigonométricas seja igual a -2.
Obs: Sugestão: Exprimir as linhas trigonométricas em função do seno e do coseno.

IME 1951/1952 - Álgebra

1ª Questão, Item 1
Simplificar a expressão:

$$A = \frac{\log_4 16.10^{\log_{10} x}.\cos x}{e^{-2\ln x}.e^{\ln(x^3.\cos x)}}$$

Em que designamos: $\log_{10}$ é logaritmo na base dez; $\log_4$ é logaritmo na base quatro; ln é logaritmo neperiano.

1ª Questão, Item 2
Determinar todos os números que elevados à quarta potência coincidam consigo mesmo.

1ª Questão, Item 3
Sendo u_1, u_2, v_1 e v_2 funções contínuas de x, achar, pelo processo geral a derivada de:

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

e aplicar para o determinante:

$$A = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$$

onde y' e z' são as derivadas de y e z respectivamente, e y, z, y' e z' são funções contínuas de x.
Obs: Enunciar as propriedades que garantem as transformações efetuadas.

1ª Questão, Item 4
Decompor em frações parciais:

$$\frac{x^2}{(x+1)^2.(x^2+1)}$$

2ª Questão, Item 1
Achar o conjunto de valores de K para que a equação:

$$f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x - K = 0$$

Tenha quatro raízes desiguais.

2ª Questão, Item 2
Dada a série:

$$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{15x^7}{336} + \frac{105x^9}{3456} + \ldots$$

Pedem-se:

a) A expressão do termo geral.

b) Verificar se a série é convergente.

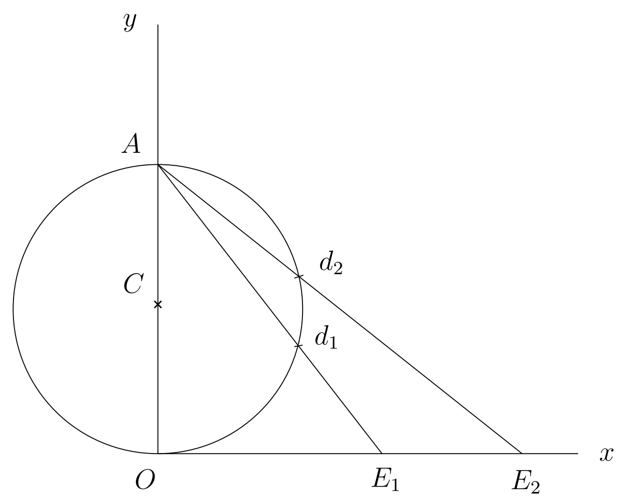
c) Determinar o intervalo de convergência (se for o caso).

3ª Questão
Equacionar a reta que passa pelos pontos d_1 e d_2 da figura abaixo sendo conhecidos: $OE_1 = X_1$; $OE_2 = X_2$; $OA = 2 =$ diâmetro da circunferência. Sabendo-se que X_1 e X_2 são as raízes da equação do segundo grau do tipo:

$$x^2 + px + q = 0$$

Exprimir os coeficientes da equação da mesma reta em função de p e q. Aplicar este método para resolver graficamente a equação do segundo grau:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$



IME 1951/1952 - Geometria

1ª Questão

a) Dividir o arco de 120º em duas partes, tais que a relação entre o seno de uma e o cosseno de outra seja igual a $1+\sqrt{3}$.

b) Deduzir $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ em função de $\cos x$ e aplicar para $x = 72^{\text{o}}$.

c) Deduzir $\operatorname{cotg} 3x$ em função de $\sec x$ e aplicar para $x = 36^{\text{o}}$.

2ª Questão

As diagonais de um losango têm $(3-\sqrt{3})$ dm e $(\sqrt{3}-1)$ dm. Unindo os centros dos quadrados construídos sobre os lados desse losango, resulta um quadrilátero, que será a base de uma pirâmide, cuja altura é H dm. Pedem-se:

a) Cortar o sólido por um plano P, paralelo à sua base, de modo que o volume do tronco resultante seja equivalente ao volume de uma esfera, cujo raio é R dm.

b) Exprimir a distância h, do plano P ao vértice da pirâmide, em função dos elementos da esfera e da pirâmide. Discutir.

c) Calcular h, para $R = 0{,}5$ dm e $H = \pi$ dm.

3ª Questão

Os raios dos círculos ex-inscritos de um triângulo ABC têm 2 cm, 5 cm e 6 cm. Pedem-se:

a) Calcular a área do triângulo $A_1B_1C_1$, homotético de ABC. A relação de homotetia, do segundo para o primeiro, é $\frac{1}{\sqrt{13}}$.

b) Em uma homologia plana, determinar o eixo Z, de modo que o triângulo $A_1'B_1'C_1'$, homólogo de $A_1B_1C_1$, seja retângulo em A_1', com o vértice em C_1', no quadrante XOY. Dados: Coordenadas retangulares, onde x é abscissa:

$$A_1 \begin{cases} x = ? \\ y = 75 \text{ cm} \end{cases} \qquad A_1' \begin{cases} x = 35 \text{ cm} \\ y = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

$$B_1' \begin{cases} x = 45 \text{ cm} \\ y = 30 \text{ cm (polo)} \end{cases} \qquad O \begin{cases} x = 28 \text{ cm} \\ y = 100 \text{ cm} \end{cases}$$

Escala 1 : 5.

IME 1950/1951 - Álgebra

1ª Questão, Item 1
Determinar os valores possíveis da relação $\frac{p}{h}$, onde p e h satisfazem as condições $p > 0$, $h > 0$, de modo que seja real o valor de y dado pela expressão:

$$y = \sqrt{p^2 - 2ph - h^2}$$

Não devem ser feitas explicações. Apresente somente os cálculos.

1ª Questão, Item 2
Calcular o valor da expressão:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

para $x = \frac{1}{2} \log \frac{1+u}{1-u}$.
Obs: e = base do sistema dos logaritmos neperianos; log = logaritmo neperiano.
Não devem ser feitas explicações. Apresente somente os cálculos.

1ª Questão, Item 3
Empregando a fórmula de Moivre, calcular:

$$y = (1 + i\sqrt{3})^3$$

Não devem ser feitas explicações. Apresente somente os cálculos.

1ª Questão, Item 4
Determinar o intervalo de convergência da série:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{x} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

Apresente os cálculos e uma explicação sucinta.

1ª Questão, Item 5
Demonstrar a seguinte proposição: É condição necessária para que a série $\displaystyle\sum_{i}^{\infty} u_n$ seja convergente, que a todo número ϵ positivo arbitrariamente pequeno corresponda um índice n_0 tal que

$$|S_{n+p} - S_n| < \epsilon$$

para $n \geq n_0$, sendo p inteiro positivo qualquer.

Obs: $S_n = \displaystyle\sum_{i}^{\infty} u_n$

Obs: A demonstração de que a condição é suficiente não é pedida.

2ª Questão, Item 1
Discutir, mediante aplicação do teorema de Rouché, o sistema

$$\begin{cases} (3-k)x + 2y + 2z = 0 \\ x + (4-k)y + z = 0 \\ 2x + 4y + (1+k)z = 0 \end{cases}$$

Resolve-lo para um dos valores de k que o tornam indeterminado.

2ª Questão, Item 2
Determinar a derivada da função $y = \sqrt{x^2 + x}$ a partir da própria definição de derivada de uma função, verificando o resultado obtido mediante a aplicação das regras de derivação.

3ª Questão, Item 1
Determinar a equação da tangente à curva:

$$y = x \log x$$

no ponto em que seu coeficiente angular é 2/3.
Obs: log = logaritmo neperiano; $e = 2{,}718\ldots$

3ª Questão, Item 2
Uma bola de borracha que cai de uma altura h, após chocar o solo atinge uma altura igual a 2/3 da anterior; esta lei se mantém nos choques subseqüentes. Determinar o limite para o qual tende o caminho total percorrido pela bola quando o número de choques cresce indefinidamente.

IME 1950/1951 - Geometria

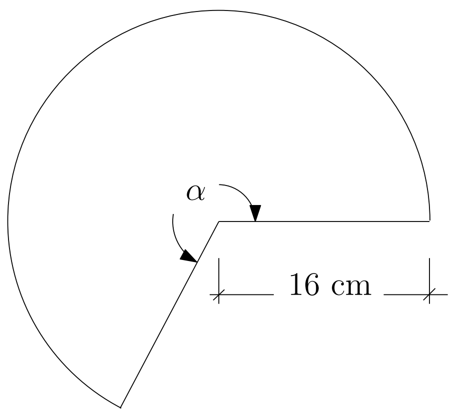
1ª Questão, Item 1
Os dois catetos de um triângulo retângulo são: $a = 4\sqrt{3}$ m e $b = 4$ m. Determinar os valores das linhas trigonométricas naturais referentes ao ângulo oposto ao lado a.

1ª Questão, Item 2
Completar os claros existentes no quadro abaixo sabendo-se que todos os poliedros desse quadro são circunscritos à mesma esfera de raio r.

Poliedros	Tetraedro	Cubo	Octaedro regular
Áreas (m^2) totais		72	
Volume (m^3)	72		36

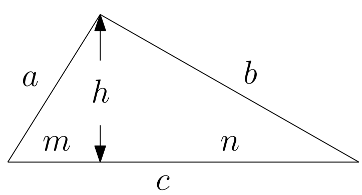
1ª Questão, Item 3
O triângulo de lados a, b e c (alturas respectivas h_a, h_b e h_c) é semelhante ao triângulo de lados respectivamente $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$ e $\frac{1}{h_c}$. pede-se determinar a razão de semelhança K do 1º para o 2º triângulo e exprimi-la, a seguir, em função de a, b e c.

1ª Questão, Item 4
O setor circular representado na figura abaixo é a superfície lateral planificada de um cone reto de base circular. Determinar o volume do cone.



$\alpha = \frac{\pi}{2}.\sqrt{7}$ radianos

1ª Questão, Item 5
Um triângulo retângulo cujos catetos são $a = 3$ cm e $b = 4$ cm, gira sucessivamente em torno do cateto b e da hipotenusa c, gerando respectivamente os volumes V_b e V_c. Calcular a relação entre esses volumes.



1ª Questão, Item 6
Um cilindro circular reto, cujo diâmetro da base é $d = 6$ cm, é seccionado por um plano que determina uma elipse de excentricidade $e = \frac{4}{5}$. Calcular os semi-eixos da elipse.

2ª Questão
Um prisma, reto, hexagonal, regular, tem suas 18 arestas tangentes a uma esfera de raio r. Determinar:

a) A fração da área da esfera que se encontra na parte exterior às faces laterais do prisma.
b) A fração do volume da mesma esfera que se encontra na parte exterior às bases do prisma.

Obs: A esfera não é inscrita nem circunscrita ao prisma; as 8 faces do prisma seccionam a esfera.

3ª Questão
Em um triângulo qualquer conhecem-se:

(i) Um lado: $b = 70{,}7$ mm.
(ii) O raio do círculo circunscrito: $R = 50$ mm.
(iii) A área do triângulo: $S = 2850$ mm^2.

Sabe-se ainda que $a > c$. Calcular:

a) Os ângulos A, B e C desse triângulo.
b) Os lados a e c.

Obs: Utilizar na solução desta questão a tábua de linhas trigonométricas naturais anexa.

IME 1949/1950 - Álgebra

1ª Questão

a) Sendo $Y = \frac{1}{Z} = G - iB$ e $Z = R + iX$, onde $i = \sqrt{-1}$ e G, B, R e X são quantidades reais, determinar G e B em função de R e X.

b) Calcular

$$(i)\ e^{\frac{2\pi i}{3}}; \quad (ii)\ e^{\frac{1}{2}\log_e 3},$$

onde $e = 2{,}71828\ldots$, $\pi = 3{,}14159\ldots$, $i = \sqrt{-1}$.

c) Transformar o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1 . \cos\theta + g_1 . \operatorname{sen}\theta & f_2 . \cos\theta + g_2 . \operatorname{sen}\theta \\ -f_1 . \operatorname{sen}\theta + g_1 . \cos\theta & -f_2 . \operatorname{sen}\theta + g_2 . \cos\theta \end{vmatrix}$$

no produto de dois determinantes. Calcular, então o valor de Δ.

d) Escrever o termo geral da série

$$x - \frac{1}{2} . \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2^2.2!} . \frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2^3.3!} . \frac{x^7}{7} + \ldots$$

e) Aplicando o critério da relação, determinar a natureza da série cujo termo geral é $u_n = \frac{1}{n^{n+2}}$.

f) Resolver a equação

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 + x \end{vmatrix} = 0$$

2ª Questão

Sendo $F(x) = \frac{2e^x}{(1+4e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$, achar a derivada $F'(x)$, dando o resultado na forma mais simples. Calcular, com três algarismos decimais, o valor real de x que anula $F'(x)$.
Obs: $e = 2{,}71828\ldots$, $\log_{10} 2 = 0{,}3010$, $\log_e 10 = 2{,}3026$.

3ª Questão, Item 1

Discutir e resolver, com emprego de determinantes o sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 16 \\ 3x + 4y + 5z = 33 \\ x + y + z = 7 \end{cases}$$

3ª Questão, Item 2

Dada a equação

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 32 = 0$$

pedem-se:

a) Formar a seqüência de Rolle e determinar a natureza das raízes da equação.

b) Calcular essas raízes.

IME 1949/1950 - Geometria

1ª Questão, Item 1

a) Quais são os poliedros regulares? Caracterizar cada um dos poliedros regulares pelo número F de faces, pelo número n de lados de cada face e pelo número p de arestas de cada ângulo sólido.

Nome do poliedro	F	n	p

Responder este item preenchendo o quadro acima.

b) Superfícies homólogas de dois sólidos semelhantes são respectivamente iguais a 45 e 80 cm^2. Se o volume do primeiro sólido é de 30 cm^3, qual o volume V_2 do segundo?

c) Calcular o volume V de um octaedro regular inscrito em um cilindro equilátero de raio r. Construir, na figura 1, um esboço deste octaedro.

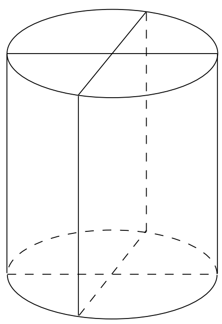


Figura 1

d) Um retângulo $ABCD$ gira em torno de um eixo $Y'Y$, situado no seu plano e paralelo ao lado AD (figura 2). Determinar a área total A do sólido gerado, em função das dimensões indicadas na figura, onde $d > \frac{b}{2}$ é a distância do centro do retângulo ao eixo de rotação.

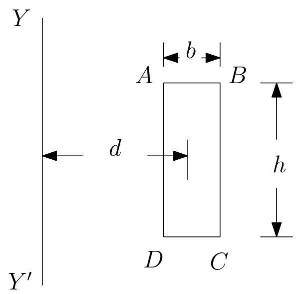


Figura 2

e) Traçar os círculos que passam pelo ponto A e são tangentes às retas L_1 e L_2 (figura 3).

Obs: Os círculos procurados são homotéticos a um círculo qualquer tangente às duas retas. Fazer a construção gráfica utilizando a própria figura 3.

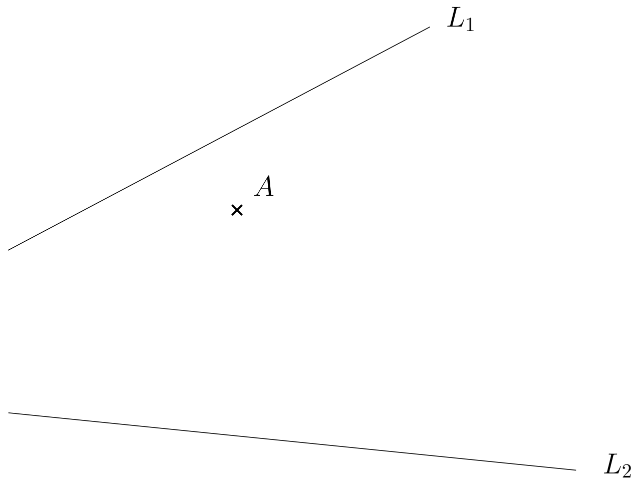


Figura 3

sln: A figura 3 foi ligeiramente escalada para efeito de diagramação.

f) Sobre a superfície de uma esfera tem-se um ponto fixo M e um ponto móvel P. Qual o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos MP? Por que? Qual o volume V do sólido limitado por esse lugar geométrico, em relação ao volume da esfera?

2ª Questão

Dois cones retos circunscritos a uma mesma esfera de raio r têm volumes iguais.

a) Determinar a altura H de um dos cones quando se conhece a altura h do outro. Exprimir o resultado em função de r e h.

b) Para que valor de h a solução $H = h$ será única? Determinar, nesse caso, a relação entre a superfície total do cone e a superfície da esfera.

3ª Questão

Resolver o triângulo conhecendo-se um lado, $a = 86{,}6$ mm, a soma dos dois outros, $b + c = 162{,}8$ mm, e o raio do círculo circunscrito, $R = 50{,}0$ mm. Utilizar na solução desta questão a tábua de linhas trigonométricas naturais anexa.

Obs: Anexo - Tábua das linhas trigonométricas naturais dos ângulos de 0° a 90°.

IME 1948/1949 - Álgebra

1ª Questão

a) Dada a equação:

$$x^4 + 24x^2 + 64x + m = 0$$

Pedem-se:

(i) O valor de m para que ela apresente uma raiz dupla.

(ii) Resolvê-la no caso da condição anterior.

b) Empregando a teoria das frações contínuas, calcular o logaritmo comum de 5 com erro inferior a $1/10\,000$.

2ª Questão

a) Calcular a expressão

$$\frac{\sqrt[3+4i]{1+i}}{\sqrt[6i]{1+i\sqrt{3}}}$$

dando o resultado em forma polar.

Obs: A Tabela 1 deve ser utilizada na resolução deste item.

sln: A Tabela 1 não está disponível.

b) Sendo $a = e^{\frac{2\pi}{3}i}$, mostrar que 1, a, a^2 são as raízes cúbicas da unidade. Provar, ainda, analítica e graficamente que as seguintes relações

$$1 + a^2 - a = -2a$$

$$(1 + a)^2 = a$$

são verdadeiras.

3ª Questão

a) Resolver o sistema

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^p = y^q \end{cases}$$

b) Achar a derivada Δ' em relação a x do determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) & w(x) \\ u'(x) & v'(x) & w'(x) \\ u''(x) & v''(x) & w''(x) \end{vmatrix}$$

no qual

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \, . \operatorname{arc\,cos} \left(\frac{a \cos x + b}{a + b \cos x}\right)$$

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \, . \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$$

Suposto $a^2 > b^2$. Mostrar que Δ se anula para

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \, . \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{a \cos x + b}{a + b \cos x}\right)$$

IME 1948/1949 - Geometria

1ª Questão

a) Definir cone de revolução e dizer de que natureza são as seções planas que podem ser obtidas na referida superfície. Justificar em cada caso considerado.

b) Demonstrar que no tetraedro regular o raio da esfera tangente às seis arestas é média proporcional entre o raio da esfera inscrita e o da esfera circunscrita.

c) Exprimir em função do raio do círculo o perímetro de um triângulo nele inscrito, sabendo-se que um dos lados do triângulo é igual ao raio do círculo e os dois outros estão na relação 1/2.

2ª Questão

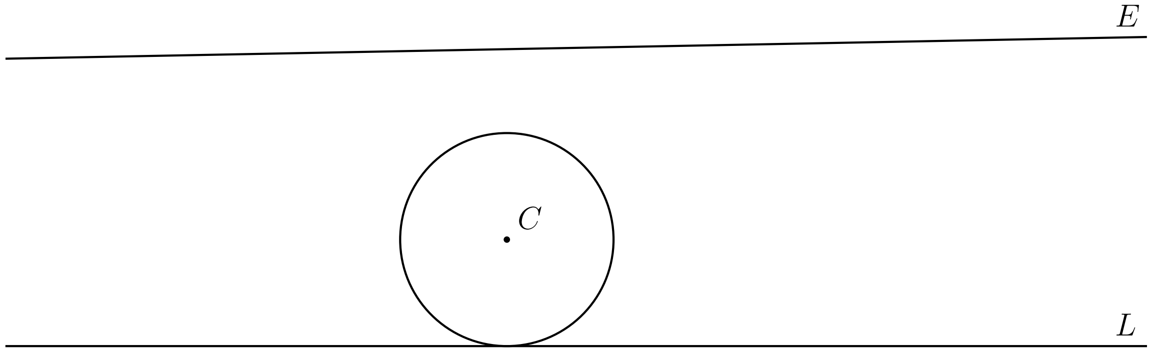
a) Construir a figura homológica de uma circunferência C. O sistema de homologia necessário à transformação pedida é dado pelos seguintes elementos:

- O - centro de homologia.
- L - reta limite.
- E - eixo de homologia.

A circunferência C é tangente à reta limite. Esta reta é, como se sabe, o lugar geométrico dos pontos homólogos dos impróprios ou do infinito da outra figura.

Obs:

- A construção deve ser feita a lápis na Figura 1 anexa.
- As construções devem ser explicadas e justificadas, a tinta, no papel pautado da prova.
- Na explicação é preciso dizer qual a curva obtida e porquê.



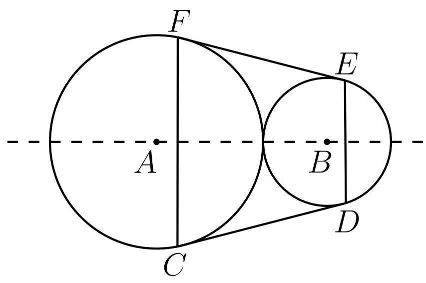
b) Resolver o sistema

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{sen}\,2x - \mathrm{tg}^2 y = 1 \\ 2\cos 2y - \mathrm{tg}^2 x = 1 \end{cases}$$

3ª Questão

a) Resolver a equação $x^5 - 1 = 0$ e representar suas raízes no plano complexo.

b) Calcular o volume de um pilar de 12 metros de altura tendo uma seção reta na forma de um trapézio $CDEF$, obtido do seguinte modo: Traçam-se duas circunferências tangentes exteriormente A e B e duas tangentes comuns exteriores CD e EF. Estas tangentes e as cordas CF e DE formam o trapézio. Os raios das circunferências A e B são iguais respectivamente a 1,50 metros e 1,00 metro. Ver a figura.



IME 1947/1948 - Álgebra

1ª Questão

a) Quantos números diferentes de dez algarismos se podem formar com os algarismos 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 7, tendo todos eles o mesmo final 34475?

b) Discutir e resolver o sistema:

$$\begin{cases} 8x + 4y - 3z = 6 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x - 5y + 4z = 8 \\ ax + by + cz = 10 \\ 2ax - by - acz = -20 \end{cases}$$

2ª Questão

a) Calcular com 3 algarismos significativos o valor de K dado pela expressão abaixo indicada:

$$K = \frac{2}{\sqrt{28}} \,.\, \sqrt[7^2]{3^6 \,.\, e^{-\frac{1}{4}} \,.\, \frac{1}{2}}$$

Obs: $e = 2{,}7183$. Usar tábua de logarimos fornecida.

sln: No caso, a tábua de logaritmos não está disponível.

b) Determinar os números complexos que gozam da propriedade de ter o quadrado e o complexo conjugado idênticos.

c) Reconhecer, justificando, se as séries, cujos termos gerais estão abaixo indicados, são convergentes ou divergentes.

(i) $U_n = \dfrac{n}{n^n}$

(ii) $U_n = \dfrac{\pi^n}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}$

3ª Questão

a) Definir o conceito de derivada de uma função num ponto.

b) Demonstrar que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \,.\, \operatorname{sen} x = \cos x$, justificando rigorosamente as várias fases da demonstração.

c) Calcular a derivada da função:

$$y = \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{1 - \cos z}{2}\right)^{1/2}$$

d) Por que razão as funções:

$$y_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{a + x}{1 - ax} \quad \text{e} \quad y_2 = \operatorname{arc\,tg} x$$

têm a mesma derivada?

IME 1947/1948 - Geometria

1ª Questão
Calcular o cosseno da soma dos ângulos que satisfazem as equações do sistema abaixo:

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} b = 1$$
$$\operatorname{cotg} a + \operatorname{tg} b = 4$$

2ª Questão
É dado um prisma reto de base hexagonal regular, cujas arestas laterais são: AA', BB', CC', DD', EE' e FF'. Corta-se esse prisma pelos planos: $AB'C$, $CD'E$, $EF'A$, $B'CD'$, $D'EF'$ e $F'AB'$, que dele destacam seis pirâmides triangulares. Pedem-se:

a) A forma geométrica do sólido restante.
b) A relação entre a altura do prisma e o lado da base hexagonal para que o sólido restante seja um poliedro regular.
c) O volume desse poliedro regular em função do raio circunscrito à base do prisma.

3ª Questão
Numa esfera de raio R, inscrever um prisma reto cujas bases sejam triângulos equiláteros, de modo que seu volume seja igual a R^3. Calcular a altura do prisma para uma esfera de raio igual a $2\sqrt{3}$ cm.

IME 1946/1947 - Álgebra

1ª Questão

a) Resolver a equação

$$\log\sqrt{5x+1} - \log\sqrt{7x+4} = 1 + \log 2$$

Obs: $\log = \log_{10}$ = logaritmo decimal.

b) Dada a equação:

$$(m-1)x^2 - (m+5)x - m = 0,$$

pedem-se:

(i) Dizer para que valores do parâmetro m a equação terá raízes reais.

(ii) Achar os valores de m para os quais as duas raízes da equação sejam de sinais contrários.

c) Aplicando a teoria das equações de raízes iguais, determinar as raízes simples e múltiplas da equação:

$$x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 40x - 32 = 0$$

2ª Questão

a) Para que valores de x será convergente a série cujo termo geral é:

$$\frac{x^n}{n.3^n}$$

b) Achar os valores de k, m e n que satisfaçam a identidade:

$$k(x+5y-3z)+m(2x-2y+6z)-n(7x+11y+3z) = 0$$

3ª Questão

a) O limite da função $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, quando x tende para zero, tem alguma importância no estudo das derivadas? Por quê? Qual o seu valor quando o arco é medido em radianos? E se o arco for medido em graus?

b) Achar as derivadas de 1ª e 2ª ordens, em relação a y, da função:

$$x = a\left[\arccos\left(\frac{a-y}{a}\right)\right] - \sqrt{2ay - y^2}$$

Achar também as derivadas de 1ª e 2ª ordens da função inversa em relação a x. Simplificar os resultados.

Obs: A título de lembrança, dá-se a fórmula

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

IME 1946/1947 - Geometria

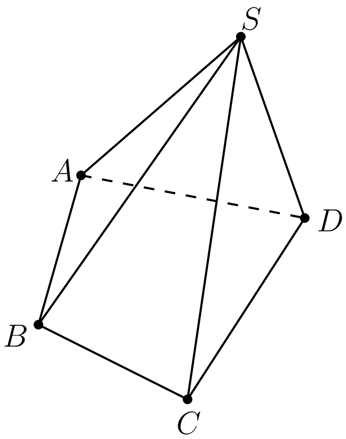
1ª Questão, Item 1

Dada a pirâmide $SABCD$ (vide figura abaixo), pedem-se:

a) A posição de um plano que corte a pirâmide segundo uma seção homotética da base $ABCD$. Traçar a seção e justificar.

b) A posição de um plano que corte a pirâmide de modo que se obtenha uma figura homológica da base $ABCD$. Traçar a figura e justificar.

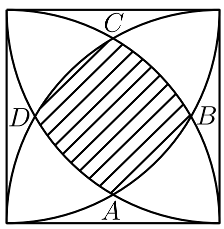
c) A posição de um plano que corte a pirâmide de modo que a seção seja um paralelogramo. Provar.



2ª Questão

a) A altura de um cone circular reto é o dobro do raio R da base. Calcular o volume da esfera circunscrita, em função do raio R acima.

b) Calcular o volume de uma coluna de 10 metros de altura tendo a seção reta como a da figura $ABCD$ anexa, obtida do seguinte modo: com centro em cada vértice de um quadrado, e com um raio R igual ao lado do quadrado, descreve-se um quarto de círculo. A figura apresenta em hachurado a seção $ABCD$ a considerar. Aplicar para $R = 2{,}5$ m.



3ª Questão

a) A cotangente de um ângulo sendo $1 + \sqrt{2}$, calcular a secante do dôbro deste ângulo.

b) Resolver a equação:

$$\cos 2x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

c) Calcular numericamente as raízes cúbicas de $(-i)$ e graficamente as raízes quintas de $(-i)$.

Obs: $i = \sqrt{-1}$.

IME 1945/1946 - Álgebra

1ª Questão

a) Calcular a soma da série: $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, cujo termo geral é

$$u_n = \frac{a}{2^{2n-2}} + \frac{b}{2^{2n}}$$

b) A que condições devem satisfazer k e n para que o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ x + ky + z = n \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

seja:

(i) Determinado.
(ii) Indeterminado.
(iii) Incompatível.

Obs: Fazer a discussão com emprêgo de determinantes.

2ª Questão

a) Quais são os complexos diferentes, cujas quintas potências coincidem com eles próprios?

Obs: Adotar a representação trigonométrica.

b) Dadas as equações $ax^2+bx+c = 0$ e $mx^2+nx+p = 0$, que admitem uma raiz comum, achar a expressão dessa raiz, sabendo que $an - bm \neq 0$.

3ª Questão

a) Sendo $\log 0{,}35 = \overline{1}{,}5441$ e $\log 0{,}7^8 = \overline{2}{,}7608$, determinar o logaritmo de $\sqrt[5]{0{,}25}$.

b) Em um saco há 4 bolas brancas e 6 pretas.

(i) De quantos modos poderemos extrair 5 bolas, sendo 2 brancas e 3 pretas?
(ii) De quantos modos poderemos retirar 5 bolas, sendo todas pretas?

c) Achar a derivada da função

$$y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

reduzindo-a à forma mais simples.

IME 1945/1946 - Geometria

1ª Questão

a) Resolver a equação

$$\sec x - \cos x = \operatorname{sen} x$$

b) Determinar o volume de uma esfera cujo raio r é o de um círculo inscrito em um quadrante de círculo de raio R conhecido. Exprimir o volume em função de R.

2ª Questão

A que distância do centro se deve cortar uma esfera E, por um plano secante P, de modo que volume da esfera seja igual a quatro vezes a soma dos volumes de dois cones, tais que:

(i) A base comum seja a interseção de P com E.

(ii) As geratrizes de um deles sejam tangentes à esfera.

(iii) O vértice do outro coincida com o centro da esfera.

Exprimir a distância pedida em função do raio da esfera.

3ª Questão

Um tetraedro, cujos lados da base medem 6, 10 e 8 metros, tem arestas laterais com comprimento de 13 metros cada uma. Calcular a altura desse poliedro em relação à base considerada.

IME 1944/1945 - Álgebra

1ª Questão

a) Determinar m e n de modo que as equações:

$$(2n + m)x^2 - 4mx - 3 = 0$$
$$(6n + 3m)x^2 - 3(n - 1)x - 9 = 0$$

tenham as mesmas raízes.

b) Discutir e resolver, nos casos de possibilidades, o sistema:

$$ax - by = 7$$
$$2x + 5y = 1$$

com emprêgo de determinantes.

c) Em uma reunião há 7 pessoas e 9 cadeiras. De quantos modos se podem sentar as pessoas?

2ª Questão

Sendo $a + bi = (x + iy)^7$, pedem-se, no caso de $x = 1$ e $y = -1$:

a) Módulo e argumento do complexo $a + bi$.

b) Representação geométrica das potências sucessivas do complexo $x + iy$, desde a primeira até a sétima, inclusive.

3ª Questão

a) Indicar, justificando, a convergência ou divergência das séries:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + \pi)}$$

b) O logaritmo de 20 sendo 1,30103, determinar o de $(0{,}08)^{1/8}$.

c) Achar a derivada de função:

$$y = \frac{x}{m - nx^2},$$

reduzindo-a à forma mais simples.

IME 1944/1945 - Geometria

1ª Questão
Determinar, em metros quadrados, a área de um trapézio homotético à seção meridiana de um tronco de cone de revolução circunscrito a uma esfera, sabendo-se que o volume do tronco de cone é o dobro do volume da esfera. A relação de homotetia é igual a 3. A medida do raio da esfera é de 10,0 cm com um erro relativo de $\pm 1\%$.
Obs: Fórmula do volume do tronco de cone: $V = \frac{1}{3}h\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$.

2ª Questão

a) Sendo uma pirâmide seccionada por um plano paralelo à base, a que distância do vértice deve passar esse plano para que a pirâmide fique dividida em dois sólidos de volumes equivalentes?

b) Dados os lados de um triângulo plano $a = 5$ m, $b = 6$ m e $c = 9$ m, calcular:
   (i) As tangentes dos ângulos.
   (ii) A área do triângulo.
   (iii) A área do círculo inscrito.

3ª Questão
Discutir a equação

$$\operatorname{sen} 2x = m \operatorname{tg} x$$

e resolvê-la para $m = 1$.

Soluções

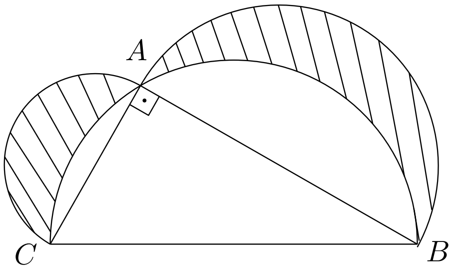
	Álgebra	Geometria
1974/1975	-	**X**
1975/1976	**X**	**X**
1976/1977	**X**	**X**
1977/1978	**X**	**X**
1978/1979	**X**	**X**
1979/1980	**X**	**X**
1980/1981	**X**	**X**
1981/1982	**X**	**X**
1982/1983	**X**	**X**
1983/1984	**X**	**X**
1984/1985	**X**	**X**
1985/1986	**X**	**X**
1986/1987	**X**	**X**
1987/1988	**X**	**X**
1988/1989	**X**	**X**
1989/1990	**X**	**X**
1990/1991	**X**	**X**

	Matemática
1991/1992	**X**
1992/1993	**X**
1993/1994	**X**
1994/1995	**X**
1995/1996	**X**
1996/1997	**X**
1997/1998	**X**
1998/1999	**X**
1999/2000	**X**
2000/2001	**X**
2001/2002	**X**
2002/2003	**X**
2003/2004	**X**
2004/2005	**X**
2005/2006	**X**

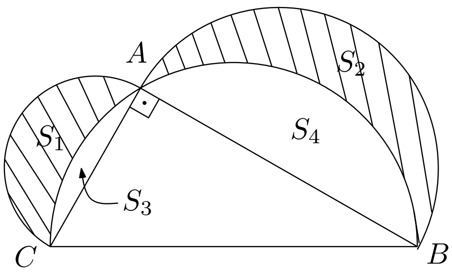
	Objetiva	Matemática
2006/2007	**X**	**X**
2007/2008	**X**	**X**
2008/2009	**X**	**X**
2009/2010	**X**	**X**
2010/2011	**X**	**X**

IME 2010/2011 - Objetiva

1ª Questão [Valor: 0,25]
Seja o triângulo retângulo ABC com os catetos medindo 3 cm e 4 cm. Os diâmetros dos três semicírculos, traçados na figura abaixo, coincidem com os lados do triângulo ABC. A soma das áreas hachuradas, em cm^2, é:



Solução: (A) 6



Seja a notação indicada na figura acima. Neste caso, a área S desejada pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= (S_1+S_3)+(S_2+S_4)+S_{\Delta ABC}-(S_3+S_4+S_{\Delta ABC}) \\ &= \frac{\pi AC^2}{8}+\frac{\pi AB^2}{8}+\frac{AB.AC}{2}-\frac{\pi BC^2}{8} \\ &= \frac{AB.AC}{2} \\ &= 6 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

2ª Questão [Valor: 0,25]
O valor de x que satisfaz a equação $\operatorname{sen}(\operatorname{arccotg}(1+x)) = \cos(\operatorname{arctg}(x))$:

Solução: (D) $-\frac{1}{2}$
Sejam os ângulos θ_1 e θ_2 tais que $\operatorname{cotg}\theta_1 = (1+x)$ e $\operatorname{tg}\theta_2 = x$. Logo,

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 = (1+x)\operatorname{sen}\theta_1 \;&\Rightarrow\; \operatorname{sen}^2\theta_1 + (1+x)^2\operatorname{sen}^2\theta_1 = 1 \\ &\Rightarrow\; \operatorname{sen}\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{1+(1+x)^2}} \end{aligned}$$

e

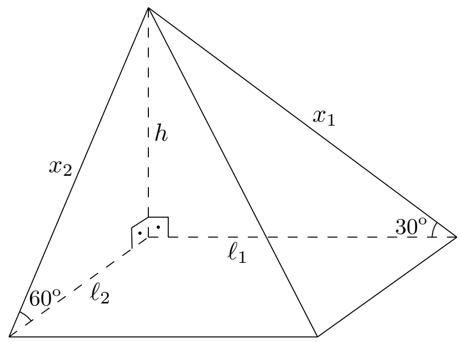
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta_2 = x\cos\theta_2 \;&\Rightarrow\; x^2\cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_2 = 1 \\ &\Rightarrow\; \cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

de modo que, pelo enunciado, devemos ter

$$\frac{1}{\sqrt{1+(1+x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow (1+x)^2 = x^2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

3ª Questão [Valor: 0,25]
A base de uma pirâmide é um retângulo de área S. Sabe-se que duas de suas faces laterais são perpendiculares ao plano da base. As outras duas faces formam ângulos de 30º e 60º com a base. O volume da pirâmide é:

Solução: (A) $\frac{S\sqrt{S}}{3}$



Para calcularmos o volume V desejado, devemos determinar a altura h da pirâmide. Da figura acima, tem-se

$$\begin{cases} h = x_1 \operatorname{sen} 30^\circ \\ x_1 \cos 30^\circ = \ell_1 \end{cases} \Rightarrow h = \ell_1 \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$\begin{cases} h = x_2 \operatorname{sen} 60^\circ \\ x_2 \cos 60^\circ = \ell_2 \end{cases} \Rightarrow h = \ell_2 \operatorname{tg} 60^\circ$$

de modo que

$$\ell_1 \frac{\sqrt{3}}{3} = \ell_2\sqrt{3} \Rightarrow \ell_1 = 3\ell_2$$

Com isto,

$$S = \ell_1\ell_2 = \frac{1}{3}\ell_1^2 \Rightarrow \ell_1 = \sqrt{3S} \Rightarrow h = \sqrt{3S}\operatorname{tg}30^\circ = \sqrt{S}$$

e então

$$V = \frac{Sh}{3} = \frac{S\sqrt{S}}{3}$$

4ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam $x_1, \ldots, x_n$ os n primeiros termos de uma progressão aritmética, O primeiro termo e a razão desta progressão são os números reais x_1 e r, respectivamente. O determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix} \text{ é :}$$

Solução: (E) $x_1.r^{n-1}$
Seja ℓ_i a i-ésima linha da matriz de determinante desejado Δ. Fazendo as transformações $\ell_n = \ell_n - \ell_{n-1}$, ..., $\ell_3 = \ell_3 - \ell_2$ e $\ell_2 = \ell_2 - \ell_1$, tem-se

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ 0 & r & r & \cdots & r \\ 0 & 0 & r & \cdots & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r \end{vmatrix} = x_1 r^{n-1}$$

5ª Questão [Valor: 0,25]
Uma reta, com coeficiente angular a_1, passa pelo ponto $(0, -1)$. Uma outra reta, com coeficiente angular a_2, passa pelo ponto $(0, 1)$. Sabe-se que $a_1^2 + a_2^2 = 2$. O lugar geométrico percorrido pelo ponto de interseção das duas retas é uma:

Solução: (C) hipérbole de centro $(0, 0)$ e retas diretrizes $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
A interseção das retas é a solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} y = a_1 x - 1 \\ y = a_2 x + 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{y+1}{x} \\ a_2 = \frac{y-1}{x} \end{array} \right.$$

Logo, devemos ter

$$\begin{aligned} &\left(\frac{y+1}{x}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{x}\right)^2 = 2 \\ &\Rightarrow\ (y+1)^2 + (y-1)^2 = 2x^2 \\ &\Rightarrow\ x^2 - y^2 = 1 \end{aligned}$$

que corresponde a uma hipérbole equilátera, com centro na origem e diretrizes paralelas ao eixo y.

6ª Questão [Valor: 0,25]
O valor de y real positivo na equação $(5y)^{\log_x 5} - (7y)^{\log_x 7} = 0$, onde x é um número real maior do que 1, é:

Solução: (D) $\frac{1}{35}$
Tirando o logaritmo na base x da equação do enunciado, tem-se

$$\begin{aligned} &\log_x 5 \log_x 5y = \log_x 7 \log_x 7y \\ \Rightarrow\ &\log_x 5 (\log_x 5 + \log_x y) = \log_x 7 (\log_x 7 + \log_x y) \\ \Rightarrow\ &\log_x^2 5 + \log_x 5 \log_x y = \log_x^2 7 + \log_x 7 \log_x y \\ \Rightarrow\ &(\log_x 5 - \log_x 7) \log_x y = \log_x^2 7 - \log_x^2 5 \\ \Rightarrow\ &\log_x y = -(\log_x 5 + \log_x 7) = -\log_x 35 = \log_x \frac{1}{35} \end{aligned}$$

7ª Questão [Valor: 0,25]
O pipoqueiro cobra o valor de R$ 1,00 por saco de pipoca. Ele começa seu trabalho sem qualquer dinheiro para troco. Existem oito pessoas na fila do pipoqueiro, das quais quatro têm uma moeda de R$ 1,00 e quatro uma nota de R$ 2,00. Supondo uma arrumação aleatória para a fila formada pelas oito pessoas e que cada uma comprará exatamente um saco de pipoca, a probabilidade de que o pipoqueiro tenha troco para as quatro pessoas que pagarão com a nota de R$ 2,00 é:

Solução: (B) $\frac{1}{5}$
Representando cada pessoa com R$ 1,00 por '1' e cada pessoa com R$ 2,00 por '2', é fácil listar todas as configurações favoráveis ao pipoqueiro (começando da condição mais amigável): 11112222, 11121222, 11122122, 11122212, 11211222, 11212122, 11212212, 11221122, 11221212, 12111222, 12112122, 12112212, 12121122, 12121212. O que dá um total de 14 configurações favoráveis, para um total de $C_{4,4}^{8}$ configurações possíveis. Logo, a probabilidade desejada é

$$P = \frac{14}{\frac{8!}{4!\,4!}} = \frac{14}{70} = \frac{1}{5}$$

8ª Questão [Valor: 0,25]
O valor de $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \frac{1}{2}$ é:

Solução: (C) 0
O número $w = e^{j\frac{2\pi}{7}}$ é uma das raízes da equação ciclotômica $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = 0$, de modo que, se $\Re\{x\}$ denota a parte real de x, então,

$$\begin{aligned} &w^6 + w^5 + w^4 + w^3 + w^2 + w + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \Re\{w^6 + w^5 + w^4 + w^3 + w^2 + w + 1\} = 0 \\ &\Rightarrow \cos\frac{12\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + 1 = 0 \\ &\Rightarrow 2\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \frac{1}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

De modo que a expressão do enunciado tem valor nulo.

9ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam x e y números reais. Assinale a alternativa correta:

Solução: (C) Todo x e y satisfaz $|x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{|x^2| + |y^2|}$

- $x = y = \frac{1}{10}$ não satisfazem $|x| + |y| \leq \sqrt{2}\,|x^2 + y^2|$.
- A relação $|x + y| \leq ||x| + |y||$ é a "desigualdade triangular", que é válida para todos x e y.
- Elevando ambos os lados (que são não negativos) ao quadrado, e observando que $|a^2| = |a|^2$, tem-se

$$\begin{aligned} &|x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{|x^2| + |y^2|} \\ \Leftrightarrow\ &|x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \leq 2|x^2| + 2|y^2| \\ \Leftrightarrow\ &0 \leq |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 \\ \Leftrightarrow\ &0 \leq (|x| - |y|)^2 \end{aligned}$$

  que é sempre válida.
- $x = -1$ e $y = 1$ não satisfazem $|x - y| \leq |x + y|$.
- $x = y = \frac{1}{10}$ não satisfazem $|x| + |y| \leq \sqrt{3}|x^2 + y^2|$.

10ª Questão [Valor: 0,25]
Em relação à teoria dos conjuntos, considere as seguintes afirmativas relacionadas aos conjuntos A, B e C:

I. Se $A \in B$ e $B \subseteq C$ então $A \in C$.

II. Se $A \subseteq B$ e $B \in C$ então $A \in C$.

III. Se $A \subseteq B$ e $B \in C$ então $A \subseteq C$.

Estão corretas:

Solução: (B) somente a alternativa I

- Se $A \in B$ e $B \subseteq C$, então todo elemento de A está em C, de modo que $A \in C$.
- Se $A \subseteq B$ e $B \in C$, não necessariamente $A \in C$ nem $A \subseteq C$. Um contra-exemplo para estas afirmações seria $A = \{a\}$ e $B = \{a, b\}$, de modo que $A \subseteq B$. Se, porém, $C = \{\{a, b\}, \{c\}\}$, de modo que $B \in C$, não temos $A \in C$ nem $A \subseteq C$.

11ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $p(x)$ uma função polinomial satisfazendo a relação $p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) = p(x) + p\left(\frac{1}{x}\right)$. Sabendo que $p(3) = 28$, o valor de $p(4)$ é:

Solução: (E) 65
Seja $p(x)$ de ordem N, de modo que podemos escrever $p(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$, com $a_N \neq 0$. Multiplicando ambos os lados esquerdo E e direito D da relação do enunciado por x^N, tem-se

$$\begin{aligned} Ex^N &= \left(\sum_{i=0}^{N} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{N} a_j x^{-j}\right) x^N \\ &= \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} a_i a_j x^{N-j+i} \\ &= \sum_{k=0}^{2N} b_k x^k \end{aligned}$$

onde, para $k = 0, 1, \ldots, N$, tem-se

$$b_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_{N-\ell} a_{k-\ell}$$

e $b_{2N-k} = b_k$. Além disto, fazendo $k_1 = (N+i)$ e $k_2 = (N-j)$, tem-se

$$\begin{aligned} Dx^N &= \left(\sum_{i=0}^{N} a_i x^i\right) x^N + \left(\sum_{j=0}^{N} a_j x^{-j}\right) x^N \\ &= \sum_{k_1=N}^{2N} a_{k_1-N} x^{k_1} + \left(\sum_{k_2=0}^{N} a_{N-k_2} x^{k_2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{2N} c_k x^k \end{aligned}$$

com

$$c_k = \begin{cases} a_{N-k}; & k = 0, 1, \ldots, (N-1) \\ 2a_0; & k = N \\ a_{k-N}; & k = (N+1), (N+2), \ldots, 2N \end{cases}$$

Fazendo $b_k = c_k$, e lembrando-se que $a_N \neq 0$, tem-se

$$\begin{cases} a_N a_0 = a_N \\ a_N a_1 + a_{N-1} a_0 = a_{N-1} \\ a_N a_2 + a_{N-1} a_1 + a_{N-2} a_0 = a_{N-2} \\ a_N a_{N-1} + a_{N-1} a_{N-2} + \ldots + a_2 a_1 + a_1 a_0 = a_1 \\ a_N^2 + a_{N-1}^2 + \ldots + a_1^2 + a_0^2 = 2a_0 \end{cases}$$

Logo, $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = \ldots = a_{N-1} = 0$ e $a_N^2 = 1$, de modo que $p(x) = (1 \pm x^N)$.

Como $p(3) = 28$, a única solução viável é $p(x) = (1+x^N)$, com $N = 3$, e assim $p(4) = 65$.

12ª Questão [Valor: 0,25]
Uma progressão aritmética $\{a_n\}$, onde $n \in \mathbb{N}^*$, tem $a_1 > 0$ e $3a_8 = 5a_{13}$. Se S_n é a soma dos n primeiros termos desta progressão, o valor de n para que S_n seja máxima é:

Solução: (D) 20
Seja r a razão desta progressão aritmética. Logo,

$$3(a_1 + 7r) = 5(a_1 + 12r) \Rightarrow 2a_1 = -39r$$

e assim

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} n \\ &= \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} n \\ &= \frac{-39r + (n-1)r}{2} n \\ &= \frac{(n^2 - 40n)r}{2} \\ &= \frac{[(n-20)^2 - 400]r}{2} \end{aligned}$$

Como $a_1 > 0$, então $r < 0$ e S_n é máxima com $n = 20$.

13ª Questão [Valor: 0,25]
Um trem conduzindo 4 homens e 6 mulheres passa por seis estações. Sabe-se que cada um destes passageiros irá embarcar em qualquer uma das seis estações e que não existe distinção dentre os passageiros de mesmo sexo. O número de possibilidades distintas de desembarque destes passageiros é:

Solução: (D) 58.212
Seja m_i e f_i o número de passageiros masculinos e femininos, respectivamente, descendo na i-ésima estação.

Assim, os números das combinações de m_i são

$$\begin{cases} \text{Caso M1}: 0,0,0,0,0,4 \Rightarrow C^6_{5,1} = \frac{6!}{5!\,1!} = 6 \\ \text{Caso M2}: 0,0,0,0,1,3 \Rightarrow C^6_{4,1,1} = \frac{6!}{4!\,1!\,1!} = 30 \\ \text{Caso M3}: 0,0,0,0,2,2 \Rightarrow C^6_{4,2} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15 \\ \text{Caso M4}: 0,0,0,1,1,2 \Rightarrow C^6_{3,2,1} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60 \\ \text{Caso M5}: 0,0,1,1,1,1 \Rightarrow C^6_{2,4} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15 \end{cases}$$

num total de 126 possibilidades.

Já para as mulheres, as combinações de f_i são em número

$$\begin{cases} \text{Caso F1}: 0,0,0,0,0,6 \Rightarrow C^6_{5,1} = \frac{6!}{5!\,1!} = 6 \\ \text{Caso F2}: 0,0,0,0,1,5 \Rightarrow C^6_{4,1,1} = \frac{6!}{4!\,1!\,1!} = 30 \\ \text{Caso F3}: 0,0,0,0,2,4 \Rightarrow C^6_{4,1,1} = \frac{6!}{4!\,1!\,1!} = 30 \\ \text{Caso F4}: 0,0,0,0,3,3 \Rightarrow C^6_{4,2} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15 \\ \text{Caso F5}: 0,0,0,1,1,4 \Rightarrow C^6_{3,2,1} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60 \\ \text{Caso F6}: 0,0,0,1,2,3 \Rightarrow C^6_{3,1,1,1} = \frac{6!}{3!\,1!\,1!\,1!} = 120 \\ \text{Caso F7}: 0,0,0,2,2,2 \Rightarrow C^6_{3,3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20 \\ \text{Caso F8}: 0,0,1,1,1,3 \Rightarrow C^6_{2,3,1} = \frac{6!}{2!\,3!\,1!} = 60 \\ \text{Caso F9}: 0,0,1,1,2,2 \Rightarrow C^6_{2,2,2} = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90 \\ \text{Caso F10}: 0,1,1,1,1,2 \Rightarrow C^6_{1,4,1} = \frac{6!}{1!\,4!\,1!} = 30 \\ \text{Caso F11}: 1,1,1,1,1,1 \Rightarrow C^6_{6} = \frac{6!}{6!\,0!} = 1 \end{cases}$$

num total de 462 possibilidades.

Logo, o número total de possibilidades é $126 \times 462 = 58.212$.

14ª Questão [Valor: 0,25]
Considere o sistema de equações lineares representado abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 7 \\ 9 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Os valores de a e d são, respectivamente:

Solução: (B) 2 e 3
Da quinta linha: $4a = 8 \Rightarrow a = 2$. Da terceira linha: $a + 5b = 7 \Rightarrow b = 1$. Da segunda linha: $2b + 3d = 11 \Rightarrow d = 3$.

15ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $f(x) = a \operatorname{sen} x + b\sqrt[3]{x} + 4$, onde a e b são números reais diferentes de zero. Sabendo que $f(\log_{10}(\log_3 10)) = 5$, o valor de $f(\log_{10}(\log_{10} 3))$ é:

Solução: (B) 3
Seja $c = \log_{10}(\log_3 10)$, de modo que $\log_{10}(\log_{10} 3) = -c$. Com isto,

$$f(c) = a \operatorname{sen} c + b\sqrt[3]{c} + 4 = 5 \Rightarrow a \operatorname{sen} c + b\sqrt[3]{c} = 1$$

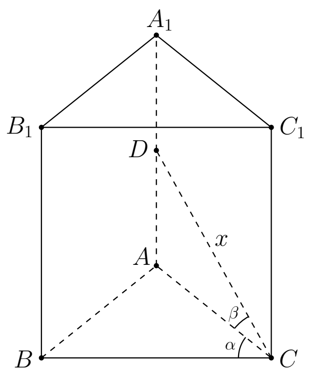
e assim

$$\begin{aligned} f(-c) &= a \operatorname{sen}(-c) + b\sqrt[3]{-c} + 4 \\ &= -(a \operatorname{sen} c + b\sqrt[3]{c}) + 4 \\ &= -1 + 4 \end{aligned}$$

IME 2010/2011 - Matemática

1ª Questão [Valor: 1,0]
A base de um prisma reto $ABCA_1B_1C_1$ é um triângulo com o lado AB igual ao lado AC. O valor do segmento CD vale x, onde D é o ponto médio da aresta lateral AA_1. Sabendo que α é o ângulo ACB e β é o ângulo DCA, determine a área lateral do prisma em função de x, α e β.

Solução:



Da figura acima,

$$\begin{cases} AB = AC = x\cos\beta \\ BC = 2AB\cos\alpha = 2x\cos\alpha\cos\beta \\ \frac{AA_1}{2} = x\,\mathrm{sen}\,\beta \end{cases}$$

de modo que a área lateral S_L desejada é

$$\begin{aligned} S_L &= (AB + AC + BC)AA_1 \\ &= (2x\cos\beta + 2x\cos\alpha\cos\beta)2x\,\mathrm{sen}\,\beta \\ &= 2x^2\,\mathrm{sen}\,2\beta(1+\cos\alpha) \end{aligned}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o valor da excentricidade da cônica dada pela equação $x^2 - 10\sqrt{3}\,xy + 11y^2 + 16 = 0$.

Solução:
Seja a rotação dos eixos coordenados

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Neste novo sistema, a equação da cônica é dada por

$$\begin{aligned} & (u\cos\theta - v\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 + 11(u\,\mathrm{sen}\,\theta + v\cos\theta)^2 \\ - \;& 10\sqrt{3}(u\cos\theta - v\,\mathrm{sen}\,\theta)(u\,\mathrm{sen}\,\theta + v\cos\theta) + 16 = 0 \\ \Rightarrow \;& (\cos^2\theta - 10\sqrt{3}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + 11\,\mathrm{sen}^2\theta)u^2 \\ + \;& (\mathrm{sen}^2\theta + 10\sqrt{3}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + 11\cos^2\theta)v^2 \\ + \;& [20\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - 10\sqrt{3}(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)]uv + 16 = 0 \end{aligned}$$

cujo termo em uv pode ser re-escrito como

$$10(\mathrm{sen}\,2\theta - \sqrt{3}\cos 2\theta)$$

e pode ser anulado escolhendo-se $\mathrm{tg}\,2\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 30^o$. Com este valor, a equação da cônica torna-se

$$-4u^2 + 16v^2 + 16 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{u^2}{4} - v^2 = 1$$

que corresponde a uma hipérbole com $a = 2$ e $b = 1$, $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5}$ e excentricidade $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam $z_1 = 10 + 6i$ e $z_2 = 4 + 6i$, onde i é a unidade imaginária, e z um número complexo tal que $\arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = \frac{\pi}{4}$, determine o módulo do número complexo $(z - 7 - 9i)$.
Obs.: $\arg(w)$ é o argumento do número complexo w.

Solução:
Denotando $w = \frac{z-z_1}{z-z_2}$, com $z = (a+bi)$, tem-se

$$w = \frac{[(a-10)+(b-6)i]}{[(a-4)+(b-6)i]}.\frac{[(a-4)-(b-6)i]}{[(a-4)-(b-6)i]}$$

Como $\arg(w) = \frac{\pi}{4}$, então suas partes real $\Re(w)$ e imaginária $\Im(w)$ são iguais (e positivas), e assim

$$\begin{aligned} & (a-10)(a-4)+(b-6)^2 = [(a-4)-(a-10)](b-6) \\ \Rightarrow \;& a^2 - 14a + 40 + b^2 - 12b + 36 = 6(b-6) \\ \Rightarrow \;& a^2 - 14a + b^2 - 18b = -112 \\ \Rightarrow \;& (a-7)^2 + (b-9)^2 = 18 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} |z - 7 - 9i| &= |(a-7) + (b-9)i| \\ &= \sqrt{(a-7)^2 + (b-9)^2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Os números m, 22.680 e n fazem parte, nessa ordem, de uma progressão geométrica crescente com razão dada por q. Sabe-se que:

- existem, pelo menos, dois elementos entre m e 22.680;
- n é o sexto termo dessa progressão geométrica;
- $n \leq 180.000$.

Determine os possíveis valores de m e n, sabendo que m, n e q são números naturais positivos.

Solução:
Pelos dados do problema, há três possibilidades para o posicionamento de m, 22.680 (que pode ser decomposto como $2^3 \times 3^4 \times 5 \times 7$) e n na progressão:

$$\begin{cases} \text{Caso I :} & a_1, m, a_3, a_4, 22.680, n \\ \text{Caso II :} & m, a_2, a_3, a_4, 22.680, n \\ \text{Caso III :} & m, a_2, a_3, 22.680, a_5, n \end{cases}$$

No Caso I, tem-se $22.680 = mq^3$ e $n = 22.680q$, e assim há três possibilidades para q inteiro:

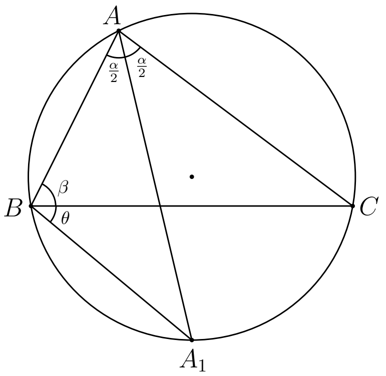
$$\begin{cases} \text{Caso I.1 : } q = 2 \Rightarrow m = 2.835 \text{ e } n = 45.360 \\ \text{Caso I.2 : } q = 3 \Rightarrow m = 840 \text{ e } n = 68.040 \\ \text{Caso I.3 : } q = 6 \Rightarrow m = 105 \text{ e } n = 136.080 \end{cases}$$

No Caso II, $22.680 = mq^4$, e a única possibilidade para q inteiro é $q = 3$, quando $m = 280$ e $n = 22.680q = 68.040$.
No Caso III, novamente $22.680 = mq^3$, mas como $n = 22.680q^2 \leq 180.000$, devemos ter $q \leq \sqrt{\frac{180.000}{22.680}}$, de modo que $q \leq 2{,}82$. Logo, a única opção é $q = 2$, e assim $m = 2.835$ e $n = 90.720$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Seja ABC um triângulo onde α, β e γ são os ângulos internos dos vértices A, B e C, respectivamente. Esse triângulo está inscrito em um círculo de raio unitário. As bissetrizes internas desses ângulos interceptam esse círculo nos pontos A_1, B_1 e C_1, respectivamente. Determine o valor da expressão

$$\frac{\overline{AA_1}\cos\frac{\alpha}{2}+\overline{BB_1}\cos\frac{\beta}{2}+\overline{CC_1}\cos\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma}.$$

Solução:



Os ângulos inscritos $\widehat{A_1BC}$ e $\widehat{A_1AC}$ subentendem o mesmo arco, de modo que $\theta = \frac{\alpha}{2}$. Além disto, o triângulo ΔA_1AB está inscrito no mesmo círculo, de raio unitário, que o triângulo ΔABC. Logo, pela lei dos senos no triângulo ΔA_1AB,

$$\overline{AA_1} = 2\operatorname{sen}(\beta+\frac{\alpha}{2})$$

de modo que, revertendo a expressão da transformação em produto de seno e cosseno, tem-se

$$\overline{AA_1}\cos\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}(\beta+\alpha)+\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\gamma+\operatorname{sen}\beta$$

Analogamente, têm-se que

$$\begin{cases} \overline{BB}_1\cos\frac{\beta}{2} = \operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\gamma \\ \overline{CC}_1\cos\frac{\gamma}{2} = \operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

de modo que a expressão do enunciado é igual a 2.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a equação $z^2+\dfrac{9z^2}{(z+3)^2} = -5$, onde z pertence ao conjunto dos números complexos.

Solução:
Desenvolvendo a equação, tem-se

$$\begin{aligned} &(z^2+5)(z+3)^2+9z^2 = 0 \\ \Rightarrow\ &z^4+6z^3+23z^2+30z+45 = 0 \\ \Rightarrow\ &(z^2+z+3)(z^2+5z+15) = 0 \end{aligned}$$

de modo que

$$z \in \left\{\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}, \frac{-5\pm\sqrt{35}i}{2}\right\}$$

7^0 Questão [Valor: 1,0]
Seja x um número inteiro positivo menor ou igual a 20.000. Sabe-se que 2^x-x^2 é divisível por 7. Determine o número de possíveis valores de x.

Solução:
Para $(2^x - x^2)$ ser divisível por 7, devemos ter $(2^x \equiv x^2) \bmod 7$.

A seqüência $2^x \bmod 7$ é igual a $\{2, 4, 1, \ldots\}$ com período 3.

Já a seqüência $x^2 \bmod 7$ é igual a $\{1, 4, 2, 2, 4, 1, 0, \ldots\}$ com período 7.

Assim, ambas as seqüências fazem um ciclo conjunto de período MDC$(3, 7) = 21$. Num ciclo conjunto completo, por inspeção, as seqüências se igualam para x igual a $2, 4, 5, 6, 10, 15$, o que dá 6 igualdades por ciclo conjunto.

Como $20.000 = (952\times21+8)$, há um total de $(952\times 6+4) = 5.716$ valores de x que satisfazem as condições do problema.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Uma pessoa lança um dado n vezes. Determine, em função de n, a probabilidade de que a sequência de resultados obtidos pelos lançamentos dos dados se inicie por 4 e que, em todos eles, a partir do segundo, o resultado seja maior ou igual ao lançamento anterior.

Solução:
Sejam N_n o número total de combinações de n dados que satisfazem as condições do enunciado e N_n^i o número correspondente de combinações terminadas em i. Assim,

- $N_n^4 = 1$, pois há sempre apenas uma combinação favorável que termina em 4: $\underbrace{44\ldots4}_{n}$.
- $N_n^5 = (n-1)$, pois há $(n-1)$ combinações favoráveis que terminam em 5: $44\ldots445$, $44\ldots455$, $\ldots$, $4\underbrace{5\ldots555}_{(n-1)}$.
- Cada combinação favorável de $(n-1)$ lançamentos pode gerar uma combinação favorável de n lançamentos terminada em 6. Assim, $N_n^6 = N_{(n-1)}$.

Logo, temos a recursão:

$$N_n = N_n^4+N_n^5+N_n^6 = 1+(n-1)+N_{(n-1)}$$

de modo que

$$\begin{cases} N_1 = 1 \\ N_2 = 2+N_1 \\ N_3 = 3+N_2 \\ \vdots \\ N_{(n-1)} = (n-1)+N_{(n-2)} \\ N_n = n+N_{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow N_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(1+n)n}{2}$$

Para n lançamentos, há um total de 6^n combinações possíveis, de modo que a probabilidade P desejada é igual a

$$P = \frac{(1+n)n}{2\times6^n}$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam o polinômio $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ e os conjuntos $A = \{p(k) \,/\, k \in \mathbb{N} \text{ e } k \leq 1999\}$, $B = \{r^2 + 1 \,/\, r \in \mathbb{N}\}$ e $C = \{q^2 + 2 \,/\, q \in \mathbb{N}\}$. Sabe-se que $y = n(A \cap B) - n(A \cap C)$, onde $n(E)$ é o número de elementos do conjunto E. Determine o valor de y.
Obs.: $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais.

Solução:
sln: Nesta solução convencionou-se que os números naturais englobam apenas os inteiros positivos.

O conjunto $A \cap B$ é caracterizado por $(2k^3 - 3k^2 + 1) = r^2$, de modo que $(2k+1)(k-1)^2$ deve ser um quadrado perfeito, o que equivale a $(2k+1)$ ser um quadrado perfeito, já que $k = 1$ equivaleria a $r = 0$. Para $1 < k \leq 1999$, tem-se $3 < (2k+1) \leq 3999$. Este intervalo inclui os quadrados dos números naturais $2, 3, \ldots, 63$, num total de 62 números quadrados do tipo $(2k+1)$, dos quais apenas 31 são ímpares e correspondem a um valor natural de k.

Já o conjunto $A \cap C$ é caracterizado por $(2k^3 - 3k^2) = q^2$, de modo que $(2k-3)k^2$ deve ser um quadrado perfeito, o que equivale a $(2k-3)$ ser um quadrado perfeito, já que $k \neq 0$. Para $1 \leq k \leq 1999$, tem-se $-1 \leq (2k-3) \leq 3995$. Este intervalo inclui os quadrados dos números naturais $1, 2, \ldots, 63$, num total de 63 números quadrados do tipo $(2k-3)$, dos quais 32 são ímpares e correspondem a um valor natural de k.

Logo, $n(A \cap B) - n(A \cap C) = 31 - 32 = -1$.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que o determinante abaixo apresenta valor menor ou igual a 16 para todos valores de a, b e c, pertencentes ao conjunto dos números reais, que satisfazem a equação $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

Solução:
O determinante Δ é igual a

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ &= 2(a^3 + b^3 + c^3) - 6abc \end{aligned}$$

Como $(a^2 + b^2 + c^2) = 4$, então

$$\begin{cases} a^3 + ab^2 + ac^2 = 4a \\ a^2b + b^3 + bc^2 = 4b \\ a^2c + b^2c + c^3 = 4c \end{cases}$$

de modo que

$$4(a+b+c) = (a^3+b^3+c^3) + (ab^2+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+bc^2)$$

Lembrando, ainda, que

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= (a^3+b^3+c^3) + 3(ab^2+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+bc^2) \\ &\quad + 6abc \end{aligned}$$

podemos escrever que $\Delta = (12x - x^3)$, com $x = (a+b+c)$. Derivando Δ em relação a x e igualando o resultado a zero, tem-se

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}x} = 12 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Analisando cada caso, e observando que Δ tende a $-\infty$ quando $x \to \pm\infty$, tem-se $\Delta \leq 16$, máximo este obtido para $x = 2$.

IME 2009/2010 - Objetiva

1ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam r, s, t e v números inteiros positivos tais que $\frac{r}{s} < \frac{t}{v}$. Considere as seguintes relações:

i. $\frac{(r+s)}{s} < \frac{(t+v)}{v}$ ii. $\frac{r}{(r+s)} < \frac{t}{(t+v)}$

iii. $\frac{r}{s} < \frac{(r+t)}{(s+v)}$ iv. $\frac{(r+t)}{s} < \frac{(r+t)}{v}$

O número total de relações que estão corretas é:

Solução: (D) 3
Como r, s, t e v são positivos, da relação do enunciado, têm-se que:

$$\begin{cases} \frac{r}{s}+1 < \frac{t}{v}+1 & \Leftrightarrow \quad \text{(i)} \\ rv < st \Leftrightarrow rv+rt < rt+st & \Leftrightarrow \quad \text{(ii)} \\ rv < st \Leftrightarrow rv+rs < rs+st & \Leftrightarrow \quad \text{(iii)} \end{cases}$$

A relação (iv) equivale a $v < s$, o que não se aplica em geral. Considere, por exemplo, o caso $(r,s,t,v) = (1,2,2,3)$ em que a condição do enunciado é satisfeita mas $v > s$.

2ª Questão [Valor: 0,25]
Considere o determinante de uma matriz de ordem n definido por

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Sabendo que $\Delta_1 = 1$, o valor de Δ_{10} é:

Solução: (C) 29524
Aplicando Laplace na primeira coluna,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 3^{n-1} + \Delta_{n-1}$$

Logo,

$$\Delta_{10} = 3^9 + \Delta_9 = 3^9 + (3^8 + \Delta_8) = \ldots = \sum_{i=0}^{9} 3^i$$

e assim

$$\Delta_{10} = 1\frac{3^{10}-1}{3-1} = 29524$$

3ª Questão [Valor: 0,25]
O valor da expressão $y = \text{sen}\left[\arcsin\left(\frac{1}{a^2-1}\right) + \arccos\left(\frac{1}{a^2-1}\right)\right]$, onde a é um número real e $a \in (-1,0)$, é:

Solução: (E) 1
Seja

$$\theta = \arcsin\left(\frac{1}{a^2-1}\right)$$

de modo que

$$\arccos\left(\frac{1}{a^2-1}\right) = 90^\text{o} - \theta$$

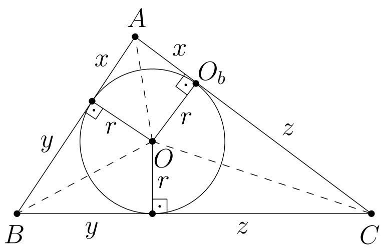
Logo,

$$y = \text{sen}\ (\theta + 90^\text{o} - \theta) = \text{sen}\, 90^\text{o}$$

sln: Se $a \in (-1,0)$, logo $a^2 \in (0,1)$ e $(a^2-1) \in (-1,0)$, de modo que $\frac{1}{a^2-1} \in (-\infty,-1)$. Neste domínio as funções arcsin e arccos não são definidas (nos reais) e a questão deveria ser anulada.

4ª Questão [Valor: 0,25]
Seja ABC um triângulo de lados AB, BC e AC iguais a 26, 28 e 18, respectivamente. Considere o círculo de centro O inscrito nesse triângulo. A distância AO vale:

Solução: (D) $\sqrt{104}$



Usando a notação indicada na figura acima, o perímetro $2p$ e a área S do do triângulo ΔABC são dados por

$$\begin{aligned} 2p &= 26+28+18 \\ &= 72 \\ S &= \sqrt{p\,(p-BC)(p-AC)(p-AB)} \\ &= \sqrt{36\times 10\times 8\times 18} \\ &= 72\sqrt{10} \end{aligned}$$

O raio r do círculo inscrito é tal que

$$S = \frac{rBC}{2} + \frac{rAC}{2} + \frac{rAB}{2} = rp \Rightarrow r = \frac{S}{p} = 2\sqrt{10}$$

Além disto,

$$\begin{cases} BC = y+z \\ AC = x+z \\ AB = y+x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{AC+AB-BC}{2} = 8$$

Assim, do triângulo retângulo ΔAOO_b, tem-se

$$AO = \sqrt{r^2+x^2} = \sqrt{40+64}$$

5ª Questão [Valor: 0,25]
Considere o sistema $\begin{cases} xy + x - y = 5 \\ x^3y^2 - x^2y^3 - 2x^2y + 2xy^2 = 6 \end{cases}$, onde x e y são números inteiros. O valor de $x^3 + y^2 + x^2 + y$ é:

Solução: (E) 38
Desenvolvendo a segunda equação:

$$\begin{aligned} 6 &= x^2y^2(x-y) - 2xy(x-y) \\ &= xy(xy-2)(x-y) \\ &= xy(xy-2)(5-xy) \end{aligned}$$

onde o último passo advém da primeira equação. Com x e y inteiros, por inspeção, conclui-se que $xy = 3$. Assim, de ambas as equações, tem-se $(x-y) = 2$, de modo que há duas possibilidades para (x, y): $(3, 1)$ ou $(-1, -3)$. Para cada uma, o valor da expressão E desejada é

$$(x, y) = \begin{cases} (3, 1) \\ (-1, -3) \end{cases} \Rightarrow E = \begin{cases} 27 + 1 + 9 + 1 = 38 \\ -1 + 9 + 1 - 3 = 6 \end{cases}$$

sln: A questão poderia ser anulada por ter duas respostas (apenas uma, porém, com opção disponível).

6ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + 79^2$. O valor de S satisfaz:

Solução: (C) $8 \times 10^4 \leq S < 9 \times 10^4$
Usando a relação

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} = \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6}$$

tem-se

$$\begin{aligned} S &= S_{80} - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 80^2) \\ &= S_{80} - 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 40^2) \\ &= S_{80} - 4S_{40} \\ &= \frac{2(80)^3 + 3(80)^2 + 80}{6} - 4\frac{2(40)^3 + 3(40)^2 + (40)}{6} \\ &= 85320 \end{aligned}$$

7ª Questão [Valor: 0,25]
Seja o polinômio $p(x) = x^3 + (\ln a)x + e^b$, onde a e b são números reais positivos diferentes de zero. A soma dos cubos das raízes de $p(x)$ depende:
Obs: e representa a base do logaritmo neperiano e ln a função logaritmo neperiano.

Solução: (D) apenas de b e é negativa.
Sejam as raizes r_1, r_2 e r_3. Por Girard,

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = 0 \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \ln a \\ r_1r_2r_3 = -e^b \end{cases}$$

e assim

$$\begin{aligned} 0 &= (r_1 + r_2 + r_3)^3 \\ &= (r_1^3 + r_2^3 + r_3^3) + 3(r_1 + r_2 + r_3)(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) \\ &\quad -3r_1r_2r_3 \end{aligned}$$

de modo que

$$r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 = 3r_1r_2r_3 = -3e^b$$

8ª Questão [Valor: 0,25]
A quantidade k de números naturais positivos, menores do que 1000, que não são divisíveis por 6 ou 8, satisfaz a condição:

Solução: (C) $750 \leq k < 780$
Os múltiplos de 6 formam uma PA com primeiro termo $a_1 = 6$, último termo $a_k = 996$ e razão $r_6 = 6$. Já para os múltiplos de 8, têm-se $b_1 = 8$, $b_{k'} = 992$ e $r_8 = 8$. Se eliminarmos todos estes números, estaremos eliminando os múltiplos de 24 duas vezes. Estes formam a PA com $c_1 = 24$, $c_{k''} = 984$ e $r_{24} = 24$.
Assim,

$$\begin{cases} a_k = a_1 + (k-1)r_6 \\ b_{k'} = b_1 + (k'-1)r_8 \\ c_{k''} = c_1 + (k''-1)r_{24} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{a_k - a_1}{r_6} + 1 = 166 \\ k' = \frac{b_{k'} - b_1}{r_8} + 1 = 124 \\ k'' = \frac{c_{k''} - c_1}{r_{24}} + 1 = 41 \end{cases}$$

Logo, o número desejado é

$$N = 999 - 166 - 124 + 41 = 750$$

9ª Questão [Valor: 0,25]
Uma hipérbole de excentricidade $\sqrt{2}$ tem centro na origem e passa pelo ponto $(\sqrt{5}, 1)$. A equação de uma reta tangente a esta hipérbole e paralela a $y = 2x$ é:

Solução: (A) $\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 6$
Seja a hipérbole canônica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de excentricidade $e = \sqrt{2}$ de modo que

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow a = b$$

Passando por $(\sqrt{5}, 1)$, tem-se

$$\frac{5}{a^2} - \frac{1}{a^2} = 1 \Rightarrow a = b = 2$$

Seja (x_0, y_0) o ponto de tangência, isto é, a interseção da hipérbole $x^2 - y^2 = 4$ com a reta $y = 2x + \beta$. Neste ponto, devemos ter

$$\frac{2x_0\,\mathrm{d}x}{4} - \frac{2y_0\,\mathrm{d}y}{4} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x_0}{y_0} = 2$$

de modo que $x_0 = 2y_0$. Substituindo na equação da hipérbole, tem-se

$$4y_0^2 - y_0^2 = 4 \Rightarrow y_0 = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad x_0 = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

de modo que a reta tangente é tal que

$$\pm\frac{2\sqrt{3}}{3} = \pm 2\frac{4\sqrt{3}}{3} + \beta \Rightarrow \beta = \mp 2\sqrt{3}$$

sln: Mais uma vez, a questão teria mais de uma resposta.

10ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A alternativa que apresenta a condição necessária para que se $f(g(x)) = f(h(x))$, então $g(x) = h(x)$ é:

Solução: (E) f é injetora
A definição de uma função injetora $f(\cdot)$ indica que se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Isto é equivalente à condição de que se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$, que aparece no enunciado.

11ª Questão [Valor: 0,25]
Considere o sistema abaixo, onde x_1, x_2, x_3 e Z pertencem ao conjunto dos números complexos.

$$\begin{cases} (1+i)x_1 - ix_2 + ix_3 = 0 \\ 2ix_1 - x_2 - x_3 = Z \\ (2i-2)x_1 + ix_2 - ix_3 = 0 \end{cases}$$

O argumento de Z, em graus, para que x_3 seja um número real positivo é:

Solução: (E) 180º
Adicionando as primeira e terceira equações, tem-se que $x_1 = 0$, de modo que, da primeira ou terceira equações, $x_2 = x_3$. Logo, da segunda equação,

$$x_3 = \frac{-Z}{2}$$

Assim, x_3 é real positivo se Z for real negativo.

12ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $f(x) = |3 - \log(x)|$, $x \in \mathbb{R}$. Sendo n um número inteiro positivo, a desigualdade $\left|\frac{f(x)}{4}\right| + \left|\frac{2f(x)}{12}\right| + \left|\frac{4f(x)}{36}\right| + \ldots + \left|\frac{2^{n-3}f(x)}{3^{n-1}}\right| + \ldots \leq \frac{9}{4}$ somente é possível se:
Obs: log representa a função logarítmica na base 10.

Solução: (D) $10^0 \leq x \leq 10^6$
O lado esquerdo E da desigualdade é tal que

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} + \ldots\right)|f(x)| \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)|f(x)| \\ &= \frac{3|f(x)|}{4} \end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade, devemos ter

$$|f(x)| \leq 3 \Rightarrow |3 - \log(x)| \leq 3 \Rightarrow 0 \leq \log(x) \leq 6$$

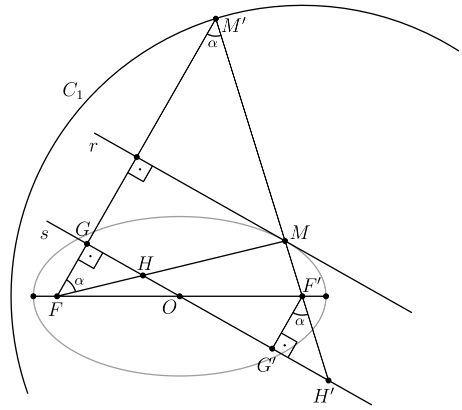
13ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam ABC um triângulo equilátero de lado 2 cm e r uma reta situada no seu plano, distante 3 cm de seu baricentro. Calcule a área da superfície gerada pela rotação deste triângulo em torno da reta r.

Solução: (E) 36π cm^2
Sejam o perímetro $2p$ do triângulo e a distância g do baricentro à reta r. A área S da superfície desejada é

$$S = 2\pi(2p)g = 2\pi \times 6 \times 3 = 36\pi \text{ cm}^2$$

14ª Questão [Valor: 0,25]
Seja M um ponto de uma elipse com centro O e focos F e F'. A reta r é tangente à elipse no ponto M e s é uma reta, que passa por O, paralela a r. As retas suportes dos raios vetores MF e MF' interceptam a reta s em H e H', respectivamente. Sabendo que o segmento FH mede 2 cm, o comprimento $F'H'$ é:

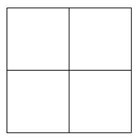
Solução: (D) 2,0 cm



Sejam as projeções G e G', de F e F', respectivamente, na reta s, como indicado na figura acima. Seja ainda o ponto M' pertencente ao círculo diretor $C_1 \equiv (F', 2a)$, de modo que a mediatriz de FM' seja a tangente r à elipse por M. Logo, $M\hat{F}M' = M\hat{M}'F = H'\hat{F}'G'$.

Assim, $\Delta OGF \equiv \Delta OG'F'$, pois $F\hat{O}G = F'\hat{O}G'$, $O\hat{G}F = O\hat{G}'F' = 90^\circ$ e $OF = OF'$, de modo que $FG = F'G'$. Com isto, $\Delta FGH \equiv \Delta F'G'H'$, pois $F\hat{G}H = F'\hat{G}'H'$, $H\hat{F}G = H'\hat{F}'G'$ e $FG = F'G'$, de modo que $FH = F'H'$.

15ª Questão [Valor: 0,25]



Cada um dos quadrados menores da figura acima é pintado aleatoriamente de verde, azul, amarelo ou vermelho. Qual é a probabilidade de que ao menos dois quadrados, que possuam um lado em comum, sejam pintados da mesma cor?

Solução: (E) $\frac{43}{64}$
Sejam A, B, C e D as cores dos quadrados superior esquerdo, superior direito, inferior esquerdo e inferior direito, respectivamente.

Se $A = D$ (há 4 possibilidades para isto), então há 3 valores para B ou C (distintos de A) de forma que **não** haja dois quadrados adjacentes da mesma cor.

Se $A \neq D$ (há 4×3 possibilidades para isto), então há apenas 2 valores para B ou C (distintos de A e D) de forma que **não** haja dois quadrados adjacentes da mesma cor.

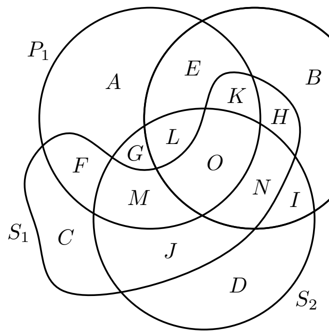
Com isto, a probabilidade de que ao menos dois quadrados adjacentes sejam da mesma cor é

$$p = 1 - \frac{(4 \times 3 \times 3) + (4 \times 3 \times 2 \times 2)}{4^4} = \frac{172}{256} = \frac{43}{64}$$

IME 2009/2010 - Matemática

1ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam os conjuntos P_1, P_2, S_1 e S_2 tais que $(P_2 \cap S_1) \subset P_1$, $(P_1 \cap S_2) \subset P_2$ e $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$. Demonstre que $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$.

Solução:



Usando diagrama de Venn com a nomenclatura definida na figura acima, as condições do enunciado equivalem a

$$\begin{cases} (K \cup H \cup N \cup O) \subset P_1 \\ (G \cup L \cup M \cup O) \subset P_2 \\ (J \cup M \cup N \cup O) \subset (P_1 \cup P_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = N = \emptyset \\ G = M = \emptyset \\ J = \emptyset \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} (S_1 \cap S_2) = O \\ (P_1 \cap P_2) = (E \cup K \cup L \cup O) \end{cases}$$

de modo que $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$, como era pedido demonstrar.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Três dados iguais, honestos e com seis faces numeradas de um a seis são lançados simultaneamente. Determine a probabilidade de que a soma dos resultados de dois quaisquer deles ser igual ao resultado do terceiro dado.

Solução:
Não é possível ter os três dados com o mesmo resultado, pois a soma de dois deles não poderia ser igual ao valor do terceiro. Assim, podemos considerar dois casos:

(i) Se dois resultados são iguais, estes têm que ser as parcelas e o terceiro dado seria a soma destes. Neste caso, temos três possíveis combinações de resultados: (1,1,2), (2,2,4) e (3,3,6); sendo que para cada combinação há 3 arranjos possíveis. Por exemplo: (1,1,2), (1,2,1) ou (2,1,1).

(ii) Se os três resultados são distintos, temos, por inspeção, as seis combinações de resultados: (1,2,3), (1,3,4), (1,4,5), (1,5,6), (2,3,5), (2,4,6); cada uma com 6 arranjos possíveis. Por exemplo: (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1).

Logo, a probabilidade total é

$$p = \frac{3 \times 3 + 6 \times 6}{216} = \frac{45}{216} = \frac{5}{24}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere as hipérboles que passam pelos pontos $(-4, 2)$ e $(-1, -1)$ e apresentam diretriz na reta $y = -4$. Determine a equação do lugar geométrico formado pelos focos dessas hipérboles, associados a esta diretriz, e represente o mesmo no plano cartesiano.

Solução:
A razão entre as distâncias de um ponto de uma cônica para um foco e a diretriz correspondente é igual à excentricidade da cônica. Isto é válido para as três cônicas.

Seja (x_0, y_0) o foco em questão. Para os dois pontos $(-4, 2)$ e $(-1, -1)$ dados, têm-se então que

$$\frac{\sqrt{(-4-x_0)^2+(2-y_0)^2}}{2-(-4)} = \frac{\sqrt{(-1-x_0)^2+(-1-y_0)^2}}{-1-(-4)}$$
$$\Rightarrow (-4-x_0)^2+(2-y_0)^2 = 4[(-1-x_0)^2+(-1-y_0)^2]$$
$$\Rightarrow x_0^2 + (y_0+2)^2 = 8$$

o que corresponde a uma circunferência C_1 de centro $(0, -2)$ e raio $2\sqrt{2}$.

Para que o cônica seja uma hipérbole, a excentricidade deve ser maior do que 1. Assim,

$$\begin{cases} (-1-x_0)^2+(-1-y_0)^2 > 9 \\ (-4-x_0)^2+(2-y_0)^2 > 36 \end{cases}$$

que caracterizam as circunferências C_2 (de centro $(-1, -1)$ e raio 3) e C_3 (de centro $(-4, 2)$ e raio 6), cujas interseções P_1 e P_2 com C_1 são tais que

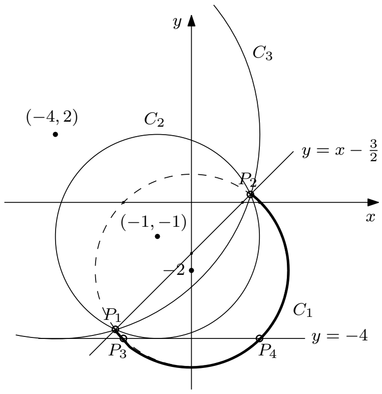
$$\begin{cases} x_0^2+(y_0+2)^2-8 = (-1-x_0)^2+(-1-y_0)^2-9 \\ \text{ou} \\ x_0^2+(y_0+2)^2-8 = (-4-x_0)^2+(2-y_0)^2-36 \end{cases}$$

que determina a reta $y_0 = x_0 - \frac{3}{2}$. Substituindo esta relação na equação de C_1, tem-se

$$2x_0^2 + x_0 - \frac{31}{4} = 0 \Rightarrow P_{1,2} = \left(\frac{-1 \pm 3\sqrt{7}}{4}, \frac{-7 \pm 3\sqrt{7}}{4}\right)$$

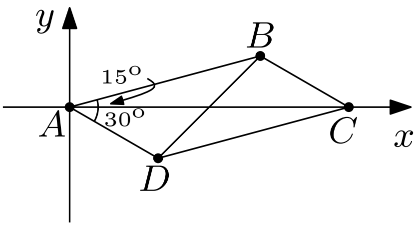
Determinando ainda as interseções de C_1 com a diretriz $y = -4$, têm-se os pontos $P_3 \equiv (-2, -4)$ e $P_4 \equiv (2, -4)$.

Assim, o lugar geométrico desejado é o arco da circunferência C_1 limitado (exclusive) pelos pontos P_1 e P_2, à direita da reta $y_0 = x_0 - \frac{3}{2}$, ou seja, externo às circunferências C_2 e C_3, excluindo-se ainda os pontos P_3 e P_4.



4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja x o valor do maior lado de um paralelogramo $ABCD$. A diagonal AC divide $\hat{A}$ em dois ângulos iguais a 30º e 15º. A projeção de cada um dos quatro vértices sobre a reta suporte da diagonal que não o contém forma o quadrilátero $A'B'C'D'$. Calcule o perímetro de $A'B'C'D'$.

Solução:



Seja o paralelogramo $ABCD$ situado no plano cartesiano como na figura acima, com $AB = x_0$ para diferenciar da variável x. Desta forma, $A \equiv (0,0)$ e $B \equiv (x_0 \cos 15^o, x_0 \operatorname{sen} 15^o)$.

A reta BC tem inclinação de -30^o e passa por B, logo

$$BC : y = -\operatorname{tg} 30^o x + x_0 \frac{\operatorname{sen} 45^o}{\cos 30^o}$$

e o ponto C é a interseção desta reta com $y = 0$, de modo que $C \equiv (x_0 \frac{\operatorname{sen} 45^o}{\operatorname{sen} 30^o}, 0)$.

A reta AD é caracterizada por

$$AD : y = -\operatorname{tg} 30^o x$$

e a reta CD tem inclinação de 15º e passa por C, assim

$$CD : y = \operatorname{tg} 15^o x - x_0 \frac{\operatorname{tg} 15^o \operatorname{sen} 45^o}{\operatorname{sen} 30^o}$$

A interseção das retas AD e CD é $D \equiv (x_0 \frac{\operatorname{sen} 15^o}{\operatorname{tg} 30^o}, -x_0 \operatorname{sen} 15^o)$. Logo, as projeções B' e D', de B e D, respectivamente, sobre AC, são tais que $B' \equiv (x_0 \cos 15^o, 0)$ e $D' \equiv (x_0 \frac{\operatorname{sen} 15^o}{\operatorname{tg} 30^o}, 0)$.

A reta BD é descrita por

$$BD : y = x + x_0(\operatorname{sen} 15^o - \cos 15^o)$$

Se A' é a projeção de A em BD, então a reta AA' é perpendicular à reta BD (logo, AA' tem coeficiente angular -1) e passa por A, de forma que

$$AA' : y = -x$$

Com isto, a interseção de AA' com BD é $A' \equiv (x_0 \frac{\cos 15^o - \operatorname{sen} 15^o}{2}, x_0 \frac{\operatorname{sen} 15^o - \cos 15^o}{2})$.

Tendo A', B' e D', por simetria, podemos calcular os lados do paralelogramo $A'B'C'D'$:

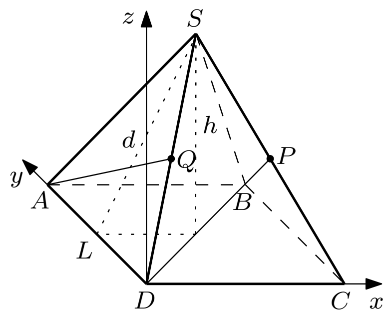
$$\begin{cases} A'B' = C'D' = x_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ A'D' = C'B' = x_0 \sqrt{2} \operatorname{sen} 15^o = x_0 \sqrt{1 - \cos 30^o} \end{cases}$$

e o perímetro $2p$ desejado é

$$2p = x\sqrt{2} \left(1 + \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
A área da superfície lateral de uma pirâmide quadrangular regular $SABCD$ é duas vezes maior do que a área de sua base $ABCD$. Nas faces SAD e SDC traçam-se as medianas AQ e DP. Calcule a ângulo entre estas medianas.

Solução:



Usando a notação da figura acima, as áreas lateral S_L e da base S_B da pirâmide são tais que

$$\begin{cases} S_L = 4\frac{dL}{2} \\ S_B = L^2 \end{cases} \Rightarrow 2dL = 2L^2 \Rightarrow d = L$$

No triângulo pontilhado da figura, tem-se

$$h^2 + \frac{L^2}{4} = d^2 = L^2 \Rightarrow h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Usando os eixos coordenados indicados na figura, os pontos A, D, P e Q são caracterizados por

$$\begin{cases} A \equiv (0, L, 0) \\ D \equiv (0, 0, 0) \\ P \equiv \left(\frac{3L}{4}, \frac{L}{4}, \frac{h}{2}\right) = \left(\frac{3L}{4}, \frac{L}{4}, \frac{L\sqrt{3}}{4}\right) \\ Q \equiv \left(\frac{L}{4}, \frac{L}{4}, \frac{h}{2}\right) = \left(\frac{L}{4}, \frac{L}{4}, \frac{L\sqrt{3}}{4}\right) \end{cases}$$

de modo que

$$\begin{cases} AQ \equiv \left[\frac{L}{4}, -\frac{3L}{4}, \frac{L\sqrt{3}}{4}\right] \\ DP \equiv \left[\frac{3L}{4}, \frac{L}{4}, \frac{L\sqrt{3}}{4}\right] \end{cases}$$

e o ângulo θ entre estes dois vetores é tal que

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{AQ.DP}{|AQ||DP|} \\ &= \frac{\frac{3L^2}{16} - \frac{3L^2}{16} + \frac{3L^2}{16}}{\sqrt{\left(\frac{L^2}{16} + \frac{9L^2}{16} + \frac{3L^2}{16}\right)}\sqrt{\left(\frac{9L^2}{16} + \frac{L^2}{16} + \frac{3L^2}{16}\right)}} \\ &= \frac{\frac{3L^2}{16}}{\sqrt{\frac{13L^2}{16}}\sqrt{\frac{13L^2}{16}}} \\ &= \frac{3}{13} \end{aligned}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Demonstre que a matriz
$$\begin{pmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{pmatrix},$$
onde $x,\ y,\ z \in \mathbb{N}$, pode ser escrita como o quadrado de uma matriz simétrica, com traço igual a zero, cujos elementos pertencem ao conjunto dos números naturais.
Obs: Traço de uma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

Solução:
Por inspeção, a matriz dada pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

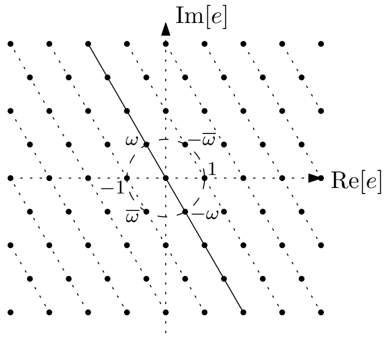
que satisfaz as condições do problema (incluindo o zero no conjunto dos números naturais).

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere o conjunto de números complexos $E = (a + b\omega)$, onde a e b são inteiros e $\omega = \text{cis}\,(2\pi/3)$. Seja o subconjunto $U = \{\alpha \in E / E\beta \in E$ no qual $\alpha\beta = 1\}$. Determine:

(a) Os elementos do conjunto U.

(b) Dois elementos pertencentes ao conjunto $Y = E - U$ tais que o produto seja um número primo.

Solução:



(a) Quando $a = 0$, os números $e \in E$, para os diferentes valores de b, estão espaçados de 1 unidade sobre uma reta fazendo um ângulo de 120º com o eixo real. Esta reta é deslocada horizontalmente para os demais valores de a, gerando o reticulado infinito indicado na figura acima. Desta figura, é fácil observar que

$$|e| = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ e } b = 0 \\ 1 \Leftrightarrow e \in \{\pm 1, \pm\omega, \pm\overline{\omega}\} \\ \geq 1 \text{ para os demais valores de } a \text{ e } b \end{cases}$$

O conjunto U é fechado em relação à operação de inversão. Logo, seus elementos devem ter módulo unitário, pois qualquer elemento de E com módulo maior que 1 não possui inverso em E. Verificando os 6 elementos de E com módulo unitário, todos têm inverso pertencente a E, de modo que $U = \{\pm 1, \pm\omega, \pm\overline{\omega}\}$.

(b) O número $e \in E$ pode ser escrito como

$$e = a - \frac{b}{2} + i\frac{b\sqrt{3}}{2} = |e|\,\text{cis}\,\theta$$

onde

$$|e| = \sqrt{(a - \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4}} = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$
$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{b\sqrt{3}}{2a - b}\right)$$

Sejam $y_1 = (a_1 + b_1\omega)$ e $y_2 = (a_2 + b_2\omega)$ dois elementos de $Y = E - U$. Para que y_1y_2 seja real, devemos ter $\theta_1 = -\theta_2$. Uma forma simples de obter isto é fazendo $a_1 = b_1$ e $a_2 = 0$, de modo que $\theta_1 = \text{arctg}\sqrt{3}$ e $\theta_2 = \text{arctg}(-\sqrt{3})$. Assim, para termos $y_1y_2 = p$, podemos fazer $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = 0$ e $b_2 = -p$, de forma que

$$\begin{aligned} y_1y_2 &= (1+\omega)(-p\omega) \\ &= (1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{p}{2} - \frac{p\sqrt{3}}{2}) \\ &= \frac{p}{4}(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}) \\ &= p \end{aligned}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja a equação $p^n + 144 = q^2$, onde n e q são números inteiros positivos e p é um número primo. Determine os possíveis valores de n, p e q.

Solução:
Do enunciado, podemos escrever que

$$p^n = (q-12)(q+12) \Rightarrow \begin{cases} p^{n_1} = q - 12 \\ p^{n_2} = q + 12 \end{cases}$$

com n_1 e n_2 inteiros não negativos, tais que $n_2 > n_1$ e $(n_1 + n_2) = n$. Do sistema,

$$\begin{cases} p^{n_2} - p^{n_1} = 24 \\ p^{n_2} + p^{n_1} = 2q \end{cases}$$

de modo que a diferença de duas potências do primo p deve ser igual a 24. Testando para os primos conhecidos:

$$\begin{aligned} p = 2 :&\ 2^5 - 2^3 = 24 \Rightarrow n = (5+3);\ 2q = 2^5 + 2^3 = 40 \\ p = 3 :&\ 3^3 - 3^1 = 24 \Rightarrow n = (3+1);\ 2q = 3^3 + 3^1 = 30 \\ p = 5 :&\ 5^2 - 5^0 = 24 \Rightarrow n = (2+0);\ 2q = 5^2 + 5^0 = 26 \end{aligned}$$

Logo, as soluções são

$$(n,p,q) = (8,2,20);\ (4,3,15);\ (2,5,13)$$

9ª Questão [Valor: 1,0]

Seja o sistema $\begin{cases} \text{tg}(x)\,\text{tg}(y-z)=a \\ \text{tg}(y)\,\text{tg}(z-x)=b \\ \text{tg}(z)\,\text{tg}(x-y)=c \end{cases}$, onde a, b, c, x, y, $z \in \mathbb{R}$. Determine as condições que a, b e c devem satisfazer para que o sistema admita pelo menos uma solução.

Solução:
Usando a relação

$$\text{tg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta-\text{sen}\,\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta+\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}=\frac{\text{tg}\,\alpha-\text{tg}\,\beta}{1+\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$$

o sistema do enunciado torna-se

$$\begin{cases} \text{tg}\,x\dfrac{\text{tg}\,y-\text{tg}\,z}{1+\text{tg}\,y\,\text{tg}\,z}=a \\ \text{tg}\,y\dfrac{\text{tg}\,z-\text{tg}\,x}{1+\text{tg}\,z\,\text{tg}\,x}=b \\ \text{tg}\,z\dfrac{\text{tg}\,x-\text{tg}\,y}{1+\text{tg}\,x\,\text{tg}\,y}=c \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} \text{tg}\,x\,\text{tg}\,y-\text{tg}\,x\,\text{tg}\,z-a\,\text{tg}\,y\,\text{tg}\,z=a \\ \text{tg}\,y\,\text{tg}\,z-\text{tg}\,y\,\text{tg}\,x-b\,\text{tg}\,z\,\text{tg}\,x=b \\ \text{tg}\,z\,\text{tg}\,x-\text{tg}\,z\,\text{tg}\,y-c\,\text{tg}\,x\,\text{tg}\,y=c \end{cases}$$

Definindo as variáveis auxiliares $X=\text{tg}\,y\,\text{tg}\,z$, $Y=\text{tg}\,z\,\text{tg}\,x$ e $Z=\text{tg}\,y\,\text{tg}\,x$, de modo que

$$\text{tg}\,x=\sqrt{\frac{ZY}{X}};\quad \text{tg}\,y=\sqrt{\frac{ZX}{Y}};\quad \text{tg}\,z=\sqrt{\frac{XY}{Z}}$$

tem-se o sistema auxiliar S:

$$S:\begin{bmatrix} -a & -1 & 1 \\ 1 & -b & -1 \\ -1 & 1 & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Se $a+b+c+abc\neq 0$, então S tem uma única solução, que, por inspeção, é simples ver que é $X=Y=Z=-1$. Esta solução de S, porém, corresponde a $\text{tg}\,x=\text{tg}\,y=\text{tg}\,z=\sqrt{-1}$, que não tem solução real. Assim, devemos ter $a+b+c+abc=0$, de modo que S tenha infinitas soluções.

Considerando $(a,b,c)=(k,-1,1)$, que satisfaz a condição $a+b+c+abc=0$, o sistema S se transforma em

$$\begin{bmatrix} -k & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que, das segunda e terceira equações, $X=-1$, e então, $Y=Z$, o que corresponde a $y=z=\sqrt{-1}$. Resultados análogos seguem para $(a,b,c)=(1,k,-1)$ ou $(-1,1,k)$.

Assim, devemos ter $a+b+c+abc=0$, com $(a,b,c)\neq(k,-1,1)$, $(1,k,-1)$ ou $(-1,1,k)$, para qualquer k real.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a seqüência:

$$a_1=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}},$$

$$a_2=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}}},$$

$$a_3=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}}}},\ \ldots$$

Determine o produto dos 20 primeiros termos desta seqüência.

Solução:
A relação de recorrência é da forma

$$a_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a_n}\ \Rightarrow\ a_n=2a_{n+1}^2-1$$

o que remete à relação

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$

Assim, se $a_1=\cos\theta$, então $a_2=\cos\frac{\theta}{2}$, $a_3=\cos\frac{\theta}{4}$ etc., de modo que $a_n=\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}$. Logo, o produtório P pedido é tal que

$$\begin{aligned} P &= a_1\times\ldots\times a_{19}\times a_{20} \\ &= \cos\theta\times\ldots\times\cos\frac{\theta}{2^{18}}\times\cos\frac{\theta}{2^{19}} \\ &= \frac{\cos\theta\times\ldots\times\cos\frac{\theta}{2^{18}}\times\cos\frac{\theta}{2^{19}}\times(2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2^{19}})}{2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2^{19}}} \\ &= \frac{\cos\theta\times\ldots\times\cos\frac{\theta}{2^{18}}\times\text{sen}\,\frac{\theta}{2^{18}}}{2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2^{19}}} \\ &= \frac{\cos\theta\times\ldots\times\text{sen}\,\frac{\theta}{2^{17}}}{2^2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2^{19}}} \\ &= \ldots \\ &= \frac{\cos\theta\times\text{sen}\,\theta}{2^{19}\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2^{19}}} \\ &= \frac{\text{sen}\,2\theta}{2^{20}\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2^{19}}} \end{aligned}$$

onde

$$\theta=\text{arccos}\,a_1=\text{arccos}\,\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$$

Logo,

$$P=\frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{3}}{2^{20}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3\times 2^{20}}}=\frac{\sqrt{3}}{2^{21}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3\times 2^{20}}}\approx\frac{\sqrt{3}}{2^{21}\frac{\pi}{3\times 2^{20}}}$$

e então

$$P\approx\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

IME 2008/2009 - Objetiva

1ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam dois conjuntos, X e Y, e a operação Δ, definida por $X\Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$. Pode-se afirmar que

Solução: (A) $(X\Delta Y) \cap (X \cap Y) = \varnothing$
Pela definição, tem-se

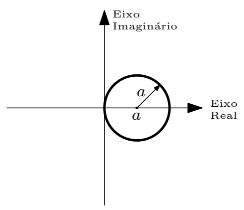
$$X\Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X) = (X \cup Y) - (X \cap Y),$$

de forma que

$$\begin{cases} (X\Delta Y) \cap (X \cap Y) = \varnothing \\ (X\Delta Y) \cap (X - Y) = (X - Y) \\ (X\Delta Y) \cap (Y - X) = (Y - X) \\ (X\Delta Y) \cup (X - Y) = (X\Delta Y) \\ (X\Delta Y) \cup (Y - X) = (X\Delta Y) \end{cases}$$

2ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $z = \rho.e^{i\theta}$ um número complexo onde ρ e θ são, respectivamente, o módulo e o argumento de z e i é a unidade imaginária. Sabe-se que $\rho = 2a\cos\theta$, onde a é uma constante real positiva. A representação de z no plano complexo é

Solução: (A)



$$\begin{aligned} z &= 2a\cos\theta e^{i\theta} \\ &= 2a\cos\theta(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \\ &= a(2\cos^2\theta + 2i\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) \\ &= a(\cos 2\theta + 1 + i\,\text{sen}\,2\theta) \\ &= ae^{2i\theta} + a. \end{aligned}$$

Com isto, z é uma circunferência de raio a deslocada de a na direção positiva do eixo real.

3ª Questão [Valor: 0,25]
Seja A uma matriz quadrada inversível de ordem 4 tal que o resultado da soma $(A^4 + 3A^3)$ é uma matriz de elementos nulos. O valor do determinante de A é

Solução: (E) 81
Do enunciado, $A^4 = -3A^3$, e assim

$$\det(A^4) = \det{}^4(A) = \det(-3A^3) = (-3)^4\det{}^3(A),$$

de modo que $\det(A) = (-3)^4 = 81$.

4ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam $\log 5 = m$, $\log 2 = p$ e $N = 125\sqrt[3]{\dfrac{1562{,}5}{\sqrt[5]{2}}}$. O valor de $\log_5 N$, em função de m e p, é

Solução: (B) $\dfrac{70m - 6p}{15m}$
Do enunciado,

$$\begin{aligned} N &= \log_5 125 + \frac{1}{3}\left(\log_5 \frac{3125}{2} - \frac{1}{5}\log_5 2\right) \\ &= 3 + \frac{1}{3}\left(5 - \log_5 2 - \frac{1}{5}\log_5 2\right) \\ &= 3 + \frac{5}{3} - \frac{2}{5}\log_5 2 \\ &= \frac{14}{3} - \frac{2}{5}\frac{\log 2}{\log 5} \\ &= \frac{70 - 6\frac{p}{m}}{15}. \end{aligned}$$

5ª Questão [Valor: 0,25]
Sabe-se que $y = \dfrac{2 + 2^{\cos 2x}}{2(1 + 4^{\text{sen}^2 x})}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Uma outra expressão para y é

Solução: (C) $2^{-2\,\text{sen}^2 x}$
Do enunciado,

$$\begin{aligned} y &= \frac{2\left(1 + 2^{\cos 2x - 1}\right)}{2\left(1 + 2^{2\,\text{sen}^2 x}\right)} \\ &= \frac{1 + 2^{-2\,\text{sen}^2 x}}{1 + 2^{2\,\text{sen}^2 x}} \\ &= \frac{2^{-\,\text{sen}^2 x}\left(2^{\text{sen}^2 x} + 2^{-\,\text{sen}^2 x}\right)}{2^{\text{sen}^2 x}\left(2^{-\,\text{sen}^2 x} + 2^{\text{sen}^2 x}\right)} \\ &= 2^{-2\,\text{sen}^2 x}. \end{aligned}$$

6ª Questão [Valor: 0,25]
Um triângulo ABC apresenta lados a, b e c. Sabendo que $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são, respectivamente, os ângulos opostos aos lados b e c, o valor de $\dfrac{\text{tg}\hat{B}}{\text{tg}\hat{C}}$ é

Solução: (B) $\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$
Seja R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Das leis dos senos e dos cossenos, têm-se

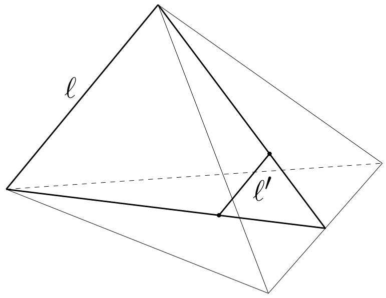
$$\begin{aligned} \text{tg}\,\hat{B} &= \frac{\text{sen}\,\hat{B}}{\cos\hat{B}} = \frac{\frac{b}{2R}}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}} = \frac{abc}{R(a^2 + c^2 - b^2)}, \\ \text{tg}\,\hat{C} &= \frac{\text{sen}\,\hat{C}}{\cos\hat{C}} = \frac{\frac{c}{2R}}{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}} = \frac{abc}{R(a^2 + b^2 - c^2)}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\text{tg}\hat{B}}{\text{tg}\hat{C}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + c^2 - b^2}.$$

7ª Questão [Valor: 0,25]
Os centros das faces de um tetraedro regular são os vértices de um tetraedro interno. Se a razão entre os volumes dos tetraedros interno e original vale $\frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros positivos primos entre si, o valor de $m+n$ é

Solução: (C) 28



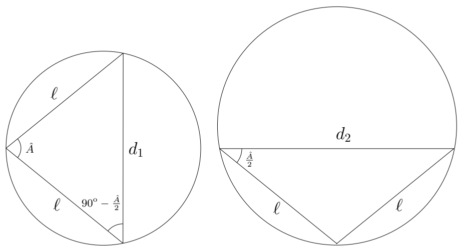
O triângulo em destaque da figura acima é isósceles com base ℓ. Como os centros de cada face estão a $\frac{1}{3}$ da altura total, então o lado ℓ' do tetraedro interno é $\frac{1}{3}$ do lado ℓ do tetraedro original. Assim,

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{\ell'}{\ell}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

de modo que $(m+n) = 28$.

8ª Questão [Valor: 0,25]
Os raios dos círculos circunscritos aos triângulos ABD e ACD de um losango $ABCD$ são, respectivamente, $\frac{25}{2}$ e 25. A área do losango $ABCD$ é

Solução: (D) 400



Das leis dos senos aplicadas ao triâgulos ABD e ACD, têm-se

$$\begin{cases} \frac{\ell}{\operatorname{sen}\left(90^\text{o} - \frac{\hat{A}}{2}\right)} = \frac{\ell}{\cos\frac{\hat{A}}{2}} = 25 \\ \frac{\ell}{\operatorname{sen}\frac{\hat{A}}{2}} = 50 \end{cases} \Rightarrow \frac{\ell^2}{25^2} + \frac{\ell^2}{50^2} = 1.$$

Desta forma,

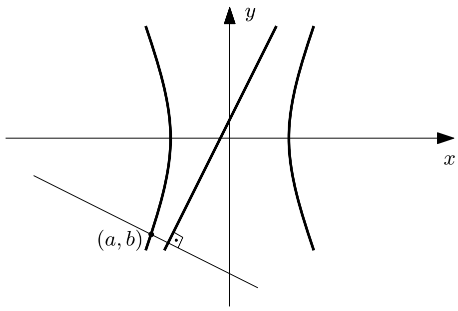
$$\ell = 10\sqrt{5} \;\;\text{e}\;\; \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos\frac{\hat{A}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{cases} d_1 = 2\ell\operatorname{sen}\frac{\hat{A}}{2} = 20 \\ d_2 = 2\ell\cos\frac{\hat{A}}{2} = 40 \end{cases} \Rightarrow \frac{d_1 d_2}{2} = 400.$$

9ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $A(a,b)$ o ponto da cônica $x^2 - y^2 = 27$ mais próximo da reta $4x - 2y + 3 = 0$. O valor de $a+b$ é

Solução: (E) -9



Determinando a reta ortogonal à reta dada e passando por $A(a,b)$, tem-se

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + c \\ b = -\frac{1}{2}a + c \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{2b+a}{2},$$

cuja interseção B com a reta dada é tal que

$$\begin{cases} 2y = -x+(2b+a) \\ 2y = 4x+3 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{a+2b-3}{5}, \frac{4a+8b+3}{10}\right).$$

Determinando a distância $D = \overline{AB}$, tem-se

$$\begin{aligned} D^2 &= \left(a - \frac{a+2b-3}{5}\right)^2 + \left(b - \frac{4a+8b+3}{10}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4a-2b+3}{5}\right)^2 + \left(\frac{-4a+2b-3}{10}\right)^2 \\ &= \frac{(4a-2b+3)^2}{20}. \end{aligned}$$

Minimizando D^2 sujeito a $a^2 - b^2 = 27$, tem-se a função objetivo modificada

$$\overline{D}^2 = D^2 + \lambda(a^2 - b^2 - 27),$$

de forma que

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{D}^2}{\partial a} = 2\frac{4a-2b+3}{20} \times 4 + 2a\lambda, \\ \frac{\partial \overline{D}^2}{\partial b} = 2\frac{4a-2b+3}{20} \times (-2) - 2b\lambda, \end{cases}$$

que, quando igualadas a zero, determinam

$$\frac{4a-2b+3}{-5a} = \frac{4a-2b+3}{-10b} \Rightarrow a = 2b.$$

Usando esta relação na equação da cônica, tem-se

$$b^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} b = 3, a = 6 \\ \text{ou} \\ b = -3, a = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D^2 = \frac{(24-6+3)^2}{20} = \frac{441}{20} \\ \text{ou} \\ D^2 = \frac{(-24+6+3)^2}{20} = \frac{225}{20} \end{cases}$$

indicando que $(-6,-3)$ é o mínimo global.

10ª Questão [Valor: 0,25]
Seja o sistema de equações lineares dadas por

$$\begin{cases} 6y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=10 \\ y_1+6y_2+y_3+y_4+y_5=20 \\ y_1+y_2+6y_3+y_4+y_5=40 \\ y_1+y_2+y_3+6y_4+y_5=80 \\ y_1+y_2+y_3+y_4+6y_5=160 \end{cases}.$$

O valor de $7y_1+3y_5$ é

Solução: (D) 48
Somando todas as equações, tem-se

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=31.$$

Subtraindo esta relação das primeira e quinta equações, têm-se

$$\begin{cases} 5y_1=-21 \\ 5y_5=129 \end{cases} \Rightarrow 7y_1+3y_5=\frac{-147}{5}+\frac{387}{5}=48.$$

11ª Questão [Valor: 0,25]
Uma urna contém cinco bolas numeradas de 1 a 5. Retiram-se, **com reposição**, 3 bolas desta urna, sendo α o número da primeira bola, β o da segunda e λ o da terceira. Dada a equação quadrática $\alpha x^2+\beta x+\lambda=0$, a alternativa que expressa a probabilidade das raízes desta equação serem reais é

Solução: Anulada
Para raízes reais, devemos ter $\beta^2\geq 4\alpha\lambda$. Testando esta relação para cada valor possível de β, têm-se

$$\begin{cases} \beta=1 \\ \beta=2 \\ \beta=3 \\ \beta=4 \\ \beta=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\lambda\leq 0 \\ \alpha\lambda\leq 1 \\ \alpha\lambda\leq 2 \\ \alpha\lambda\leq 4 \\ \alpha\lambda\leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha,\lambda)=\varnothing \\ (\alpha,\lambda)=(1,1) \\ (\alpha,\lambda)=(1,1);(1,2);(2,1) \\ (\alpha,\lambda)=(1,1);(1,2);(2,1); \\ \quad (2,2);(1,3);(3,1); \\ \quad (1,4);(4,1) \\ (\alpha,\lambda)=(1,1);(1,2);(2,1); \\ \quad (2,2);(1,3);(3,1); \\ \quad (1,4);(4,1);(1,5); \\ \quad (5,1);(2,3);(3,2) \end{cases}$$

de modo que há 24 possibilidades em 125.
sln: Penso que os casos $\beta=5$ e $(\alpha,\lambda)=(1,6)$ e $(6,1)$ foram considerados, indevidamente.

12ª Questão [Valor: 0,25]
É dada uma PA de razão r. Sabe-se que o quadrado de qualquer número par x, $x>2$, pode ser expresso como a soma dos n primeiros termos desta PA, onde n é igual à metade de x. O valor de r é

Solução: (C) 8

A PA é tal que

$$\begin{cases} 4^2=a_1+a_2 \\ 6^2=a_1+a_2+a_3 \\ 8^2=a_1+a_2+a_3+a_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3=6^2-4^2=20 \\ a_4=8^2-6^2=28 \end{cases},$$

e assim a razão r da PA é tal que

$$r=a_4-a_3=8.$$

13ª Questão [Valor: 0,25]
Se as curvas $y=x^2+ax+b$ e $x=y^2+cy+d$ se interceptam em quatro pontos distintos, a soma das ordenadas destes quatro pontos

Solução: (A) depende apenas do valor de c.

As interseções são caracterizadas por

$$y=(y^2+cy+d)^2+a(y^2+cy+d)+b,$$

e assim

$$y^4+2cy^3+(a+c^2+2d)y^2+(ac+2cd-1)y+(ad+b+d^2)=0.$$

Logo, a soma das quatro ordenadas é $-2c$.

14ª Questão [Valor: 0,25]
O par ordenado (x,y), com x e y inteiros positivos, satisfaz a equação $5x^2+2y^2=11(xy-11)$. O valor de $x+y$ é

Solução: (D) 41

Do enunciado,

$$5x^2-11xy+2y^2=(5x-y)(x-2y)=-121.$$

Assim, devemos ter

$$\begin{cases} (5x-y)=121,-121,11,-11,1,-1 \\ (x-2y)=-1,1,-11,11,-121,121 \end{cases}.$$

Testando todas as possibilidades, verifica-se que a única que gera soluções inteiras e positivas é

$$\begin{cases} (5x-y)=121 \\ (x-2y)=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=27 \\ y=14 \end{cases}.$$

15ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam f uma função bijetora de uma variável real, definida para todo conjunto dos números reais, e as relações h e g, definidas por: $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:(x,y)\to(x^2,x-f(y))$ e $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:(x,y)\to(x^3,x-f(y))$. Pode-se afirmar que

Solução: (E) h não é injetora e g é bijetora.
Parte do contradomínio $\mathbb{R}^-_x$ não pertence ao conjunto imagem de h. Logo, h é não sobrejetora. Além disto,

$$\begin{cases} h(x_1,y_1)=(x_1^2,x_1-f(y_1)) \\ h(-x_1,y_2)=(x_1^2,-x_1-f(y_2)) \end{cases}$$

Escolhendo $y_2=f^{-1}(f(y_1)-2x_1)$, o que sempre existe, tem-se, com $x_1\neq 0$, que $y_2\neq y_1$. Assim, $h(x_1,y_1)=h(-x_1,y_2)$, com $(x_1,y_1)\neq(-x_1,y_2)$, indicando que h é não injetora também.

Já, dado que $g(x,y)=(x_0,y_0)$, então podemos determinar

$$\begin{cases} x=\sqrt[3]{x_0} \\ y=f^{-1}(x-y_0)=f^{-1}(\sqrt[3]{x_0}-y_0) \end{cases}$$

Assim, x_0 distintos levam a valores de x distintos e y_0 distintos só podem levar a valores de y iguais se os x_0 correspondentes forem distintos, pois f é bijetora. Logo, g é inversível.

IME 2008/2009 - Matemática

1ª Questão [Valor: 1,0]
Sabe-se que: $a = [a] + \{a\}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, onde $[a]$ é a parte inteira de a.

$$\left\{\begin{array}{l} x + [y] + \{z\} = 4{,}2 \\ y + [z] + \{x\} = 3{,}6 \\ z + [x] + \{y\} = 2 \end{array}\right. , \text{ com } x, y, \text{ e } z \in \mathbb{R}$$

Determine o valor de $x - y + z$.

Solução:
Adicionando as primeira e segunda equações e subtraindo a terceira, tem-se

$$x + [y] + \{z\} + y + [z] + \{x\} - z - [x] - \{y\} = 5{,}8$$
$$\Rightarrow 2[y] + 2\{x\} = 5{,}8 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} [y] = 2 \\ \{x\} = 0{,}9 \end{array}\right. .$$

Adicionando as primeira e terceira equações e subtraindo a segunda, tem-se

$$x + [y] + \{z\} - y - [z] - \{x\} + z + [x] + \{y\} = 2{,}6$$
$$\Rightarrow 2[x] + 2\{z\} = 2{,}6 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} [x] = 1 \\ \{z\} = 0{,}3 \end{array}\right. .$$

Adicionando as segunda e terceira equações e subtraindo a primeira, tem-se

$$-x - [y] - \{z\} + y + [z] + \{x\} + z + [x] + \{y\} = 1{,}4$$
$$\Rightarrow 2[z] + 2\{y\} = 1{,}4 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} [z] = 0 \\ \{y\} = 0{,}7 \end{array}\right. .$$

Logo,

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1{,}9 \\ y = 2{,}7 \\ z = 0{,}3 \end{array}\right. \Rightarrow x - y + z = -0.5.$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Um triângulo isósceles possui seus vértices da base sobre o eixo das abscissas e o terceiro vértice, B, sobre o eixo positivo das ordenadas. Sabe-se que a base mede b e seu ângulo oposto $\hat{B} = 120^{\text{o}}$. Considere o lugar geométrico dos pontos cujo quadrado da distância à reta suporte da base do triângulo é igual ao produto das distâncias às outras duas retas que suportam os dois outros lados. Determine a(s) equação(ões) do lugar geométrico e identifique a(s) curva(s) descrita(s).

Solução:
As retas laterais do triângulo são descritas por

$$\left\{\begin{array}{l} \left(-\frac{b}{2}, 0\right); \left(0, \frac{b\sqrt{3}}{6}\right) \in r_1 \Rightarrow r1: -x + \sqrt{3}y - \frac{b}{2} = 0 \\ \left(\frac{b}{2}, 0\right); \left(0, \frac{b\sqrt{3}}{6}\right) \in r_2 \Rightarrow r2: x + \sqrt{3}y - \frac{b}{2} = 0 \end{array}\right. .$$

A distância D do ponto (x_0, y_0) à reta $ax+by+c = 0$ é

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Assim, o lugar geométrico desejado é descrito por

$$y^2 = \frac{|-x + \sqrt{3}y - \frac{b}{2}|}{2} \frac{|x + \sqrt{3}y - \frac{b}{2}|}{2}.$$

Quando acima ou abaixo de ambas as retas, tem-se

$$4y^2 = \left(\sqrt{3}y - \frac{b}{2}\right)^2 - x^2 \Rightarrow \left(y + \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 + x^2 = b^2,$$

que corresponde a uma circunferência de centro em $\left(0, -\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$ e raio b.

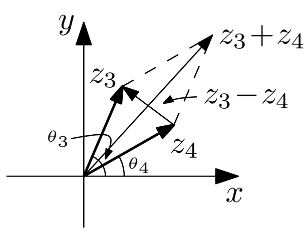
No segundo caso, entre as duas retas, tem-se

$$-4y^2 = \left(\sqrt{3}y - \frac{b}{2}\right)^2 - x^2 \Rightarrow x^2 - \left(\sqrt{7}y - \frac{b\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{b^2}{7},$$

que corresponde a uma hipérbole com vértices coincidindo com os extremos da base do triângulo dado.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Sabe-se que $z_1\overline{z_2} = \dfrac{z_3}{z_4}$ e $|z_3 + z_4| - |z_3 - z_4| = 0$, sendo z_1, z_2, z_3 e z_4 números complexos diferentes de zero. Prove que z_1 e z_2 são ortogonais.
Obs: Números complexos ortogonais são aqueles cujas representações gráficas são perpendiculares entre si e $\overline{z}$ é o número complexo conjugado de z.

Solução:



Da figura acima e pela lei dos cossenos,

$$\left\{\begin{array}{l} |z_3 + z_4| = |z_3|^2 + |z_4|^2 - 2|z_3||z_4|\cos[180^{\text{o}} - (\theta_3 - \theta_4)] \\ |z_3 - z_4| = |z_3|^2 + |z_4|^2 - 2|z_3||z_4|\cos(\theta_3 - \theta_4) \end{array}\right. ,$$

e assim

$$\begin{array}{l} |z_3 + z_4| = |z_3 - z_4| \\ \Rightarrow \cos(\theta_3 - \theta_4) = \cos[180^{\text{o}} - (\theta_3 - \theta_4)] = -\cos(\theta_3 - \theta_4) \\ \Rightarrow \cos(\theta_3 - \theta_4) = 0 \\ \Rightarrow (\theta_3 - \theta_4) = \pm 90^{\text{o}}. \end{array}$$

Do enunciado,

$$\theta_1 + (-\theta_2) = \theta_3 - \theta_4 \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 = \pm 90^{\text{o}},$$

de modo que z_1 e z_2 são ortogonais.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a função $F : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, com as seguintes características:
$F(0,0) = 1$;
$F(n, m+1) = q.F(n,m)$, onde q é um número real diferente de zero.
$F(n+1, 0) = r + F(n, 0)$, onde r é um número real diferente de zero.
Determine o valor de $\displaystyle\sum_{i=0}^{2009} F(i,i)$, $i \in \mathbb{N}$.

Solução:
Do enunciado,

$$\begin{cases} F(0,0) = 1 \\ F(1,1) = qF(1,0) = q(r + F(0,0)) = q(r+1) \\ F(2,2) = q^2F(2,0) = q^2(2r + F(0,0)) = q^2(2r+1) \\ \vdots \\ F(i,i) = q^i(ir+1) \end{cases}$$

Seja S a soma desejada. Logo, se $q \neq 1$, usando a fórmula da soma de uma PG, tem-se

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{2009} q^i(ir+1) \\ &= \left(r\sum_{i=0}^{2009} q^i i \right) + \left(\sum_{i=0}^{2009} q^i \right) \\ &= \left(r\sum_{i=1}^{2009}\sum_{j=i}^{2009} q^j \right) + \frac{q^{2010}-1}{q-1} \\ &= \left(r\sum_{i=1}^{2009} q^i \frac{q^{2010-i}-1}{q-1} \right) + \frac{q^{2010}-1}{q-1} \\ &= \left(r\sum_{i=1}^{2009} \frac{q^{2010}-q^i}{q-1} \right) + \frac{q^{2010}-1}{q-1} \\ &= \left(r\sum_{i=1}^{2009} \frac{q^{2010}}{q-1} \right) - \left(\frac{r}{q-1}\sum_{i=1}^{2009} q^i \right) + \frac{q^{2010}-1}{q-1} \\ &= \frac{2009rq^{2010}}{q-1} - \frac{rq(q^{2009}-1)}{(q-1)^2} + \frac{q^{2010}-1}{q-1} \\ &= \frac{(q-1)[(2009r+1)q^{2010}-1] - rq(q^{2009}-1)}{(q-1)^2} \end{aligned}$$

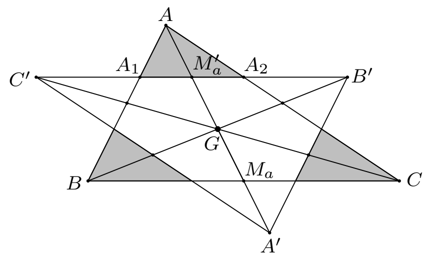
Já, se $q = 1$,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{2009} (ir+1) \\ &= \left(r\sum_{i=0}^{2009} i \right) + 2010 \\ &= r\frac{2009}{2}2010 + 2010 \\ &= 1005(2009r+2) \end{aligned}$$

sln: Acho que o enunciado quis dizer $q \neq 1$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Seja G o ponto de interseção das medianas de um triângulo ABC com área S. Considere os pontos A', B' e C' obtidos por uma rotação de 180º dos pontos A, B e C, respectivamente, em torno de G. Determine, em função de S, a área formada pela união das regiões delimitadas pelos triângulos ABC e $A'B'C'$.

Solução:



Usando a notação da figura acima, $B'M'_aC'$ é a rotação de BM_aC de 180º em torno de G. Assim, $A_1A_2 \parallel BC$ e $GM_a = GM'_a$, de modo que

$$AM'_a = M'_aG = GM_a = M_aA' = \frac{AM_a}{3}.$$

Da semelhança dos triângulos ΔAA_1A_2 e ΔABC, com razão $\frac{AM'_a}{AM_a} = \frac{1}{3}$, tem-se $S_{AA_1A_2} = \frac{1}{9}S$.

Um raciocínio inteiramente análogo pode ser feito para cada um dos triângulos destacados na figura, concluindo-se que todos têm a mesma área. Logo, a área desejada S_T é

$$S_T = S + 3\frac{1}{9}S = \frac{4}{3}S.$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a seguinte inequação, para $0 \le x < 2\pi$:

$$\frac{3\,\mathrm{sen}^2 x + 2\cos^2 x + 4\,\mathrm{sen}\,x - (1+4\sqrt{2})\,\mathrm{sen}\,x\cos x + 4\cos x - (2+2\sqrt{2})}{2\,\mathrm{sen}\,x - 2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,x\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}} > 2$$

Solução:
Para efeito de diagramação, seja a notação auxiliar

$$\begin{cases} \mathrm{s}(x) \equiv \mathrm{sen}\,x \\ \mathrm{c}(x) \equiv \cos x \end{cases}.$$

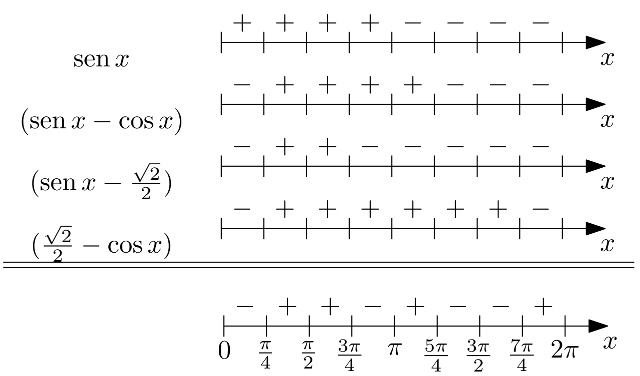
Assim, o lado esquerdo E da inequação do enunciado pode ser desenvolvido como

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mathrm{s}^2(x)+2+4\mathrm{s}(x)-(1+4\sqrt{2})\mathrm{s}(x)\mathrm{c}(x)+4\mathrm{c}(x)-2-2\sqrt{2}}{2\mathrm{s}(x)-2\sqrt{2}\mathrm{s}(x)\mathrm{c}(x)+2\mathrm{c}(x)-\sqrt{2}} \\ &= \frac{\mathrm{s}^2(x)-\mathrm{s}(x)\mathrm{c}(x)+2(2\mathrm{s}(x)-2\sqrt{2}\mathrm{s}(x)\mathrm{c}(x)+2\mathrm{c}(x)-\sqrt{2})}{2\mathrm{s}(x)-2\sqrt{2}\mathrm{s}(x)\mathrm{c}(x)+2\mathrm{c}(x)-\sqrt{2}} \\ &= \frac{\mathrm{s}^2(x)-\mathrm{s}(x)\mathrm{c}(x)}{2\mathrm{s}(x)-2\sqrt{2}\mathrm{s}(x)\mathrm{c}(x)+2\mathrm{c}(x)-\sqrt{2}}+2 \\ &= \frac{\mathrm{s}(x)(\mathrm{s}(x)-\mathrm{c}(x))}{2\sqrt{2}(\mathrm{s}(x)-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{c}(x))}+2. \end{aligned}$$

Assim, devemos ter que

$$\frac{\mathrm{sen}\,x(\mathrm{sen}\,x-\cos x)}{2\sqrt{2}(\mathrm{sen}\,x-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x)} > 0.$$

Analisando os diagramas de sinais dos termos do lado esquerdo, tem-se

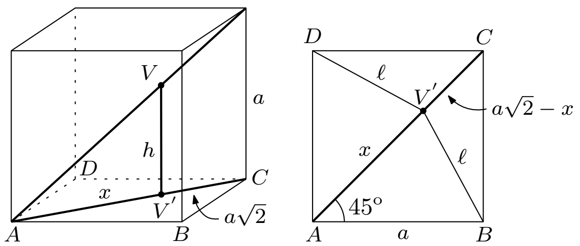


Logo, o conjunto-solução é

$$x \in \left\{ \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right) \right\}.$$

7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um cubo de base $ABCD$ com aresta a. No interior do cubo, sobre a diagonal principal, marca-se o ponto V, formando-se a pirâmide $VABCD$. Determine os possíveis valores da altura da pirâmide $VABCD$, em função de a, sabendo que a soma dos quadrados das arestas laterais da pirâmide é igual a ka^2, sendo k um número primo.
Obs: As arestas laterais da pirâmide são VA, VB, VC e VD.

Solução:



Na figura acima à esquerda, por semelhança de triângulos, tem-se $x = h\sqrt{2}$. Na figura da direita, pela lei dos cossenos,

$$\ell^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos 45^{\mathrm{o}} = a^2 + 2h^2 - 2ah.$$

Assim, pode-se determinar que

$$\begin{cases} VA^2 = h^2 + x^2 = 3h^2 \\ VB^2 = h^2 + \ell^2 = 3h^2 + a^2 - 2ah \\ VC^2 = h^2 + (a\sqrt{2} - x)^2 = 3h^2 + 2a^2 - 4ah \\ VD^2 = VB^2 = 3h^2 + a^2 - 2ah \end{cases},$$

de forma que

$$\begin{aligned} ka^2 &= VA^2 + VB^2 + VC^2 + VD^2 \\ &= 12h^2 + 4a^2 - 8ah \\ &\Rightarrow 12h^2 - 8ah + (4-k)a^2 = 0 \end{aligned}$$

e então

$$h = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48(4-k)a^2}}{24} = \frac{2 \pm \sqrt{3k-8}}{6}a.$$

Usando k primo e considerando $0 \le h \le a$, tem-se

$$\begin{cases} k = 2 & \Rightarrow h = \varnothing \\ k = 3 & \Rightarrow h = \frac{a}{6} \text{ ou } \frac{a}{2} \\ k = 5 & \Rightarrow h = \frac{2+\sqrt{7}}{6}a \\ k = 7 & \Rightarrow h = \frac{2+\sqrt{13}}{6}a \\ k = 11 & \Rightarrow h = \varnothing \\ \vdots & \Rightarrow h = \varnothing \end{cases},$$

de modo que os possíveis valores de h são

$$h \in \left\{ \frac{a}{6}, \frac{a}{2}, \frac{2+\sqrt{7}}{6}a, \frac{2+\sqrt{13}}{6}a \right\}.$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Dada uma matriz quadrada A de ordem n, definida da seguinte forma:

- os elementos da linha i da coluna n são da forma $a_{in} = -\binom{n}{n-i+1}$;
- os elementos imediatamente abaixo da diagonal principal são unitários, isto é, $a_{ij} = 1$ para $i - j = 1$;
- todos os demais elementos são nulos.

Sendo I a matriz identidade de ordem n e $\det(M)$ o determinante de uma matriz M, encontre as raízes da equação $\det(x.I - A) = 0$.

Solução:
Pela lei de formação da matriz A, a equação do enunciado assume a forma

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n} \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & -1 & x & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n-2} \\ 0 & 0 & -1 & x & \dots & 0 & \binom{n}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x+\binom{n}{1} \end{vmatrix} = 0.$$

Aplicando Laplace na primeira coluna, tem-se

$$x \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n-1} \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n-2} \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & \binom{n}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x+\binom{n}{1} \end{vmatrix}$$
$$-(-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n}) \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n-2} \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & \binom{n}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x+\binom{n}{1} \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo o segundo termo, $D2_n$, aplicando Laplace repetidamente na primeira coluna, tem-se

$$\begin{aligned} D2_n &= -(-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n} \\ -1 & x & \dots & 0 & \binom{n}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x+\binom{n}{1} \end{vmatrix} \\ &= \dots \\ &= -(-1) \begin{vmatrix} 0 & \binom{n}{n} \\ -1 & x+\binom{n}{1} \end{vmatrix} \\ &= \binom{n}{n}. \end{aligned}$$

Analisando o primeiro termo, $xD1_{n-1}$, aplicando Laplace repetidamente na primeira coluna, tem-se

$$\begin{aligned} xD1_{n-1} &= x \left(x \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n-2} \\ -1 & x & \dots & 0 & \binom{n}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x+\binom{n}{1} \end{vmatrix} \right. \\ &\quad \left. -(-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n-1} \\ -1 & x & \dots & 0 & \binom{n}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x+\binom{n}{1} \end{vmatrix} \right) \\ &= x\left(xD1_{n-2} + D2_{n-1}\right) \\ &= x\left(x\left(xD1_{n-3} + D2_{n-2}\right) + D2_{n-1}\right) \end{aligned}$$

com $D1_1 = x + \binom{n}{1}$.

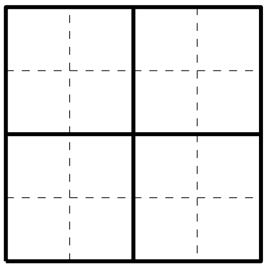
Assim, a equação do enunciado é da forma

$$\begin{aligned} 0 &= x\left(x \dots x\left(x+\binom{n}{1}\right)\right) + \dots + \binom{n}{n-1}\Bigg) + \binom{n}{n} \\ &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1}x + \binom{n}{n} \\ &= (x+1)^n, \end{aligned}$$

que possui n raízes iguais a $x = -1$.

9ª Questão [Valor: 1,0]
A figura abaixo é composta de 16 quadrados menores. De quantas formas é possível preencher estes quadrados com os números 1, 2, 3 e 4, de modo que um número não pode aparecer 2 vezes em:

- uma mesma linha.
- uma mesma coluna.
- cada um dos quatro quadrados demarcados pelas linhas contínuas.

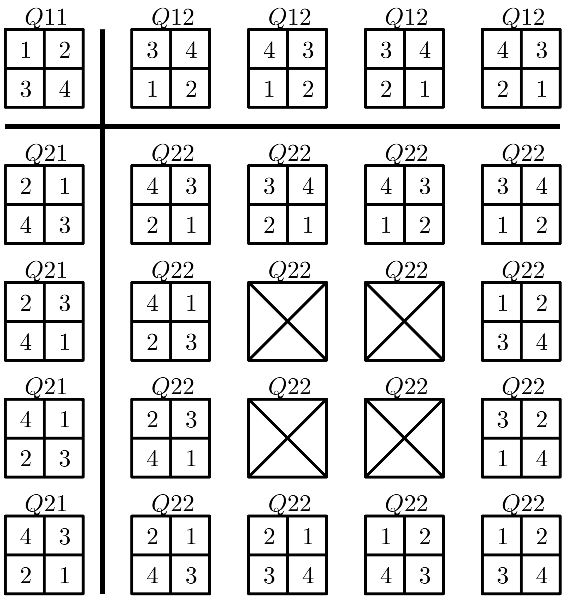


Solução:
Sejam $Q11$ o quadrado superior esquerdo, $Q12$ o quadrado superior direito, $Q21$ o quadrado inferior esquerdo e $Q22$ o quadrado inferior direito.

Para preencher $Q11$ há $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilidades distintas.

Dados $Q11(1,1)$ e $Q11(1,2)$, há 2 possibilidades para $Q12(1,1)$, definindo-se $Q12(1,2)$. Analogamente, dados $Q11(2,1)$ e $Q11(2,2)$, há 2 possibilidades para $Q12(2,1)$, definindo-se $Q12(2,2)$. Assim, dado $Q11$, há 4 possibilidades para $Q12$. Simetricamente, dado $Q11$, há também 4 possibilidades para $Q21$.

Porém, das 16 possibilidades de $Q12$ e $Q21$, para um $Q11$ dado, há 4 casos em que as colunas de $Q12$ são iguais às linhas de $Q21$. Nestes casos, o preenchimento de $Q22$, de acordo com as regras do problema, se torna inviável, como ilustrado na figura abaixo.



Preenchendo-se $Q12$ e $Q21$, evitando-se os 4 casos indicados acima, o preenchimento de $Q22$ é único. Assim, há um total de $24 \times (16-4) = 288$ preenchimentos distintos possíveis.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja a uma constante real positiva. Resolva a equação

$$\sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2-x^2}}=2\sqrt{2}x,$$

para $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq x \leq a$.

Solução:
Fazendo $x = a \operatorname{sen} y$, com $y \in [0, \pi]$, já que $0 \leq x \leq a$, tem-se

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} = a\sqrt{\cos^2 y} = a\cos y,$$

com y, de fato, restrito a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, para garantir $\cos y \geq 0$.

Assim, a equação do enunciado torna-se

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a}\sqrt{a+a\cos y}+\sqrt{3a}\sqrt{a-a\cos y} = 2\sqrt{2}a \operatorname{sen} y\\
&\Rightarrow \sqrt{1+\cos y}+\sqrt{3}\sqrt{1-\cos y} = 2\sqrt{2}\operatorname{sen} y\\
&\Rightarrow \sqrt{2\cos^2\frac{y}{2}}+\sqrt{3}\sqrt{2\operatorname{sen}^2\frac{y}{2}} = 2\sqrt{2}\operatorname{sen} y\\
&\Rightarrow \cos\frac{y}{2}+\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{y}{2} = 2\operatorname{sen} y\\
&\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{y}{2}\right) = \operatorname{sen} y\\
&\Rightarrow \frac{\pi}{6}+\frac{y}{2} = \begin{cases} y+2k\pi \\ \text{ou} \\ (\pi-y)+2k\pi \end{cases}\\
&\Rightarrow y = \begin{cases} \frac{1-12k}{3}\pi \\ \text{ou} \\ \frac{5+12k}{9}\pi \end{cases}
\end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Considerando o domínio de y, a única solução é $y = \frac{\pi}{3}$, que corresponde a $x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

IME 2007/2008 - Objetiva

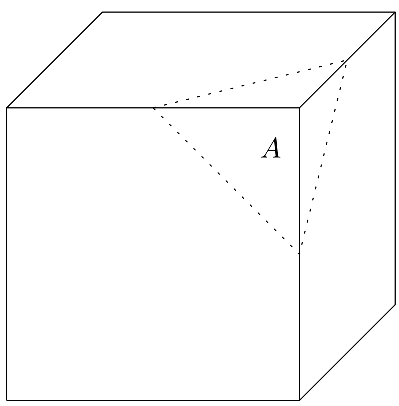
1ª Questão [Valor: 0,25]
De quantas maneiras n bolas idênticas podem ser distribuídas em três cestos de cores verde, amarelo e azul?

Solução: Anulada
Considerando que a primeira urna tem 0 bola, as outras duas urnas podem ter $(0, n), (1, n-1), \ldots, (n, 0)$ bolas, ou seja, há $(n+1)$ possibilidades de se distribuir as demais bolas dentre as outras duas urnas. Considerando que a primeira urna tem 1 bola, há n possibilidades de se distribuir as demais bolas dentre as outras duas urnas, e assim sucessivamente. Logo, há um total de

$$T = (n+1) + n + \ldots + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

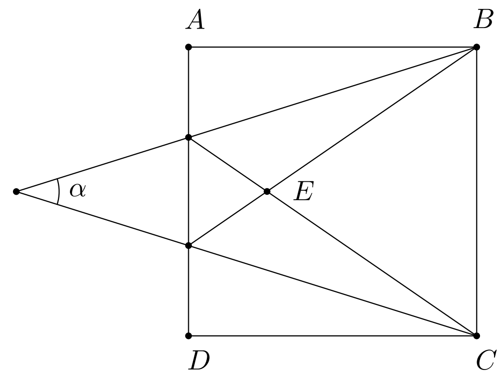
maneiras distintas de dividir as n bolas dentre as três urnas.

2ª Questão [Valor: 0,25]
Um plano corta um cubo com aresta de comprimento 1 passando pelo ponto médio de três arestas concorrentes no vértice A e formando uma pirâmide, conforme a figura a seguir. Este processo é repetido para todos os vértices. As pirâmides obtidas são agrupadas formando um octaedro cuja área da superfície externa é igual a:

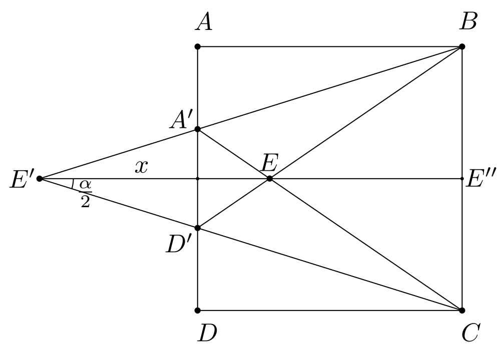


Solução: (B) $\sqrt{3}$
A base de cada pirâmide é um triângulo equilátero de lado $\ell = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e área $S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}$. Logo, a área da superfície do octaedro é $S_8 = 8S = \sqrt{3}$.

3ª Questão [Valor: 0,25]
Na figura seguinte $ABCD$ é um quadrado de lado 1 e BCE é um triângulo equilátero. O valor de $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ é igual a:



Solução: (C) $1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
Seja a notação indicada na figura abaixo.



A altura do triângulo equilátero ΔBCE é $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de forma que a altura do triângulo equilátero $\Delta EA'D'$ é $h' = 1 - h = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$, e então $A'D' = \frac{2h'}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$.

Com isto,

$$\frac{x}{A'D'} = \frac{x+1}{1} \Rightarrow x = \frac{A'D'}{1 - A'D'} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

de modo que

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

4ª Questão [Valor: 0,25]
Assinale a opção correspondente ao valor da soma das raízes reais da equação:

$$\begin{vmatrix} \log x & \log x & \log x \\ \log 6x & \log 3x & \cos x \\ 1 & 1 & \log^2 x \end{vmatrix} = 0$$

Solução: (E) 11,1
Como $x > 0$, a equação é dada por

$$\begin{aligned} & (\log^3 x - \log x)\log 3x + (\log x - \log^3 x)\log 6x = 0 \\ \Rightarrow\ & \log x(\log^2 x - 1)(\log 3x - \log 6x) = 0 \\ \Rightarrow\ & \log x(\log^2 x - 1)\log\frac{1}{2} = 0 \\ \Rightarrow\ & \log x(\log x - 1)(\log x + 1) = 0 \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} x = 1 \\ x = 10 \\ x = 0{,}1 \end{cases} \end{aligned}$$

5ª Questão [Valor: 0,25]
Assinale a opção correspondente ao valor da soma das raízes da equação: $y^{3/2} + 5y + 2y^{1/2} + 8 = 0$

Solução: (C) 21
Definindo $y^{1/2} = z$, tem-se a equação

$$z^3 + 5z^2 + 2z - 8$$

Além disto, tem-se $y = z^2$ e então

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \\ &= (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) \\ &= (-5)^2 - 2(2) \\ &= 21 \end{aligned}$$

6ª Questão [Valor: 0,25]
Uma série de Fibonacci é uma seqüência de valores definida da seguinte maneira:
- Os dois primeiros termos são iguais à unidade, ou seja, $T_1 = T_2 = 1$
- Cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores, isto é: $T_N = T_{N-2} + T_{N-1}$
Se $T_{18} = 2584$ e $T_{21} = 10946$ então T_{22} é igual a:

Solução: (C) 17711
Como

$$\begin{cases} T_{20} = T_{19} + T_{18} \\ T_{21} = T_{20} + T_{19} \end{cases} \Rightarrow T_{19} = \frac{T_{21} - T_{18}}{2} = 4181$$

então,

$$\begin{cases} T_{20} = T_{19} + T_{18} = 4181 + 2584 = 6765 \\ T_{22} = T_{21} + T_{20} = 10946 + 6765 = 17711 \end{cases}$$

7ª Questão [Valor: 0,25]
Assinale a opção correspondente ao valor de μ que faz com que a equação $(1+\mu)s^3 + 6s^2 + 5s + 1 = 0$ possua raízes no eixo imaginário.

Solução: (D) 29
Sejam as raízes $r_1 = ai$, $r_2 = -ai$ e $r_3 = b$. Logo,

$$(1+\mu)s^3 + 6s^2 + 5s + 1 \equiv (1+\mu)(s - ai)(s + ai)(s - b)$$

de forma que

$$\begin{cases} 6 = -(1+\mu)b \\ 5 = (1+\mu)a^2 \\ 1 = -(1+\mu)a^2b \end{cases} \Rightarrow (1+\mu) = 30$$

8ª Questão [Valor: 0,25]
Assinale a opção correspondente ao número de possíveis valores de $\alpha \in [0, 2\pi)$ tais que o lugar geométrico representado pela equação $3x^2+4y^2-16y-12x+\text{tg}\alpha+27 = 0$ seja um único ponto.

Solução: (C) 2 valores
A equação do enunciado pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & (3x^2-12x+12)+(4y^2-16y+16) = 1-\text{tg}\alpha \\ \Rightarrow\ & 3(x-2)^2 + 4(y-2)^2 = 1 - \text{tg}\alpha \end{aligned}$$

que corresponde a um único ponto se

$$\text{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$$

9ª Questão [Valor: 0,25]
Sendo o ponto A $(8, -2)$ um vértice de um losango $ABCD$ e $2x + y + 1 = 0$ a reta que contém os vértices B e D, assinale a opção correspondente ao vértice C.

Solução: (D) $(-4, -8)$
A reta AC é perpendicular a BD passando por A, logo AC é descrita por $2y - x + 12 = 0$. A interseção M de AC e BD é dada por

$$\begin{cases} -x_M + 2y_M = -12 \\ 2x_M + y_M = -1 \end{cases} \Rightarrow M \equiv (x_M, y_M) = (2, -5)$$

Assim, podemos determinar C da forma

$$M = \frac{A + C}{2} \Rightarrow C = 2M - A = 2(2, -5) - (8, -2)$$

10ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam $\mathbf{L}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{U}$ matrizes quadradas de ordem n cujos elementos da i-ésima linha e j-ésima coluna $l_{i,j}$, $d_{i,j}$ e $u_{i,j}$, respectivamente, são dados por:

$$l_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{i^2}{i.j}, \text{ para } i \geq j \\ 0, \text{ para } i < j \end{cases},$$

$$d_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{i+1}{i}, \text{ para } i = j \\ 0, \text{ para } i \neq j \end{cases} \quad \text{e}$$

$$u_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{2i}{i+j}, \text{ para } i \leq j \\ 0, \text{ para } i > j \end{cases}.$$

O valor do determinante de $\mathbf{A} = \mathbf{LDU}$ é igual a:

Solução: (D) $n+1$
A matriz $\mathbf{L}$ é triangular inferior com os elementos da diagonal iguais a 1. Logo, o determinante de $\mathbf{L}$ é 1.

A matriz $\mathbf{D}$ é diagonal com elementos da diagonal iguais a $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}$. Logo, o determinante de $\mathbf{D}$ é $\frac{1}{2}\frac{2}{3}\ldots\frac{n+1}{n} = (n+1)$.

A matriz $\mathbf{U}$ é triangular superior com os elementos da diagonal iguais a 1. Logo, o determinante de $\mathbf{U}$ é 1.

Assim,

$$\det[\mathbf{A}] = \det[\mathbf{L}]\det[\mathbf{D}]\det[\mathbf{U}] = (n+1)$$

11ª Questão [Valor: 0,25]
Assinale a opção correspondente aos valores de K para os quais o sistema de equações dado por:

$$\begin{cases} e^x + e^y = e^{x+y} \\ x + y = K \end{cases}$$

admite solução real.

Solução: (D) $K > \ln 4$
Da segunda equação, $e^{x+y} = e^K$, de forma que $e^x = e^{K-y}$. Usando esta expressão na primeira equação, tem-se

$$e^{K-y} + e^y = e^K \Rightarrow e^{2y} - e^K e^y + e^K = 0$$

Definindo $z = e^y$, tem-se

$$z^2 - e^K z + e^K = 0$$

que possui solução real se

$$e^{2K} - 4e^K = e^K(e^K - 4) \geq 0 \Rightarrow e^K \geq 4 \Rightarrow K \geq \ln 4$$

sln: Esta questão merecia ser anulada.

12ª Questão [Valor: 0,25]
A soma dos números inteiros positivos de quatro algarismos que admitem 3, 5 e 7 como fatores primos é:

Solução: (D) 474075
Devemos adicionar os inteiros entre 1000 e 9999 que sejam múltiplos de $\text{mmc}(3,5,7) = 105$. Com um pouco de conta, chega-se à PA de primeiro termo 1050, razão 105 e último termo 9975, tal que

$$9975 = 1050 + (n-1)105 \Rightarrow n = 86$$

de forma que

$$1050 + 1155 + \ldots + 9975 = \frac{(1050 + 9975)86}{2} = 475075$$

13ª Questão [Valor: 0,25]
Seja x um número real ou complexo para o qual $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1$. O valor de $\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right)$ é:

Solução: (B) 2
Do enunciado,

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

Logo, $x^6 = e^{\pm 2i\pi} = 1$, e assim $\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) = 2$.

14ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $g(x) = e^x$ e $h(x) = g(f^{-1}(x))$. Se os valores da base e da altura de um triângulo são definidos por $h(0{,}5)$ e $h(0{,}75)$, respectivamente, a área desse triângulo é igual a:

Solução: (C) $\frac{\sqrt{21}}{2}$
Da definição de $f(x)$, tem-se

$$e^{2x} = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)$$

de forma que a função inversa de $f(x)$ é dada por

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Com isto,

$$g(f^{-1}(x)) = e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

e assim

$$\begin{cases} h(0{,}5) = \sqrt{\frac{1+0{,}5}{1-0{,}5}} = \sqrt{3} \\ h(0{,}75) = \sqrt{\frac{1+0{,}75}{1-0{,}75}} = \sqrt{7} \end{cases}$$

de modo que $S = \frac{\sqrt{3}\sqrt{7}}{2}$.

15ª Questão [Valor: 0,25]
Seja a_i um dos termos da progressão geométrica com oito elementos $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$, e $S = \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \ldots + \log_2 a_8$. Se $b = \frac{S}{-5}$ e $f(x) = |x + 2b| + |2x - b|$, o valor de $f(1)$ será:

Solução: (C) 11
Do enunciado, $S = [1+0+(-1)+\ldots+(-6)] = -20$, de forma que $b = 4$. Assim, $f(1) = |1+8| + |2-4| = 11$.

IME 2007/2008 - Matemática

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o conjunto-solução da equação $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x$

Solução:
Definindo $S = (\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x)$ e usando o produto notável

$$
\begin{aligned}
S &= (\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x . \cos x + \cos^2 x) \\
&= 1 - \operatorname{sen} x . \cos x
\end{aligned}
$$

deve-se ter

$$
\begin{aligned}
1 - \operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x &= (1 - \operatorname{sen} x . \cos x)(1 + \operatorname{sen} x . \cos x) \\
&= (1 - \operatorname{sen} x . \cos x)
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x . \cos x = 1 \\ \text{ou} \\ \operatorname{sen} x . \cos x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} 2x = 2 \\ \text{ou} \\ \operatorname{sen} x = 0 \\ \text{ou} \\ \cos x = 0 \end{array} \right.
$$

Logo, a princípio, $x = k\frac{\pi}{2}$. Testando as raízes, tem-se que $x = (2k\pi + \pi)$ e $x = (2k\pi - \frac{\pi}{2})$ são espúrias. Logo, o conjunto solução é da forma $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4}$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Encontre o polinômio $P(x)$ tal que $Q(x) + 1 = (x - 1)^3 . P(x)$ e $Q(x) + 2$ é divisível por x^4, onde $Q(x)$ é um polinômio do 6º grau.

Solução:
Seja $Q(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6$. Como $Q(x)+2$ é divisível por x^4, então $a = -2$, $b = c = d = 0$, de modo que $Q(x) = -2 + ex^4 + fx^5 + gx^6$. Como $Q(x) + 1$ é divisível por $(x - 1)^3$, então $x = 1$ é raiz tripla de $Q(x) + 1$. Assim,

$$
\left\{ \begin{array}{l} -1 + e + f + g = 0 \\ 4e + 5f + 6g = 0 \\ 12e + 20f + 30g = 0 \end{array} \right.
$$

de forma que $e = 15$, $f = -24$ e $g = 10$ e então $Q(x) = -2 + 15x^4 - 24x^5 + 10x^6$. Desta forma,

$$
\begin{aligned}
Q(x) + 1 &= -1 + 15x^4 - 24x^5 + 10x^6 \\
&= (x - 1)^3 (10x^3 + 6x^2 + 3x + 1)
\end{aligned}
$$

o que é determinado por divisão de polinômios.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Os elementos da matriz dos coeficientes de um sistema de quatro equações lineares e quatro incógnitas (x, y, z e w) são função de quatro constantes a, b, c e d. Determine as relações entre a, b, c e d para que o referido sistema admita uma solução não trivial, sabendo que $CD = -DC$, onde

$$
C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}.
$$

Solução:
Da relação $CD = -DC$, tem-se

$$
\left\{ \begin{array}{l} ax + bz = -ax - cy \\ cx + dz = -az - cw \\ ay + bw = -bx - dy \\ cy + dw = -bz - dw \end{array} \right.
$$

e então

$$
\begin{bmatrix} 2a & c & b & 0 \\ c & 0 & (a+d) & c \\ b & (a+d) & 0 & b \\ 0 & c & b & 2d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Para haver solução não nula, devemos ter que

$$
\begin{vmatrix} 2a & c & b & 0 \\ c & 0 & (a+d) & c \\ b & (a+d) & 0 & b \\ 0 & c & b & 2d \end{vmatrix} = 0
$$

ou seja $D_1 + D_2 + D_3 = 0$, onde

$$
\begin{aligned}
D_1 &= 2a \begin{vmatrix} 0 & (a+d) & c \\ (a+d) & 0 & b \\ c & b & 2d \end{vmatrix} \\
&= 2a[2bc(a+d) - 2d(a+d)^2] \\
&= 4a(a+d)[bc - d(a+d)] \\
D_2 &= -c \begin{vmatrix} c & (a+d) & c \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 2d \end{vmatrix} \\
&= -c[b^2c - b^2c - 2bd(a+d)] \\
&= 2bcd(a+d) \\
D_3 &= b \begin{vmatrix} c & 0 & c \\ b & (a+d) & b \\ 0 & c & 2d \end{vmatrix} \\
&= b[2cd(a+d) + c^2b - c^2b] \\
&= 2bcd(a+d)
\end{aligned}
$$

Assim, devemos ter que

$$
4(a+d)^2(bc - ad) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -d \\ \text{ou} \\ bc = ad \end{array} \right.
$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Uma seqüência de quatro termos forma uma PG. Subtraindo-se 2 do primeiro termo e k do quarto termo, transforma-se a seqüência original em uma PA. Uma terceira seqüência é obtida somando-se os termos correspondentes da PG e da PA. Finalmente, uma quarta seqüência, uma nova PA, é obtida a partir da terceira seqüência, subtraindo-se 2 do terceiro termo e sete do quarto. Determine os termos da PG original.

Solução:
Representando a segunda seqüência por $s2 : (a-3r); (a-r); (a+r); (a+3r)$, as demais seqüências são dadas por

$$s1 : (a-3r+2); (a-r); (a+r); (a+3r+k)$$
$$s3 : (2a-6r+2); (2a-2r); (2a+2r); (2a+6r+k)$$
$$s4 : (2a-6r+2); (2a-3r); (2a+2r-2); (2a+6r+k-7)$$

Como $s4$ é uma PA, então

$$(2a-6r+2)+(2a+6r+k-7) = (2a-3r)+(2a+2r-2)$$

Logo, $k = 3$ e como $s1$ é uma PG, então

$$\begin{cases} (a-r)^2 = (a-3r+2)(a+r) \\ (a+r)^2 = (a-r)(a+3r+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4r^2 = 2a+2r \\ 4r^2 = 3a-3r \end{cases}$$

de forma que $a = 5r$, e assim $r = 3$ e $a = 15$. Desta forma, a PG original é $s1 : 8; 12; 18; 27$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Cinco equipes concorrem numa competição automobilística, em que cada equipe possui dois carros. Para a largada são formadas duas colunas de carros lado a lado, de tal forma que cada carro da coluna da direita tenha ao seu lado, na coluna da esquerda, um carro de outra equipe. Determine o número de formações possíveis para a largada.

Solução:
Sejam algumas situações mais simples de início.

Situação I - Organizar duas equipes em duas filas completas: Neste caso, situado um carro qualquer, o outro carro da mesma equipe só tem 2 opções aceitáveis das demais 3 posições disponíveis. Encaixados os carros de uma equipe em filas diferentes, o mesmo ocorre automaticamente para os carros da outra equipe. Assim, as opções aceitáveis são $\frac{2}{3}$ das possíveis.

Situação II - Organizar duas equipes em uma fila completa e duas meia-filas: Neste caso, situado um carro qualquer na fila completa, o outro carro da mesma equipe só tem 2 opções aceitáveis (nas duas meia-filas disponíveis) das demais 3 posições. Novamente, as opções aceitáveis são $\frac{2}{3}$ das possíveis.

Situação III - Organizar três equipes em duas filas completas e duas meia-filas: Neste caso, considere uma equipe com um carro em uma meia-fila. Em $\frac{1}{5}$ dos casos, o outro carro desta mesma equipe pode estar na outra meia-fila disponível, enquanto que nos demais $\frac{4}{5}$ dos casos, o outro carro da mesma equipe pode estar em qualquer posição das duas filas completas disponíveis. Na primeira opção, sobram duas filas completas para os carros das duas outras equipes, o que corresponde à Situação I estudada acima. Na segunda opção, sobram uma fila completa e duas meia-filas para os carros das duas outras equipes, o que corresponde à Situação II estudada acima. Com isto, as opções aceitáveis para a Situação III são $\frac{2}{3}\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\frac{4}{5} = \frac{2}{3}$ das possíveis.

Seja agora o caso mais amplo sugerido no enunciado com cinco equipes e cinco filas completas disponíveis. De início, há $T1 = 10!$ arranjos para todos os carros.

Colocando-se um carro da equipe 1, o outro carro desta equipe tem 8 posições aceitáveis das 9 restantes. Assim, há $T2 = \frac{8}{9}T1$ posicionamentos aceitáveis para os carros da equipe 1, restando três filas completas e duas meia-filas para as demais quatro equipes.

Para estas 8 posições livres, há 56 arranjos distintos para os dois carros da equipe 2. Vamos agora considerar três possibilidades:

Caso (i) - Os dois carros da equipe 2 estão nas duas filas ocupadas pelos carros da equipe 1: Neste caso, há 2 posicionamentos, ambos satisfatórios, dos 56 arranjos possíveis para os carros da equipe 2. Assim, no Caso (i), há $T3 = \frac{2}{56}T2$ posicionamentos aceitáveis para os carros das equipes 1 e 2, restando três filas completas para as demais três equipes.

Colocando-se um carro da equipe 3, o outro carro desta mesma equipe tem 4 posições aceitáveis das 5 restantes. Assim, no Caso (i), há $T4 = \frac{4}{5}T3$ posicionamentos aceitáveis para os carros das equipes 1, 2 e 3, restando uma fila completa e duas meia-filas para as demais duas equipes, o que constitui a Situação II acima descrita.

Logo, há $T_i = \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{2}{56}\frac{8}{9}10!$ posicionamentos aceitáveis de todas as equipes no Caso (i).

Caso (ii) - Apenas um carro da equipe 2 está em uma das filas ocupadas pelos carros da equipe 1: Neste caso, há 2 opções para qual carro da equipe 2 ocupa a fila coincidente com um carro da equipe 1, há 2 filas a serem ocupadas por este carro, e o outro carro tem 6 posições nas outras três filas. Logo, há $2 \times 2 \times 6 = 24$ arranjos satisfatórios dos 56 para os carros da equipe 2. Assim, no Caso (ii), há $T5 = \frac{24}{56}T2$ posicionamentos aceitáveis para os carros das equipes 1 e 2, restando duas filas completas e duas meia-filas para as demais três equipes, o que constitui a Situação III acima descrita.

Logo, há $T_{ii} = \frac{2}{3}\frac{24}{56}\frac{8}{9}10!$ posicionamentos aceitáveis de todas as equipes no Caso (ii).

Caso (iii) - Nenhum carro da equipe 2 está em uma das filas ocupadas pelos carros da equipe 1: Neste caso, há 6 opções para se situar um carro da equipe 2 e o outro carro desta mesma equipe só tem 4 de 5 posições aceitáveis. Logo, há $6 \times 4 = 24$ posicionamentos satisfatórios dos 56 arranjos possíveis para os carros da equipe 2. Assim, no Caso (iii), há $T6 = \frac{24}{56}T2$ posicionamentos aceitáveis para os carros das equipes 1 e 2, restando uma fila completa e quatro meia-filas para as demais três equipes.

Colocando-se um carro qualquer na fila completa disponível, o outro carro desta mesma equipe tem apenas 4 posições aceitáveis das 5 restantes, e as demais equipes ficam automaticamente em posicionamentos aceitáveis.

Logo, há $T_{iii} = \frac{4}{5}\frac{24}{56}\frac{8}{9}10!$ posicionamentos aceitáveis de todas as equipes no Caso (iii).

Juntando-se os três casos, tem-se um total de

$$T_i + T_{ii} + T_{iii} = 2.088.960$$

posicionamentos aceitáveis.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a expressão da soma a seguir, onde n é um inteiro múltiplo de 4.

$$1 + 2i + 3i^2 + \ldots + (n+1)i^n$$

Solução:
Podemos escrever a soma S do enunciado como

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & i & + & i^2 & + & \ldots & + & i^n \\ & + & i & + & i^2 & + & \ldots & + & i^n \\ & & & + & i^2 & + & \ldots & + & i^n \\ & & & & & & \ddots & + & \vdots \\ & & & & & & & + & i^n \end{array}$$

de forma que

$$\begin{aligned} S &= 1\frac{i^{n+1}-1}{i-1} + i\frac{i^n-1}{i-1} + i^2\frac{i^{n-1}-1}{i-1} + \ldots + i^n\frac{i-1}{i-1} \\ &= \frac{(n+1)i^{n+1} - (1+i+i^2+\ldots+i^n)}{i-1} \end{aligned}$$

Para $n = 4k$, então $i^{n+1} = i^{4k}i = (i^4)^k i = i$ e então

$$S = \frac{(n+1)i-1}{i-1} = \frac{[(n+1)i-1](i+1)}{-2} = \frac{n+2-ni}{2}$$

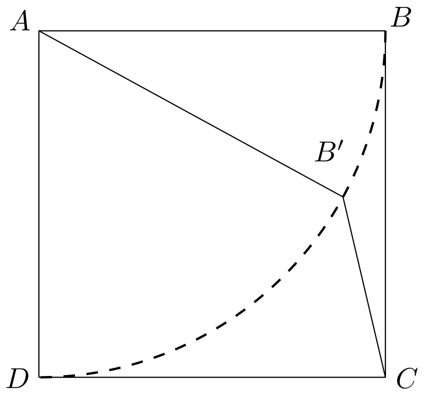
7ª Questão [Valor: 1,0]
A área de uma calota esférica é o dobro da área do seu círculo base. Determine o raio do círculo base da calota em função do raio R da esfera.

Solução:
A área da calota de altura h é $S_c = 2\pi Rh$, com $h = (R - \sqrt{R^2 - r^2})$. Assim, deve-se ter $2\pi Rh = 2\pi r^2$ o que equivale a

$$R^2 - R\sqrt{R^2-r^2} = r^2 \Rightarrow \sqrt{R^2-r^2}(\sqrt{R^2-r^2} - R) = 0$$

e então $r = R$, já que $\sqrt{R^2-r^2} = R$ equivale a $r = 0$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Em um quadrado $ABCD$ o segmento AB', com comprimento igual ao lado do quadrado, descreve um arco de círculo, conforme indicado na figura. Determine o ângulo $B\hat{A}B'$ correspondente à posição em que a razão entre o comprimento do segmento $B'C$ e o lado do quadrado vale $\sqrt{3-\sqrt{6}}$.



Solução:
Sejam ℓ o lado do quadrado e $\beta = B'\hat{A}C$. Usando a lei dos cossenos no triângulo $\Delta AB'C$, tem-se que

$$\begin{aligned} & B'C'^2 = AB'^2 + AC^2 - 2AB'.AC\cos\beta \\ \Rightarrow\ & \ell^2(3-\sqrt{6}) = \ell^2 + 2\ell^2 - 2\ell^2\sqrt{2}\cos\beta \\ \Rightarrow\ & \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow\ & \beta = \pm 30^\text{o} \end{aligned}$$

de forma que como $(\beta + \alpha) = 45^\text{o}$, tem-se $\alpha = 15^\text{o}$ ou $\alpha = 75^\text{o}$.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Considere os números complexos $Z_1 = \operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha$ e $Z_2 = \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha$, onde α é um número real. Mostre que, se $Z = Z_1Z_2$, então $-1 \leq \mathrm{R_e}(Z) \leq 1$ e $-1 \leq \mathrm{I_m}(Z) \leq 1$, onde $\mathrm{R_e}(Z)$ e $\mathrm{I_m}(Z)$ indicam, respectivamente, as partes real e imaginária de Z.

Solução:
Da definição de Z, tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{R_e}(Z) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}2\alpha \\ \mathrm{I_m}(Z) &= \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos 2\alpha \end{aligned}$$

de forma que $-1 \leq \mathrm{R_e}(Z) \leq 1$ e $-1 \leq \mathrm{I_m}(Z) \leq 1$.

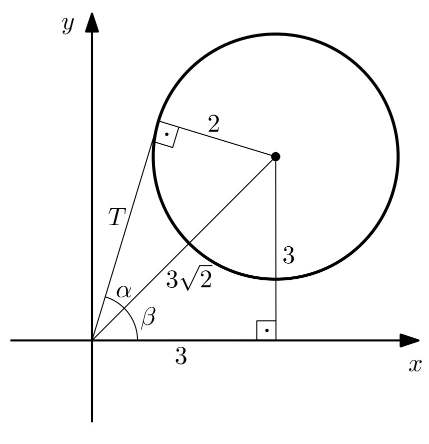
10ª Questão [Valor: 1,0]
Considere todos os pontos de coordenadas (x, y) que pertençam à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$. Determine o maior valor possível de $\frac{y}{x}$.

Solução:
A equação do enunciado pode ser escrita como

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 6y + 9) = 4$$

que corresponde a uma circunferência C de centro $(3, 3)$ e raio 2.

A razão $\frac{y}{x}$ é o coeficiente angular de uma reta que passa pela origem e pela circunferência C. Assim, a razão máxima é a inclinação da tangente mais inclinada a C pela origem, tangente esta cujo comprimento é tal que $T^2 + 4 = (3\sqrt{2})^2$, ou seja $T = \sqrt{14}$.



Com isto,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{2}{T}+1}{1-\frac{2}{T}} = \frac{2+\sqrt{14}}{\sqrt{14}-2} = \frac{9+2\sqrt{14}}{5}$$

IME 2006/2007 - Objetiva

1ª Questão [Valor: 0,25]
Sejam z e w números complexos tais que:

$$\begin{cases} w^2 - z^2 = 4 + 12i \\ \overline{z} - \overline{w} = 2 + 4i \end{cases}$$

onde $\overline{z}$ e $\overline{w}$ representam, respectivamente, os números complexos conjugados de z e w. O valor de $z + w$ é:

Solução: (D) $2 - 2i$
Desenvolvendo o sistema, tem-se

$$\begin{cases} w^2 - z^2 = (w - z)(w + z) = 4 + 12i \\ \overline{\overline{z} - \overline{w}} = z - w = \overline{2 + 4i} = 2 - 4i \end{cases}$$

e assim

$$z + w = \frac{4 + 12i}{-(2 - 4i)} = \frac{(4 + 12i)(-2 - 4i)}{(-2 + 4i)(-2 - 4i)} = 2 - 2i$$

2ª Questão [Valor: 0,25]
Seja N um número inteiro de 5 algarismos. O número P é construído agregando-se o algarismo 1 à direita de N e o número Q é construído agregando-se o algarismo 1 à esquerda de N. Sabendo-se que P é o triplo de Q, o algarismo das centenas do número N é:

Solução: (E) 8
Do enunciado

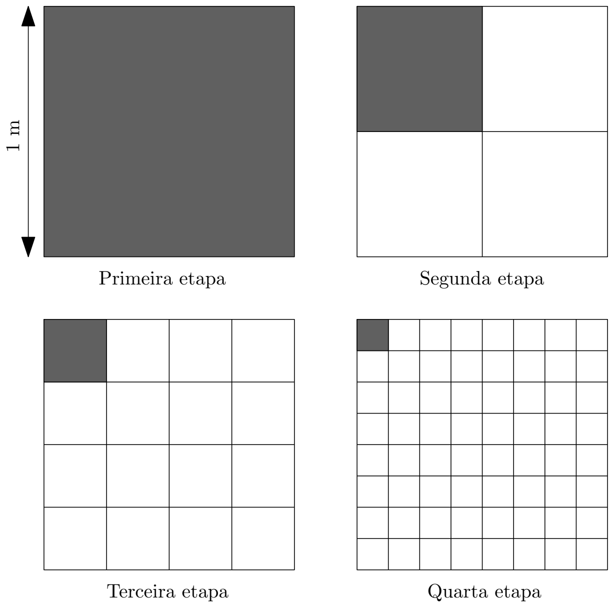
$$\begin{cases} P = 10N + 1 \\ Q = 100.000 + N \end{cases}$$

e como $P = 3Q$, então

$$10N + 1 = 3(100.000 + N) \Rightarrow 7N = 299.999$$

Logo, $N = 42.857$, cujo algoritmo da centena é 8.

3ª Questão [Valor: 0,25]
Um quadrado de lado igual a um metro é dividido em quatro quadrados idênticos. Repete-se esta divisão com os quadrados obtidos e assim sucessivamente por n vezes. A figura abaixo ilustra as quatro primeiras etapas desse processo. Quando $n \to \infty$, a soma em metros dos perímetros dos quadrados hachurados em todas as etapas é:



Solução: (C) 8
Da figura, a soma desejada é dada por

$$S = 4(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots) = 8$$

4ª Questão [Valor: 0,25]
Se r_1 e r_2 são raízes reais distintas de $x^2 + px + 8 = 0$, é correto afirmar que:

Solução: (A) $|r_1 + r_2| > 4\sqrt{2}$
Por Girard, $(r_1 + r_2) = -p$. Como as raízes são reais e distintas o discriminante da equação é positivo, ou seja

$$p^2 - 4 \times 8 > 0 \Rightarrow p^2 > 32 \Rightarrow |p| > 4\sqrt{2}$$

e assim $|r_1 + r_2| > 4\sqrt{2}$.

5ª Questão [Valor: 0,25]
Considere o sistema de equações dado por:

$$\begin{cases} x + y + 2z = b_1 \\ 2x - y + 3z = b_2 \\ 5x - y + az = b_3 \end{cases}$$

Sendo b_1, b_2 e b_3 valores reais quaisquer, a condição para que o sistema possua solução única é:

Solução: (C) $a \neq 8$
Para solução única, o determinante da matriz característica do sistema deve ser não nulo, ou seja

$$-a + 15 - 4 + 10 + 3 - 2a \neq 0 \Rightarrow a \neq 8$$

6ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, tal que:

$$\begin{cases} f(4) = 5 \\ f(x+4) = f(x).f(4) \end{cases}$$

O valor de $f(-4)$ é:

Solução: (D) $\dfrac{1}{5}$
Para $x = 0$ e $x = -4$, tem-se, respectivamente, que

$$\begin{cases} f(0+4) = f(0).f(4) \\ f(-4+4) = f(-4).f(4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-4) = \dfrac{f(0)}{f(4)} = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

7ª Questão [Valor: 0,25]
Um grupo de nove pessoas, sendo duas delas irmãos, deverá formar três equipes, com respectivamente dois, três e quatro integrantes. Sabendo-se que os dois irmãos não podem ficar na mesma equipe, o número de equipes que podem ser organizadas é:

Solução: (D) 910
Determinando as equipes de 2 e 3 pessoas, a outra equipe fica automaticamente determinada.

Se os irmãos estão nos grupos de 2 e 3 pessoas, têm-se $2 \times C_7^1$ formas de compor a equipe de 2 pessoas e C_6^2 formas de compor a equipe de 3 pessoas (já que o irmão fica determinado e sobram apenas 6 pessoas das demais). Logo, neste caso, há $2 \times 7 \times \frac{6!}{2!4!} = 210$ possibilidades.

Se os irmãos estão nos grupos de 2 e 4 pessoas, têm-se $2 \times C_7^1$ formas de compor a equipe de 2 pessoas, C_6^3 formas de compor a equipe de 3 pessoas (já que sobram apenas 6 pessoas das demais). Logo, neste caso, há $2 \times 7 \times \frac{6!}{3!3!} = 280$ possibilidades.

Se os irmãos estão nos grupos de 3 e 4 pessoas, têm-se C_7^2 formas de compor a equipe de 2 pessoas, $2 \times C_5^2$ formas de compor a equipe de 3 pessoas (já que sobram apenas 5 pessoas das demais). Logo, neste caso, há $\frac{7!}{2!5!} \times 2 \times \frac{5!}{2!3!} = 420$ possibilidades.

Assim, o total de possibilidades distintas é 910.

8ª Questão [Valor: 0,25]
Seja a matriz D dada por:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ \text{sen}(\hat{P}) & \text{sen}(\hat{Q}) & \text{sen}(\hat{R}) \end{bmatrix}$$

na qual p, q e r são lados de um triângulo cujos ângulos opostos são, respectivamente, $\hat{P}$, $\hat{Q}$ e $\hat{R}$. O valor do determinante de D é:

Solução: (B) 0
Pela Lei dos Senos,

$$\frac{p}{\text{sen}(\hat{P})} = \frac{q}{\text{sen}(\hat{Q})} = \frac{r}{\text{sen}(\hat{R})}$$

Assim, a matriz D tem duas linhas proporcionais, e com isto seu determinante é nulo.

9ª Questão [Valor: 0,25]
Sabendo que $\log 2 = 0{,}3010$, $\log 3 = 0{,}4771$ e $\log 5 = 0{,}6989$, o menor número entre as alternativas abaixo é:

Solução: (A) 4^{30}

$$\begin{cases} 4^{30} = 2^{60} \\ 9^{24} = 3^{48} \\ 25^{40} = 5^{80} > 2^{60} \\ 81^{20} = 3^{80} > 2^{60} \\ 625^{15} = 5^{60} > 2^{60} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log 4^{30} = 60 \log 2 = 18{,}06 \\ \log 9^{24} = 48 \log 3 = 22{,}9008 \end{cases}$$

10ª Questão [Valor: 0,25]
Considere os conjuntos $A = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ e $B = \{1,2,3,4,5\}$, e seja a função $f : A \to B$ tal que:

$$f(x,y) = x + y$$

É possível afirmar que f é uma função:

Solução: (A) injetora

$$\begin{cases} f(1,2) = 3 \\ f(1,3) = 4 \\ f(2,3) = 5 \end{cases}$$

Logo, cada elemento do domínio de $f(x,y)$ é mapeado em um elemento distinto do contra-domínio desta função. Apesar disto, o conjunto imagem é apenas uma parte do contra-domínio. Assim, $f(x,y)$ é injetora.

11ª Questão [Valor: 0,25]
O volume do octaedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um tetraedro regular de volume V é:

Solução: (A) $\dfrac{V}{2}$
O volume V do tetraedro de lado ℓ é

$$V = \frac{S_3 \times h}{3} = \frac{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \times h}{3}$$

onde a altura h é o outro cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa ℓ e cateto $\frac{2}{3}\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Assim,

$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{3} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{6}}{3}$$

de forma que $V = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}$.

O volume V' do octaedro de lado ℓ' é

$$V' = 2 \times \frac{S_4 \times h'}{3} = 2 \times \frac{\ell'^2 \times h'}{3}$$

onde a altura h' é o outro cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa ℓ' e cateto $\frac{\ell'\sqrt{2}}{2}$. Assim,

$$h'^2 = \ell'^2 - \frac{\ell'^2}{2} \Rightarrow h' = \frac{\ell'\sqrt{2}}{2}$$

de forma que $V' = \frac{\ell'^3\sqrt{2}}{3}$.

Do conceito de base média, o lado ℓ' do octaedro é igual à metade do lado ℓ do tetraedro. Logo,

$$V' = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{24} = \frac{V}{2}$$

12ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ um polinômio do terceiro grau cujas raízes são termos de uma progressão aritmética de razão 2. Sabendo que $p(-1) = -1$, $p(0) = 0$ e $p(1) = 1$, os valores de α e γ são, respectivamente:

Solução: (D) $-\frac{1}{3}$ e $\frac{4}{3}$
Sejam as raízes $(r-2)$, r e $(r+2)$. Pelas condições do enunciado, têm-se

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha + \beta - \gamma + \delta = -1 \\ \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \beta = 0$$

Além disto, por Girard

$$\left\{ \begin{array}{l} (r-2) + r + (r+2) = -\frac{\beta}{\alpha} = 0 \\ (r-2)r + (r-2)(r+2) + r(r+2) = \frac{\gamma}{\alpha} \\ (r-2)r(r+2) = -\frac{\delta}{\alpha} = 0 \end{array} \right.$$

Logo, $r = 0$ e assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = -4\alpha \\ \alpha + \gamma = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\frac{1}{3} \\ \gamma = \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

13ª Questão [Valor: 0,25]
Seja $p(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as cinco raízes de $p(x)$ são números inteiros positivos, sendo quatro deles pares e um ímpar. O número de coeficientes pares de $p(x)$ é:

Solução: (E) 4
Por Girard, $-b$ é a soma das raízes, c é a soma dos produtos dois-a-dois das raízes, $-d$ é a soma dos produtos três-a-três, e é a soma dos produtos quatro-a-quatro e f é o produto das cinco raízes. Como há apenas uma raiz ímpar, b deve ser ímpar, enquanto que c, d, e e f devem ser pares, pois todos os produtos parciais são pares por terem cada um pelo menos um fator par. Assim, há 4 coeficientes pares de $p(x)$.

14ª Questão [Valor: 0,25]
Considere uma circunferência C fixa de raio R. A partir de dois pontos A e B pertencentes a C, traçam-se retas tangentes a C que se interceptam num ponto P, tal que $\overline{PA} = \overline{PB} = k$. Sendo k um valor constante, o lugar geométrico de P é uma:

Solução: (B) circunferência
Seja O o centro de C. Por Pitágoras,

$$\left\{ \begin{array}{l} PO^2 = PA^2 + AO^2 = k^2 + R^2 \\ PO^2 = PB^2 + BO^2 = k^2 + R^2 \end{array} \right. \Rightarrow PO = \sqrt{k^2 + R^2}$$

Logo, o lugar geométrico de P é a circunferência de centro O e raio $\sqrt{k^2 + R^2}$.

15ª Questão [Valor: 0,25]
Um homem nascido no século XX diz a seguinte frase para o filho: "seu avô paterno, que nasceu trinta anos antes de mim, tinha x anos no ano x^2". Em conseqüência, conclui-se que o avô paterno nasceu no ano de:

Solução: (A) 1892
O avô nasceu no ano de $(x^2 - x)$ e o pai nasceu no ano de $(x^2 - x + 30)$. Determinando estes valores para diferentes valores inteiros de x, têm-se

x	$x^2 - x$	$x^2 - x + 30$
40	1560	1590
41	1640	1670
42	1722	1752
43	1806	1836
44	1892	1922
45	1980	2010

Assim, o único valor de $(x^2 - x + 30)$ no século XX é 1922 que corresponde ao ano de nascimento do avô igual a 1892.

IME 2006/2007 - Matemática

1ª Questão [Valor: 1,0]

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, e seja P uma matriz inversível tal que $B = P^{-1}AP$. Sendo n um número natural, calcule o determinante da matriz A^n.

Solução:
Como P é inversível, podemos escrever que $A = PBP^{-1}$ e assim,

$$A^n = \underbrace{PBP^{-1} \times PBP^{-1} \times \ldots \times PBP^{-1}}_{n \text{ vezes}} = PB^nP^{-1}$$

Com isto, o determinante de A^n é tal que

$$\det[A^n] = \det[PB^nP^{-1}] = \det{}^n[B] = \frac{1}{2^n}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]

Considere uma seqüência de triângulos retângulos cuja lei de formação é dada por

$$a_{K+1} = \frac{2}{3}a_K$$
$$b_{K+1} = \frac{4}{5}b_K$$

onde a_K e b_K, para $K \geq 1$, são os comprimentos dos catetos do K-ésimo triângulo retângulo. Se $a_1 = 30$ cm e $b_1 = 42$ cm, determine o valor da soma das áreas de todos os triângulos quando $K \to \infty$.

Solução:
Pelas leis de formação, têm-se para $K \geq 1$ que

$$\begin{cases} a_K = a_1\left(\frac{2}{3}\right)^{K-1} \\ b_K = b_1\left(\frac{4}{5}\right)^{K-1} \end{cases} \Rightarrow a_Kb_K = a_1b_1\left(\frac{8}{15}\right)^{K-1}$$

Logo, a soma desejada é igual a

$$S = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{a_Kb_K}{2} = \frac{a_1b_1}{2\left(1-\frac{8}{15}\right)} = \frac{15a_1b_1}{14} = 1350 \text{ cm}^2$$

3ª Questão [Valor: 1,0]

Considere o sistema de equações dado por

$$\begin{cases} 3\log_3\alpha + \log_9\beta = 10 \\ \log_9\alpha - 2\log_3\beta = 10 \end{cases}$$

onde α e β são números reais positivos. Determine o valor de $P = \alpha\beta$.

Solução:
Mudando a base dos logaritmos para 3, tem-se

$$\begin{cases} 3\log_3\alpha + \dfrac{\log_3\beta}{\log_3 9} = 10 \\ \dfrac{\log_3\alpha}{\log_3 9} - 2\log_3\beta = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3\alpha^3\sqrt{\beta} = 10 \\ \log_3\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\beta^2} = 10 \end{cases}$$

Com isto,

$$\alpha^3\sqrt{\beta} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta^2} \Rightarrow \alpha^6\beta = \frac{\alpha}{\beta^4} \Rightarrow \alpha\beta = 1$$

4ª Questão [Valor: 1,0]

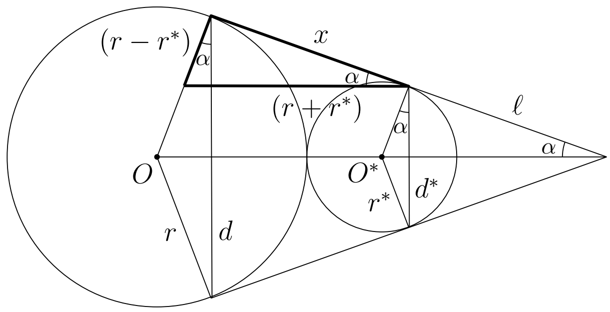
Sejam C e C^* dois círculos tangentes exteriores de raios r e r^* e centros O e O^*, respectivamente, e seja t uma reta tangente comum a C e C^* nos pontos não coincidentes A e A^*. Considere o sólido de revolução gerado a partir da rotação do segmento AA^* em torno do eixo OO^*, e seja S a sua correspondente área lateral. Determine S em função de r e r^*.

Solução:
Seja a configuração do enunciado representada na figura abaixo. No triângulo retângulo em destaque, tem-se

$$(r-r^*)^2 + x^2 = (r+r^*)^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{rr^*}$$

e ainda

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{r-r^*}{r+r^*} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{rr^*}}{r+r^*}$$



A área S é a área lateral de um tronco de cone. Assim, S pode ser obtida pela área lateral S_1 de um cone de raio da base $d = r\cos\alpha$ e geratriz $(\ell + x)$ menos a área lateral S_2 de um cone de raio da base $d^* = r^*\cos\alpha$ e geratriz ℓ, onde

$$\frac{\ell}{r^*} = \frac{\ell + x}{r} \Rightarrow \ell = \frac{xr^*}{r-r^*} = \frac{2r^*\sqrt{rr^*}}{r-r^*}$$

Logo,

$$S_1 = \pi d(\ell + x) = \frac{2\pi r^2\sqrt{rr^*}\cos\alpha}{r-r^*}$$

$$S_2 = \pi d^*\ell = \frac{2\pi(r^*)^2\sqrt{rr^*}\cos\alpha}{r-r^*}$$

e então

$$S = S_1 - S_2 = 2\pi(r+r^*)\sqrt{rr^*}\cos\alpha = 4\pi rr^*$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a equação

$$\log_{(\operatorname{sen} x+\cos x)}(1+\operatorname{sen} 2x)=2, \quad x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$$

Solução:
Como

$$(\operatorname{sen} x+\cos x)^2=1+2\operatorname{sen} x\cos x=1+\operatorname{sen} 2x$$

para todo x real, então a equação é válida para todo o seu domínio, determinado por

$$\begin{cases}1+\operatorname{sen} 2x>0\\ \operatorname{sen} x+\cos x>0\\ \operatorname{sen} x+\cos x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen} 2x>-1\\ \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)>0\\ \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)\neq 1\end{cases}$$

e assim

$$\begin{cases}\operatorname{sen} 2x>-1\\ \sqrt{2}\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{4})>0\\ \sqrt{2}\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{4})\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq k\pi-\frac{\pi}{4}\\ x+\frac{\pi}{4}\in(2k\pi,2k\pi+\pi)\\ x+\frac{\pi}{4}\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

com k inteiro. No intervalo $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, tem-se

$$\begin{cases}x\neq-\frac{\pi}{4}\\ x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]\\ x\neq\frac{\pi}{4}\mp\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow x\in(-\frac{\pi}{4},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
O quadrilátero $BRAS$, de coordenadas $A(1,0)$, $B(-2,0)$, $R(x_1,y_1)$ e $S(x_2,y_2)$ é construído tal que $R\hat{A}S=R\hat{B}S=90^{\text{o}}$. Sabendo que o ponto R pertence à reta t de equação $y=x+1$, determine a equação algébrica do lugar geométrico descrito pelo ponto S ao se deslocar R sobre t.

Solução:
Seja o ponto $R(r,r+1)$ e sejam as retas

$$AR: y=ax+b;\quad BR: y=cx+d$$
$$AS: y=ex+f;\quad BS: y=gx+h$$

Assim, AR e BR podem ser determinadas por

$$AR:\begin{cases}0=a+b\\ r+1=ar+b\end{cases}\Rightarrow y=\frac{r+1}{r-1}x-\frac{r+1}{r-1}$$

$$BR:\begin{cases}0=-2c+d\\ r+1=cr+d\end{cases}\Rightarrow y=\frac{r+1}{r+2}x+2\frac{r+1}{r+2}$$

e as retas AS e BS ficam determinadas por

$$AS:\begin{cases}0=e+f\\ e\left(\frac{r+1}{r-1}\right)=-1\end{cases}\Rightarrow y=-\frac{r-1}{r+1}x+\frac{r-1}{r+1}$$

$$BS:\begin{cases}0=-2g+h\\ g\left(\frac{r+1}{r+2}\right)=-1\end{cases}\Rightarrow y=-\frac{r+2}{r+1}x-2\frac{r+2}{r+1}$$

Logo, a interseção de AS e BS é caracterizada por $r=-(x+1)$, e então, para $r\neq-1$, evitando que as retas AS e BS sejam paralelas, ou seja, para $x\neq 0$, o lugar geométrico de S é descrito por $x^2+xy+x-2=0$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2+(m-15)x+m=0$. Sabendo que x_1 e x_2 são números inteiros, determine o conjunto de valores possíveis para m.

Solução (Baseada em solução do Poliedro):
Por Girard,

$$\begin{cases}x_1+x_2=15-m\\ x_1x_2=m\end{cases}$$

e assim, eliminando m, tem-se,

$$x_1+x_1x_2+x_2=15\Rightarrow(x_1+1)(x_2+1)=16$$

Logo, (x_1+1) é divisor de 16. Eliminando x_2, tem-se

$$x_1+\frac{m}{x_1}=15-m\Rightarrow m=\frac{x_1(15-x_1)}{x_1+1}$$

Assim, para os possíveis valores de x_1, tem-se

$$\begin{cases}x_1=-17 & \Rightarrow m=34 & \Rightarrow x_2=-2\\ x_1=-9 & \Rightarrow m=27 & \Rightarrow x_2=-3\\ x_1=-5 & \Rightarrow m=25 & \Rightarrow x_2=-5\\ x_1=-3 & \Rightarrow m=27 & \Rightarrow x_2=-9\\ x_1=-2 & \Rightarrow m=34 & \Rightarrow x_2=-17\\ x_1=0 & \Rightarrow m=0 & \Rightarrow x_2=0\\ x_1=1 & \Rightarrow m=7 & \Rightarrow x_2=7\\ x_1=3 & \Rightarrow m=9 & \Rightarrow x_2=3\\ x_1=7 & \Rightarrow m=7 & \Rightarrow x_2=1\\ x_1=15 & \Rightarrow m=0 & \Rightarrow x_2=0\end{cases}$$

de forma que $m\in\{0,7,9,25,27,34\}$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Considere o conjunto formado por m bolas pretas e n bolas brancas. Determine o número de seqüências simétricas que podem ser formadas utilizando-se todas as $m+n$ bolas.
Obs: Uma seqüência é dita *simétrica* quando ela possui a mesma ordem de cores ao ser percorrida da direita para a esquerda e da esquerda para a direita.

Solução:
Seja $\phi(a,b)$ o número de seqüências distintas, não necessariamente simétricas, que podem ser formadas com a bolas pretas e b bolas brancas, ou seja

$$\phi(a,b)=C^a_{a+b}=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$$

Para seqüências simétricas, a primeira parte da seqüência, determina exatamente (por simetria, é claro) a composição da segunda parte da mesma. Se o número total de bolas é ímpar, a bola central deve ser da cor que tem um número ímpar de bolas. Se o número total de bolas é par, m e n devem ser simultaneamente pares para ser possível formar seqüências simétricas. Assim, o número desejado de seqüências simétricas é dado por

$$s(m,n)=\begin{cases}\phi(\frac{m}{2},\frac{n}{2}), & \text{se } m \text{ e } n \text{ são pares}\\ \phi(\frac{m}{2},\frac{n-1}{2}), & \text{se } m \text{ é par e } n \text{ é ímpar}\\ \phi(\frac{m-1}{2},\frac{n}{2}), & \text{se } m \text{ é ímpar e } n \text{ é par}\\ 0, & \text{se } m \text{ e } n \text{ são ímpares}\end{cases}$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam a, b e c números reais não nulos. Sabendo que $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b}$, determine o valor numérico de $\frac{a+b}{c}$.

Solução:
Se $(a+b+c) \neq 0$, podemos adicionar as três frações, obtendo

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

Se $(a+b+c) = 0$, então $c = -(a+b)$ e assim

$$\frac{a+b}{c} = -1$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\sum_{k=0}^{n} f(k) = 2008\frac{(n+1)}{(n+2)}$, onde $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ são, respectivamente, o conjunto dos números naturais e o dos números reais. Determine o valor numérico de $\frac{1}{f(2006)}$.

Solução:
Usando $n = 2006$ e $n = 2005$, tem-se, respectivamente, que

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{2006} f(k) = 2008 \times \frac{2007}{2008} \\ \sum_{k=0}^{2005} f(k) = 2008 \times \frac{2006}{2007} \end{cases}$$

Logo,

$$f(2006) = \sum_{k=0}^{2006} f(k) - \sum_{k=0}^{2005} f(k) = \frac{1}{2007}$$

e com isto

$$\frac{1}{f(2006)} = 2007$$

IME 2005/2006

1ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam $a_1 = 1 - i$, $a_n = r + si$ e $a_{n+1} = (r-s)+(r+s)i$ $(n > 1)$ termos de uma seqüência. Determine, em função de n, os valores de r e s que tornam esta seqüência uma progressão aritmética, sabendo que r e s são números reais e $i = \sqrt{-1}$.

Solução:
Para que a_1, a_n e a_{n+1} pertençam a uma mesma progressão aritmética de razão q, devemos ter que

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = q \\ a_{n+1} - a_1 = nq \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -s + ri = q \\ (r - s - 1) + (r + s + 1)i = nq \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} r - s - 1 = -ns \\ r + s + 1 = nr \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r + (n-1)s = 1 \\ r(1-n) + s = -1 \end{cases}$$

e assim,

$$\begin{cases} r = \frac{n}{n^2 - 2n + 2} \\ s = \frac{n-2}{n^2 - 2n + 2} \end{cases}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Considere o polinômio

$$p(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 27x^2 - 44x + 30$$

Sabendo que o produto de duas de suas raízes complexas é igual a $3 - i$ e que as partes reais e imaginárias de todas as suas raízes complexas são inteiras e não-nulas, calcule todas as raízes do polinômio.

Solução:
Sejam $(a \mp bi)$, $(c \mp di)$ e e as raízes de $p(x)$. Logo, por Girard, têm-se que

$$\begin{cases} 2a + 2c + e = 3 \\ (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)e = -30 = -2 \times 3 \times 5 \end{cases}$$

e, como a, b, c e d são inteiros não nulos, têm-se, da segunda equação, que

$$\begin{cases} e = -3 \\ (a^2 + b^2) = 2 \Rightarrow (a^2, b^2) = (1, 1) \\ (c^2 + d^2) = 5 \Rightarrow (c^2, d^2) = (4, 1) \text{ ou } (1, 4) \end{cases}$$

pois o fator -3 não pode ser colocado na forma $(m^2 + n^2)$, com m e n inteiros não nulos. Assim, da equação $(2a + 2c + e) = 3$, têm-se

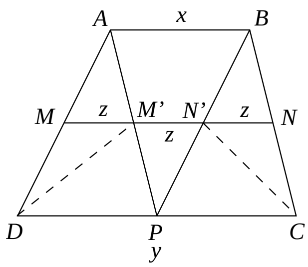
$$a + c = 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 1,\ b = 1 \\ c = 2,\ d = 1 \end{cases}$$

Logo, as raízes de $p(x)$ são

$$x \in \{(1 \mp i), (2 \mp i), -3\}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Um trapézio $ABCD$, de base menor AB e base maior CD, possui base média MN. Os pontos M' e N' dividem a base média em três segmentos iguais, na ordem $MM'N'N$. Ao se traçar as retas AM' e BN', verificou-se que as mesmas se encontraram sobre o lado CD no ponto P. Calcule a área do trapézio $M'N'CD$ em função da área de $ABCD$.

Solução:



Sejam $AB = x$, $MN = 3z$ e $CD = y$. No triângulo ΔABP, $M'N'$ é base média relativa ao lado AB, e então, $x = 2z$. Nos triângulos ΔACP e ΔBDP, MM' e $N'N$ são bases médias relativas ao lados DP e CP, respectivamente, e então, $DP = CP = 2z$, e assim, $y = 4z$. Logo, as áreas de $M'N'CD$ e $ABCD$ são tais que

$$\begin{cases} S_{M'N'CD} = \frac{M'N' + CD}{2} h = \frac{z + 4z}{2} h = \frac{5zh}{2} \\ S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} 2h = \frac{2z + 4z}{2} 2h = 6zh \end{cases}$$

e assim

$$S_{M'N'CD} = \frac{5}{12} S_{ABCD}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $D_n = \det(A_n)$, onde

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Determine D_n em função de n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$.

Solução:
Aplicando Laplace na primeira coluna, tem-se

$$D_n = 2D_{n-1} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

Aplicando Laplace na primeira linha, tem-se

$$D_n = 2D_{n-1} + (-1)D_{n-2}$$

o que gera uma recursão com equação característica

$$z^2 - 2z + 1 = (z-1)(z-1) = 0$$

Assim, a solução geral é da forma

$$\begin{cases} D_n = c_1(1^n) + c_2 n(1^n) = c_1 + c_2 n \\ D_1 = 2;\ D_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow D_n = 1 + n$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Determine os valores de x, y, z e r que satisfazem o sistema

$$C_{r+y}^{r} = \log_y x$$
$$\log_y z = 4 + \log_x z$$
$$C_{r+y}^{y} = \log_x z + \log_z z$$

onde C_m^p representa a combinação de m elementos tomados p a p e $\log_c B$ representa o logaritmo de B na base c.

Solução:
Lembrando que $C_{r+y}^y = C_{r+y}^r$, então

$$\begin{cases} \log_y x = \log_x z + 1 \\ \log_y z = 4 + \log_x z \end{cases} \Rightarrow \log_y z = 3 + \log_y x \Rightarrow z = xy^3$$

Usando esta relação na segunda equação do enunciado, e definindo $a = \log_y x$, têm-se

$$\log_y xy^3 = 4 + \log_x xy^3 \Rightarrow$$
$$3 + a = 4 + 1 + \frac{3}{a} \Rightarrow$$
$$a^2 - 2a - 3 = (a+1)(a-3) = 0 \Rightarrow$$
$$x = \frac{1}{y} \text{ ou } x = y^3$$

A opção $xy = 1$ inviabiliza a primeira equação do enunciado. Assim, $x = y^3$ e então $z = y^6$, de forma que

$$C_{r+y}^{y} = \frac{(r+y)!}{r!y!} = 3 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \text{ e } y = 2 \\ \text{ou} \\ r = 2 \text{ e } y = 1 \end{cases}$$

A segunda opção, porém, é inviável, pois $y \neq 1$ é base de logaritmo. Logo,

$$x = 8;\ y = 2;\ z = 64;\ r = 1$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Os ângulos de um triângulo estão em progressão aritmética e um deles é solução da equação trigonométrica

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x) = 1$$

Determine os valores destes ângulos (em radianos).

Solução:
Desenvolvendo a equação do enunciado, têm-se

$$\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 1 \Rightarrow$$
$$\operatorname{sen} x(1 - \cos^2 x) = 1 - \cos^3 x \Rightarrow$$
$$\operatorname{sen} x(1 + \cos x) = (1 + \cos x + \cos^2 x) \Rightarrow$$
$$\operatorname{sen} x = \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{1 + \cos x}$$

Logo, usando a equação trigonométrica fundamental,

$$\left(\frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{1 + \cos x}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$$
$$(2\cos^4 x + 4\cos x + 3)\cos^2 x = 0 \Rightarrow$$
$$\cos x = 0 \text{ ou } \cos x = \frac{-4 \mp \sqrt{16 - 24}}{4}$$

Logo, $x = \frac{\pi}{2}$ e os três ângulos são $\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}\}$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere os pontos $A(-1,0)$ e $B(2,0)$ e seja C uma circunferência de raio R tangente ao eixo das abscissas na origem. A reta r_1 é tangente a C e contém o ponto A e a reta r_2 também é tangente a C e contém o ponto B. Sabendo que a origem não pertence às retas r_1 e r_2, determine a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção de r_1 e r_2 ao se variar R no intervalo $(0, \infty)$.

Solução:
Existem duas possíveis circunferências C descritas por

$$x^2 + (y \mp R)^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \pm 2yR$$

Seja a C acima do eixo das abscissas. Os pontos de tangência, (x_1, y_1) e (x_2, y_2), de r_1 e r_2 com C são as respectivas soluções de

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 2y_1 R \\ (x_1+1)^2 + y_1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -y_1 R \Rightarrow \left(\tfrac{-2R^2}{R^2+1}, \tfrac{2R}{R^2+1}\right)$$
$$\begin{cases} x_2^2 + y_2^2 = 2y_2 R \\ (x_2-2)^2 + y_2^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 2x_2 = y_2 R \Rightarrow \left(\tfrac{4R^2}{R^2+4}, \tfrac{8R}{R^2+4}\right)$$

Logo, as equações de r_1, que passa por A e (x_1, y_1), e r_2, que passa por B e (x_2, y_2), são, respectivamente,

$$\begin{cases} r_1 : y = \frac{2R}{1-R^2}(x+1) \\ r_2 : y = -\frac{4R}{4-R^2}(x-2) \end{cases}$$

cuja interseção (x_0, y_0) é tal que

$$y_1 = y_2 \Rightarrow R^2 = \frac{2x_0}{x_0 - 1} \Rightarrow \left(\frac{R^2}{R^2-2}, \frac{4R}{2-R^2}\right)$$

com $R \neq \sqrt{2}$, que torna $r_1 \parallel r_2$. Assim, o lugar geométrico desejado é descrito por

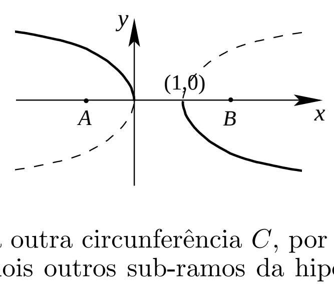
$$y = \frac{4\sqrt{\frac{2x}{x-1}}}{2 - \frac{2x}{x-1}} \Rightarrow y = 2(1-x)\sqrt{\frac{2x}{x-1}}$$

sln: Esta equação corresponde a dois sub-ramos da hipérbole de focos A e B e descrita por

$$(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{y^2}{8} = \frac{1}{4}$$

com

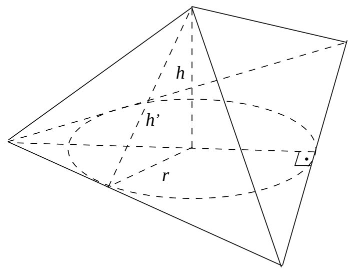
$$R \to \begin{cases} 0 \\ \sqrt{2}^- \\ \sqrt{2}^+ \\ \infty \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) \to \begin{cases} (0,0) \\ (-\infty, \infty) \\ (\infty, -\infty) \\ (1,0) \end{cases}$$

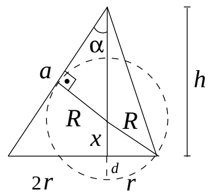


sln: Para a outra circunferência C, por simetria em y, têm-se os dois outros sub-ramos da hipérbole descrita acima.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um tetraedro regular de arestas de comprimento a e uma esfera de raio R tangente a todas as arestas do tetraedro. Em função de a, calcule:
a) O volume total da esfera.
b) O volume da parte da esfera situada no interior do tetraedro.

Solução:





Da figura à esquerda, têm-se

$$\begin{cases} h' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ r = \frac{1}{3}h' = \frac{a\sqrt{3}}{6} \end{cases} \Rightarrow h = \sqrt{h'^2 - r^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Fazendo uma seção no tetraedro, têm-se a figura da direita, e então

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \frac{R}{h-x} = \frac{2r}{a} \\ R^2 = x^2 + r^2 \end{cases}$$

de forma que

$$\frac{(h-x)^2}{3} = x^2 + r^2 \Rightarrow$$

$$2x^2 + 2hx + 3r^2 - h^2 = 0 \Rightarrow$$

$$24x^2 + 8ax\sqrt{6} - 5a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-8a\sqrt{6} \mp \sqrt{384a^2 + 480a^2}}{48} = (-2 \mp 3)\frac{a\sqrt{6}}{12}$$

Logo,

$$\begin{cases} x = \frac{a\sqrt{6}}{12} \\ R = \frac{a\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

a) O volume V da esfera é

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{24}$$

b) A porção da esfera no exterior do tetraedro é composta, por simetria, de quatro calotas iguais (cada calota determinada por cada face do tetraedro) de raio da base r e altura

$$d = R - x = \frac{a\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{12}$$

Com isto, o volume V' interno desejado é

$$V' = V - 4\frac{\pi d}{6}(3r^2 + d^2) = \frac{\pi a^3\sqrt{2}(8\sqrt{3}-9)}{216}$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o conjunto solução $S = \{(x,y) | x \wedge y \in \mathbb{Z}\}$ da equação

$$(x+y)k = xy$$

sabendo que k é um número primo.

Solução:
Reescrevendo a equação como

$$x = \frac{ky}{y-k}$$

têm-se as possíveis soluções inteiras:

(i) $(y-k) = \mp 1$. Logo, $y = (k \mp 1)$ e $x = k(1 \mp k)$.

(ii) k é múltiplo de $(y-k) \neq \mp 1$. Porém, como k é primo, tem-se que as únicas possibilidades neste caso são $k = \mp(y-k)$. Logo, $y = (k \pm k)$ e $x = (k \pm k)$.

(iii) y é múltiplo de $(y-k) \neq \mp 1$. Com isto, tem-se $y = a(y-k)$, com $a \in \mathbb{Z}$, e assim $x = ka$, e então, $y = \frac{kx}{x-k}$. Logo, esta opção gera as soluções simétricas às soluções dadas anteriormente.

Logo, o conjunto solução completo é da forma

$$(x,y) = \begin{cases} (k(1-k), (k-1)) \\ (k(1+k), (k+1)) \\ (0,0) \\ (2k, 2k) \\ ((k-1), k(1-k)) \\ ((k+1), k(1+k)) \end{cases}$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam as somas S_0 e S_1 definidas por

$$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots + C_n^{3[n/3]}$$

$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \ldots + C_n^{3[(n-1)/3]+1}$$

Calcule os valores de S_0 e S_1 em função de n, sabendo que $[r]$ representa o maior inteiro menor ou igual ao número r.
Obs: Utilize o desenvolvimento em binômio de Newton de $(1 + \text{cis}\frac{2\pi}{3})^n$.

Solução:
Seja $S = (1 + \text{cis}\frac{2\pi}{3})^n$. Seguindo a sugestão do problema, têm-se

$$\begin{aligned} S &= e^{i\frac{n\pi}{3}} \left(e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n \\ &= e^{i\frac{n\pi}{3}} (2\cos\frac{\pi}{3})^n \\ &= e^{i\frac{n\pi}{3}} \\ &= \cos\frac{n\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{3} \end{aligned}$$

e usando o binômio de Newton,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{\frac{2\pi k}{3}} \\ &= S_0 + S_1 e^{\frac{2\pi}{3}} + S_2 e^{\frac{4\pi}{3}} \\ &= [S_0 + S_1(-\frac{1}{2}) + S_2(-\frac{1}{2})] + [S_1(\frac{\sqrt{3}}{2}) + S_2(-\frac{\sqrt{3}}{2})]i \end{aligned}$$

onde

$$S_2 = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + C_n^{11} + \ldots + C_n^{3[(n-1)/3]+2}$$

Assim, usando a relação básica do binômio de Newton e igualando as duas expressões para S, têm-se

$$\begin{cases} S_0 + S_1 + S_2 = 2^n \\ S_0 - \frac{1}{2}(S_1 + S_2) = \cos\frac{n\pi}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(S_1 - S_2) = \text{ sen }\frac{n\pi}{3} \end{cases}$$

e então

$$\begin{cases} S_0 = \frac{2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}}{3} \\ S_1 = \frac{2^n + \sqrt{3}\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3}}{3} \end{cases}$$

IME 2004/2005

1ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a função $f(x) = \frac{(156^x + 156^{-x})}{2}$, demonstre que:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

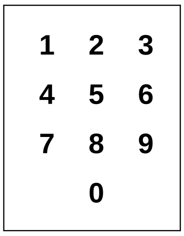
Solução:

$$\begin{aligned} 2f(x)f(y) &= 2\frac{156^x + 156^{-x}}{2} \times \frac{156^y + 156^{-y}}{2} \\ &= \frac{156^{(x+y)} + 156^{-(x+y)}}{2} + \frac{156^{(x-y)} + 156^{-(x-y)}}{2} \\ &= f(x+y) + f(x-y) \end{aligned}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura. Um ladrão observa de longe e percebe que:

- A senha utilizada possui 4 dígitos.
- O primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha.
- O segundo e o terceito dígitos encontram-se na linha imediatamente superior.

Calcule o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que com certeza ele consiga entrar na casa.



Teclado numérico

Solução:
Se os primeiro e quarto dígitos pertencem à quarta linha do teclado, os segundo e terceiro dígitos devem pertencer à terceira linha, e neste caso há 3×3 combinações possíveis.

Se os primeiro e quarto dígitos pertencem à terceira linha do teclado, os segundo e terceiro dígitos devem pertencer à segunda linha, e neste caso há $3 \times 3 \times 3 \times 3$ combinações possíveis.

Se os primeiro e quarto dígitos pertencem à segunda linha do teclado, os segundo e terceiro dígitos devem pertencer à primeira linha, e neste caso há $3 \times 3 \times 3 \times 3$ combinações possíveis.

Assim, um total de $9 + 81 + 81 = 171$ combinações devem ser testadas nesta questão politicamente incorreta.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam a, b, c, e d números reais positivos e diferentes de 1. Sabendo que $\log_a d$, $\log_b d$ e $\log_c d$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética, demonstre que:

$$c^2 = (ac)^{\log_a d}$$

Obs: Esta questão foi anulada por erro no enunciado.

Solução:
Por ser uma progressão aritmética, devemos ter

$$\begin{aligned} 2\log_b d &= \log_a d + \log_c d \Rightarrow \\ \frac{2\log d}{\log b} &= \frac{\log d}{\log a} + \frac{\log d}{\log c} \Rightarrow \\ \frac{2}{\log b} &= \frac{\log a + \log c}{\log a \log c} = \frac{\log(ac)}{\log a \log c} \Rightarrow \\ \log c^2 &= \frac{\log b}{\log a}\log(ac) = \log(ac)^{\log_a b} \Rightarrow \\ c^2 &= (ac)^{\log_a b} \end{aligned}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o valor das raízes comuns das equações $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 18x + 18 = 0$ e $x^4 - 12x^3 - 44x^2 - 32x - 52 = 0$.

Solução:
Por inspeção, $x = \pm 3$ são raízes de $P(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 18x + 18$, que pode então ser escrito como $P(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 2x - 2)$, cujas duas outras raízes são então $x = (1 \pm \sqrt{3})$. Testando cada uma das quatro raízes de $P(x)$ no outro polinômio $Q(x)$, verifica-se que nenhuma delas é raiz de $Q(x)$. Assim, não há raízes comuns a $P(x)$ e $Q(x)$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a equação $2\,\mathrm{sen}\,11x + \cos 3x + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,3x = 0$.

Solução:

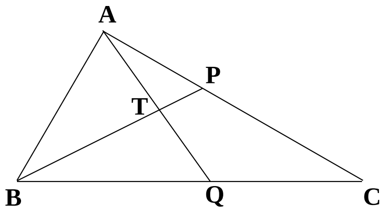
$$\begin{aligned} \mathrm{sen}\,11x + \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sen}\,3x = 0 \Rightarrow \\ \mathrm{sen}\,11x + \mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\cos 3x + \cos\frac{\pi}{6}\mathrm{sen}\,3x = 0 \Rightarrow \\ \mathrm{sen}\,11x + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6} + 3x\right) = 0 \Rightarrow \\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6} + 3x\right) = -\,\mathrm{sen}\,11x \end{aligned}$$

Logo

$$\left(\frac{\pi}{6} + 3x\right) = \left\{ \begin{array}{l} -11x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 11x + \pi + 2k\pi \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{84} + \frac{k\pi}{7} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{5\pi}{48} - \frac{k\pi}{4} \end{array} \right.$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

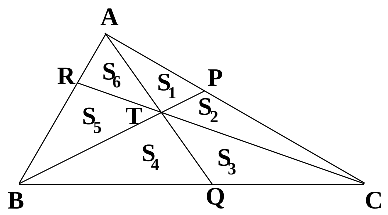
6ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um triângulo ABC de área S. Marca-se o ponto P sobre o lado AC tal que $\overline{PA}/\overline{PC} = q$, e o ponto Q sobre o lado BC de maneira que $\overline{QB}/\overline{QC} = r$. As cevianas AQ e BP encontram-se em T, conforme ilustrado na figura. Determine a área do triângulo ATP em função de S, q e r.



Solução:
Seja R a interseção do prolongamento de CT com AB. Pelo teorema de Ceva,

$$\frac{\overline{PA}\times\overline{RB}\times\overline{QC}}{\overline{PC}\times\overline{RA}\times\overline{QB}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{q}{r}$$

Sejam as áreas denotadas como na figura a seguir.



Assim

$$\begin{cases} \frac{S_1}{S_2} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = q \\ \frac{S_4}{S_3} = \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = r \\ \frac{S_6}{S_5} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{q}{r} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \frac{S_1+S_2+S_3}{S_4+S_5+S_6} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QB}} = \frac{1}{r} \\ \frac{S_3+S_4+S_5}{S_1+S_2+S_6} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{q}{r} \end{cases}$$

Juntando os dois sistemas de equações acima, têm-se

$$\begin{cases} S_1\frac{r(q+1)}{q} = S_5\frac{(r+q)}{r} = S_6\frac{(r+q)}{q} \\ S_1\frac{r(q+1)}{q} = S_3 q(r+1) = S_4\frac{q(r+1)}{r} \end{cases}$$

Logo, como $S = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6)$, temos que

$$\begin{aligned} S &= S_1\left[1+\frac{1}{q}+\frac{r(q+1)}{q^2(r+1)}+\frac{r^2(q+1)}{q^2(r+1)}+\frac{r^2(q+1)}{q(r+q)}+\frac{r(q+1)}{(r+q)}\right] \\ &= S_1\left[\frac{q+1}{q}+\frac{r(q+1)}{q^2}+\frac{r(q+1)}{q}\right] \\ &= S_1\frac{(q+1)(q+r+qr)}{q^2} \end{aligned}$$

e então

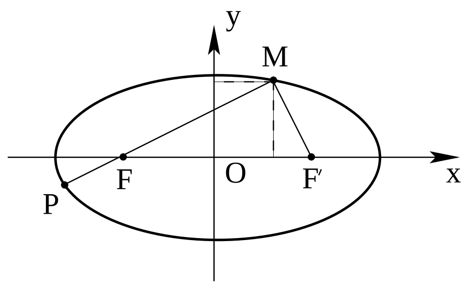
$$S_1 = \frac{Sq^2}{(q+1)(q+r+qr)}$$

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma elipse de focos F e F', e M um ponto qualquer dessa curva. Traça-se por M duas secantes $\overline{MF}$ e $\overline{MF'}$, que interceptam a elipse em P e P', respectivamente. Demonstre que a soma $(\overline{MF}/\overline{FP}) + (\overline{MF'}/\overline{F'P'})$ é constante.
Obs: Calcule inicialmente a soma $(1/\overline{MF})+(1/\overline{FP})$.

Solução:
Seja O o centro da elipse de distância focal $2c$ descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de modo que os focos possuem coordenadas $F \equiv (-c, 0)$ e $F' \equiv (c, 0)$. Sejam ainda $M \equiv (x_o, y_o)$ e $P \equiv (x'_o, y'_o)$.



Pela figura acima, tem-se que

$$\begin{cases} \overline{MF}^2 = y_o^2 + (c + x_o)^2 \\ \overline{MF'}^2 = y_o^2 + (c - x_o)^2 \end{cases} \Rightarrow (\overline{MF}^2 - \overline{MF'}^2) = 4cx_o$$

Como $(\overline{MF} + \overline{MF'}) = 2a$, tem-se então que

$$\begin{cases} (\overline{MF} - \overline{MF'}) = \frac{2cx_o}{a} \\ (\overline{MF} + \overline{MF'}) = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{MF} = a + \frac{cx_o}{a} \\ \overline{MF'} = a - \frac{cx_o}{a} \end{cases}$$

Analogamente, teríamos $\overline{PF} = a + \frac{cx'_o}{a}$.
Os pontos P e M são as interseções da elipse com a reta suporte de FM, assim, eles são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = \left(\frac{x+c}{x_o+c}\right) y_o \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{x+c}{x_o+c}\right)^2 y_o^2}{b^2} = 1$$

de modo que x_o e x'_o são as raízes da equação

$$\Delta_1 x^2 + (2a^2cy_o^2)x + a^2\Delta_2 = 0$$

com $\Delta_1 = [a^2y_o^2+b^2(x_o+c)^2]$ e $\Delta_2 = [c^2y_o^2-b^2(x_o+c)^2]$, e assim

$$\begin{cases} x_o + x'_o = \frac{-2a^2cy_o^2}{\Delta_1} \\ x_o x'_o = \frac{a^2\Delta_2}{\Delta_1} \end{cases}$$

Seguindo a sugestão do problema, tem-se que

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{\overline{MF}} + \frac{1}{\overline{FP}} \\
&= \frac{a}{a^2 + cx_o} + \frac{a}{a^2 + cx'_o} \\
&= \frac{a\left[2a^2 + c(x_o + x'_o)\right]}{a^4 + a^2c(x_o + x'_o) + c^2x_ox'_o} \\
&= \frac{a\left(2a^2 - \frac{2a^2c^2y_o^2}{\Delta_1}\right)}{a^4 - \frac{2a^4c^2y_o^2}{\Delta_1} + c^2\frac{a^2\Delta_2}{\Delta_1}} \\
&= \frac{2a^3\left(\Delta_1 - c^2y_o^2\right)}{a^2\left(\Delta_1 a^2 - 2a^2c^2y_o^2 + c^2\Delta_2\right)} \\
&= \frac{2a\left[b^2(x_o + c)^2 + (a^2 - c^2)y_o^2\right]}{(a^4 - 2a^2c^2 + c^4)y_o^2 + (a^2b^2 - b^2c^2)(x_o + c)^2} \\
&= \frac{2ab^2\left[(x_o + c)^2 + y_o^2\right]}{(a^2 - c^2)^2y_o^2 + b^2(a^2 - c^2)(x_o + c)^2} \\
&= \frac{2a}{b^2}
\end{aligned}$$

pois $(a^2 - c^2) = b^2$. Analogamente, teríamos

$$S' = \frac{1}{\overline{MF'}} + \frac{1}{\overline{F'P'}} = \frac{2a}{b^2}$$

Logo,

$$\begin{cases}
\frac{\overline{MF}}{\overline{FP}} = \left(\frac{1}{\overline{MF}} + \frac{1}{\overline{FP}}\right)\overline{MF} - 1 = \frac{2a\overline{MF}}{b^2} - 1 \\
\frac{\overline{MF'}}{\overline{F'P'}} = \left(\frac{1}{\overline{MF'}} + \frac{1}{\overline{F'P'}}\right)\overline{MF'} - 1 = \frac{2a\overline{MF'}}{b^2} - 1
\end{cases}$$

de modo que a expressão desejada é igual a

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{MF}}{\overline{FP}} + \frac{\overline{MF'}}{\overline{F'P'}} &= \frac{2a(\overline{MF} + \overline{MF'})}{b^2} - 2 \\
&= \frac{4a^2}{b^2} - 2 \\
&= \frac{2(a^2 + c^2)}{b^2}
\end{aligned}$$

que é constante para a elipse dada.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam a, b, e c as raízes do polinômio $p(x) = x^3 + rx - t$, onde r e t são números reais não nulos.

a) Determine o valor da expressão $a^3 + b^3 + c^3$ em função de r e t.

b) Demonstre que $S^{n+1} + rS^{n-1} - tS^{n-2} = 0$ para todo número natural $n \geq 2$, onde $S^k = a^k + b^k + c^k$ para qualqure número natural k.

Solução:

a) Pelas relações de Girard

$$\begin{cases}
a + b + c = 0 \\
ab + bc + ac = r \\
abc = t
\end{cases}$$

Logo, seja $T = (a+b+c)^3 = 0$, têm-se que

$$\begin{aligned}
T &= a^3+b^3+c^3+6abc \\
&\quad +3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2+3a^2c+3ac^2 \\
&= a^3+b^3+c^3-3abc \\
&\quad +3\left[a(ab+ac+bc)+b(ab+ac+bc)+c(ab+ac+bc)\right] \\
&= a^3+b^3+c^3-3t+3(a+b+c)r \\
&= a^3+b^3+c^3-3t \\
&= 0
\end{aligned}$$

e assim, $(a^3 + b^3 + c^3) = 3t$.

b) Definindo, $S = S^{n+1} + rS^{n-1} - tS^{n-2}$, e usando os valores de r e t dados acima, têm-se

$$\begin{aligned}
S &= a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1} \\
&\quad +(ab + bc + ac)(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) \\
&\quad -abc(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2}) \\
&= a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}+a^n(b+c)+b^n(a+c)+c^n(a+b) \\
&= a^n(a + b + c) + b^n(a + b + c) + c^n(a + b + c) \\
&= (a^n + b^n + c^n)(a + b + c) \\
&= 0
\end{aligned}$$

pois $(a + b + c) = 0$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o determinante da matrix $n \times n$ em função de b, onde b é um número real tal que $b^2 \neq 1$.

$$\underbrace{\left.\begin{vmatrix} b^2\!+\!1 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & b^2\!+\!1 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2\!+\!1 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2\!+\!1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b^2\!+\!1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & b^2\!+\!1 \end{vmatrix}\right\}}_{n \text{ colunas}} n \text{ linhas}$$

Solução:
Aplicando Laplace na primeira coluna, tem-se

$$\Delta_n = (b^2\!+\!1)\Delta_{n-1} - b\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & b^2\!+\!1 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2\!+\!1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b^2\!+\!1 & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & b^2\!+\!1 \end{vmatrix}$$

Aplicando Laplace na primeira linha do determinante da equação acima, tem-se que o mesmo é igual a $b\Delta_{n-2}$, e assim

$$\Delta_n = (b^2+1)\Delta_{n-1} - b^2\Delta_{n-2}$$

Por inspeção, têm-se que

$$\begin{cases} \Delta_1 = b^2 + 1 \\ \Delta_2 = (b^2+1)^2 - b^2 = b^4 + b^2 + 1 \\ \Delta_3 = (b^2+1)^3 - 2b^2(b^2+1) = b^6 + b^4 + b^2 + 1 \end{cases}$$

de forma que podemos conjecturar que $\Delta_n = \sum_{i=0}^{n} b^{2i}$. É fácil verificar que esta é a solução da recursão obtida acima, pois

$$\begin{aligned} S &= (b^2+1)\Delta_{n-1} - b^2\Delta_{n-2} \\ &= (b^2+1)\sum_{i=0}^{n-1} b^{2i} - b^2 \sum_{i=0}^{n-2} b^{2i} \\ &= b^2\left(\sum_{i=0}^{n-1} b^{2i} - \sum_{i=0}^{n-2} b^{2i}\right) + \sum_{i=0}^{n-1} b^{2i} \\ &= b^2 b^{2(n-1)} + \sum_{i=0}^{n-1} b^{2i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} b^{2i} \\ &= \Delta_n \end{aligned}$$

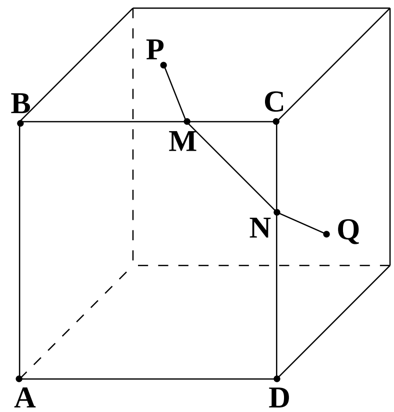
Com isto

$$\Delta_n = \sum_{i=0}^{n} b^{2i} = \frac{b^{2(n+1)} - 1}{b^2 - 1}$$

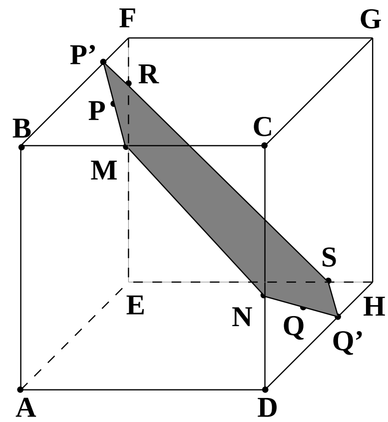
10ª Questão [Valor: 1,0]
Considere os pontos P e Q sobre as faces adjacentes de um cubo. Uma formiga percorre, sobre a superfície do cubo, a menor distância entre P e Q, cruzando a aresta $\overline{BC}$ em M e a aresta $\overline{CD}$ em N, conforme ilustrado na figura abaixo. É dado que os pontos P, Q, M e N são coplanares.

a) Demonstre que $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AC}$.

b) Calcule a área da seção do cubo determinada pelo plano que contém P, Q e M em função de $\overline{BC} = a$ e $\overline{BM} = b$.



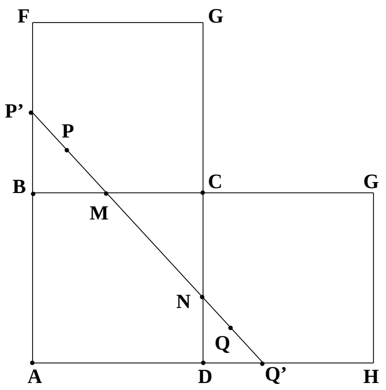
Solução:
Seja o cubo redesenhado como na figura abaixo, com todos os seus vértices identificados, onde ainda definem-se P' e Q' como as interseções dos prolongamentos de PM e QN com as respectivas arestas do cubo.



a) Seja a planificação das faces $BCFG$ e $CDGH$ no plano de $ABCD$, como visto na figura a seguir. Para que o percurso seja de comprimento mínimo então P, M, N, e Q devem ser colineares, e com isto

$$\begin{cases} P\hat{M}B = C\hat{M}N = N\hat{Q}'D = \alpha \\ M\hat{P}'B = C\hat{N}M = Q\hat{N}D = 90^{\text{o}} - \alpha \end{cases}$$

Situando os eixos coordenados x, y e z sobre as arestas AD, AE e AB, respectivamente, com origem em



A, e considerando que $MB = b$ e $BC = a$, logo os pontos P', M, N e Q' têm coordenadas

$$\begin{cases} P' \equiv (0, b\,\text{tg}\alpha, a) \\ M \equiv (b, 0, a) \\ N \equiv (a, 0, a + (b-a)\text{tg}\alpha) \\ Q' \equiv (a, \frac{a+(b-a)\text{tg}\alpha}{\text{tg}\alpha}, 0) \end{cases}$$

Seja o plano $P'MNQ'$ descrito por $c_1x+c_2y+c_3z = 1$. Como P' e M pertencem a este plano, têm-se

$$\begin{cases} c_2 b\,\text{tg}\alpha + c_3 a = 1 \\ c_1 b + c_3 a = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2\,\text{tg}\alpha$$

Como N e Q' pertencem a este plano, têm-se

$$\begin{cases} c_1 a + [a + (b-a)\text{tg}\alpha]c_3 = 1 \\ c_1 a + \left[\frac{a+(b-a)\text{tg}\alpha}{\text{tg}\alpha}\right] c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_2 = c_3\,\text{tg}\alpha$$

Pelas relações acima, o plano $P'MNQ'$ é descrito por $c_3x\,\text{tg}^2\alpha + c_3y\,\text{tg}\alpha + c_3z = 1$. Como M pertence a este plano,

$$c_3 b\,\text{tg}^2\alpha + c_3 a = 1 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{a + b\,\text{tg}^2\alpha}$$

e a equação do plano se torna $x\,\text{tg}^2\alpha + y\,\text{tg}\alpha + z = (a + b\,\text{tg}^2\alpha)$. Como N pertence a este plano,

$$a\,\text{tg}^2\alpha + [a + (b-a)\text{tg}\alpha] = a + b\,\text{tg}^2\alpha \Rightarrow$$
$$(a-b)\text{tg}\alpha(\text{tg}\alpha - 1) = 0$$

Assumindo que as soluções $a = b$ ($M \equiv N \equiv C$) e $\text{tg}\alpha = 0$ (P pertence à aresta BC) não se aplicam ao problema, logo $\text{tg}\alpha = 1$ e assim $\alpha = 45^o$. Desta forma, MN é paralela à diagonal BD da face $ABCD$ do cubo e assim MN é perpendicular a AC.

sln: As condições do problema, de que P, M, N e Q sejam coplanares e de que o percurso $PMNQ$ seja de comprimento mínimo, impõem restrições nas possíveis localizações de P e Q.

b) A interseção do plano definido por $PMNQ$ com o cubo é o hexágono $P'MNQ'SR$. Usando o resultado do item anterior, $\text{tg}\alpha = 1$, o plano $P'MNQ'$ é descrito por

$$x + y + z = (a + b)$$

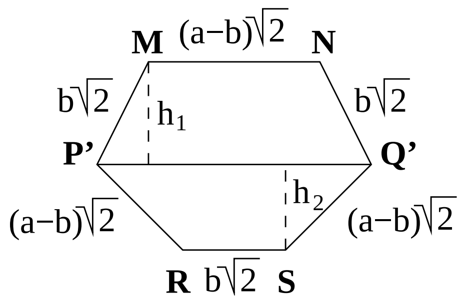
Assim, os pontos P', M, N, Q', S e R têm coordenadas

$$\begin{cases} P' \equiv (0, b, a); \quad M \equiv (b, 0, a) \\ N \equiv (a, 0, b); \quad Q' \equiv (a, b, 0) \\ S \equiv (b, a, 0); \quad R \equiv (0, a, b) \end{cases}$$

Com isto, os lados do hexágono são dados por

$$\begin{cases} \overline{P'M} = \sqrt{(0-b)^2+(b-0)^2+(a-a)^2} = b\sqrt{2} \\ \overline{MN} = \sqrt{(b-a)^2+(0-0)^2+(a-b)^2} = (a-b)\sqrt{2} \\ \overline{NQ'} = \sqrt{(a-a)^2+(0-b)^2+(b-0)^2} = b\sqrt{2} \\ \overline{Q'S} = \sqrt{(a-b)^2+(b-a)^2+(0-0)^2} = (a-b)\sqrt{2} \\ \overline{SR} = \sqrt{(b-0)^2+(a-a)^2+(0-b)^2} = b\sqrt{2} \\ \overline{RP'} = \sqrt{(0-0)^2+(a-b)^2+(b-a)^2} = (a-b)\sqrt{2} \end{cases}$$

como representado na figura a seguir.



Como $\overline{BP'} = \overline{DQ'}$, logo $MN \parallel P'Q' \parallel RS$ e o hexágono $P'MNQ'SR$ pode ser visto como dois trapézios de base comum $\overline{P'Q'} = a\sqrt{2}$. Pelas dimensões dos lados do hexágono, é possível se concluir que $h_1 = b\sqrt{6}/2$ e $h_2 = (a-b)\sqrt{6}/2$, de modo que

$$\begin{cases} S_{MP'Q'N} = \frac{\overline{MN}+\overline{P'Q'}}{2} h_1 = \frac{(a-b)\sqrt{2}+a\sqrt{2}}{2} \times \frac{b\sqrt{6}}{2} \\ S_{RP'Q'S} = \frac{\overline{RS}+\overline{P'Q'}}{2} h_2 = \frac{a\sqrt{2}+b\sqrt{2}}{2} \times \frac{(a-b)\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Com isto,

$$\begin{cases} S_{MP'Q'N} = \frac{(2ab-b^2)\sqrt{3}}{2} \\ S_{RP'Q'S} = \frac{(a^2-b^2)\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

e assim

$$S = S_{MP'Q'N} + S_{RP'Q'S} = \frac{(2ab + a^2 - 2b^2)\sqrt{3}}{2}$$

sln: Com $a \to b$ o hexágono se degenera em um triângulo equilátero de lado $a\sqrt{2}$, cuja área é $a^2\sqrt{3}/2$, o que é consistente com o resultado acima.

IME 2003/2004

1ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o número natural n que torna o determinante abaixo igual a 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n+1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

Solução:
Usando Laplace na primeira linha da matriz, o determinante desejado D é dado por

$$\begin{aligned} D = & \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n+1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix} \\ & = \log_2(n-1) + \log_2(n+1) + \log_2(n-1) + \log_2(n-1) \\ & = \log_2[(n-1)^3(n+1)] \\ & = 5 \end{aligned}$$

Logo, devemos ter

$$(n-1)^3(n+1) = 2^5 = 32$$

e, por inspeção, $n = 3$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Considere o polinômio $P(x) = x^3+ax+b$ de coeficientes reais, com $b \neq 0$. Sabendo que suas raízes são reais, demonstre que $a < 0$.

Solução (Baseada em solução de Cesário J. Ferreira):
Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes de $P(x)$, logo, por Girard, têm-se que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = a \\ x_1x_2x_3 = -b \end{cases}$$

Com isto, podemos ver que

$$\begin{aligned} (x_1+x_2+x_3)^2 &= 0 \\ &= x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2a \end{aligned}$$

e assim

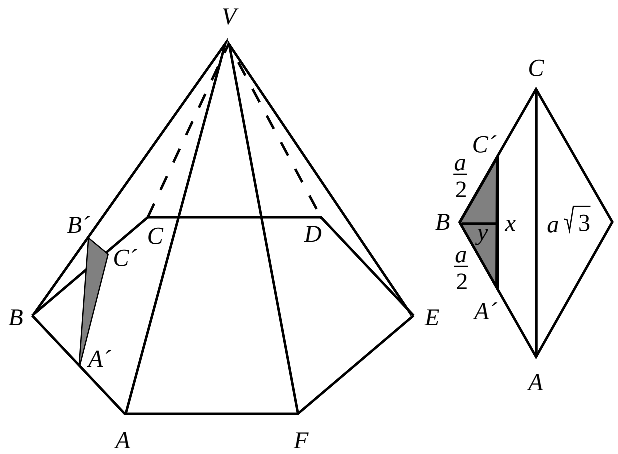
$$2a = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

que é estritamente negativo pois, como $b \neq 0$, as raízes são todas não nulas.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma pirâmide regular de altura h, cuja base é um hexágono $ABCDEF$ de lado a. Um plano perpendicular à base e contendo os pontos médios das arestas AB e BC divide a pirâmide em dois poliedros. Calcule a razão entre os volumes destes dois poliedros.

Solução:
A área da base S_b é a área de seis triângulos equiláteros de lado a. Logo, o volume total da pirâmide é

$$V_T = \frac{S_b h}{3} = \frac{6\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)h}{3} = \frac{a^2h\sqrt{3}}{2}$$



Sejam A' e C' os pontos médios dos segmentos AB e BC, respectivamente. Seja ainda B' a interseção do plano com a aresta BV, onde V é o vértice da pirâmide. Para determinarmos o volume V_1 do tetraedro $A'BC'B'$, precisamos determinar a área S'_b de sua base $A'BC'$ e a altura h' do ponto B'. Estas são facilmente determinadas a partir das figuras acima, de onde se têm que

$$\begin{cases} \begin{cases} x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{a}{4} \end{cases} \\ \frac{y}{a} = \frac{h'}{h} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S'_b = \frac{xy}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16} \\ h' = \frac{h}{4} \end{cases}$$

de modo que

$$V_1 = \frac{S'_b h'}{3} = \frac{\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{16}\right)\left(\frac{h}{4}\right)}{3} = \frac{a^2h\sqrt{3}}{192}$$

Assim, a razão desejada dos volumes é dada por

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V_T - V_1} = \frac{\frac{a^2h\sqrt{3}}{192}}{\frac{a^2h\sqrt{3}}{2} - \frac{a^2h\sqrt{3}}{192}} = \frac{1}{95}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule $\operatorname{sen}(x+y)$ em função de a e b, sabendo que o produto $ab \neq 0$, que $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a$ e que $\cos x + \cos y = b$.

Solução:
Seja

$$\begin{aligned}\Delta &= \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} y \cos y \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y) \\ &= \operatorname{sen}(x+y)\cos(x-y)\end{aligned}$$

onde o último passo sai da transformação em produto

$$\operatorname{sen}\,,(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen} a \cos b$$

com $a = (x+y)$ e $b = (x-y)$.

Do enunciado,

$$\begin{aligned}ab &= \operatorname{sen} x\cos x + \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x + \operatorname{sen} y \cos y \\ &= \operatorname{sen}(x+y) + \Delta \\ &= \operatorname{sen}(x+y)(1+\cos(x-y))\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}a^2+b^2 &= \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}^2 y \\ &\quad + \cos^2 x + 2\cos x\cos y + \cos^2 y \\ &= 2(1+\cos(x-y))\end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{sen}(x+y) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Seja uma função $f : \Re - \{0\} \rightarrow \Re$, onde $\Re$ representa o conjunto dos números reais, tal que $f(a/b) = f(a) - f(b)$ para a e b pertencentes ao domínio de f. Demonstre que f é uma função par.

Solução:
Se $b = 1$,

$$f(a/1) = f(a) = f(a) - f(1) \Rightarrow f(1) = 0$$

Se $a = 1$ e $b = -1$,

$$\begin{aligned}f(1/(-1)) &= f(-1) = f(1) - f(-1) = 0 - f(-1) \\ &\Rightarrow f(-1) = 0\end{aligned}$$

Se $a = -a$ e $b = -1$,

$$\begin{aligned}f((-a)/(-1)) &= f(a) = f(-a) - f(-1) = f(-a) - 0 \\ &\Rightarrow f(a) = f(-a)\end{aligned}$$

e a função f é par.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Sendo a, b e c números naturais em progressão aritmética e z um número complexo de módulo unitário, determine um valor para cada um dos números a, b, c e z de forma que eles satisfaçam a igualdade:

$$\frac{1}{z^a} + \frac{1}{z^b} + \frac{1}{z^c} = z^9$$

Solução:
Sejam

$$\begin{cases} a = b - k \\ b = b \\ c = b + k \end{cases}$$

onde k é a razão da progressão aritmética $\{a, b, c\}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^a} + \frac{1}{z^b} + \frac{1}{z^c} &= z^{-a} + z^{-b} + z^{-c} \\ &= z^{-b+k} + z^{-b} + z^{-b-k} \\ &= z^{-b}\left(z^k + 1 + z^{-k}\right) \\ &= z^9\end{aligned}$$

Como z tem módulo unitário, podemos escrever que

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

de modo que

$$\begin{aligned}\left(e^{ik\theta} + 1 + e^{-ik\theta}\right) &= (1 + 2\cos(k\theta)) \\ &= e^{i(9+b)\theta} \\ &= \cos[(9+b)\theta] + i\operatorname{sen}[(9+b)\theta]\end{aligned}$$

Assim, igualando as respectivas partes reais e imaginárias, têm-se

$$\begin{cases} \cos[(9+b)\theta] = (1 + 2\cos(k\theta)) \\ \operatorname{sen}[(9+b)\theta] = 0 \end{cases}$$

Pela segunda equação, $\cos[(9+b)\theta] = \pm 1$, logo

$$\begin{cases} \operatorname{sen}[(9+b)\theta] = 0 \\ \begin{cases} \cos[(9+b)\theta] = -1 \Rightarrow \cos(k\theta) = -1 \\ \text{ou} \\ \cos[(9+b)\theta] = 1 \Rightarrow \cos(k\theta) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

A questão pede uma solução qualquer. Por exemplo,

$$a = 1;\ b = 4;\ c = 7;\ k = 3;\ \theta = \pi;\ z = -1$$

que claramente satisfaz as equações acima, de modo que

$$\frac{1}{(-1)^1} + \frac{1}{(-1)^4} + \frac{1}{(-1)^7} = -1 + 1 - 1 = -1 = (-1)^9$$

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a parábola P de equação $y = ax^2$, com $a > 0$ e um ponto A de coordenadas (x_0, y_0) satisfazendo a $y_0 < ax_0^2$. Seja S a área do triângulo ATT', onde T e T' são os pontos de contato das tangentes a P passando por A.

a) Calcule o valor da área S em função de a, x_0 e y_0.
b) Calcule a equação do lugar geométrico do ponto A, admitindo que a área S seja constante.
c) Identifique a cônica representada pela equação obtida no item anterior.

Solução:
Sejam os pontos de contato T e T' das tangentes a P denotados genericamente por (t, at^2). As retas tangentes têm expressão $y = 2atx + c$, onde a é dado e t e c devem ser determinados. Como estas tangentes passam por A, T e T', temos então que

$$\begin{cases} y_0 = 2atx_0 + c \\ at^2 = 2att + c \end{cases} \Rightarrow at^2 - 2atx_0 + y_0 = 0$$

cuja solução dá as abscissas dos pontos de tangência

$$t_{1,2} = \frac{2ax_0 \pm \sqrt{4a^2x_0^2 - 4ay_0}}{2a} = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - \frac{y_0}{a}}$$

de modo que

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2x_0 \\ t_1t_2 = \dfrac{y_0}{a} \\ t_1 - t_2 = 2\sqrt{x_0^2 - \dfrac{y_0}{a}} \end{cases}$$

a) A área S é dada por

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} t_1 & at_1^2 & 1 \\ t_2 & at_2^2 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{matrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|at_1t_2^2 + at_1^2x_0 + t_2y_0 - at_2^2x_0 - y_0t_1 - at_1^2t_2\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|(t_2 - t_1)(at_1t_2 - ax_0(t_1 + t_2) + y_0)\right| \\ &= \frac{1}{2}2\sqrt{x_0^2 - \frac{y_0}{a}}\left|a\frac{y_0}{a} - ax_0(2x_0) + y_0\right| \\ &= \frac{2}{\sqrt{a}}\left(ax_0^2 - y_0\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

b) Fazendo $(x_0, y_0) \equiv (x, y)$ e $S \equiv S_0$, com S_0 constante, tem-se

$$S_0 = \frac{2}{\sqrt{a}}\left(ax^2 - y\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = ax^2 - \left(\frac{S_0^2a}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

c) Analisando a equação acima, vemos que o lugar geométrico desejado é a parábola P rebaixada de um valor $\left(\frac{S_0^2a}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Demonstre que o número $\underbrace{11\ldots1}_{(n-1)\text{ vezes}}\underbrace{222\ldots2}_{n\text{ vezes}}5$ é um quadrado perfeito.

Solução:
Seja x o número acima, de modo que

$$10x = \underbrace{11\ldots1}_{(n-1)\text{ vezes}}\underbrace{222\ldots2}_{n\text{ vezes}}50$$

e então

$$\begin{aligned} 9x &= (10x - x) \\ &= 1\underbrace{0\ldots0}_{(n-2)\text{ vezes}}1\underbrace{0\ldots0}_{(n-1)\text{ vezes}}25 \\ &= 10^{2n} + 10^{(n+1)} + 25 \\ &= 10^{2n} + 2 \times 10^n \times 5 + 5^2 \\ &= (10^n + 5)^2 \end{aligned}$$

É fácil ver, pela soma dos algarismos na segunda linha desta equação, que a expressão final é múltipla de 9, logo

$$x = \left[\frac{(10^n + 5)}{3}\right]^2$$

é um número inteiro e quadrado perfeito.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Ao final de um campeonato de futebol, somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de 35 pontos. Cada equipe jogou com todos os outros adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia 3 pontos, cada empate valia 1 ponto e que derrotas não pontuavam.

Solução:
O total de jogos é $k = \frac{n(n-1)}{2}$ e o total de pontos T_p possíveis para estes k jogos é tal que $2k \leq T_p \leq 3k$, onde os valores $2k$ e $3k$ estão associados aos casos extremos em que houve k e 0 empates, respectivamente. Assim,

$$\begin{cases} \frac{2n(n-1)}{2} \leq 35 \\ 35 \leq \frac{3n(n-1)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2 - n \leq 35 \\ n_2 - n \geq \frac{70}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \leq 6 \\ n \geq 6 \end{cases}$$

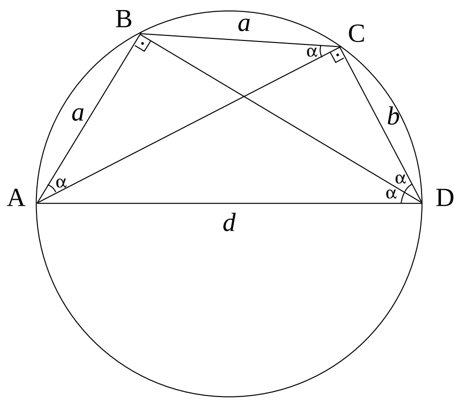
Logo, $n = 6$ e temos um total de $k = 15$ jogos. Desta forma, sejam v e e os respectivos números de vitórias e empates, tais que

$$\begin{cases} v + e = k = 15 \\ 3v + 2e = T_p = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 5 \\ e = 10 \end{cases}$$

confirmando que houve um total de $e = 10$ empates.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Um quadrilátero convexo $ABCD$ está inscrito em um círculo de diâmetro d. Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = a$, $\overline{AD} = d$ e $\overline{CD} = b$, com a, b e d diferentes de zero.
a) Demonstre que $d^2 = bd + 2a^2$.
b) Se a, b e d são números inteiros e a é diferente de b, mostre que d não pode ser primo.

Solução:



a) Da figura, $A\hat{B}D = A\hat{C}D = 90^o$, e ainda, como $\overline{AB} = \overline{BC}$, têm-se que $A\hat{D}B = A\hat{C}B = B\hat{D}C = B\hat{A}C = \alpha$. Do triângulo retângulo ΔACD, temos que

$$\cos A\hat{D}C = \cos 2\alpha = \frac{b}{d}$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ΔABC e o teorema de Pitágoras no triângulo ΔACD, temos respectivamente que

$$\begin{cases} \overline{AC}^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos A\hat{B}C \\ \quad = 2a^2(1 - \cos(180^o - 2\alpha)) \\ \quad = 2a^2(1 + \cos 2\alpha) \\ \quad = 2a^2(1 + \frac{b}{d}) \\ \overline{AC}^2 = d^2 - b^2 \end{cases}$$

de modo que

$$2a^2(1 + \frac{b}{d}) = d^2 - b^2 \Rightarrow d^2 = db + 2a^2$$

b) Seja a hipótese de que d é primo e par. Logo $d = 2$ e então $2a^2 = (4 - 2b)$, e assim $b = 1$ (pois $b > 0$ e $a > 0$), de modo que $a = 1$, o que viola o enunciado (pois $a \neq b$).

Seja a hipótese de que d é primo e ímpar. Como $2a^2 = d(d - b)$ e d é ímpar, logo $(d - b)$ deve ser par e tal que $(d - b)/2 = dq^2$, com q inteiro, para que a^2 seja inteiro. Com isto, devemos ter $d(1 - 2q^2) = b$, e assim $q = 0$ (pois $b > 0$), de modo que $d = b$ e $a = 0$, o que viola o enunciado (pois $a > 0$).

Logo, se d é primo ele não é par nem ímpar, de modo que d não pode ser primo.

IME 2002/2003

1ª Questão [Valor: 1,0]
Seja z um número complexo de módulo unitário que satisfaz a condição $z^{2n} \neq -1$, onde n é um número inteiro positivo. Demonstre que $\dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$ é um número real.

Solução:
Com $z = e^{i\theta}$, tem-se

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z^n}{1+z^{2n}} \\ &= \frac{e^{in\theta}}{1+e^{i2n\theta}} \\ &= \frac{e^{in\theta}}{e^{in\theta}(e^{-in\theta}+e^{in\theta})} \\ &= \frac{1}{2\cos(n\theta)} \end{aligned}$$

onde no último passo, usamos as relações de Euler

$$\begin{cases} e^{in\theta} &= \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta \\ e^{-in\theta} &= \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta \end{cases}$$

Assim, Z é real para todo θ, pois para todo inteiro n, pelo mesmo algebrismo anterior, tem-se que

$$z^{2n} \neq -1 \Leftrightarrow \cos(n\theta) \neq 0$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Determine todos os valores reais de x que satisfazem a equação:

$$\left|\log\left(12x^3 - 19x^2 + 8x\right)\right| = \log\left(12x^3 - 19x^2 + 8x\right),$$

onde $\log(y)$ e $|y|$ representam, respectivamente, o logaritmo na base 10 e o módulo de y.

Solução:
Para termos $|y| = y$, devemos ter $y \geq 0$, logo

$$\log(12x^3 - 19x^2 + 8x) \geq 0$$

ou equivalentemente

$$(12x^3 - 19x^2 + 8x) \geq 1$$

ou seja

$$P(x) = 12x^3 - 19x^2 + 8x - 1 \geq 0$$

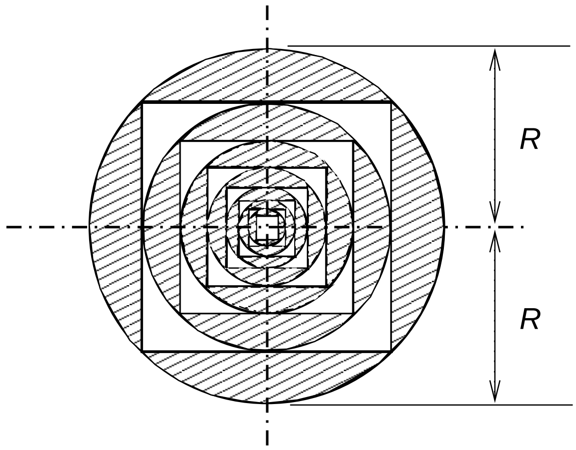
Vê-se claramente que $x = 1$ é raiz de $P(x)$, e com isto as demais raízes $x = 1/4$ e $x = 1/3$ são facilmente obtidas, de modo que

$$P(x) = 12(x-1)(x-1/4)(x-1/3) \geq 0$$

Por inspeção, o intervalo em que $P(x) \geq 0$ é

$$x \in \{[1/4, 1/3] \cup [1, \infty)\}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dada numa circunferência de raio R, inscreve-se nela um quadrado. A seguir, increve-se uma circunferência neste quadrado. Este processo se repete indefinidamente para o interior da figura de maneira que cada quadrado estará sempre inscrito em uma circunferência e simultaneamente circunscrito por outra. Calcule, em função de R, a soma das áreas delimitadas pelos lados dos quadrados e pelas circunferências que os circunscrevem, conforme mostra a figura.



Solução:
Seja S_1 a área do primeiro círculo de raio $R_1 = R$ menos a área do primeiro quadrado de lado ℓ_1, tal que $\ell_1\sqrt{2} = 2R \Rightarrow \ell_1 = R\sqrt{2}$. Assim, temos que

$$S_1 = \pi R_1^2 - \ell_1^2 = \pi R_1^2 - 2R_1^2 = (\pi - 2)R_1^2$$

Seja ainda S_n, para $n = 1, 2, \ldots$, a área do n-ésimo círculo de raio R_n menos a área do n-ésimo quadrado de lado ℓ_n, tal que $\ell_n = R_n\sqrt{2}$. Temos que

$$S_n = \pi R_n^2 - \ell_n^2 = \pi R_n^2 - 2R_n^2 = (\pi - 2)R_n^2$$

É fácil ver que $2R_{n+1} = \ell_n = R_n\sqrt{2}$, de modo que

$$S_{n+1} = (\pi - 2)R_{n+1}^2 = (\pi - 2)\frac{1}{2}R_n^2 = \frac{1}{2}S_n$$

Com isto, $S_n = (1/2)^{n-1}S_1$ e então

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} S_1 = 2S_1 = 2(\pi - 2)R^2$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a equação $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(2\alpha) = 2\operatorname{tg}(3\alpha)$, sabendo-se que $\alpha \in [0, \pi/2)$.

Solução:
Usando senos e cossenos, temos que a expressão do enunciado é equivalente a

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha + \cos\alpha\operatorname{sen}2\alpha\cos 3\alpha = \\ 2\cos\alpha\cos 2\alpha\operatorname{sen}3\alpha\end{aligned}$$

Usando as relações

$$\begin{cases}\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha\\ \operatorname{sen}3\alpha = \operatorname{sen}2\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos 2\alpha\\ \qquad = \operatorname{sen}\alpha(3 - 4\operatorname{sen}^3\alpha)\\ \cos 3\alpha = \cos 2\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}2\alpha)\operatorname{sen}\alpha\\ \qquad = \cos\alpha(1 - 4\operatorname{sen}^2\alpha)\end{cases}$$

a equação anterior se torna

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha(1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha)\cos\alpha(1 - 4\operatorname{sen}^2\alpha) + \\ \cos\alpha(2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)\cos\alpha(1 - 4\operatorname{sen}^2\alpha) = \\ 2\cos\alpha(1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha)\operatorname{sen}\alpha(3 - 4\operatorname{sen}^3\alpha)\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha(1 - 6\operatorname{sen}^2\alpha + 8\operatorname{sen}^4\alpha) + \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha(2 - 10\operatorname{sen}^2\alpha + 8\operatorname{sen}^4\alpha) = \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha(6 - 20\operatorname{sen}^2\alpha + 16\operatorname{sen}^4\alpha)\end{aligned}$$

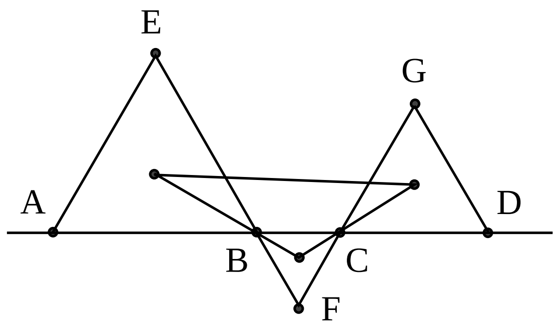
e então

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha(-3 + 4\operatorname{sen}^2\alpha) = 0$$

Como $\alpha \in [0, \pi/2)$, temos que $\cos\alpha \neq 0$, e assim, temos as seguintes soluções:

$$\begin{cases}\operatorname{sen}\alpha = 0\\ \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = 0^{\circ}\\ \alpha = 60^{\circ}\end{cases}$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Sobre uma reta r são marcados os pontos A, B, C e D. São construídos os triângulos equiláteros ABE, BCF e CDG, de forma que os pontos E e G se encontram do mesmo lado da reta r, enquanto que o ponto F se encontra do lado oposto, conforme mostra a figura. Calcule a área do triângulo formado pelos baricentros de ABE, BCF e CDG em função dos comprimentos dos segmentos AB, BC e CD.



Solução:
Seja um eixo de coordenadas com o eixo das abcissas coincidindo com a reta r e com o eixo das ordenadas coincidindo com a altura do triângulo ΔABE. Sejam ainda $AB = x$, $BC = y$ e $CD = z$. Logo as coordenadas dos três baricentros, G_1, G_2 e G_3, dos triângulos ΔABE, ΔBCF e ΔCDG, respectivamente, são

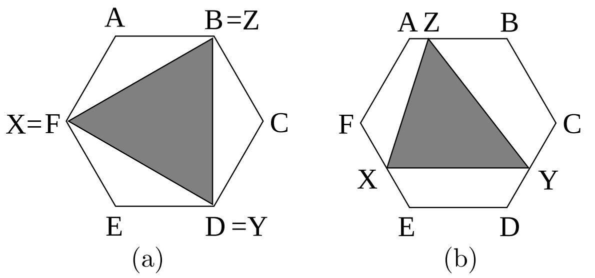
$$\begin{cases}G_1 \equiv \left(0, \frac{x\sqrt{3}}{6}\right)\\ G_2 \equiv \left(\frac{x+y}{2}, -\frac{y\sqrt{3}}{6}\right)\\ G_3 \equiv \left(\frac{x+2y+z}{2}, \frac{z\sqrt{3}}{6}\right)\end{cases}$$

Logo a área desejada é dada por

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & \frac{x\sqrt{3}}{6} & 1\\ \frac{x+y}{2} & -\frac{y\sqrt{3}}{6} & 1\\ \frac{x+2y+z}{2} & \frac{z\sqrt{3}}{6} & 1\end{vmatrix}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{24}\begin{vmatrix}0 & x & 1\\ x+y & -y & 1\\ x+2y+z & z & 1\end{vmatrix}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{24}\left[x(x+2y+z)+z(x+y)+y(x+2y+z)-x(x+y)\right]\\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}(x+y)(y+z)\end{aligned}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um hexágono regular de 6 cm de lado. Determine o valor máximo da área de um triângulo XYZ, sabendo-se que:
a) Os pontos X, Y e Z estão situados sobre lados do hexágono.
b) A reta que une os pontos X e Y é paralela a um dos lados do hexágono.

Solução:
Seja o hexágono $ABCDEF$ de lado $\ell = 6$ cm.



a) O hexágono está inscrito em um círculo de raio ℓ, e o triângulo desejado deverá necessariamente estar no interior (com os vértices possivelmente sobre) deste mesmo círculo. Com esta restrição, o triângulo de área máxima é o triângulo equilátero inscrito no mesmo círculo, cujos vértices podem coincidir, por exemplo, com os vértices B, D e F do hexágono, resultando na área máxima igual a

$$S_a = \left(\frac{2\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}$$

b) Seja y a altura do lado XY em relação ao lado ED. A base b e a altura h do triângulo ΔXYZ são dadas então por

$$\begin{cases} b = \ell + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}y \\ h = \ell\sqrt{3} - y \end{cases}$$

de modo que a área desejada é igual a

$$S_b = \frac{bh}{2} = \frac{3\ell^2\sqrt{3} + 3\ell y - 2\sqrt{3}y^2}{6}$$

Esta equação quadrática tem máximo no ponto médio de suas raízes, ou seja em

$$y^* = \frac{\ell\sqrt{3}}{4}$$

e o valor máximo assumido é

$$S_b^* = \frac{81}{4}\sqrt{3}$$

Neste caso, a área máxima é obtida quando X e Y são pontos médios dos lados EF e CD com Z qualquer sobre o lado AB.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{N}$. Por definição, uma função $f : A \rightarrow B$ é crescente se $a_1 > a_2 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$, para quaisquer a_1 e $a_2 \in A$.
a) Para $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, quantas funções de A para B são crescentes?
b) Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, \ldots, n\}$, quantas funções de A para B são crescentes, onde n é um número inteiro maior que zero?

Solução:

a) Se a imagem do primeiro elemento de A é 1, há quatro possibilidades, 1, 2, 3 e 4, para a imagem do segundo elemento de A.
Se a imagem do primeiro elemento de A é 2, há três possibilidades, 2, 3 e 4, para a imagem do segundo elemento de A.
Se a imagem do primeiro elemento de A é 3, há duas possibilidades, 3 e 4, para a imagem do segundo elemento de A.
Se a imagem do primeiro elemento de A é 4, há apenas uma possibilidade, 4, para a imagem do segundo elemento de A.
Logo, temos um total de possibilidades igual a

$$T_a = \sum_{A_1=1}^{4} \sum_{A_2=A_1}^{4} 1 = \sum_{A_1=1}^{4} (5-A_1) = 4+3+2+1 = 10$$

b) Seguindo o raciocínio anterior, usando o fato de que o somatório dos quadrados dos n primeiros naturais é igual a

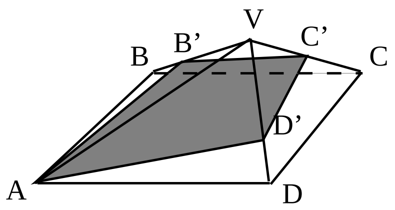
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

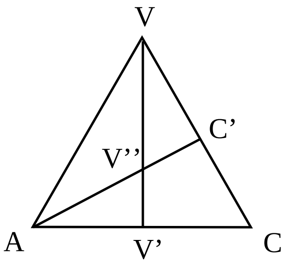
neste caso temos um total de possibilidades igual a

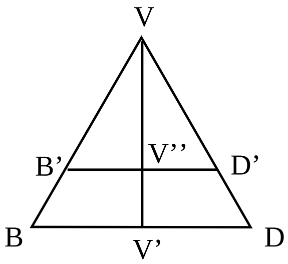
$$\begin{aligned} T_b &= \sum_{A_1=1}^{n} \sum_{A_2=A_1}^{n} \sum_{A_3=A_2}^{n} 1 \\ &= \sum_{A_1=1}^{n} \sum_{A_2=A_1}^{n} (n - A_2 + 1) \\ &= \sum_{A_1=1}^{n} \left[(n+1)(n - A_1 + 1) - \sum_{A_2=A_1}^{n} A_2\right] \\ &= \sum_{A_1=1}^{n} \left[(n+1)^2 - (n+1)A_1 - \frac{A_1+n}{2}(n - A_1 + 1)\right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{A_1=1}^{n} \left[(n^2 + 3n + 2) - (2n+3)A_1 + A_1^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(n^2+3n+2)n - (2n+3)\frac{(1+n)}{2}n + \frac{(2n^3+3n^2+n)}{6}\right] \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} \end{aligned}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja uma pirâmide regular de vértice V e base quadrangular $ABCD$. O lado da base da pirâmide mede l e a aresta lateral $l\sqrt{2}$. Corta-se essa pirâmide por um plano que contém o vértice A, é paralelo à reta BD, e contém o ponto médio da aresta VC. Calcule a área da seção determinada pela interseção do plano com a pirâmide.

Solução:

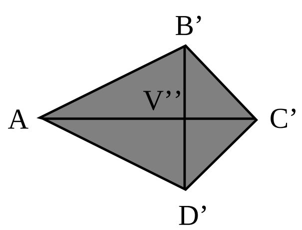






O triângulo ΔAVC é equilátero de lado $\ell\sqrt{2}$. Neste triângulo, sejam C' e V' médios de VC e AC, respectivamente. Logo, AC' e VV' são alturas deste triângulo, cujo comprimento é $\ell\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell\sqrt{6}}{2}$, e cuja interseção V'' é também o baricentro do triângulo, sendo tal que $\overline{V''V'} = \frac{1}{3}\overline{VV'}$.

No triângulo ΔBVD, sejam B' e D' as interseções do plano com BV e DV, respectivamente. Estes pontos estão a mesma altura que V'', logo $\overline{B'D'} = \frac{2}{3}\overline{BD} = \frac{2\ell\sqrt{2}}{3}$.



Pela simetria do problema, o quadrilátero $AB'C'D'$ possui as diagonais AC' e $B'D'$ perpendiculares entre si. Logo sua área é

$$S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2}\overline{AC'} \times \overline{B'D'} = \frac{1}{2} \times \frac{\ell\sqrt{6}}{2} \times \frac{2\ell\sqrt{2}}{3} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{3}$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Demonstre que $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ é um número inteiro múltiplo de quatro.

Solução:
Seja $c = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$, logo

$$\begin{aligned} c^3 &= (20+14\sqrt{2}) + 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2(20-14\sqrt{2})} \\ &\quad +3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})^2} + (20-14\sqrt{2}) \\ &= 40 + 3\left[\sqrt[3]{(400-302)(20+14\sqrt{2})}\right. \\ &\quad \left.\times\sqrt[3]{(400-302)(20-14\sqrt{2})}\right] \\ &= 40 + 3\left[2\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + 2\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right] \\ &= 40 + 6c \end{aligned}$$

Logo c satisfaz a equação

$$P(c) = c^3 - 6c - 40 = (c-4)(c^2+4c+10) = 0$$

Como as raízes de $(c^2+4c+10)$ são complexas e como, pela sua definição, c é real, assim devemos necessariamente ter que $c = 4$.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma matriz A, $n \times n$, de coeficientes reais, e k um número real diferente de 1. Sabendo-se que $A^3 = kA$, prove que a matriz $A + I$ é invertível, onde I é a matriz identidade $n \times n$.

Solução (Baseada em solução do Prof. Bruno Fraga):
Definindo a matriz auxiliar $B = (A + I)$, de modo que $A = (B - I)$, têm-se

$$\begin{aligned} &(B-I)^3 = k(B-I) \\ \Rightarrow\ & B^3 - 3B^2 + 3B - I = kB - kI \\ \Rightarrow\ & B^3 - 3B^2 + (3-k)B = (1-k)I \\ \Rightarrow\ & B[B^2 - 3B + (3-k)I] = (1-k)I \end{aligned}$$

Usando o operador determinante de uma matriz, det[.], tem-se então que

$$\det[B]\det[B^2 - 3B + (3-k)I] = \det[(1-k)I] = (1-k)^n$$

Logo, $\det[B] = \det[A+I] \neq 0$, pois $k \neq 1$, e assim $(A+I)$ é inversível.

IME 2001/2002

1ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule a soma dos números entre 200 e 500 que são múltiplos de 6 ou de 14, mas não simultaneamente múltiplos de ambos.

Solução:
Dada uma progressão aritmética de primeiro termo a_1, último termo a_n e razão r, o número n de termos e a soma S_r dos termos são respectivamente iguais a

$$\begin{cases} n = \dfrac{a_n - a_1}{r} + 1 \\ S_r = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} \end{cases}$$

Com isto, entre 200 e 500, os múltiplos de 6, de 14 e de (6 e 14) perfazem progressões aritméticas de razões 6, 14 e mmc $[6, 14] = 42$, respectivamente, tais que

$$r = 6 : \begin{cases} a_1 = 204 \\ a_n = 498 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 50 \\ S_6 = 17550 \end{cases}$$
$$r = 14 : \begin{cases} a_1 = 210 \\ a_n = 490 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 21 \\ S_{14} = 7350 \end{cases}$$
$$r = 42 : \begin{cases} a_1 = 210 \\ a_n = 462 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 7 \\ S_{6,14} = 2352 \end{cases}$$

Assim, a soma desejada é igual a

$$S = S_6 + S_{14} - 2S_{6,14} = 17550 + 7350 - 2 \times 2352 = 20196$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Uma matriz quadrada é denominada ortogonal quando a sua transposta é igual a sua inversa. Considerando esta definição, determine se a matriz $[R]$, abaixo, é uma matriz ortogonal, sabendo-se que n é um número inteiro e α é um ângulo qualquer. Justifique a sua resposta.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\text{sen}(n\alpha) & 0 \\ \text{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:
Pelo enunciado, R é ortogonal se $RR^T = R^TR = I$, onde I no caso é a matriz identidade de ordem 3. Verificando

$$RR^T = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\text{sen}(n\alpha) & 0 \\ \text{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & \text{sen}(n\alpha) & 0 \\ -\text{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

e

$$R^TR = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & \text{sen}(n\alpha) & 0 \\ -\text{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\text{sen}(n\alpha) & 0 \\ \text{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & 0 \\ \Delta_2 & \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com Δ_1 e Δ_2 definidos por

$$\begin{cases} \Delta_1 = (\cos^2(n\alpha) + \text{sen}^2(n\alpha)) = 1 \\ \Delta_2 = (\text{sen}(n\alpha)\cos(n\alpha) - \cos(n\alpha)\,\text{sen}(n\alpha)) = 0 \end{cases}$$

Assim, $A = I$ e R é uma matriz ortogonal.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma parábola de eixo focal OX que passe pelo ponto $(0, 0)$. Define-se a subnormal em um ponto P da parábola como o segmento de reta ortogonal à tangente da curva, limitado pelo ponto P e o eixo focal. Determine a equação e identifique o lugar geométrico dos pontos médios das subnormais dessa parábola.

Solução:
Sejam a parábola $C : x = ay^2$, tal que $\text{d}x = 2ay\text{d}y$, e um ponto $P \equiv (ay_0^2, y_0)$ pertencente a ela. A reta tangente $x = \alpha_t y + \beta_t$ à C em P é tal que

$$\begin{cases} \alpha_t = \frac{\text{d}x}{\text{d}y}\,|_{y=y_0} = 2ay_0 \\ \beta_t = x_0 - \alpha_t y_0 = ay_0^2 - (2ay_0)y_0 = -ay_0^2 \end{cases}$$

Já a reta ortogonal $x = \alpha_o y + \beta_o$ à C em P é tal que

$$\begin{cases} \alpha_o = \frac{-1}{\alpha_t} = \frac{-1}{2ay_0} \\ \beta_o = x_0 - \alpha_o y_0 = ay_0^2 - \frac{-y_0}{2ay_0} = ay_0^2 + \frac{1}{2a} \end{cases}$$

cuja interseção com o eixo OX é $P' \equiv (ay_0^2 + \frac{1}{2a}, 0)$. Assim, o ponto médio P_M da subnormal é tal que

$$P_M = \frac{P + P'}{2} \equiv (x_M, y_M) = \left(ay_0^2 + \frac{1}{4a}, \frac{y_0}{2}\right)$$

de forma que

$$\begin{cases} y_0^2 = \dfrac{x_M - \frac{1}{4a}}{a} \\ y_0 = 2y_M \end{cases} \Rightarrow x_M = 4ay_M^2 + \frac{1}{4a}$$

Com isto, o lugar geométrico desejado é uma parábola C' similar a C, mas de maior abertura, sem incluir o seu vértice em $V' \equiv (0, \frac{1}{4a})$, já que a subnormal não é definida para o vértice de C.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Sabe-se que $\log_a b = X$, $\log_q b = Y$ e $n > 0$, onde n é um número natural. Sendo c o produto dos n termos de uma progressão geométrica de primeiro termo a e razão q, calcule o valor de $\log_c b$ em função de X, Y e n.

Solução:
Temos que

$$\log_q b = \frac{\log_a b}{\log_a q} \Rightarrow \log_a q = \frac{\log_a b}{\log_q b} = \frac{X}{Y}$$

e ainda

$$c = a \times aq \times \ldots \times aq^{n-1} = a^n q^{\sum_{i=0}^{n-1} i} = a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Com isto

$$\begin{aligned} \log_c b &= \frac{\log_a b}{\log_a c} \\ &= \frac{X}{\log_a \left[a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]} \\ &= \frac{X}{n + \frac{n(n-1)}{2}\log_a q} \\ &= \frac{X}{n + \frac{n(n-1)}{2}\frac{X}{Y}} \\ &= \frac{2XY}{n[2Y + (n-1)X]} \end{aligned}$$

5ª Questão [Valor: 1,0]

a) Encontre as condições a que devem satisfazer os coeficientes de um polinômio $P(x)$ de quarto grau para que $P(x) = P(1-x)$.
b) Considere o polinômio $P(x) = 16x^4 - 32x^3 - 56x^2 + 72x + 77$. Determine todas as suas raízes sabendo-se que o mesmo satisfaz a condição do item acima.

Solução:

(a) Seja o polinômio de quarto grau $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Para termos $P(x) = P(1-x)$, então

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ &= a(1-x)^4 + b(1-x)^3 + c(1-x)^2 + d(1-x) + e \\ &= a(1-4x+6x^2-4x^3+x^4) + b(1-3x+3x^2+x^3) \\ &\quad + c(1-2x+x^2) + d(1-x) + e \\ &= ax^4 + (-4a-b)x^3 + (6a+3b+c)x^2 \\ &\quad + (-4a-3b-2c-d)x + (a+b+c+d+e) \end{aligned}$$

e assim, devemos ter

$$\begin{cases} a = a \\ b = (-4a-b) \\ c = (6a+3b+c) \\ d = (-4a-3b-2c-d) \\ e = (a+b+c+d+e) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ d = a - c \end{cases}$$

(b) Como as condições acima são satisfeitas, $P(x)$ pode ser colocado da forma

$$\begin{aligned} P(x) &= q(x(1-x)) \\ &= \alpha[x(1-x)]^2 + \beta[x(1-x)] + \gamma \\ &= \alpha(x^2 - 2x^3 + x^4) + \beta(x - x^2) + \gamma \\ &= \alpha x^4 + (2\alpha)x^3 + (\alpha - \beta)x^2 + \beta x + \gamma \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{cases} \alpha = a = 16 \\ \beta = d = 72 \\ \gamma = e = 77 \end{cases}$$

Com isto, definindo $y = x(1-x)$, podemos escrever $Q(x(1-x)) = Q(y) = 16y^2 + 72y + 77$, cujas raízes são

$$y_{1,2} = \frac{-72 \pm \sqrt{5184 - 4928}}{32} = \frac{-9 \pm 2}{4}$$

e como $x^2 - x + y = 0$, as raízes em x são

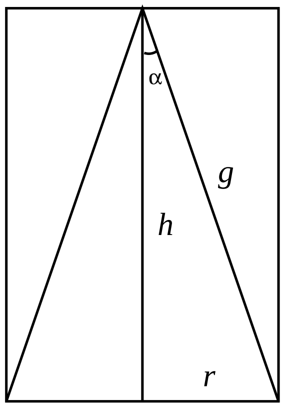
$$\begin{aligned} x_{1,2,3,4} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y_{1,2}}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + (9 \mp 2)}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{2} \;\text{ e }\; \frac{1}{2} \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]

Um cone e um cilindro circulares retos têm uma base comum e o vértice do cone se encontra no centro da outra base do cilindro. Determine o ângulo formado pelo eixo do cone e sua geratriz, sabendo-se que a razão entre a área total do cilindro e a área total do cone é 7/4.

Solução:

Seja a figura abaixo, onde h e r são a altura e o raio da base comuns aos dois sólidos, respectivamente, g é a geratriz do cone e α é o ângulo entre a geratriz e o eixo do cone.



Sejam ainda S_{cil} e S_{con} as áreas totais do cilindro e do cone, respectivamente, de forma que

$$\frac{S_{\text{cil}}}{S_{\text{con}}} = \frac{2\pi r^2 + 2\pi rh}{\pi r^2 + \pi rg} = \frac{2(r+h)}{r+g} = \frac{7}{4}$$

de modo que

$$\begin{cases} r = 7g - 8h \\ r^2 = g^2 - h^2 \end{cases}$$

onde a segunda equação é o teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo de hipotenusa g e catetos r e h. Eliminando r, temos

$$(7g - 8h)^2 = g^2 - h^2 \Rightarrow 48g^2 - 112gh + 65h^2 = 0$$

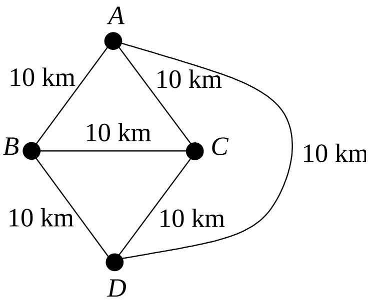
de forma que

$$g = \frac{112 \pm \sqrt{12544 - 12480}}{96}h = \frac{112 \pm 8}{96}h = \frac{14 \pm 1}{12}h$$

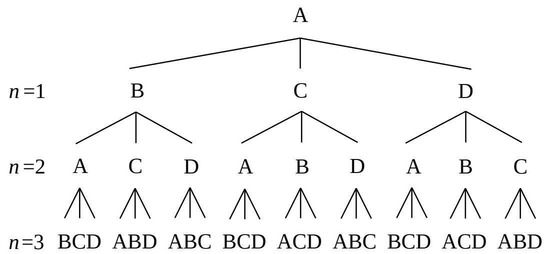
A opção $g = \frac{13h}{12}$ não satisfaz o problema, pois r seria negativo, já que $r = (7g - 8h)$. Logo, $g = \frac{5h}{4}$ e assim

$$\cos\alpha = \frac{h}{g} = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{4}{5}$$

7ª Questão [Valor: 1,0]
Quatro cidades, A, B, C e D, são conectadas por estradas conforme a figura abaixo. Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade A, e possuem:
a) Exatamente 50 km?
b) $n\times$ 10 km?



Solução:
De cada cidade podemos chegar nas três outras por um caminho de 10 km. Partindo de A, este procedimento pode ser representado graficamente por uma árvore ternária, como na figura abaixo.



a) Com a distância $n\times 10$ km, há um total de 3^n percursos distintos partindo de A, e o número de percursos $P_A(n)$ que retornam a A é igual ao número de nós no nível $(n-1)$ diferentes de A. Assim,

$$P_A(n) = 3^{(n-1)} - P_A(n-1)$$

de modo que

$$\begin{cases} P_A(1) = 0 \\ P_A(2) = 3^1 - 0 = 3 \\ P_A(3) = 3^2 - 3^1 = 6 \\ P_A(4) = 3^3 - 3^2 + 3^1 = 21 \\ P_A(5) = 3^4 - 3^3 + 3^2 - 3^1 = 60 \end{cases}$$

b) Generalizando o resultado anterior, tem-se

$$P_A(n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{1-i} 3^{n-i}$$

Este é o somatório dos $(n-1)$ termos de uma progressão geométrica com primeiro termo 3^{n-1} e razão $\frac{-1}{3}$, de modo que

$$P_A(n) = 3^{n-1}\left[\frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} - 1}{\frac{-1}{3} - 1}\right] = \frac{3}{4}[3^{n-1} + (-1)^n]$$

8ª Questão [Valor: 1,0]

(a) Sejam x, y e z números reais positivos. Prove que:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x.y.z}$$

Em que condições a igualdade se verifica?

(b) Considere um paralelepípedo de lados a, b, c, e área total S_0. Determine o volume máximo desse paralelepípedo em função de S_0. Qual a relação entre a, b e c para que esse volume seja máximo? Demonstre seu resultado.

Solução:
Sejam $x = a^3$, $y = b^3$ e $z = c^3$, com a, b e c reais positivos.

(a) Seja

$$\begin{aligned} S &= \frac{x+y+z}{3} - \sqrt[3]{x.y.z} \\ &= \frac{a^3+b^3+c^3}{3} - abc \\ &= \frac{(a+b+c)}{3}[(a^2+b^2+c^2) - (ab+bc+ca)] \\ &= \frac{(a+b+c)}{6} \times \\ &\quad [(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)] \\ &= \frac{(a+b+c)}{6}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \end{aligned}$$

e assim, $S \geq 0$, com a igualdade ocorrendo se e somente se $a = b = c$, ou seja $x = y = z$.

(b) Pelo item anterior, o valor do volume $V = abc$ é máximo para $a = b = c$, quando o paralelepípedo é um cubo, e então

$$\begin{cases} V = V_{\max} = a^3 \\ S_0 = 6a^2 \end{cases} \Rightarrow V_{\max} = \left(\frac{S_0}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a equação $\sqrt{5-\sqrt{5-x}} = x$, sabendo-se que $x > 0$.

Solução:
Definindo $y = \sqrt{5-x}$, temos as equações

$$\begin{cases} y = \sqrt{5-x} \\ x = \sqrt{5-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 5-x \\ x^2 = 5-y \end{cases}$$

e então, subtraindo uma equação da outra,

$$(y^2 - x^2) = (y-x)(y+x) = (y-x)$$

Assim, temos duas possibilidades

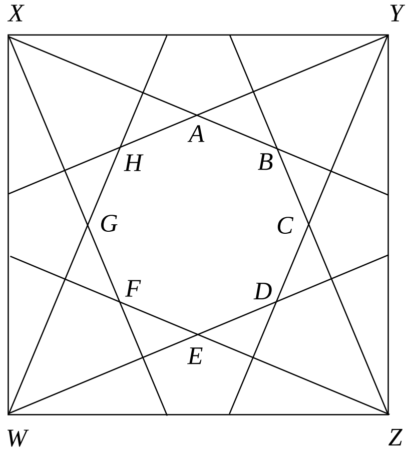
$$\begin{aligned} y = x \Rightarrow x &= \sqrt{5-x} \\ &\Rightarrow x^2 + x - 5 = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

ou

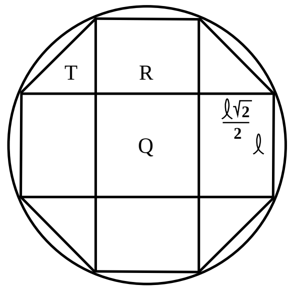
$$\begin{aligned} y + x = 1 \Rightarrow 1 - x &= \sqrt{5-x} \\ &\Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

Eliminando as raízes espúrias introduzidas pelas elevações ao quadrado, notando que $x > 0$ e $x < \sqrt{5}$, tem-se que a única solução correta é $x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um quadrado $XYZW$ de lado a. Dividindo-se cada ângulo desse quadrado em quatro partes iguais, obtém-se o octógono regular representado na figura abaixo. Determine o lado e área desse octógono em função de a. As respostas finais não podem conter expressões trigonométricas.



Solução:
Um octógono regular de lado ℓ pode ser decomposto em um quadrado Q, de lado ℓ, quatro retângulos R, de lados ℓ e $\ell\frac{\sqrt{2}}{2}$, e quatro triângulos retângulos isósceles T, de catetos $\ell\frac{\sqrt{2}}{2}$, como visto na figura abaixo.



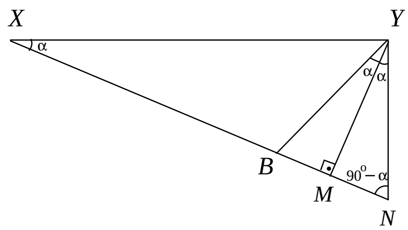
Com isto, a área do octógono é dada por

$$S_8 = \ell^2 + 4\ell^2\frac{\sqrt{2}}{2} + 4\ell^2\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\ell^2(1+\sqrt{2})$$

e o comprimento da diagonal BF é tal que

$$\overline{BF}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{BE}^2 = \ell^2 + \ell^2(1+\sqrt{2})^2 = 2\ell^2(2+\sqrt{2})$$

Seja ainda a figura abaixo onde M e N são as interseções de XB com YC e de XB com YZ, respectivamente. Por uma análise dos valores dos ângulos, é fácil ver que $YD \perp XB$, de forma que os triângulos ΔBMY e ΔNMY são retângulos e similares, com $\overline{BY} = \overline{NY}$.



Aplicando o teorema das bissetrizes no triângulo ΔXZY, onde XN é bissetriz de $Z\hat{X}Y$, temos que

$$\frac{\overline{NY}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{NZ}}{\overline{XZ}} = \frac{\overline{NY}+\overline{NZ}}{\overline{XY}+\overline{XZ}} = \frac{a}{a(1+\sqrt{2})} = \sqrt{2}-1$$

logo

$$\overline{BY} = \overline{NY} = \overline{XY}(\sqrt{2}-1) = a(\sqrt{2}-1)$$

Pela diagonal YW, tem-se

$$\overline{YW} = a\sqrt{2} = 2\overline{BY} + \overline{BF} = 2a(\sqrt{2}-1) + \ell\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$$

e assim

$$\ell = \frac{a(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} = \frac{a(3-2\sqrt{2})\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}{2}$$

Usando este valor na equação de S_8, temos que

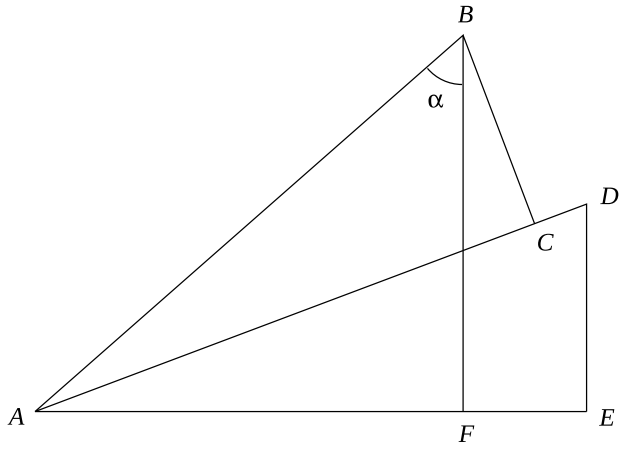
$$S_8 = \frac{2a^2(2-\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})} = a^2(3\sqrt{2}-4)$$

sln: É possível mostrar que $\ell = \frac{a(2-\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}}{2}$.

IME 2000/2001

1ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a figura abaixo, onde $\overline{AB} = \overline{AD} = 1$, $\overline{BC} = x$, $\overline{AC} = y$, $\overline{DE} = z$ e $\overline{AE} = w$. Os ângulos $D\hat{E}A$, $B\hat{C}A$ e $B\hat{F}A$ são retos.

a) Determine o comprimento de $\overline{AF}$ e de $\overline{BF}$ em função de x, y, z e w.
b) Determine a tangente do ângulo α em função de x, y, z e w.



Solução:
Seja G a interseção de BF com AD. Por uma análise angular, é fácil ver que os triângulos ΔAGF, ΔADE e ΔBGC são semelhantes, de forma que

$$\frac{\overline{GF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{BC}}$$
$$\overline{AG} \quad \overline{AD} \quad \overline{BG}$$

ou seja

$$\frac{\overline{GF}}{\overline{AF}} = \frac{z}{w} = \frac{y - \overline{AG}}{x}$$
$$\overline{AG} \quad 1 \quad \overline{BF} - \overline{GF}$$

a)

$$\begin{cases} y - \overline{AG} = \frac{zx}{w} \Rightarrow \overline{AG} = \dfrac{yw - zx}{w} \\ \overline{AF} = w\overline{AG} \Rightarrow \overline{AF} = yw - zx \\ \overline{GF} = \frac{z}{w}\overline{AF} \Rightarrow \overline{GF} = \dfrac{z(yw - zx)}{w} \\ \overline{BF} - \overline{GF} = \frac{x}{w} \Rightarrow \overline{BF} = \dfrac{z(yw - zx) + x}{w} \end{cases}$$

Do enunciado, $z^2 + w^2 = 1$, logo podemos reescrever $\overline{BF}$ como

$$\overline{BF} = \frac{zyw - (1 - w^2)x + x}{w} = zy + wx$$

b)

$$\text{tg}\alpha = \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{yw - zx}{zy + wx}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Considere o polinômio de grau mínimo, cuja representação gráfica passa pelos pontos $P_1(-2, -11)$, $P_2(-1, 0)$, $P_3(1, 4)$ e $P_4(2, 9)$.

a) Determine os coeficientes do polinômio.

b) Calcule todas as raízes do polinômio.

Solução:
Seja o polinômio de terceira ordem (com quatro graus de liberdade) $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Devemos ter

$$\begin{cases} P(-2) = -8a + 4b - 2c + d = -11 \\ P(-1) = -a + b - c + d = 0 \\ P(1) = a + b + c + d = 4 \\ P(2) = 8a + 4b + 2c + d = 9 \end{cases}$$

e então

$$\begin{cases} 16a + 4c = 20 \\ 2a + 2c = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 8b + 2d = -2 \\ 2b + 2d = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Assim, há apenas uma solução, o que indica que a ordem 3 é mínima, tal que

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - x^2 + x + 3 \\ &= (x^2 - 2x + 3)(x + 1) \\ &= [x - (1 + \sqrt{2}i)][x - (1 - \sqrt{2}i)](x - 1) \end{aligned}$$

e as raízes de $P(x)$ são -1, $(1 + \sqrt{2}i)$ e $(1 - \sqrt{2}i)$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Determine todos os números inteiros m e n para os quais o polinômio $2x^m + a^{3n}x^{m-3n} - a^m$ é divisível por $x + a$.

Solução:
Para $P(x)$, o polinômio acima, ser divisível por $(x+a)$, $-a$ deve ser raiz de $P(x)$, isto é

$$\begin{aligned} P(-a) &= 2(-a)^m + a^{3n}(-a)^{m-3n} - a^m \\ &= [2(-1)^m + (-1)^{m-3n} - 1]a^m \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sejam então os quatro casos:

$$\begin{cases} m \text{ par, } n \text{ par} : P(-a) = 2a^m \\ m \text{ par, } n \text{ ímpar} : P(-a) = 0 \\ m \text{ ímpar, } n \text{ par} : P(-a) = -4a^m \\ m \text{ ímpar, } n \text{ ímpar} : P(-a) = -2a^m \end{cases}$$

Logo devemos ter: (i) Se $a = 0$, então $m \geq 0$, para $P(x) = 2x^m$ ser polinômio em x. (ii) Se $a \neq 0$, então devemos ter $m \geq 3n$ (que é mais restritiva que $m \geq 0$), para $P(x)$ ser polinômio em x, e ainda m par e n ímpar.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam a e b números reais positivos e diferentes de 1. Dado o sistema abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a^x \,.\, b^{1/y} & = & \sqrt{ab} \\ 2.\log_a x & = & \log_{1/b} y \,.\, \log_{\sqrt{a}} b \end{array} \right.$$

determine os valores de x e y.

Solução:
Das equações acima, têm-se que

$$\begin{aligned} 2.\log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y.\log_{\sqrt{a}} b &\Rightarrow 2.\frac{\log x}{\log a} = -\frac{\log y}{\log b}.\frac{\log b}{\frac{1}{2}\log a} \\ &\Rightarrow xy = 1 \\ a^x.b^{\frac{1}{y}} = \sqrt{ab} &\Rightarrow x\log a + \frac{1}{y}\log b = \frac{1}{2}(\log a + \log b) \\ &\Rightarrow xy\log a + \log b = \frac{y}{2}(\log a + \log b) \end{aligned}$$

Juntando os dois resultados, têm-se $y = 2$ e $x = \frac{1}{2}$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Dois números complexos são ortogonais se suas representações gráficas forem perpendiculares entre si. Prove que dois números complexos Z_1 e Z_2 são ortogonais se e somente se:

$$Z_1\overline{Z_2} + \overline{Z_1}Z_2 = 0$$

Obs: $\overline{Z}$ indica o conjugado de um número complexo Z.

Solução:
Sejam Z_1 e Z_2 os números complexos

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1 = |Z_1|(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) \\ \overline{Z_1} = |Z_1|(\cos\theta_1 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) \\ Z_2 = |Z_2|(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \\ \overline{Z_2} = |Z_2|(\cos\theta_2 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \end{array} \right.$$

onde $|Z_i|$ e θ_i, para $i = 1, 2$, denotam o módulo e a fase de Z_i, respectivamente. Do enunciado, $Z_1 \perp Z_2$ equivale a $(\theta_1 - \theta_2) = \pm\frac{\pi}{2}$, que por sua vez equivale a

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\theta_1 = \cos(\theta_2 \pm \frac{\pi}{2}) = \mp\mathrm{sen}\,\theta_2 \\ \mathrm{sen}\,\theta_1 = \mathrm{sen}(\theta_2 \pm \frac{\pi}{2}) = \pm\cos\theta_2 \end{array} \right.$$

Com estas relações, podemos escrever Z_1 e $\overline{Z_1}$ como

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1 = |Z_1|(\mp\mathrm{sen}\,\theta_2 \pm i\cos\theta_2) \\ \overline{Z_1} = |Z_1|(\mp\mathrm{sen}\,\theta_2 \mp i\cos\theta_2) \end{array} \right.$$

de modo que

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1\overline{Z_2} = |Z_1||Z_2|(\mp\mathrm{sen}\,\theta_2\cos\theta_2 \pm i\,\mathrm{sen}^2\theta_2 \\ \qquad\qquad \pm i\cos^2\theta_2 \pm \cos\theta_2\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \\ \overline{Z_1}Z_2 = |Z_1||Z_2|(\mp\mathrm{sen}\,\theta_2\cos\theta_2 \mp i\mathrm{sen}^2\theta_2 \\ \qquad\qquad \mp i\cos^2\theta_2 \pm \cos\theta_2\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \end{array} \right.$$

ou seja

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1\overline{Z_2} = \pm i|Z_1||Z_2| \\ \overline{Z_1}Z_2 = \mp i|Z_1||Z_2| \end{array} \right.$$

de forma que $Z_1\overline{Z_2} + \overline{Z_1}Z_2 = 0$ equivale a Z_1 e Z_2 serem ortogonais.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a matrix $A = (a_{kj})$, onde:
$a_{kj} = k$-ésimo termo do desenvolvimento de $(1 + ji)^{54}$, com $k = 1, \ldots, 55$; $j = 1, \ldots, 55$ e $i = \sqrt{-1}$.

a) Calcule $a_{3,2} + a_{54,1}$.
b) Determine o somatório dos elementos da coluna 55.
c) Obtenha uma fórmula geral para os elementos da diagonal principal.

Solução:
Expandindo o binômio de Newton,

$$\begin{aligned} (1 + ji)^{54} &= \sum_{k=1}^{55} a_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{55} \binom{54}{54-k+1} (1)^{54-k+1}(ji)^{k-1} \end{aligned}$$

a) $a_{3,2} + a_{54,1} = -5724 + 54i$, pois

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{3,2} = \frac{54!}{52!2!}(2i)^2 = -5724 \\ a_{54,1} = \frac{54!}{53!1!}(i)^{53} = 54i \end{array} \right.$$

b) Com $j = 55$,

$$\sum_{k=1}^{55} a_{k,55} = \sum_{k=1}^{55} \binom{54}{54-k+1} (55i)^{k-1} = (1+55i)^{54}$$

c) Para $k = 1, 2, \ldots, 55$, e $j = k$, tem-se

$$a_{k,k} = \binom{54}{55-k} (ki)^{k-1}$$

7ª Questão [Valor: 1,0]
Um comandante de companhia convocou voluntários para a constituição de 11 patrulhas. Todas elas são formadas pelo mesmo número de homens. Cada homem participa de exatamente duas patrulhas. Cada duas patrulhas têm somente um homem em comum. Determine o número de voluntários e o de integrantes de uma patrulha.

Solução:
O total T de voluntários é o número de homens na primeira patrulha, v, mais o número de homens na segunda patrulha distintos da primeira patrulha, $(v - 1)$, e assim sucessivamente, até a P-ésima patrulha, toda composta por homens que já participam de outras patrulhas. Logo,

$$T = \underbrace{v + (v-1) + \ldots + 0}_{P \text{ patrulhas}} = \frac{Pv}{2} = \frac{(v+1)v}{2}$$

Com $P = 11$, há $v = 10$ voluntários em cada patrulha e um total de $T = 55$ homens na companhia.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o valor exato de:

$$\operatorname{sen}\left[2\,\operatorname{arc\,cotg}\left(\frac{4}{3}\right)\right]+\cos\left[2\,\operatorname{arc\,cossec}\left(\frac{5}{4}\right)\right]$$

Solução:
Sejam

$$\begin{cases}\theta_1=\operatorname{arc\,cotg}\left(\frac{4}{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}\theta_1=\pm\frac{3}{5}\\ \cos\theta_1=\pm\frac{4}{5}\end{cases}\\ \theta_2=\operatorname{arc\,cossec}\left(\frac{5}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}\theta_2=\pm\frac{4}{5}\\ \cos\theta_2=\pm\frac{3}{5}\end{cases}\end{cases}$$

de forma que a soma desejada é dada por

$$\begin{aligned}S&=\operatorname{sen}2\theta_1+\cos 2\theta_2\\&=2\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_1+\cos^2\theta_2-\operatorname{sen}^2\theta_2\\&=2\left(\pm\frac{3}{5}\right)\left(\pm\frac{4}{5}\right)+\frac{9}{25}-\frac{16}{25}\\&=\frac{17}{25}\end{aligned}$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Prove que para qualquer número inteiro k, os números k e k^5 terminam sempre com o mesmo algarismo (algarismo das unidades).

Solução:
Seja $k=10a+b$, com $b=0,1,\ldots,9$, de forma que

$$\begin{aligned}k^5&=(10a+b)^5\\&=10(10^4a^5+5\times10^3a^4b+10\times10^2a^3b^2\\&\quad+10\times10a^2b^3+5ab^4)+b^5\end{aligned}$$

Assim, $k^5 \bmod 10=b^5 \bmod 10$. Em outras palavras, o algarismo da unidade de k^5 é o algarismo da unidade de b^5, que por inspeção é dado por

$$\begin{cases}b=0\Rightarrow b^5=0\Rightarrow b^5 \bmod 10=0\\ b=1\Rightarrow b^5=1\Rightarrow b^5 \bmod 10=1\\ b=2\Rightarrow b^5=32\Rightarrow b^5 \bmod 10=2\\ b=3\Rightarrow b^5=243\Rightarrow b^5 \bmod 10=3\\ b=4\Rightarrow b^5=1024\Rightarrow b^5 \bmod 10=4\\ b=5\Rightarrow b^5=3125\Rightarrow b^5 \bmod 10=5\\ b=6\Rightarrow b^5=7776\Rightarrow b^5 \bmod 10=6\\ b=7\Rightarrow b^5=16807\Rightarrow b^5 \bmod 10=7\\ b=8\Rightarrow b^5=32768\Rightarrow b^5 \bmod 10=8\\ b=9\Rightarrow b^5=59049\Rightarrow b^5 \bmod 10=9\end{cases}$$

Logo, o algarismo da unidade de b^5 é o mesmo da unidade de b, de forma que o algarismo da unidade de k^5 é sempre o mesmo da unidade de k.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam r, s e t três retas paralelas não coplanares. São marcados sobre r dois pontos A e A', sobre s os pontos B e B' e sobre t os pontos C e C' de modo que os segmentos $\overline{AA'}=a$, $\overline{BB'}=b$ e $\overline{CC'}=c$ tenham o mesmo sentido.

a) Mostre que se G e G' são os baricentros dos triângulos ABC e $A'B'C'$, respectivamente, então $\overline{GG'}$ é paralelo às três retas.
b) Determine $\overline{GG'}$ em função de a, b e c.

Solução:
Sejam as retas paralelas r, s e t descritas por

$$r\!:\begin{cases}x=\alpha t+\beta\\ y=\gamma t+\delta\\ z=\epsilon t+\phi\end{cases};\ s\!:\begin{cases}x=\alpha t+\beta'\\ y=\gamma t+\delta'\\ z=\epsilon t+\phi'\end{cases};\ t\!:\begin{cases}x=\alpha t+\beta''\\ y=\gamma t+\delta''\\ z=\epsilon t+\phi''\end{cases}$$

Sejam ainda $A,A'\in r$, $B,B'\in s$ e $C,C'\in t$, tais que

$$A\equiv\begin{bmatrix}\alpha t_1+\beta\\ \gamma t_1+\delta\\ \epsilon t_1+\phi\end{bmatrix};\ A'\equiv\begin{bmatrix}\alpha t_1'+\beta\\ \gamma t_1'+\delta\\ \epsilon t_1'+\phi\end{bmatrix}$$

$$B\equiv\begin{bmatrix}\alpha t_2+\beta'\\ \gamma t_2+\delta'\\ \epsilon t_2+\phi'\end{bmatrix};\ B'\equiv\begin{bmatrix}\alpha t_2'+\beta'\\ \gamma t_2'+\delta'\\ \epsilon t_2'+\phi'\end{bmatrix}$$

$$C\equiv\begin{bmatrix}\alpha t_3+\beta''\\ \gamma t_3+\delta''\\ \epsilon t_3+f''\end{bmatrix};\ C'\equiv\begin{bmatrix}\alpha t_3'+\beta''\\ \gamma t_3'+\delta''\\ \epsilon t_3'+\phi''\end{bmatrix}$$

Com isto os baricentros G e G' são respectivamente dados por

$$G=\frac{A+B+C}{3}\equiv\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\alpha(t_1+t_2+t_3)+(\beta+\beta'+\beta'')\\ \gamma(t_1+t_2+t_3)+(\delta+\delta'+\delta'')\\ \epsilon(t_1+t_2+t_3)+(\phi+\phi'+\phi'')\end{bmatrix}$$

$$G'=\frac{A'+B'+C'}{3}\equiv\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\alpha(t_1'+t_2'+t_3')+(\beta+\beta'+\beta'')\\ \gamma(t_1'+t_2'+t_3')+(\delta+\delta'+\delta'')\\ \epsilon(t_1'+t_2'+t_3')+(\phi+\phi'+\phi'')\end{bmatrix}$$

de forma que

$$(G'-G)\equiv\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\alpha\tau\\ \gamma\tau\\ \epsilon\tau\end{bmatrix}$$

com $\tau=[(t_1'+t_2'+t_3')-(t_1+t_2+t_3)]$.

a) A reta suporte g do segmento $\overline{GG'}$ tem equação

$$g:\begin{cases}x=\alpha t\\ y=\gamma t\\ z=\epsilon t\end{cases}$$

que passa pela origem e é paralela a r, s e t.

b) O comprimento $\overline{GG'}$ é tal que

$$\begin{aligned}\overline{GG'}&=G'-G\\&=\frac{A+B+C}{3}-\frac{A'+B'+C'}{3}\\&=\frac{\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}}{3}\\&=\frac{a+b+c}{3}\end{aligned}$$

IME 1999/2000

1ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 13 \end{vmatrix}$$

Solução:
Forma-se uma nova matriz de linhas l'_i a partir da matriz original de linhas l_i, para $i = 1, 2, \ldots, 7$, sem alterar o valor de D, com as seguintes operações

$$\begin{cases} l'_2 = l_2 - l_1 \\ l'_3 = l_3 - l_1 \\ l'_4 = l_4 - l_1 \\ l'_5 = l_5 - l_1 \\ l'_6 = l_6 - l_1 \\ l'_7 = l_7 - l_1 \end{cases}$$

Assim, usando Laplace na primeira coluna após a transformação acima, têm-se

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \\ &= 46080 \end{aligned}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a, b, e c números reais tais que $a < b < c$. Prove que a equação abaixo possui exatamente duas raízes, x_1 e x_2, que satisfazem a condição: $a < x_1 < b < x_2 < c$.

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

Solução:
Para $x \neq a, b, c$, a função acima é igual a

$$f(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$$

Sejam os pontos auxiliares $a' = a + \epsilon$, $b'' = b - \epsilon$, $b' = b + \epsilon$ e $c'' = c - \epsilon$, onde $\epsilon > 0$ é um número positivo aproximadamente zero, se comparado com os valores de $(b-a)$, $(c-a)$ e $(c-b)$. Determinando o sinal de $f(x)$ nestes pontos, têm-se que

$$\begin{cases} f(a') &= (a+\epsilon-b)(a+\epsilon-c)+\epsilon(a+\epsilon-c)+\epsilon(a+\epsilon-b) \\ &= (a-b)(a-c) + 2\epsilon(a-c+a-c) + 3\epsilon^2 \\ f(b'') &= -\epsilon(b-\epsilon-c)+(b-\epsilon-a)(b-\epsilon-c)-(b-\epsilon-a)\epsilon \\ &= (b-a)(b-c) - 2\epsilon(b-a+b-c) + 3\epsilon^2 \\ f(b') &= \epsilon(b+\epsilon-c)+(b+\epsilon-a)(b+\epsilon-c)+(b+\epsilon-a)\epsilon \\ &= (b-a)(b-c) + 2\epsilon(b-a+b-c) + 3\epsilon^2 \\ f(c'') &= -(c-\epsilon-b)\epsilon-(c-\epsilon-a)\epsilon+(c-\epsilon-a)(c-\epsilon-b) \\ &= (c-b)(c-a) - 2\epsilon(c-b+c-a) + 3\epsilon^2 \end{cases}$$

Logo, usando o fato de que $\epsilon \approx 0$,

$$\begin{cases} f(a') \approx (a-b)(a-c) > 0 \\ f(b'') \approx (b-a)(b-c) < 0 \\ f(b') \approx (b-a)(b-c) < 0 \\ f(c'') \approx (c-b)(c-a) > 0 \end{cases}$$

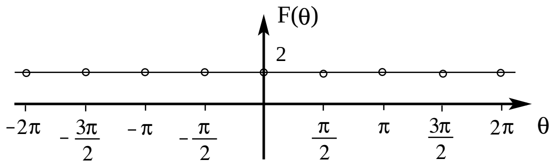
Assim, pela continuidade de $f(x)$, devem existir as raízes $a < x_1 < b < x_2 < c$, tais que $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Represente graficamente a função:

$$F(\theta) = \frac{1}{1+\text{sen}^2\,\theta} + \frac{1}{1+\cos^2\theta} + \frac{1}{1+\sec^2\theta} + \frac{1}{1+\text{cossec}^2\,\theta}$$

Solução:
Para $\theta \neq \frac{k\pi}{2}$, respeitando assim o domínio das funções $\sec\theta$ e $\text{cossec}\,\theta$, com $k \in \mathbb{Z}$, têm-se

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{1}{1+\text{sen}^2\,\theta} + \frac{1}{1+\cos^2\theta} + \frac{1}{1+\frac{1}{\cos^2\theta}} + \frac{1}{1+\frac{1}{\text{sen}^2\,\theta}} \\ &= \frac{1}{1+\text{sen}^2\,\theta} + \frac{1}{1+\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} + \frac{\text{sen}^2\,\theta}{1+\text{sen}^2\,\theta} \\ &= \frac{1+\text{sen}^2\,\theta}{1+\text{sen}^2\,\theta} + \frac{1+\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} \\ &= 2 \end{aligned}$$

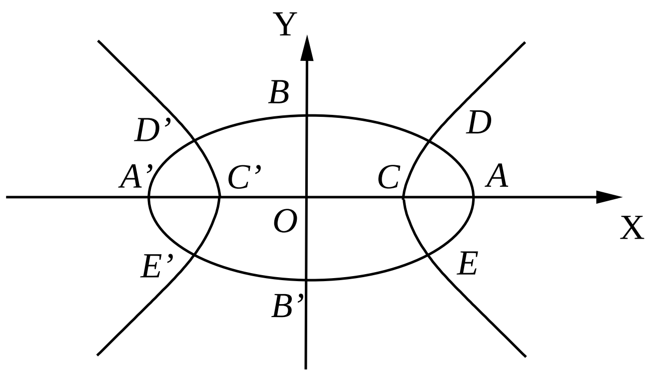


4ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule as coordenadas dos pontos de interseção da elipse com a hipérbole, representadas na figura abaixo, sabendo-se que:

i) Os pontos C e C' são os focos da elipse e os pontos A e A' são os focos da hipérbole.

ii) BB' é o eixo conjugado da hipérbole.

iii) $OB = OB' = 3$ m e $OC = OC' = 4$ m.



Solução:
As equações da elipse E e da hipérbole H representadas na figura são da forma

$$\begin{cases} E: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ H: \dfrac{x^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{d^2} = 1 \end{cases}$$

A elipse é o lugar geométrico dos pontos tais que a soma σ das distâncias aos focos é constante. Como $(0,3)$ pertence à E, de focos $(\pm 4, 0)$, então

$$\sigma = \sqrt{4^2+3^2} + \sqrt{(-4)^2+3^2} = 10$$

de modo que A e A' são os pontos $(\pm 5, 0)$. Logo, E passa pelo pontos $(\pm 5, 0)$ e $(0, \pm 3)$, de forma que $a^2 = 25$ e $b^2 = 9$.

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos tais que a diferença δ das distâncias aos focos é constante. Como $(4,0)$ pertence à H, de focos $(\pm 5, 0)$, então $\delta = 8$ e $c^2 = 16$. Para determinar d^2, seja o ponto $(5, y_0)$ de H. Pela definição,

$$8 = \sqrt{10^2 + y_0^2} - y_0 \Rightarrow y_0^2 + 16y_0 + 64 = 100 + y_0^2$$

e então $y_0 = \frac{9}{4}$. Logo, o ponto $(5, \frac{9}{4})$ pertence a H, e então devemos ter $d^2 = 9$.

Por tudo isto, as interseções desejadas são as soluções do sistema $E = H$, que são $P, Q \equiv (x_1, \pm y_1)$ e $R, S \equiv (-x_1, \pm y_1)$, com $x_1 = \frac{20\sqrt{82}}{41}$ e $y_1 = \frac{9\sqrt{41}}{41}$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o polinômio em n, com no máximo 4 termos, que representa o somatório dos quadrados dos n primeiros números naturais $(\sum_{k=1}^{n} k^2)$.

Solução:
Seja, para todo n natural,

$$P(n) = an^3 + bn^2 + cn + d = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

de forma que $P(n+1) = P(n) + (n+1)^2$, e então

$$\begin{aligned} P(n+1) &= a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + d \\ &= an^3+3an^2+3an+a+bn^2+2bn+b+cn+c+d \\ &= an^3+(3a+b)n^2+(3a+2b+c)n+(a+b+c+d) \\ &= P(n) + (n+1)^2 \\ &= an^3 + bn^2 + cn + d + n^2 + 2n + 1 \\ &= an^3 + (b+1)n^2 + (c+2)n + (d+1) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} (3a+b) = (b+1) \\ (3a+2b+c) = (c+2) \\ (a+b+c+d) = (d+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}$$

e como $P(1) = 1$, então $d = 0$, e assim

$$P(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja o conjunto:

$$D = \{(k_1, k_2) | \, 1 \leq k_1 \leq 13;\ 1 \leq k_2 \leq 4;\ k_1, k_2 \in \mathbb{N}\}.$$

Determine quantos subconjuntos $L = \{(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2),(t_1,t_2),(r_1,r_2)\}$, $L \subset D$, existem com 5 (cinco) elementos distintos, que satisfazem simultaneamente as seguintes condições:
i) $x_1 = y_1 = z_1$.
ii) $x_1 \neq t_1$, $x_1 \neq r_1$, $t_1 \neq r_1$.

Solução:
1ª Interpretação: (conjuntos são ordenados)
Para (x_1, x_2) há 52 opções. Assim, y_1 e z_1 ficam determinados, e há 3 opções de (y_1, y_2) e 2 de (z_1, z_2), pois x_2, y_2 e z_2 devem ser distintos. Além disto, há 12 opções de $t_1 \neq x_1$, cada uma com 4 opções de t_2, e 11 opções de $r_1 \neq x_1$, distinto também de t_1, cada uma com 4 opções.

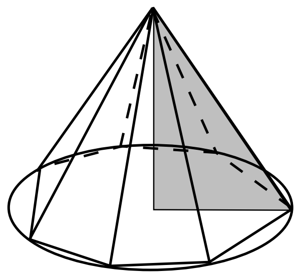
Logo, o total de opções é $52 \times 3 \times 2 \times 12 \times 4 \times 11 \times 4 = 658944$.

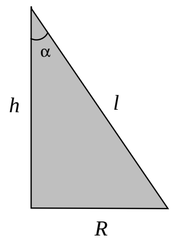
2ª Interpretação: (conjuntos não são ordenados)
Para (x_1, x_2), (y_1, y_2) e (z_1, z_2) só há 13 opções de $x_1 = y_1 = z_1$ e 4 opções de x_2, y_2 e z_2 distintos. Além disto, dos 12 valores de k_1 restantes, temos $\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{12!}{10!2!} =$ 66 opções de $t_1 \neq x_1$ e $r_1 \neq x_1$, ambos também distintos entre si. Para cada t_1 há 4 opções de t_2 e para cada r_1 há 4 opções de r_2.

Logo, o total de opções é $13 \times 4 \times 66 \times 4 \times 4 = 54912$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
As arestas laterais de uma pirâmide regular com n faces têm medida l. Determine:
a) A expressão do raio do círculo circunscrito à base, em função de l, de modo que o produto do volume da pirâmide pela sua altura seja máximo.
b) A expressão desse produto máximo, em função de l e n.

Solução:
Seja h a altura da pirâmide descrita no enunciado, representada na figura abaixo.

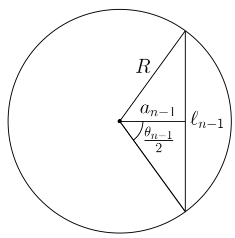




de forma que

$$\begin{cases} R = l \operatorname{sen}\alpha \\ h = l\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow R^2h^2 = l^4 \operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{l^4}{4}\operatorname{sen}^2(2\alpha)$$

A base (que é uma face!) da pirâmide é formada por um polígono regular com $(n-1)$ lados ℓ_{n-1}, com apótema a_{n-1} e ângulo central $\theta_{n-1} = \frac{2\pi}{n-1}$, como visto na figura abaixo.



Assim, a área S_{n-1} da base da pirâmide é

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= \frac{(n-1)\ell_{n-1}a_{n-1}}{2} \\ &= \frac{(n-1)(2R\operatorname{sen}\frac{\theta_{n-1}}{2})(R\cos\frac{\theta_{n-1}}{2})}{2} \\ &= \frac{(n-1)R^2\operatorname{sen}\theta_{n-1}}{2} \end{aligned}$$

e o produto do volume V pela altura h da pirâmide pode ser escrito como

$$Vh = \frac{S_{n-1}h}{3}h = \frac{(n-1)l^4\operatorname{sen}\theta_{n-1}}{24}\operatorname{sen}^2(2\alpha)$$

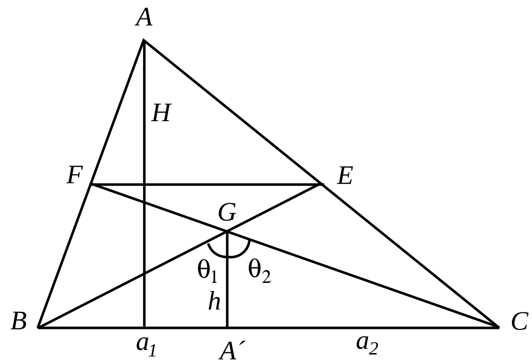
a) Logo, Vh é máximo quando

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = 45^{\circ} \Rightarrow h = R = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

b) Com o resultado anterior, o valor máximo do produto Vh é $\dfrac{(n-1)l^4\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n-1}}{24}$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
As medianas BE e CF de um triângulo ABC se cortam em G. Demonstre que $\operatorname{tg} B\hat{G}C = \dfrac{12S}{b^2+c^2-5a^2}$, onde S é a área do triângulo ABC; $\overline{AC} = b$; $\overline{AB} = c$ e $\overline{BC} = a$.

Solução:
Seja a figura abaixo, onde $B\hat{G}C = \theta = (\theta_1 + \theta_2)$, h é a altura de G e H a altura do triângulo ΔABC. Como G é o baricentro, $h = \frac{H}{3}$, $\overline{GE} = \frac{\overline{BG}}{2}$ e $\overline{GF} = \frac{\overline{CG}}{2}$. Naturalmente, $S = \frac{aH}{2} = \frac{3ah}{2}$.



Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ΔBGC, ΔCGE e ΔBGF, temos, respectivamente, que

$$\begin{cases} a^2 = \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 - 2\overline{BG}\,\overline{CG}\cos\theta \\ \dfrac{b^2}{4} = \dfrac{\overline{BG}^2}{4} + \overline{CG}^2 - 2\dfrac{\overline{BG}}{2}\overline{CG}\cos(\pi-\theta) \\ \dfrac{c^2}{4} = \overline{BG}^2 + \dfrac{\overline{CG}^2}{4} - 2\overline{BG}\dfrac{\overline{CG}}{2}\cos(\pi-\theta) \end{cases}$$

logo

$$\begin{cases} a^2 = \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 - 2\overline{BG}\,\overline{CG}\cos\theta \\ b^2 = \overline{BG}^2 + 4\overline{CG}^2 + 4\overline{BG}\,\overline{CG}\cos\theta \\ c^2 = 4\overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + 4\overline{BG}\,\overline{CG}\cos\theta \end{cases}$$

e assim

$$b^2+c^2-5a^2 = 18\overline{BG}\,\overline{CG}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{b^2+c^2-5a^2}{18\overline{BG}\,\overline{CG}}$$

Ainda da figura

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta_1 = \dfrac{a_1}{\overline{BG}} \\ \cos\theta_1 = \dfrac{h}{\overline{BG}} \\ \operatorname{sen}\theta_2 = \dfrac{a_2}{\overline{CG}} \\ \cos\theta_2 = \dfrac{h}{\overline{CG}} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) = \frac{ah}{\overline{BG}\,\overline{CG}}$$

de modo que

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{18ah}{b^2+c^2-5a^2} = \frac{12S}{b^2+c^2-5a^2}$$

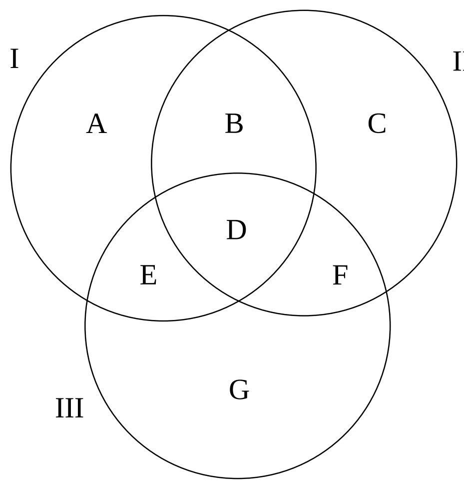
9ª Questão [Valor: 1,0]

Três jogadores, cada um com um dado, fizeram lançamentos simultâneos. Essa operação foi repetida cinquenta vezes. Os dados contêm três faces brancas e três faces pretas. Dessas 50 vezes:

i) Em 28 saiu uma face preta para o jogador I.
ii) Em 25 saiu uma face branca para o jogador II.
iii) Em 27 saiu uma face branca para o jogador III.
iv) Em 8 saíram faces pretas para os jogadores I e III e branca para o jogador II.
v) Em 7 saíram faces brancas para os jogadores II e III e preta para o jogador I.
vi) Em 4 saíram faces pretas para os três jogadores.
vii) Em 11 saíram faces pretas para os jogadores II e III.

Determine quantas vezes saiu uma face preta para pelo menos um jogador.

Solução:



Seja o diagrama de Venn acima, representando o número de resultados preto de cada jogador. Pelo enunciado,

$$\begin{cases} \text{a)}: A+B+D+E=28 \\ \text{b)}: B+C+D+F=50-25 \\ \text{c)}: D+E+F+G=50-27 \\ \text{d)}: E=8 \\ \text{e)}: A=7 \\ \text{f)}: D=4 \\ \text{g)}: D+F=11 \end{cases}$$

Logo é fácil ver que

$$\begin{cases} \text{h)}: \text{ por (e)}: A=7 \\ \text{i)}: \text{ por (a), (d), (e) e (f)}: B=9 \\ \text{j)}: \text{ por (b), (i), (f) e (n)}: C=5 \\ \text{l)}: \text{ por (f)}: D=4 \\ \text{m)}: \text{ por (d)}: E=8 \\ \text{n)}: \text{ por (f) e (g)}: F=7 \\ \text{o)}: \text{ por (c), (d), (f) e (n)}: G=4 \end{cases}$$

e então o valor desejado é

$$A+B+C+D+E+F+G=44$$

10ª Questão [Valor: 1,0]

Considere quatro números inteiros a, b, c e d. Prove que o produto:

$$(a-b)(c-a)(d-a)(d-c)(d-b)(c-b)$$

é divisível por 12.

Solução:

Sejam os termos

$$\begin{cases} A_n = (a-b) \mod n \\ B_n = (c-a) \mod n \\ C_n = (d-a) \mod n \\ D_n = (d-c) \mod n \\ E_n = (d-b) \mod n \\ F_n = (c-b) \mod n \end{cases}$$

Observando que

$$\begin{cases} (d-c) = (d-a) - (c-a) \\ (d-b) = (d-a) + (a-b) \\ (c-b) = (c-a) + (a-b) \end{cases}$$

logo

$$\begin{cases} D_n = (C_n - B_n) \mod n \\ E_n = (C_n + A_n) \mod n \\ F_n = (B_n + A_n) \mod n \end{cases}$$

Analisando as casos em que há zero ou um termo múltiplos de 2 dentre os termos $(a-b)$, $(c-a)$ e $(d-a)$, têm-se que

A_2	B_2	C_2	D_2	E_2	F_2
1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1

e assim há sempre pelo menos dois termos múltiplos de 2 considerando todos os seis termos, de forma que o produto dado é sempre múltiplo de 4.

Analisando as casos em que não há múltiplos de 3 dentre os termos $(a-b)$, $(c-a)$ e $(d-a)$, têm-se que

A_3	B_3	C_3	D_3	E_3	F_3
1	1	1	0	2	2
1	1	2	1	0	2
1	2	1	2	2	0
1	2	2	0	0	0
2	1	1	0	0	0
2	1	2	1	1	0
2	2	1	2	0	1
2	2	2	0	1	1

e assim há sempre pelo menos um termo múltiplo de 3 considerando todos os seis termos, de forma que o produto dado é sempre múltiplo de 3.

Pelos resultados anteriores, o produto dado é sempre múltiplo de 4 e 3, de forma que é sempre múltiplo de 12.

IME 1998/1999

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine as raízes de $z^2+2iz+2-4i=0$ e localize-as no plano complexo, sendo $i=\sqrt{-1}$.

Solução:

$$z_{1,2} = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2-4(2-4i)}}{2} = -i \pm \sqrt{-3+4i}$$

Mas,

$$\sqrt{-3+4i} = \sqrt{5}\left(\frac{-3}{5}+\frac{4i}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

onde

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{3}{5} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5} \end{cases}$$

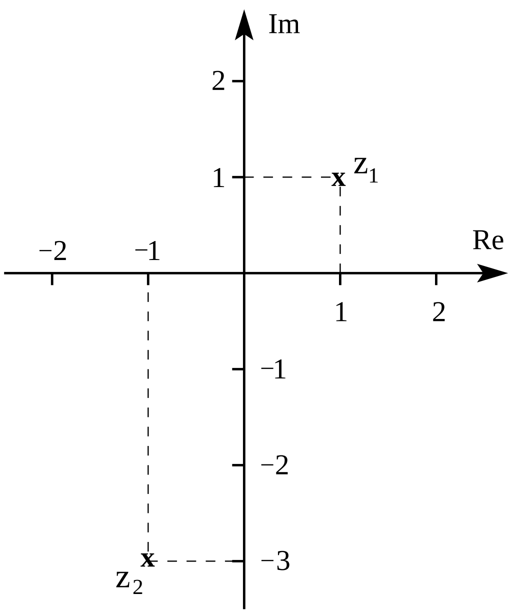
de forma que θ pertence ao segundo quadrante, e assim $\frac{\theta}{2}$ pertence ao primeiro quadrante com

$$\begin{cases} \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Desta forma,

$$z_{1,2} = -i \pm \sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}i\right) = -i \pm (1+2i)$$

e assim $z_1 = (1+i)$ e $z_2 = -(1+3i)$.



2ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam as funções $g(x)$ e $h(x)$ assim definidas: $g(x) = 3x-4$; $h(x) = f(g(x)) = 9x^2-6x+1$. Determine a função $f(x)$ e faça seu gráfico.

Solução:
Seja $f(x) = ax^2+bx+c$, de modo que

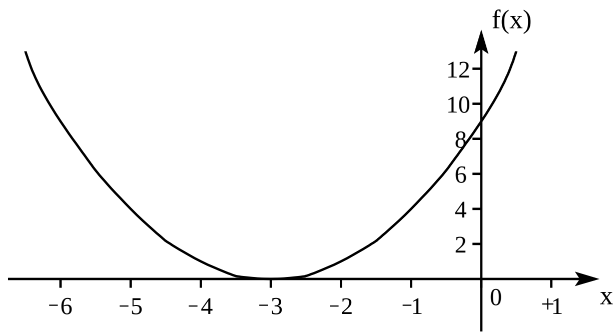
$$\begin{aligned} f(g(x)) &= a(3x-4)^2+b(3x-4)+c \\ &= 9ax^2+(-24a+3b)x+(16a-4b+c) \\ &= 9x^2-6x+1 \end{aligned}$$

para todos valores de x. Assim,

$$\begin{cases} 9a=9 \\ -24a+3b=-6 \\ 16a-4b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=6 \\ c=9 \end{cases}$$

de modo que

$$f(x) = x^2+6x+9 = (x+3)^2$$



3ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o valor de $(1{,}02)^{-10}$, com dois algarismos significativos, empregando a expansão do binômio de Newton.

Solução:

$$\begin{aligned} V &= (1{,}02)^{-10} \\ &= \frac{1}{(1{,}02)^{10}} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=0}^{10}\begin{pmatrix}10\\10-i\end{pmatrix}1^{10-i}(0{,}02)^i} \\ &= \frac{1}{1+\binom{10}{9}(0{,}02)^1+\binom{10}{8}(0{,}02)^2+\binom{10}{7}(0{,}02)^3+\ldots} \\ &= \frac{1}{1+10\times2\times10^{-2}+45\times4\times10^{-4}+120\times8\times10^{-6}+\ldots} \\ &= \frac{1}{1+0{,}2+0{,}018+0{,}00096+\ldots} \\ &= \frac{1}{1{,}21896\ldots} \\ &= 0{,}820\ldots \end{aligned}$$

Logo, $(1{,}02)^{-10} \approx 0{,}82$.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Determine θ sabendo-se que:

i) $\dfrac{1-\cos^4\theta}{1-\operatorname{sen}^4\theta}.\dfrac{1+\operatorname{cotg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}=\dfrac{2}{3}$;

ii) $0<\theta\leq 2\pi$ radianos.

Solução:
A expressão S do enunciado pode ser re-escrita como

$$\begin{aligned} S &= \frac{(1+\cos^2\theta)(1-\cos^2\theta)}{(1+\operatorname{sen}^2\theta)(1-\operatorname{sen}^2\theta)}\left(\frac{1+\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}\right)\\ &= \frac{(1+\cos^2\theta)\operatorname{sen}^2\theta\frac{(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta}}{(1+\operatorname{sen}^2\theta)\cos^2\theta\frac{(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}{\cos^2\theta}}\\ &= \frac{1+\cos^2\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}\\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Logo

$$3+3\cos^2\theta=2+2\operatorname{sen}^2\theta \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2\theta=\frac{4}{5}\\ \cos^2\theta=\frac{1}{5}\end{cases}$$

de forma que seja

$$\alpha=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

então as soluções são

$$\theta\in\{\alpha,(\pi-\alpha),(\pi+\alpha),(2\pi-\alpha)\}$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Determine α para que seja impossível o sistema:

$$\begin{cases} x+2y-3z=4\\ 3x-y+5z=2\\ 4x+y+(\alpha^2-14)z=\alpha+2\end{cases}$$

Solução:
Modificando as equações do sistema, têm-se

$$\begin{cases}(ii)'\leftarrow(ii)-3(i)\\(iii)'\leftarrow(iii)-4(i)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y-3z=4\\-7y+14z=-10\\-7y+(\alpha^2-2)z=\alpha-14\end{cases}$$

Fazendo agora a modificação

$$(iii)''\leftarrow(iii)'-(ii)'\Rightarrow\begin{cases}x+2y-3z=4\\-7y+14z=-10\\(\alpha^2-16)z=\alpha-4\end{cases}$$

Assim, para que o sistema não tenha solução, devemos ter

$$\begin{cases}\alpha^2-16=0\\ \alpha-4\neq 0\end{cases}\Rightarrow\alpha=-4$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Determine as possíveis progressões aritméticas para as quais o resultado da divisão da soma dos seus n primeiros termos pela soma dos seus $2n$ primeiros termos seja independente do valor de n.

Solução:
Sejam os $2n$ termos de uma progressão aritmética, de primeiro termo a_1 e razão r,

$$\underbrace{a_1,\ldots,[a_1+(n-1)r]}_{n\text{ termos}},\underbrace{(a_1+nr),\ldots,[a_1+(2n-1)r]}_{n\text{ termos}}$$

de forma que a razão das somas S_{1n} dos n primeiros termos e S_{2n} dos $2n$ primeiros termos é dada por

$$\frac{S_{1n}}{S_{2n}}=\frac{\frac{[a_1+a_1+(n-1)r]n}{2}}{\frac{[a_1+a_1+(2n-1)r]2n}{2}}=\frac{2a_1+(n-1)r}{4a_1+2(2n-1)r}$$

Para que este valor seja igual a uma constante k para todo n, devemos ter

$$2a_1+nr-r=4a_1k+4nrk-2rk$$

ou seja

$$(2a_1-r)(1-2k)=nr(4k-1)$$

Logo, para que a razão desejada seja independente de n, devemos ter $a_1\neq 0$ e ainda

$$\begin{cases}r=0\\ \text{ou}\\ k=\frac{1}{4}\Rightarrow r=2a_1\end{cases}$$

7ª Questão [Valor: 1,0]
Determine uma matriz não singular P que satisfaça a equação matricial $P^{-1}A=\begin{bmatrix}6&0\\0&-1\end{bmatrix}$, onde $A=\begin{bmatrix}1&2\\5&4\end{bmatrix}$.

Solução:
Pelo enunciado, devemos ter

$$P\begin{bmatrix}6&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1&p_2\\p_3&p_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&0\\0&-1\end{bmatrix}=A=\begin{bmatrix}1&2\\5&4\end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{cases}6p_1=1\\-p_2=2\\6p_3=5\\-p_4=4\end{cases}\Rightarrow P=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&-2\\ \frac{5}{6}&-4\end{bmatrix}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja o polinômio $P(x)$ de grau $(2n+1)$ com todos os seus coeficientes positivos e unitários. Dividindo-se $P(x)$ por $D(x)$, de grau 3, obtém-se o resto $R(x)$. Determine $R(x)$, sabendo-se que as raízes de $D(x)$ são raízes de $A(x) = x^4 - 1$ e que $D(1) \neq 0$.

Solução:
Sejam

$$\begin{cases} P(x) = x^{2n+1} + x^{2n} + \ldots + x + 1 \\ A(x) = (x^4 - 1) \\ = (x^2+1)(x^2-1) \\ = (x^3 + x^2 + x + 1)(x-1) \\ = D(x)(x-1) \end{cases}$$

de forma que

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{D(x)} &= \frac{x^{2n+1} + x^{2n} + \ldots + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} \\ &= x^{2n-2} + x^{2n-6} + \ldots \end{aligned}$$

com resto $R(x) = (x^{2n+1-4M} + \ldots + x + 1)$, com M inteiro e com $(2n+1-4M) \bmod 4 < 3$ para que a divisão tenha terminado. Têm-se então os seguintes casos:

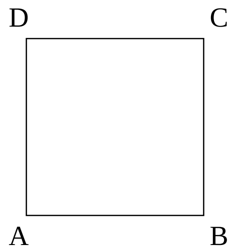
$$\begin{cases} n \text{ par} \Rightarrow (2n+1-4M) \mod 4 = 1 \\ \phantom{n \text{ par}} \Rightarrow R(x) = x + 1 \\ n \text{ ímpar} \Rightarrow (2n+1-4M) \mod 4 = 3 \\ \phantom{n \text{ ímpar}} \Rightarrow \text{ divisão continua e } R(x) = 0 \end{cases}$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Uma piscina de base retangular tem, em metros, as seguintes dimensões: base, 5×6 e altura, 3. Dois terços do volume da piscina são ocupados por água. Na superfície superior da água, forma-se uma pequena bolha de ar. A bolha de ar está eqüidistante das paredes de 5m da base. Em relação às paredes de 6m de base, sua posição é tal que a distância a uma das paredes é o dobro da distância à outra. Estabeleça um sistema de coordenadas retangulares que tenha como origem um dos cantos interiores da piscina e como um dos planos coordenados a parede de base de 6m mais próxima da bolha. Em relação a este sistema, determine as coordenadas retangulares do ponto onde se encontra a bolha de ar.

Solução:
A altura da bolha é $\frac{2}{3}$ da altura total, pois ela está na superfície da água que preenche $\frac{2}{3}$ do volume total, de forma que $z = 2$. Como a bolha está equidistante das paredes de 6 m, então $y = 3$. Como a distância ao eixo y é a metade da distância à parede oposta, então $x = \frac{5}{3}$.

Assim, $(x, y, z) = (\frac{5}{3}, 3, 2)$.

10ª Questão [Valor: 1,0]
$ABCD$ é um quadrado de lado ℓ, conforme figura abaixo. Sabendo-se que K é a soma dos quadrados das distâncias de um ponto P do plano definido por $ABCD$ aos vértices de $ABCD$, determine:
a) O valor mínimo de K e a posição do ponto P na qual ocorre este mínimo.
b) O lugar geométrico do ponto P para $K = 4\ell^2$.



Solução:
Considere o quadrado no eixo cartesiano com centro na origem de forma que os quatro vértices estejam nos pontos

$$\begin{cases} A \equiv \left(-\frac{\ell}{2}, -\frac{\ell}{2}\right) \\ B \equiv \left(\frac{\ell}{2}, -\frac{\ell}{2}\right) \\ C \equiv \left(\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right) \\ D \equiv \left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right) \end{cases}$$

Assim, a soma K, para $P \equiv (x, y)$, é dada por

$$\begin{aligned} K = &\left(x + \frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\ell}{2}\right)^2 \\ &+ \left(x - \frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\ell}{2}\right)^2 \\ = &\ 4x^2 + 2\ell^2 + 4y^2 \end{aligned}$$

a) Logo, K é mínimo quando $P \equiv (0, 0)$, de forma que $K_{\min} = 2\ell^2$.

b) Para $K = \ell^2$, tem-se

$$x^2 + y^2 = \frac{\ell^2}{2}$$

que corresponde à circunferência de raio $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$ centrada na origem, ou seja, à circunferência circunscrita ao quadrado.

IME 1997/1998

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a solução da equação trigonométrica, $\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = 1, x \in \mathbb{R}$.

Solução:
Elevando a equação ao quadrado,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{sen} x\cos x + 3\cos^2 x = 1\\ \Rightarrow 2\sqrt{3}\operatorname{sen} x\cos x + 2\cos^2 x = 0\\ \Rightarrow \cos x(2\sqrt{3}\operatorname{sen} x + 3\cos x) = 0\end{aligned}$$

Assim, temos duas possibilidades:

- $\cos x = 0$ e então, pela equação do enunciado, $\operatorname{sen} x = 1$.
- $(2\sqrt{3}\operatorname{sen} x + 3\cos x) = 0$ e então, pela equação do enunciado, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$.

Assim, a solução geral com $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$ é

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva e interprete, geometricamente, o sistema matricial abaixo, em função de α e β.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 7 \\ 6 & 8 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ \beta \end{bmatrix}$$

Solução:
Modificando as equações do sistema, têm-se

$$\begin{cases} (ii)' \leftarrow (ii) - 5(i) \\ (iii)' \leftarrow (iii) - 6(i) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+3z = -4 \\ 4y-8z = 12 \\ 20y+(\alpha-18)z = \beta+24 \end{cases}$$

Fazendo agora a modificação

$$(iii)'' \leftarrow (iii)' - 5(ii)' \Rightarrow \begin{cases} x-2y+3z = -4 \\ 4y-8z = 12 \\ (\alpha+22)z = \beta-36 \end{cases}$$

Assim, temos três possibilidades:

- Se $\alpha = -22$ e $\beta \neq 36$, o sistema não tem solução, pois não há uma interseção simultânea dos três planos.
- Se $\alpha = -22$ e $\beta = 36$, o sistema tem infinitas soluções, pois a interseção dos três planos é uma reta.
- Se $\alpha \neq -22$, o sistema tem uma única solução, que é o ponto interseção dos três planos, dada por

$$\begin{cases} x = \frac{2\alpha+\beta+8}{\alpha+22} \\ y = \frac{3\alpha+2\beta-6}{\alpha+22} \\ z = \frac{\beta-36}{\alpha+22} \end{cases}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Determine os valores de λ que satisfaçam a inequação, $27^{2\lambda} - \frac{4}{9}.27^{\lambda} + 27^{-1} > 0$, e represente, graficamente, a função, $y = 27^{2x} - \frac{4}{9}.27^{x} + 27^{-1}$.

Solução:
Fazendo $z = 27^{\lambda}$, tem-se

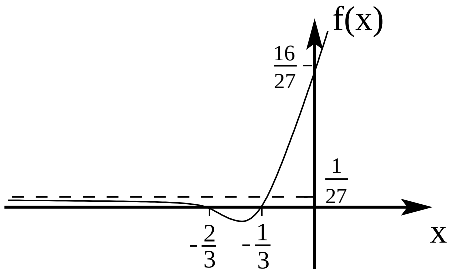
$$z^2 - \frac{4}{9}z + \frac{1}{27} > 0 \Rightarrow \left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{1}{9}\right) > 0$$

Com isto, temos duas possibilidades:

- $z > \frac{1}{3} \Rightarrow 27^{\lambda} > \frac{1}{3} \Rightarrow 3^{3\lambda} > 3^{-1} \Rightarrow \lambda > -\frac{1}{3}$
- $z < \frac{1}{9} \Rightarrow 27^{\lambda} < \frac{1}{9} \Rightarrow 3^{3\lambda} < 3^{-2} \Rightarrow \lambda < -\frac{2}{3}$

Logo devemos ter $\lambda > -\frac{1}{3}$ ou $\lambda < -\frac{2}{3}$. Para o traçado do gráfico, sejam ainda:

- $f(0) = 1 - \frac{4}{9} + \frac{1}{27} = \frac{16}{27}$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} = \infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} = \frac{1}{27}$.



4ª Questão [Valor: 1,0]
Determine os parâmetros α, β, γ e δ da transformação complexa, $W = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$, que leva os pontos $Z = 0; -i; -1$ para $W = i; 1; 0$, respectivamente, bem como, Z para $W = -2 - i$, onde $i = \sqrt{-1}$.

Solução:
Usando as transformações indicadas no enunciado, temos as seguintes equações

$$\begin{cases} i = \frac{\beta}{\delta} \\ 1 = \frac{-\alpha i+\beta}{-\gamma i+\delta} \\ 0 = \frac{-\alpha+\beta}{-\gamma+\delta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \delta i \\ -\gamma i + \delta = -\alpha i + \beta \\ \alpha = \beta \end{cases}$$

de forma que $\gamma = -\delta$ e a transformação é dada por

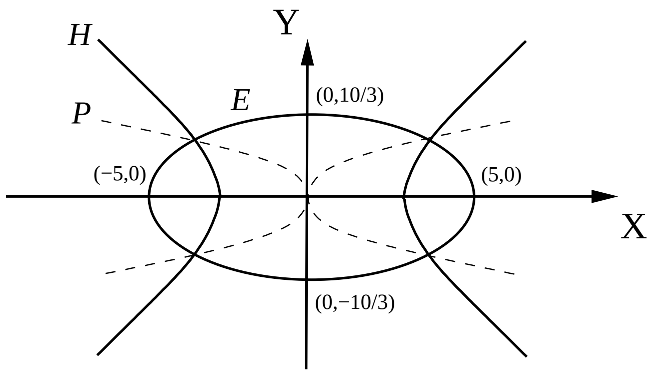
$$W = \frac{\delta i Z + \delta i}{-\delta Z + \delta} = \left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) i$$

Para $W = -2 - i$, tem-se então que

$$-2 - i = \left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) i \Rightarrow Z = 1 + i$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma elipse e uma hipérbole centradas na origem, O, de um sistema cartesiano, com eixo focal coincidente com o eixo OX. Os focos da elipse são vértices da hipérbole e os focos da hipérbole são vértices da elipse. Dados os eixos da elipse como 10 cm e $\dfrac{20}{3}$ cm, determine as equações das parábolas, que passam pelas interseções da elipse e da hipérbole e são tangentes ao eixo OY na origem.

Solução:



Solução:
Sejam a elipse E e a hipérbole H do enunciado, representadas na figura acima, cujas equações são da forma

$$\begin{cases} E: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ H: \dfrac{x^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{d^2}=1 \end{cases}$$

Como $(0,\pm\frac{10}{3})$ e $(\pm 5,0)$ pertencem à E, então

$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow x=\pm 5 \Rightarrow a^2=25 \\ x=0 \Rightarrow y=\pm\frac{10}{3} \Rightarrow b^2=\frac{100}{9} \end{cases}$$

e os focos $(\pm x_0, 0)$ de E são tais que

$$x_0^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2=5^2 \Rightarrow x_0=\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos tais que a diferença δ das distâncias aos focos é constante. Como $(\frac{5\sqrt{5}}{3},0)$ pertence à H, de focos $(\pm 5,0)$, então $\delta=\frac{10\sqrt{5}}{3}$ e $c^2=\frac{125}{9}$. Para determinar d^2, seja o ponto $(5,y_0)\equiv(5,\frac{2d\sqrt{5}}{5})$ de H. Assim,

$$\frac{10\sqrt{5}}{3}=\sqrt{10^2+y_0^2}-y_0 \Rightarrow y_0^2+\frac{20y_0\sqrt{5}}{3}+\frac{500}{9}=100+y_0^2$$

e então $y_0=\frac{4\sqrt{5}}{3}$. Logo, o ponto $(5,\frac{4\sqrt{5}}{3})$ pertence a H, e então devemos ter $d^2=\frac{100}{9}$.

As interseções de E e H são $K,L\equiv(x_1,\pm y_1)$ e $M,N\equiv(-x_1,\pm y_1)$, com $x_1=\frac{5\sqrt{35}}{7}$ e $y_1=\frac{10\sqrt{14}}{21}$. Como K pertence às parábolas P desejadas, logo P têm equação da forma

$$x=\pm\frac{9\sqrt{35}}{40}y^2$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Uma embarcação deve ser tripulada por oito homens, dois dos quais só remam do lado direito e apenas um, do lado esquerdo. Determine de quantos modos esta tripulação pode ser formada, se de cada lado deve haver quatro homens.
Obs: A ordem dos homens de cada lado distingue a tripulação.

Solução:
Do lado esquerdo, temos 4 posições para o remador canhoto. Do lado direito, temos $4\times 3=12$ posições para os dois remadores destros. Para os demais cinco remadores ambidestros, temos $5!=120$ posições. Sendo assim, o total de posições distintas é $4\times 12\times 120=5760$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Determine α, β e γ de modo que o polinômio, $\alpha x^{\gamma+1}+\beta x^{\gamma}+1$, racional inteiro em x, seja divisível por $(x-1)^2$ e que o valor numérico do quociente seja igual a 120 para $x=1$.

Solução:
Sejam $f(x)=(\alpha x^{\gamma+1}+\beta x^{\gamma}+1)$ e $q(x)=\frac{f(x)}{(x-1)^2}$. Pelas condições do enunciado, devemos ter

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+1=0 \\ (\gamma+1)\alpha+\gamma\beta=\gamma(\alpha+\beta)+\alpha=0 \end{cases}$$

Com isto, $\beta=-(1+\alpha)$ e $\gamma=\alpha$, e então

$$f(x)=\alpha x^{\alpha+1}-(1+\alpha)x^{\alpha}+1$$

de forma que

$$q(x)=\alpha x^{\alpha-1}+(\alpha-1)x^{\alpha-2}+(\alpha-2)x^{\alpha-3}+\ldots+2x+1$$

e então

$$q(1)=\underbrace{\alpha+(\alpha-1)+(\alpha-2)+\ldots+2+1}_{\alpha\text{ termos}}=\frac{(\alpha+1)\alpha}{2}=120$$

de modo que

$$\alpha^2+\alpha-240=0 \Rightarrow \alpha=\frac{-1\pm\sqrt{1+960}}{2}$$
$$\Rightarrow \alpha=\frac{-1\pm 31}{2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=15 \\ \beta=-16 \\ \gamma=15 \end{cases}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Uma soma finita de números inteiros consecutivos, ímpares, positivos ou negativos, é igual a 7^3. Determine os termos desta soma.

Solução:
Seja a soma S_n da seqüência de n termos $\{a_1, (a_1+2), \ldots, [a_1+(n-1)2]\}$

$$S_n = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)2]n}{2} = (a_1 + n - 1)n = 7^3$$

Como os fatores $(a_1 + n - 1)$ e n devem ser inteiros, temos as seguintes possibilidades:

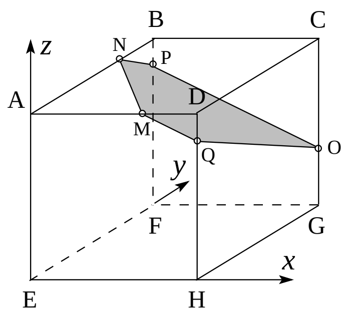
- $n = 1 \;\Rightarrow\; a_1 = 7^3$ e a seqüência consiste em $\{7^3\}$.
- $n = 7 \;\Rightarrow\; a_1 = 7^2 - 7 + 1 = 43$ e a seqüência consiste em $\{43, 45, 47, 49, 51, 53, 55\}$.
- $n = 7^2 \;\Rightarrow\; a_1 = 7 - 7^2 + 1 = -41$ e a seqüência consiste em $\{-41, -39, \ldots, 55\}$.
- $n = 7^3 \;\Rightarrow\; a_1 = 1 - 7^3 + 1 = 2 - 7^3$ e a seqüência consiste em $\{(2-7^3), (4-7^3), \ldots, 7^3\}$.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Considere o cubo de faces $ABCD$ e $EFGH$, e arestas $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$. Sejam as arestas iguais a 3 m e os pontos M, N e P marcados de forma que:

$M \in \overline{AD}$, tal que $\overline{AM} = 2$ m,
$N \in \overline{AB}$, tal que $\overline{AN} = 2$ m, e
$P \in \overline{BF}$, tal que $\overline{BP} = 0{,}5$ m.

Calcule o perímetro da seção que o plano MNP determina no cubo.

Solução:



Seja o cubo situado no espaço cartesiano, como na figura acima, e seja o plano MNP de equação $ax + by + cz + d = 0$, passando pelos pontos $M \equiv (2;0;3)$, $N \equiv (0;2;3)$ e $P \equiv (0;3;2{,}5)$ de forma que

$$\begin{cases} 2a + 0b + 3c = d \\ 0a + 2b + 3c = d \\ 0a + 3b + 2{,}5c = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 2b \\ d = 8b \end{cases}$$

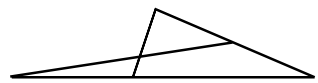
e com isto a equação do plano se torna $x + y + 2z = 8$. Determinando as demais interseções com o cubo, têm-se

$$Q : \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 2{,}5; \quad O : \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 1$$

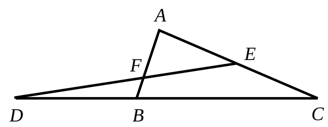
Assim o perímetro da seção $MNOPQ$ é

$$\begin{aligned} 2p &= \overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PO} + \overline{OQ} + \overline{QM} \\ &= 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ &= 2\sqrt{2} + 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

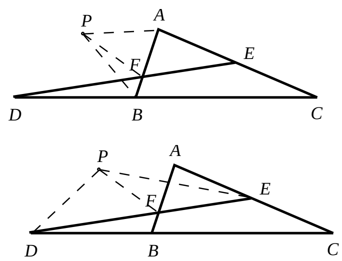
10ª Questão [Valor: 1,0]
Quatro retas se interceptam formando quatro triângulos conforme figura abaixo. Prove que os círculos circunscritos aos quatro triângulos possuem um ponto em comum.



Solução:



Sejam C_1 e C_2 os círculos circunscritos aos triângulos ΔBDF e ΔAEF, respectivamente. Temos, a princípio, a possibilidade de C_1 e C_2 serem tangentes externos em F. Neste caso, DF e EF seriam diâmetros de C_1 e C_2, respectivamente, e $D\hat{B}F = E\hat{A}F = 90^o$. Isto é impossível, pois no triângulo ΔABC teríamos $B\hat{A}C = A\hat{B}C = 90^o$ e então $A\hat{C}B = 0^o$. Logo, C_1 e C_2 são secantes, havendo um outro ponto de interseção, P, além de F.



No quadrilátero $BDFP$ inscrito em C_1, tem-se $B\hat{P}F = B\hat{D}F$. No quadrilátero $AEFP$ inscrito em C_2, tem-se $A\hat{P}F = (180^o - A\hat{E}F) = D\hat{E}C$. Logo,

$$B\hat{P}A = B\hat{P}F + A\hat{P}F = B\hat{D}F + D\hat{E}C = 180^o - A\hat{C}B$$

e o quadrilátero $ACBP$ é inscritível, de modo que P pertence ao círculo circunscrito ao triângulo ΔABC.

Analogamente, no quadrilátero $BDFP$ inscrito em C_1, tem-se $D\hat{P}F = (180^o - D\hat{B}F) = C\hat{B}F$. No quadrilátero $AEFP$ inscrito em C_2, tem-se $E\hat{P}F = E\hat{A}F$. Logo,

$$D\hat{P}E = D\hat{P}F + E\hat{P}F = C\hat{B}F + E\hat{A}F = 180^o - A\hat{C}B$$

e o quadrilátero $ECDP$ é inscritível, de modo que P pertence ao círculo circunscrito ao triângulo ΔCDE.

Em suma, P pertence aos círculos circunscritos aos quatro triângulos ΔABC, ΔAEF, ΔCDE e ΔBDF.

IME 1996/1997

1ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ y = ax \end{cases} \quad \text{onde } a \neq 1 \text{ e } a > 0$$

Solução:
Assumindo que $xy \neq 0$ para evitar uma indefinição do sistema, têm-se

$$\begin{aligned} x^{ax} = (ax)^x &\Rightarrow ax \log x = x \log(ax) \\ &\Rightarrow a \log x = \log a + \log x \\ &\Rightarrow \log x = \frac{1}{a-1} \log a = \log a^{\frac{1}{a-1}} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} x = a^{\frac{1}{a-1}} \\ y = a^{\frac{1}{a-1}+1} = a^{\frac{a}{a-1}} \end{cases}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o termo máximo do desenvolvimento da expressão:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{65}$$

Solução:
A expansão do binômio de Newton nos dá que

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{65} = \sum_{i=0}^{65} \binom{65}{65-i} 1^{65-i} \frac{1}{3^i}$$

Logo, o maior termo é tal que

$$\binom{65}{65-(i-1)} \frac{1}{3^{i-1}} < \binom{65}{65-i} \frac{1}{3^i} > \binom{65}{65-(i+1)} \frac{1}{3^{i+1}}$$

Assim, devemos ter

$$\begin{aligned} \frac{65!}{(66-i)!(i-1)!} \frac{1}{3^{i-1}} < \frac{65!}{(65-i)!i!} \frac{1}{3^i} &\Rightarrow 3i < 66-i \\ &\Rightarrow i < 16{,}5 \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} \frac{65!}{(65-i)!i!} \frac{1}{3^i} > \frac{65!}{(64-i)!(i+1)!} \frac{1}{3^{i+1}} &\Rightarrow 3(i+1) > 65-i \\ &\Rightarrow i > 15{,}5 \end{aligned}$$

Logo o maior termo é obtido para $i = 16$ sendo igual a

$$\binom{65}{49} \frac{1}{3^{16}} = \frac{65!}{49!16!} \frac{1}{3^{16}}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dados os pontos A e B do plano, determine a equação do lugar geométrico dos pontos P do plano, de tal modo que a razão entre as distâncias de P a A e de P a B seja dada por uma constante k. Justifique a sua resposta analiticamente, discutindo todas as possibilidades para k.

Solução:
Sejam

$$\begin{cases} A \equiv (x_a, y_a) \\ B \equiv (x_b, y_b) \end{cases}$$

de forma que a relação $\overline{PA} = k\overline{PB}$, com $k > 0$, ou equivalentemente $\overline{PA}^2 = k^2\overline{PB}^2$, corresponde a

$$\begin{aligned} & (x-x_a)^2+(y-y_a)^2 = k^2(x-x_b)^2+k^2(y-y_b)^2 \\ \Rightarrow\ & (1-k^2)x^2-2(x_a-k^2x_b)x+(x_a^2-k^2x_b^2)+ \\ & (1-k^2)y^2-2(y_a-k^2y_b)y+(y_a^2-k^2y_b^2) = 0 \\ \Rightarrow\ & (1-k^2)\left[x^2-2\frac{(x_a-k^2x_b)x}{(1-k^2)}+\frac{(x_a-k^2x_b)^2}{(1-k^2)^2}\right] \\ & -\frac{(x_a-k^2x_b)^2}{(1-k^2)}+(x_a^2-k^2x_b^2)+ \\ & (1-k^2)\left[y^2-2\frac{(y_a-k^2y_b)y}{(1-k^2)}+\frac{(y_a-k^2y_b)^2}{(1-k^2)^2}\right] \\ & -\frac{(y_a-k^2y_b)^2}{(1-k^2)}+(y_a^2-k^2y_b^2) = 0 \\ \Rightarrow\ & \left[x-\frac{(x_a-k^2x_b)}{(1-k^2)}\right]^2+\left[y-\frac{(y_a-k^2y_b)}{(1-k^2)}\right]^2 \\ & = \frac{k^2}{(1-k^2)^2}[(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2] \\ & = \frac{k^2}{(1-k^2)^2}\,\overline{AB}^2 \end{aligned}$$

Com isto, o lugar geométrico de P é a circunferência de centro

$$O \equiv \left(\frac{x_a - k^2x_b}{1-k^2}, \frac{y_a - k^2y_b}{1-k^2}\right)$$

e raio

$$r = \frac{k}{|1-k^2|}\,\overline{AB}$$

Dentre os casos particulares, destacam-se

$$\begin{cases} k = 0: \text{ ponto } A \\ k = 1: \text{ reta mediatriz de } \overline{AB} \\ k = \infty: \text{ ponto } B \end{cases}$$

sln: Este lugar geométrico é conhecido como o círculo de Apolônio do segmento $\overline{AB}$.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Em cada uma das 6 (seis) faces de um cubo, construiu-se uma circunferência, onde foram marcados n pontos. Considerando que 4 (quatro) pontos não pertencentes à mesma face, não sejam coplanares, quantas retas e triângulos, não contidos nas faces desse cubo, são determinados pelos pontos.

Solução:
Cada um dos $6n$ pontos pode ser conectado a $5n$ pontos das demais faces para formar uma reta. Eliminando a redundância das retas AB e BA, tem-se um total de apenas $\frac{6n\times 5n}{2} = 15n^2$ possibilidades.

O total de triângulos possíveis é $\frac{6n\times(6n-1)\times(6n-2)}{6}$, onde o fator de $\frac{1}{6}$ elimina as permutações dos vértices. Deste total, $6 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ estão sobre uma mesma face. Assim, o total de triângulos não contidos numa mesma face é $[n(6n-1)(6n-2) - n(n-1)(n-2)] = 5n^2(7n-3)$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a função $y = f(x) = \mathrm{Ln}(x + \sqrt{x^2+1})$ onde Ln denota o logaritmo neperiano. Responder aos itens a seguir, justificando sua resposta.

a) Se $g(x) = \mathrm{Ln}(2x)$, que relação existe entre os gráficos das curvas f e g?

b) Pode-se afirmar que a função definida por $H(x) = \dfrac{f(x)}{2}$ é uma primitiva para a função $T(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$?

Solução:

a) Como $x^2 + 1 > x^2$, logo $\sqrt{x^2+1} > x$ e assim, como Ln é uma função crescente, o gráfico de $f(x)$ está sempre acima do gráfico de $g(x)$. Além disto, para $x \gg 1$, tem-se $\sqrt{x^2+1} \approx x$, de forma que $g(x) \to f(x)$.

b) Para $H(x)$ ser primitiva de $T(x)$, devemos ter, dentre outras coisas, $\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x} = T(x)$. Mas,

$$\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\,\frac{1+\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \neq T(x)$$

Logo, $H(x)$ não é primitiva de $T(x)$.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Se $\mathrm{tg}\, a$ e $\mathrm{tg}\, b$ são raízes da equação $x^2 + px + q = 0$, calcule, em função de p e q, o valor simplificado da expressão:

$$y = \mathrm{sen}^2(a+b) + p\,\mathrm{sen}\,(a+b)\cos(a+b) + q\cos^2(a+b)$$

Considere $p, q \in \Re$ com $q \neq 1$.

Solução:
Pelo enunciado, usando as relações de Girard

$$\begin{aligned} -p &= \mathrm{tg}\, a + \mathrm{tg}\, b \\ &= \frac{\mathrm{sen}\, a}{\cos a} + \frac{\mathrm{sen}\, b}{\cos b} \\ &= \frac{\mathrm{sen}\, a\cos b + \mathrm{sen}\, b\cos a}{\cos a\cos b} \\ &= \frac{\mathrm{sen}(a+b)}{\cos a\cos b} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 1-q &= 1 - \mathrm{tg}\, a\,\mathrm{tg}\, b \\ &= 1 - \frac{\mathrm{sen}\, a}{\cos a}\frac{\mathrm{sen}\, b}{\cos b} \\ &= \frac{\cos a\cos b - \mathrm{sen}\, a\,\mathrm{sen}\, b}{\cos a\cos b} \\ &= \frac{\cos(a+b)}{\cos a\cos b} \end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{cases} \mathrm{sen}(a+b) = -p\cos a\cos b \\ \cos(a+b) = (1-q)\cos a\cos b \end{cases}$$

e então

$$\mathrm{sen}^2(a+b) + \cos^2(a+b) = [p^2 + (1-q)^2]\cos^2 a\cos^2 b = 1$$

Logo,

$$\cos^2 a\cos^2 b = \frac{1}{p^2+(1-q)^2}$$

e então,

$$y = \frac{p^2}{p^2+(1-q)^2} + \frac{p(-p)(1-q)}{p^2+(1-q)^2} + \frac{q(1-q)^2}{p^2+(1-q)^2} = q$$

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere os números ímpares escritos sucessivamente, como mostra a figura abaixo, onde a n-ésima linha compreende n números. Encontre em função de n, nesta linha, a soma de todos os números escritos, bem como o primeiro e o último.

$$
\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
3 & 5 & & & & \\
7 & 9 & 11 & & & \\
13 & 15 & 17 & 19 & & \\
21 & 23 & 25 & 27 & 29 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Solução:
Cada linha de ordem n é uma progressão aritmética de n termos com primeiro termo $a_1 = (n^2 - n + 1)$ e razão 2, de modo que o último termo é

$$a_n = a_1 + (n-1)2 = (n^2 - n + 1 + 2n - 2) = (n^2 + n - 1)$$

e a soma dos termos é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)]n}{2} = n^3$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o resto da divisão do polinômio $(\cos\varphi + x \operatorname{sen}\varphi)^n$ por $(x^2 + 1)$, onde n é um número natural.

Solução:
Sejam o dividendo $P(x)$, o divisor $D(x) = (x^2 + 1)$, o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$, tais que

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

Como o divisor é de segunda ordem, o resto deve ser no máximo de primeira ordem, isto é, $R(x) = ax + b$. Substituindo os valores $x = \pm i$ na equação acima, têm-se

$$\begin{cases} P(i) = (i^2 + 1)Q(i) + R(i) = R(i) \\ P(-i) = ((-i)^2 + 1)Q(-i) + R(-i) = R(-i) \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi) = ai + b \\ (\cos\varphi - i \operatorname{sen}\varphi)^n = \cos(n\varphi) - i \operatorname{sen}(n\varphi) = -ai + b \end{cases}$$

e então

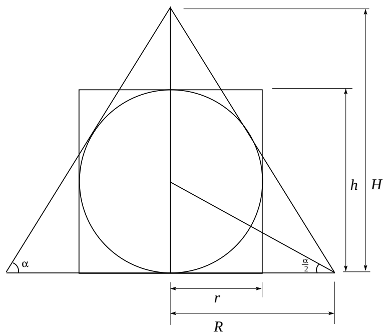
$$\begin{cases} a = \operatorname{sen}(n\varphi) \\ b = \cos(n\varphi) \end{cases}$$

de forma que

$$R(x) = x \operatorname{sen}(n\varphi) + \cos(n\varphi)$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma esfera inscrita e tangente à base de um cone de revolução. Um cilindro está circunscrito à esfera de tal forma que uma de suas bases está apoiada na base do cone. Seja V_1 o volume do cone e V_2 o volume do cilindro. Encontre o menor valor da constante k para o qual $V_1 = kV_2$.
Obs: Considere o ângulo formado pelo diâmetro da base e a geratriz do cone em uma das extermidades deste diâmetro.

Solução:



Sejam R e H o raio e a altura do cone, e r e h o raios e a altura do cilindro, respectivamente. Assim, observando que $h = 2r$, têm-se que

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{\pi R^2 H}{3} \\ V_2 = \pi r^2 h = 2\pi r^3 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{R^2 H}{6r^3}$$

Seja α o ângulo da geratriz do cone com o plano da base. Lembrando que o incentro é o encontro das bissetrizes de um triângulo, têm-se que

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{R} \\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = R\operatorname{tg}\alpha \\ r = R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Logo, usando as relações

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

tem-se

$$k = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{6\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1-2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}}{6\frac{\operatorname{sen}^3\frac{\alpha}{2}}{\cos^3\frac{\alpha}{2}}} = \frac{(1-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2})^2}{3\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}(1-2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2})}$$

Diferenciando esta expressão em relação a $x = \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} &= \frac{x(1-2x)2(1-x)(-1) - (1-2x+x(-2))(1-x)^2}{[x(1-2x)]^2} \\ &= \frac{(1-x)(3x-1)}{[x(1-2x)]^2}\end{aligned}$$

cuja solução viável que minimiza o valor de k é

$$x = \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$$

para a qual $k = k_{\min} = \frac{4}{3}$.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Em uma parábola (P), com foco F e parâmetro p, considere uma corda $\overline{MM'}$ normal à parábola em M. Sabendo que o ângulo $M\hat{F}M' = 90^{\text{o}}$, calcule os segmentos $\overline{FM}$ e $\overline{FM'}$.

Solução:
O parâmetro de uma parábola é a distância de seu foco para sua geratriz. Apelando para a geometria analítica, seja a parábola $(P): y = \frac{x^2}{2p}$, de diretriz $y = -\frac{p}{2}$ e foco $F: (0, \frac{p}{2})$. Sejam ainda os pontos

$$\begin{cases} m \equiv (x_1, y_1) \equiv (x_1, \frac{x_1^2}{2p}) \\ m' \equiv (x_2, y_2) \equiv (x_2, \frac{x_2^2}{2p}) \end{cases}$$

Do triângulo retângulo $\Delta MFM'$, têm-se que

$$(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{4p^2}(x_1^2 - x_2^2)^2 = x_1^2 + \left(\frac{x_1^2}{2p} - \frac{p}{2}\right)^2 + x_2^2 + \left(\frac{x_2^2}{2p} - \frac{p}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow -2x_1x_2 - \frac{x_1^2x_2^2}{2p^2} = -\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} + \frac{p^2}{2}$$
$$\Rightarrow -4p^2x_1x_2 - x_1^2x_2^2 + p^2x_1^2 + p^2x_2^2 = 0$$
$$\Rightarrow (p^2x_1^2 - 2p^2x_1x_2 + p^2x_2^2) - (x_1^2x_2^2 + 2p^2x_1x_2 + p^4) = 0$$
$$\Rightarrow p^2(x_1 - x_2)^2 - (x_1x_2 + p^2)^2 = 0$$
$$\Rightarrow p(x_1 - x_2) = \pm(x_1x_2 + p^2)$$

As retas tangente T e normal N à (P) no ponto M têm equações

$$\begin{cases} T: y = \frac{x_1}{p}x - \frac{x_1^2}{2p} \\ N: y = -\frac{p}{x_1}x + \frac{x_1^2 + 2p^2}{2p} \end{cases}$$

respectivamente. Note que as retas têm coeficientes angulares cujo produto é igual a -1 e ambas passam pelo ponto M. Determinando as interseções M e M' da reta N com P, têm-se que

$$-\frac{p}{x_1}x + \frac{x_1^2 + 2p^2}{2p} = \frac{x^2}{2p}$$
$$\Rightarrow x_1x^2 + 2p^2x - x_1(x_1^2 + 2p^2) = 0$$
$$\Rightarrow (x - x_1)[x_1(x + x_1) + 2p^2] = 0$$
$$\Rightarrow x = x_2 = -\frac{2p^2 + x_1^2}{x_1}$$

Usando este valor na equação do triângulo retângulo $\Delta MFM'$, tem-se

$$p\left(x_1 + \frac{2p^2 + x_1^2}{x_1}\right) = \pm\left(-x_1\frac{2p^2 + x_1^2}{x_1} + p^2\right)$$
$$\Rightarrow (2p \pm x_1)(x_1^2 + p^2) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = \mp 2p \ \text{ e } \ x_2 = \pm 3p$$

pois, por definição, $p > 0$. Assim, temos os pontos

$$\begin{cases} m \equiv (\mp 2p, 2p) \\ m' \equiv (\pm 3p, \frac{9p}{2}) \end{cases}$$

de forma que

$$\begin{cases} \overline{FM} = \sqrt{(\mp 2p)^2 + (2p - \frac{p}{2})^2} = \frac{5p}{2} \\ \overline{FM}' = \sqrt{(\pm 3p)^2 + (\frac{9p}{2} - \frac{p}{2})^2} = 5p \end{cases}$$

IME 1995/1996

1ª Questão [Valor: 1,0]
Considerando $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, encontre, em função de a e b, o logaritmo do número $\sqrt[5]{11{,}25}$ no sistema de base 15.

Solução:

$$\log_{15} \sqrt[5]{11{,}25} = \frac{1}{5}\,\frac{\log \frac{3^2\times 10}{2^3}}{\log \frac{3\times 10}{2}} = \frac{1}{5}\,\frac{2b+1-3a}{b+1-a}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Encontre todas as soluções reais da equação apresentada abaixo, onde n é um número natural.

$$\cos^n x - \operatorname{sen}^n x = 1$$

Solução (Baseada em solução de Eric D. Cariello):
Desenvolvendo a equação original:

$$\cos^n x - \operatorname{sen}^n x = 1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x \Rightarrow$$
$$\cos^2 x(\cos^{n-2} x - 1) = \operatorname{sen}^2 x(\operatorname{sen}^{n-2} x + 1)$$

Como $\cos^2 x$ e $\operatorname{sen}^2 x$ são ambos não-negativos, então os termos $(\cos^{n-2} x - 1)$ e $(\operatorname{sen}^{n-2} x + 1)$ devem possuir o mesmo sinal. Porém, $(\cos^{n-2} x - 1)$ é não-positivo e $(\operatorname{sen}^{n-2} x + 1)$ é não-negativo. Logo, as soluções da equação original devem anular os fatores da equação acima.

Logo, se n é par, devemos ter

$$\cos x = \pm 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = 0$$

Se n é ímpar, logo

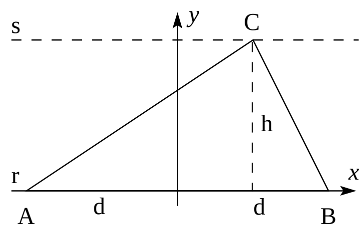
$$\begin{cases} \cos x = 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = 0 \\ \text{ou} \\ \cos x = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = -1 \end{cases}$$

Em suma, a solução geral é, para $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} n \text{ par} : x = k\pi \\ n \text{ ímpar} : x = \begin{cases} 2k\pi \\ 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Um triângulo ABC tem base AB fixa sobre uma reta r. O vértice C desloca-se ao longo de uma reta s, paralela a r e a uma distância h da mesma. Determine a equação da curva descrita pelo ortocentro do triângulo ABC.

Solução:
Sejam $A \equiv (-d, 0)$, $B \equiv (d, 0)$ e $C \equiv (x_c, h)$, de forma que $\overline{AB} = 2d$, como representado na figura abaixo.



A equação do lado BC é

$$\begin{cases} x = d \Rightarrow y = 0 \\ x = x_c \Rightarrow y = h \end{cases} \Rightarrow y = \frac{h}{x_c - d}(x - d)$$

logo, a equação da altura de A, ortogonal ao lado BC e passando por A, é

$$y = -\frac{x_c - d}{h}(x + d)$$

O ortocentro satisfaz esta relação com $x = x_c$, que é a equação da altura de C, e assim

$$y = -\frac{(x-d)(x+d)}{h} = \frac{d^2 - x^2}{h} = \frac{-x^2}{h} + \frac{\overline{AB}^2}{4h}$$

Esta equação corresponde a uma parábola com concavidade para baixo, passando por A e B, simétrica em relação à mediatriz do lado AB.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja f uma função real tal que $\forall\, x, a \in \Re :\ f(x+a) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$. f é periódica? Justifique.

Solução (Baseada em solução de Caio S. Guimarães):
Do enunciado,

$$[f(x+a) - \frac{1}{2}]^2 = f(x) - [f(x)]^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4} - [f(x) - \frac{1}{2}]^2$$

Definindo $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$, tem-se

$$[g(x+a)]^2 = \frac{1}{4} - [g(x)]^2$$

que é válida para todo x. Fazendo $x = (x+a)$, tem-se

$$[g(x+2a)]^2 = \frac{1}{4} - [g(x+a)]^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + [g(x)]^2 = [g(x)]^2$$

Como f é real, da expressão do enunciado, podemos concluir que $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$, de modo que $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$. Assim, temos que $g(x + 2a) = g(x)$ e então $g(x)$, e conseqüentemente $f(x)$, é periódica de período $2a$.

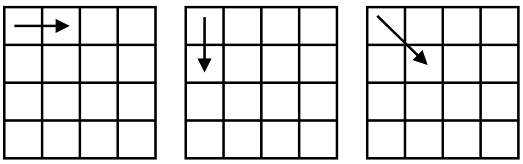
5ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule a soma abaixo:

$$\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\ldots+\frac{1}{2998\times 3001}$$

Solução:
Seja S a soma do enunciado. Logo,

$$\begin{aligned} S &= \frac{\frac{1}{1}-\frac{1}{4}}{3}+\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{7}}{3}+\frac{\frac{1}{7}-\frac{1}{10}}{3}+\ldots+\frac{\frac{1}{2998}-\frac{1}{3001}}{3} \\ &= \frac{\frac{1}{1}-\frac{1}{3001}}{3} \\ &= \frac{1000}{3001} \end{aligned}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
É dado um tabuleiro quadrado 4×4. Deseja-se atingir o quadrado inferior direito a partir do quadrado superior esquerdo. Os movimentos permitidos são os representados pelas setas:



De quantas maneiras isto é possível?

Solução:
Seja $a_{i,j}$, para $i,j=1,2,3,4$, o número de percursos distintos partindo da posição $a_{i,j}$ até a posição $a_{4,4}$. Seguindo as regras de formação de um percurso, é fácil verificar que

$$a_{1,4}=a_{2,4}=a_{3,4}=a_{4,4}=a_{4,1}=a_{4,2}=a_{4,3}=1$$

Além disto, partindo da posição $a_{i,j}$, só há três alternativas: ir para baixo, $a_{i+1,j}$, ir para a diagonal inferior direita, $a_{i+1,j+1}$, e ir para a direita, $a_{i,j+1}$. Assim, de modo geral, tem-se

$$a_{i,j}=a_{i+1,j}+a_{i+1,j+1}+a_{i,j+1}$$

Com esta relação, é fácil preencher o quadro da seguinte forma

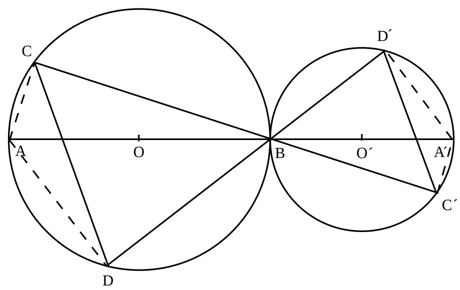
$$\begin{cases} a_{3,3}=a_{3,4}+a_{4,4}+a_{4,3}=1+1+1=3 \\ a_{2,3}=a_{2,4}+a_{3,4}+a_{3,3}=1+1+3=5 \\ a_{3,2}=a_{3,3}+a_{4,3}+a_{4,2}=3+1+1=5 \\ a_{1,3}=a_{1,4}+a_{2,4}+a_{2,3}=1+1+5=7 \\ a_{3,1}=a_{3,2}+a_{4,2}+a_{4,1}=5+1+1=7 \\ a_{2,2}=a_{2,3}+a_{3,3}+a_{3,2}=5+3+5=13 \\ a_{1,2}=a_{1,3}+a_{2,3}+a_{2,2}=7+5+13=25 \\ a_{2,1}=a_{2,2}+a_{3,2}+a_{3,1}=13+5+7=25 \\ a_{1,1}=a_{1,2}+a_{2,2}+a_{2,1}=25+13+25=63 \end{cases}$$

de modo que há 63 percursos possíveis distintos da posição $a_{1,1}$ até a posição $a_{4,4}$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam 5 (cinco) pontos $AOBO'A'$, nesta ordem, pertencentes a uma reta genérica r tal que $AO=OB=3a$; $BO'=O'A'=2a$, onde a é um comprimento dado. Traçam-se os círculos (O), com diâmetro AB, e (O'), com diâmetro BA'. Sejam C e D dois pontos quaisquer do círculo (O); as retas BC e BD cortam o círculo (O') respectivamente em C' e D'.

a) Calcule $\dfrac{BC'}{BC}$.
b) Calcule $\dfrac{C'D'}{CD}$.
c) Seja o ângulo $C\hat{B}D$ igual a 30º. Calcule, em função de a, a razão entre as áreas dos segmentos circulares S, no círculo (O) limitado pela corda CD, e S', no círculo (O') limitado pela corda $C'D'$.

Solução:



Seja a figura acima representando a configuração descrita no enunciado.

a) Da figura, $C\hat{B}A=C'\hat{B}A'$ e $B\hat{C}A=B\hat{C'}A'=90^o$. Logo, $B\hat{A}C=B\hat{A}'C'$ e os triângulos ΔABC e $\Delta A'BC'$ são semelhantes, de forma que

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}}\Rightarrow\frac{\overline{BC'}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BA'}}{\overline{BA}}=\frac{4a}{6a}=\frac{2}{3}$$

b) Da figura, $C\hat{B}D=C'\hat{B}D'$, $B\hat{D}C=B\hat{A}C$ e $B\hat{D}'C'=B\hat{A}'C'$. Como, do item anterior, $B\hat{A}C=B\hat{A}'C'$, então $B\hat{D}C=B\hat{D}'C'$, e os triângulos ΔBCD e $\Delta BC'D'$ são semelhantes, de forma que

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{C'D'}}{\overline{BC'}}\Rightarrow\frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{BC'}}{\overline{BC}}=\frac{3}{2}$$

c) A área S é a área do setor de 60º em (O) menos a área do triângulo ΔCOD, que é equilátero de lado $3a$. Já a área S' é a área do setor de 60º em (O') menos a área do triângulo $\Delta C'OD'$, que é equilátero de lado $2a$. Assim,

$$\begin{cases} S=\frac{1}{6}\pi(3a)^2-(3a)^2\frac{\sqrt{3}}{4} \\ S'=\frac{1}{6}\pi(2a)^2-(2a)^2\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}\Rightarrow\frac{S}{S'}=\frac{9}{4}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Determine os números naturais n para os quais existem poliedros convexos de n arestas.

Solução:
O poliedro de menor número de arestas é o tetraedro que possui $n = 6$ arestas. Logo, é impossível construir poliedros com $n = 1, 2, 3, 4, 5$ arestas.

Para $n = 7$, poderíamos pensar em modificar o tetraedro, criando um vértice a mais, para inserir a aresta adicional. Isto porém iria requerer também uma face a mais, o que pela relação de Euler $V + F = n + 2$, forçaria a existência de outra aresta adicional. Logo, é impossível construir um poliedro com $n = 7$ arestas.

Para $n \geq 3$, é sempre possível construir uma pirâmide de $2n$ arestas, tendo como base um polígono de n lados. Além disto, podemos modificar esta pirâmide, construindo uma pirâmide triangular sobre uma das faces laterais, gerando um novo poliedro com $(2n+3)$ arestas. Logo, fica demonstrado que apenas podemos construir os poliedros com $n = 6, 8, 9, 10, 11, \ldots$ arestas.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam $w_0 = 1$, $w_1 = j$, $w_2 = j^2$ as raízes cúbicas da unidade no plano complexo (considere w_1 o número complexo de módulo 1 e argumento $2\pi/3$). Sabendo-se que se $c \in \mathbb{C}$, a rotação R em torno do ponto c e amplitude igual a $\pi/3$ é dada por $R(z) = -j^2 z - jc$, $\forall z \in \mathbb{C} - \{c\}$, pede-se:

a) Determinar as relações existentes entre a, b, c, j, j^2, onde $a, b \in \mathbb{C}$, de modo que o triângulo a, b, c seja equilátero.

b) Determinar z para que o triângulo i, z, iz seja equilátero.

Obs: Dado: $i = \sqrt{-1}$.

Solução:
Se o triângulo Δabc é equilátero, podemos dizer que a é rotação de c em torno de b; b é rotação de a em torno de c; c é rotação de b em torno de a. Logo,

a)

$$\begin{cases} a = -j^2 c - jb \\ b = -j^2 a - jc \\ c = -j^2 b - ja \end{cases}$$

b) Se i, z e iz são os vértices do triângulo equilátero, então

$$iz = -j^2 z - ji \Rightarrow z = \frac{-ij}{(i+j)^2}$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Dados dois trinômios do segundo grau:
$y = ax^2 + bx + c$ (I)
$y = a'x^2 + b'x + c'$ (II)
Considere, sobre o eixo Ox, os pontos A e B cujas abscissas são as raízes do trinômio (I) e A' e B' os pontos cujas abscissas são as raízes do trinômio (II). Determine a relação que deve existir entre os coeficientes a, b, c, a', b', c' de modo que $A'B'$ divida o segmento AB harmonicamente.

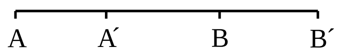
Solução:
Naturalmente, para que ambos os trinômios tenham cada um duas raízes reais distintas, devemos ter, além de $aa' \neq 0$, que

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow b^2 > 4ac \\ \Delta' = b'^2 - 4a'c' > 0 \Rightarrow b'^2 > 4a'c' \end{cases}$$

Sejam então

$$\begin{cases} A' = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{2a'} \\ A = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ B' = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{2a'} \\ B = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

ordenados como na figura abaixo.



Para haver a divisão harmônica, devemos ter

$$\frac{\overline{A'A}}{\overline{A'B}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'B}} \Rightarrow \overline{A'A}\,\overline{B'B} = \overline{A'B}\,\overline{B'A}$$

de forma que

$$\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{2a'}\right) \times \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{2a'}\right) =$$
$$\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{2a'}\right) \times \left(\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{2a'} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Desenvolvendo esta equação, tem-se

$$\frac{2(b^2-\Delta)}{4a^2} + \frac{2(b'^2-\Delta')}{4a'^2} - \frac{4bb'}{4aa'} = 0$$

ou seja,

$$2aca'^2 + 2a^2a'c' - aa'bb' = 0 \Rightarrow aa'(2ca' + 2ac' - bb') = 0$$
$$\Rightarrow 2(ca' + ac') = bb'$$

pois $aa' \neq 0$.

Assim, os coeficientes dos trinômios são tais que

$$\begin{cases} aa' \neq 0 \\ b^2 > 4ac \\ b'^2 > 4a'c' \\ 2(ca' + ac') = bb' \end{cases}$$

IME 1994/1995

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a condição que o inteiro m deve satisfazer para que exista termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^4 - \frac{1}{x^8}\right)^m$.

Solução:
O $(k+1)$-ésimo termo da expansão do binômio é

$$a_{k+1} = \binom{m}{k}(x^4)^{m-k}\left(-\frac{1}{x^8}\right)^k = \binom{m}{k}(-1)^k x^{4m-12k}$$

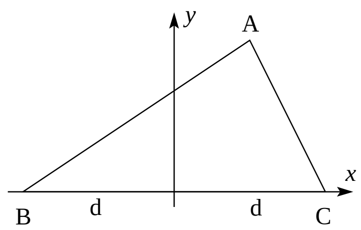
com $k = 0, 1, \ldots, m$. Para haver termo independente de x, devemos ter

$$m = 3k$$

ou seja, m deve ser múltiplo de 3, e o termo de ordem $k = \frac{m}{3}$ seria independente de x.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Seja ABC um triângulo qualquer no qual os vértices B e C são fixos. Determine o lugar geométrico descrito pelo ponto A, variável, sabendo que os ângulos B e C satisfazem a relação $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = k$, k constante real. Discuta a solução para os diversos valores de k.
Obs: Considere como eixos coordenados as retas BC e a mediatriz do segmento BC.

Solução:



Na figura acima, sejam os vértices $A \equiv (x_a, y_a)$, $B \equiv (-d, 0)$ e $C \equiv (d, 0)$, de forma que $BC = 2d$. Assim,

$$\begin{cases} \operatorname{tg} B = \frac{y_a}{d+x_a} \\ \operatorname{tg} C = \frac{y_a}{d-x_a} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \frac{y_a^2}{d^2 - x_a^2} = k$$

e o lugar geométrico do ponto A é

$$\frac{y_a^2}{k} + x_a^2 = d^2$$

Alguns casos particulares são:

- Se $k \to 0$, logo $y_a \to 0$ e o lugar geométrico se aproxima do eixo X.
- Se $0 < k < 1$, o lugar geométrico é uma elipse alongada na direção do eixo X.
- Se $k = 1$, logo $y_a^2 + x_a^2 = d^2$ e o lugar geométrico é uma circunferência de raio d centrada na origem.
- Se $k > 1$, o lugar geométrico é uma elipse alongada na direção do eixo Y.
- Se $k \to \infty$, o lugar geométrico tende às retas $x_a = \pm d$, de modo que o triângulo ABC fica retângulo em B ou C.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dado $Z = \dfrac{1}{\sqrt{7+24i}}$, calcule as partes real e imaginária de Z.

Solução:

$$Z^2 = \frac{1}{7+24i} = \frac{1}{625}(7-24i) = \frac{1}{25}\left(\frac{7}{25} - \frac{24}{25}i\right)$$

Logo, podemos escrever Z^2 na forma polar tal que

$$Z^2 = \frac{1}{25}\left(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\right), \text{ com } \begin{cases} \cos\theta = \frac{7}{25} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{-24}{25} \end{cases}$$

com $\theta \in (3\pi/2, 2\pi)$. Tirando a raiz quadrada, tem-se

$$Z = \frac{1}{5}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$$

com $\frac{\theta}{2} \in (3\pi/4, \pi)$, de modo que

$$\begin{cases} \cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{\cos\theta+1}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{7}{25}+1}{2}} = -\frac{4}{5} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = +\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = +\frac{3}{5} \end{cases}$$

Logo, $Z = -\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Sabendo-se que a função $h(x)$ possui a seguinte propriedade $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(x) = -h(x)$, pedem-se:
a) A solução da equação: $\int t f(t) = xh(x) + h(x) + 1$.
b) Os valores de c e $h(x)$, de tal forma que: $\int_0^c t f(t) = \frac{2-e}{e}$.

Solução:
Pelo enunciado, $h(x) = \delta e^{-x}$, com δ constante.

a) Derivando a equação do enunciado, e usando o teorema fundamental do cálculo, têm-se

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\int t f(t)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} &= x f(x) \\ &= \frac{\mathrm{d}[xh(x)+h(x)+1]}{\mathrm{d}x} \\ &= x\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} + h(x) + \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} \\ &= -xh(x) + h(x) - h(x) \end{aligned}$$

Logo, $f(x) = -h(x) = -\delta e^{-x}$.

b)

$$\begin{aligned} \int_0^c t(-\delta e^{-t})\mathrm{d}t &= c\delta e^{-c} - \int_0^c \delta e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= c\delta e^{-c} + \delta e^{-c} - \delta \\ &= \frac{(c+1)\delta}{e^c} - \delta \\ &= \frac{2-e}{e} \end{aligned}$$

Por inspeção, observamos que $c = 1$ e $\delta = 1$ satisfazem esta equação, de forma que $h(x) = e^{-x}$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a equação trigonométrica:

$$\operatorname{sen} x + \cos x + 2\sqrt{2}\operatorname{sen} x \cos x = 0$$

Solução:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen} x + \cos x = -2\sqrt{2}\operatorname{sen} x \cos x \\ \Rightarrow\ &\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x = 8\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \\ \Rightarrow\ &1 + \operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen}^2 2x \end{aligned}$$

Fazendo $y = \operatorname{sen} 2x$, tem-se

$$2y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y = \operatorname{sen} 2x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

Testando todas as possibilidades:

- $\operatorname{sen} 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, que só será válida, pela equação original, para k ímpar.
- $\operatorname{sen} 2x = -\frac{1}{2}$, então,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{11\pi}{6} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{11\pi}{12} \end{array} \right.$$

Testando estas possibilidades na equação original, observa-se que $x = k\pi + \frac{7\pi}{12}$ é verdadeira para k par e $x = k\pi + \frac{11\pi}{12}$ é verdadeira para k ímpar.

Assim, a solução geral é tal que

$$x = 2k\pi + \left\{ \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\},\ k \in \mathbb{Z}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Use o teorema do valor médio para derivadas e prove que a equação:

$$\ln(x+1)^5 + 3\ln(x+1)^3 + 2\ln(x+1) - 2 = 0,$$

tem uma única raiz real no intervalo $(0, 1)$.
Obs: A notação ln significa logaritmo neperiano.

Solução:
Seja

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x+1)^5 + 3\ln(x+1)^3 + 2\ln(x+1) - 2 \\ &= 16\ln(x+1) - 2 \end{aligned}$$

Desta equação, vê-se que

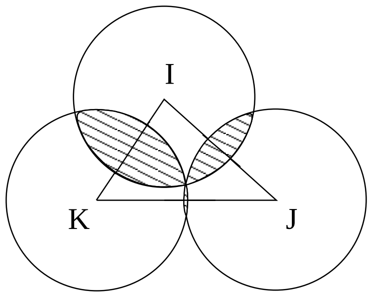
$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = -2 < 0 \\ f(1) = 16\ln 2 - 2 > 0 \end{array} \right.$$

Além disto, tem-se que

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{16}{x+1}$$

que é sempre positiva no intervalo $x \in (0, 1)$, de forma que $f(x)$ é sempre crescente neste mesmo intervalo. Assim, por continuidade, deve haver uma e exatamente uma raiz de $f(x)$ no intervalo $x \in (0, 1)$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Três círculos de raio R se interceptam dois a dois, como é mostrado na figura abaixo, constituindo três áreas comuns que formam um trevo. Determine o perímetro do trevo e sua área em função de R e da área S do triângulo IJK.



Solução:
Por construção, o ponto O de encontro dos três círculos é equidistante dos três centros I, J e K. Logo, O é o circuncentro, encontro das mediatrizes, do triângulo ΔIJK.

a) Sejam os pontos I', interseção dos círculos de centros K e J, J', interseção dos círculos de centros I e K, e K', interseção dos círculos de centros I e J. O perímetro do trevo é dado pela soma dos comprimentos dos arcos $J'OI' + I'OK' + K'OJ'$. Por simetria, têm-se

$$\left\{ \begin{array}{l} O\hat{K}J = I'\hat{K}J = K_1 \\ O\hat{K}I = J'\hat{K}I = K_2 \\ O\hat{I}K = J'\hat{I}K = I_1 \\ O\hat{I}J = K'\hat{I}J = I_2 \\ O\hat{J}K = I'\hat{J}K = J_1 \\ O\hat{J}I = K'\hat{J}I = J_2 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} K_2 = I_1 \\ I_2 = J_2 \\ J_1 = K_1 \end{array} \right.$$

Logo, o perímetro $2p_T$ do trevo é a soma dos arcos

$$\left\{ \begin{array}{l} J'OI' = K_2 + K_2 + K_1 + K_1 = 2(K_1 + K_2) = 2I\hat{K}J \\ I'OK' = J_1 + J_1 + J_2 + J_2 = 2(J_1 + J_2) = 2I\hat{J}K \\ K'OJ' = I_1 + I_1 + I_2 + I_2 = 2(I_1 + I_2) = 2K\hat{I}J \end{array} \right.$$

ou seja

$$2p_T = 2(I\hat{K}J + I\hat{J}K + K\hat{I}J)R = 2\pi R$$

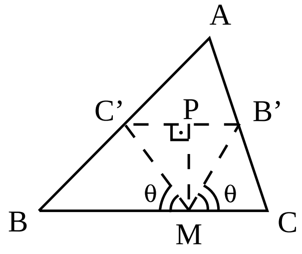
b) A área S_T do trevo é a soma das áreas dos setores OJK', OIK', OIJ', OKJ', OKI' e OJI', menos as áreas dos triângulos $\Delta OJK'$, $\Delta OIK'$, $\Delta OIJ'$, $\Delta OKJ'$, $\Delta OKI'$ e $\Delta OJI'$. Mas a área de um setor é dada por $\frac{R^2\theta}{2}$, onde θ é o ângulo em radianos subentendido pelo setor. Logo,

$$\begin{aligned} S_T = \ &\frac{R^2}{2}(2J_2 + 2I_2 + 2I_1 + 2K_2 + 2K_1 + 2J_1) - \\ &(\Delta OJK' + \Delta OIK' + \Delta OIJ' + \\ &\Delta OKJ' + \Delta OKI' + \Delta OJI') \end{aligned}$$

ou seja, $S_T = R^2\frac{(2\pi)}{2} - 2S = \pi R^2 - 2S$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja ABC um triângulo qualquer. Por B' e C' pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, traçam-se duas retas que se cortam em um ponto M, situado sobre o lado BC, e que fazem com esse lado ângulos iguais θ conforme a figura abaixo. Demonstre que:

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{2}(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)$$



Solução:
Dos triângulos $\Delta B'MP$ e $\Delta C'MP$, têm-se

$$\begin{cases} \operatorname{cotg}\theta = \frac{\overline{B'P}}{\overline{MP}} \\ \operatorname{cotg}\theta = \frac{\overline{C'P}}{\overline{MP}} \end{cases} \Rightarrow \overline{B'C'} = 2\overline{MP}\operatorname{cotg}\theta$$

Seja N, o pé da altura de A sobre $B'C'$, logo, dos triângulos $\Delta B'NA$ e $\Delta C'NA$, têm-se

$$\begin{cases} \operatorname{cotg}\hat{B} = \frac{\overline{B'N}}{\overline{NA}} \\ \operatorname{cotg}\hat{C} = \frac{\overline{C'N}}{\overline{NA}} \end{cases} \Rightarrow \overline{B'C'} = \overline{NA}(\operatorname{cotg}\hat{B} + \operatorname{cotg}\hat{C})$$

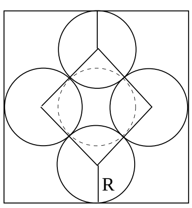
Como B' e C' são pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, logo, $\overline{MP} = \overline{NA}$, e então

$$2\operatorname{cotg}\theta = (\operatorname{cotg}\hat{B} + \operatorname{cotg}\hat{C})$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Seis esferas idênticas de raio R encontram-se posicionadas no espaço de tal forma que cada uma delas seja tangente a quatro esferas. Dessa forma, determine a aresta do cubo que tangencie todas as esferas.

Solução:
O arranjo geométrico é tal que cada uma das seis esferas tangencia o centro de uma face do cubo de lado ℓ. Fazendo um corte central paralelo a qualquer face deste cubo, tem-se a figura abaixo, de forma que

$$\ell = R + 2R\sqrt{2} + R = 2R(\sqrt{2}+1)$$



(baseado em solução de Caio S. Guimarães): Existe um outro cubo, de lado ℓ', tangente internamente ao mesmo arranjo de seis esferas, tal que

$$\ell' = \ell - 4R = 2R(\sqrt{2}-1)$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Prove que o polinômio $P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \ldots + x^{111} + 1$ é divisível por $x^9 + x^8 + x^7 + \ldots + x + 1$.

Solução:
Seja

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{9} x^i = \frac{(x^{10}-1)}{(x-1)} \Rightarrow (x^{10}-1) = Q(x)(x-1)$$

Podemos escrever $P(x)$ como

$$\begin{array}{rcccccccc}
P(x) = & x^{999} & + & x^{888} & +\ldots+ & x^{111} & +1 \\
= & x^{989}(x^{10}-1) & + & x^{878}(x^{10}-1) & +\ldots+ & x^{91}(x^{10}-1) & +0 \\
+ & x^{979}(x^{10}-1) & + & x^{868}(x^{10}-1) & +\ldots+ & x^{81}(x^{10}-1) & +0 \\
+ & x^{969}(x^{10}-1) & + & x^{858}(x^{10}-1) & +\ldots+ & x^{71}(x^{10}-1) & +0 \\
+ & \vdots & + & \vdots & + \vdots + & \vdots & +\vdots \\
+ & x^{19}(x^{10}-1) & + & x^{18}(x^{10}-1) & +\ldots+ & x^{11}(x^{10}-1) & +0 \\
+ & x^{9}(x^{10}-1) & + & x^{8}(x^{10}-1) & +\ldots+ & x^{1}(x^{10}-1) & +0 \\
+ & x^{9} & + & x^{8} & +\ldots+ & x^{7} & +1
\end{array}$$

Ou seja, somando as colunas acima, e percebendo que a última linha é $Q(x)$, tem-se

$$P(x) = \sum_{i=0}^{98} x^{10i+9}(x^{10}-1) + \sum_{i=0}^{87} x^{10i+8}(x^{10}-1) + \ldots$$
$$+ \sum_{i=0}^{9} x^{10i+1}(x^{10}-1) + Q(x)$$

Definindo o polinômio

$$T(x) = \sum_{i=0}^{98} x^{10i+9} + \sum_{i=0}^{87} x^{10i+8} + \ldots + \sum_{i=0}^{9} x^{10i+1}$$

podemos, então, escrever que

$$\begin{aligned} P(x) &= \left[T(x)(x^{10}-1)\right] + Q(x) \\ &= \left[T(x)(x-1)+1\right]Q(x) \end{aligned}$$

de forma que $P(x)$ é divisível por $Q(x)$.

IME 1993/1994

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o termo independente de x de

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$$

Solução:
O $(k+1)$-ésimo termo da expansão do binômio é

$$a_{k+1}=\binom{10}{k}(\sqrt{x})^{10-k}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{k}=\binom{10}{k}(-1)^k x^{5-k}$$

Logo, o termo independente de x é

$$a_6=\binom{10}{5}(-1)^5=-\frac{10!}{5!5!}=-252$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função quadrática tal que $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Sabendo que $x_1=-1$ e $x_2=5$ são raízes e que $f(1)=-8$, pede-se:
a) Determinar a, b, c.
b) Calcular $f(0)$.
c) Verificar se $f(x)$ apresenta máximo ou mínimo, justificando a resposta.
d) As coordenadas do ponto extremo.
e) O esboço do gráfico.

Solução:
Como $f(x)$ tem raízes $x_1=-1$ e $x_2=5$, e ainda $f(1)=-8$, logo,

$$f(x)=(x+1)(x-5)=x^2-4x-5$$

a) Do desenvolvimento acima,

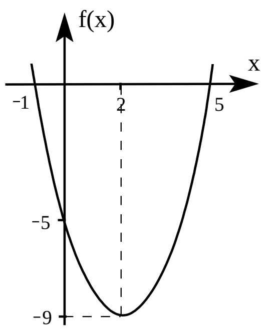
$$\begin{cases} a=1\\ b=-4\\ c=-5\end{cases}$$

b) $f(0)=c=-5$.

c) Como $a>0$, $f(x)$ apresenta um mínimo.

d) A abscissa do extremo é a média das abscissas das raízes, isto é, $x_o=2$, e assim $y_o=-9$.

e) Dos itens anteriores, tem-se o gráfico a seguir



3ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um octógono convexo. Suponha que quando todas as suas diagonais são traçadas, não há mais de duas diagonais se interceptando no mesmo ponto. Quantos pontos de interseção (de diagonais) existem neste octógono?

Solução:
Cada vértice de um polígono de n lados possui $(n-3)$ diagonais. A primeira diagonal, é atravessada por $1\times(n-3)$ diagonais, a segunda é atravessada por $2\times(n-4)$ diagonais, e assim sucessivamente, até a última diagonal que é atravessada por $(n-3)\times 1$ diagonais. Isto se aplica para as diagonais em cada um dos n vértices. Porém, cada interseção está sendo contada 4 vezes, já que cada diagonal está sendo contada duas vezes. Logo, o número total de interseções é

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n}{4}\left[1\times(n-3)+2\times(n-4)+\ldots+(n-3)\times 1\right]\\ &=\frac{n}{4}\sum_{i=1}^{n-3} i\times(n-2-i)\end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{cases} I_4=\frac{4}{4}\sum_{i=1}^{1} i\times(2-i)=1\\ I_5=\frac{5}{4}\sum_{i=1}^{2} i\times(3-i)=\frac{5}{4}[2+2]=5\\ I_6=\frac{6}{4}\sum_{i=1}^{3} i\times(4-i)=\frac{6}{4}[3+4+3]=15\\ I_7=\frac{7}{4}\sum_{i=1}^{4} i\times(5-i)=\frac{7}{4}[4+6+6+4]=35\\ I_8=\frac{8}{4}\sum_{i=1}^{5} i\times(6-i)=\frac{8}{4}[5+8+9+8+5]=70\end{cases}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Considere os números complexos $z=x+y.i$ e $w=y-x.i$, cujos módulos são tais que $|z|=e^{|w|.\frac{\sqrt{3}}{x}}$ e $|w|=e^{|z|.\frac{1}{y}}$, onde e é base dos logaritmos neperianos. Obter a forma polar de z^2.

Solução:
Pelas definições de z e w, tem-se que seus módulos são iguais, e assim

$$e^{|w|.\frac{\sqrt{3}}{x}}=e^{|z|.\frac{1}{y}}\Rightarrow |w|.\frac{\sqrt{3}}{x}=|z|.\frac{1}{y}\Rightarrow x=y\sqrt{3}$$

de forma que

$$|z|=|w|=\sqrt{3y^2+y^2}=2|y|$$

e então

$$2|y|=e^{\frac{2|y|}{y}}$$

Logo, temos duas possibilidades:

$$\pm 2y=e^{\pm 2}\Rightarrow y=\pm\frac{e^{\pm 2}}{2},\ x=\pm\frac{e^{\pm 2}\sqrt{3}}{2}$$

de forma que

$$z=\pm e^{\pm 2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\pm e^{\pm 2}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

e então

$$z^2=e^{\pm 4}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Um aluno, ao inverter a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 4 & e & f \end{bmatrix} = [a_{ij}],\ 1 \leq i, j \leq 3$$

cometeu um engano, e considerou o elemento a_{13} igual a 3, de forma que acabou invertendo a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 3 & e & f \end{bmatrix} = [b_{ij}]$$

Com esse engano o aluno encontrou

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & -1/2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -5/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Determinar A^{-1}.
sln: O elemento (3,1) de B^{-1} deve ser $-\frac{3}{2}$.

Solução:
Na versão original, como B^{-1} tem determinante nulo, ela não é inversível e a questão não tem solução.

Alterando o elemento (3,1) de B^{-1} para $-\frac{3}{2}$, podemos escrever que

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 3 & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & -1/2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que é simples se determinar que

$$\begin{cases} a = 0; & d = 2 \\ b = 1; & e = 0 \\ c = 1; & f = 5 \end{cases}$$

e assim

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Invertendo A, tem-se

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim é imediato se ver que $a'_{12} = 0$, $a'_{22} = 1$ e $a'_{32} = 0$. Em seguida, determinam-se os demais elementos, obtendo-se

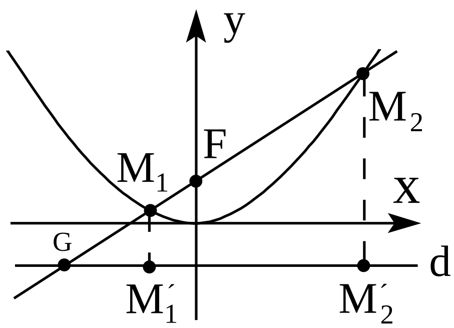
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $y = \frac{x^2}{2}$ uma parábola com foco F e diretriz d. Uma reta, cujo coeficiente angular é $m \neq 0$, passa por F e corta a parábola em dois pontos M_1 e M_2, respectivamente. Seja G o conjugado harmônico de F em relação a M_1 e M_2. Pedem-se:

a) As coordenadas de G em função de m.

b) O lugar geométrico do ponto G quando m varia.

Solução:



A parábola $y = \frac{x^2}{2}$ tem foco $F \equiv (0, f)$ e diretriz $y = -f$. Como o ponto $(2, 2)$ pertence a esta parábola, logo

$$\sqrt{2^2 + (2-f)^2} = (2+f) \Rightarrow f = \frac{1}{2}$$

Sejam M'_1 e M'_2 as projeções de M_1 e M_2 sobre a diretriz d, respectivamente. Se G é conjugado harmônico de F em relação a M_1 e M_2, devemos ter

$$\frac{\overline{m_1G}}{\overline{m_2G}} = \frac{\overline{m_1F}}{\overline{m_2F}} = \frac{\overline{m_1m'_1}}{\overline{m_1m'_2}}$$

onde a segunda igualdade ocorre pela definição de parábola. Logo, usando o caso LAL, os triângulos $\Delta GM_1M'_1$ e $\Delta GM_2M'_2$ devem ser semelhantes, de forma que $M_1\hat{G}M'_1 = M_2\hat{G}M'_2$, e então G deve pertencer à diretriz da parábola.

a) G é solução do sistema

$$\begin{cases} y = mx + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow G \equiv \left(-\frac{1}{m}, -\frac{1}{2}\right)$$

b) O lugar geométrico de G é a própria diretriz da parábola $d : y = -\frac{1}{2}$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Sabendo que $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os ângulos internos de um triângulo, escreva as restrições que devem ser satisfeitas por este triângulo para que se verifique a igualdade abaixo.

$$\operatorname{sen}\hat{A} + \operatorname{sen}\hat{B} + \operatorname{sen}\hat{C} = 4\cos\frac{\hat{A}}{2}.\cos\frac{\hat{B}}{2}.\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

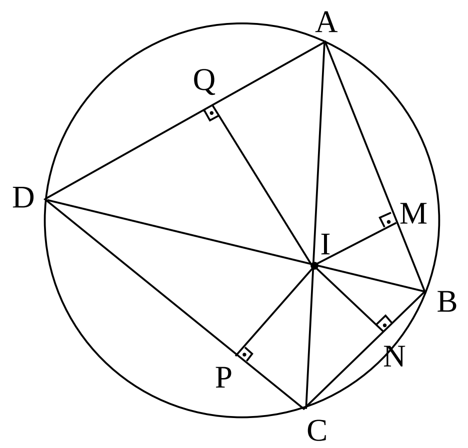
Solução:
Sejam E e D os lados esquerdo e direito, respectivamente, da equação do enunciado. Fazendo $\hat{C} = 180^{\text{o}} - (\hat{A}+\hat{B})$, têm-se,

$$\begin{aligned}
E^2 &= \left[\operatorname{sen}\hat{A}+\operatorname{sen}\hat{B}+\operatorname{sen}(\hat{A}+\hat{B})\right]^2\\
&= \left[\operatorname{sen}\hat{A}+\operatorname{sen}\hat{B}+\operatorname{sen}\hat{A}\cos\hat{B}+\operatorname{sen}\hat{B}\cos\hat{A}\right]^2\\
&= \left[\operatorname{sen}\hat{A}(\cos\hat{B}+1)+\operatorname{sen}\hat{B}(\cos\hat{A}+1)\right]^2\\
&= \operatorname{sen}^2\hat{A}(1+\cos\hat{B})^2\\
&+ 2\operatorname{sen}\hat{A}\operatorname{sen}\hat{B}(1+\cos\hat{A})(1+\cos\hat{B})\\
&+ \operatorname{sen}^2\hat{B}(1+\cos\hat{A})^2\\
&= (1-\cos^2\hat{A})(1+\cos\hat{B})^2\\
&+ 2\operatorname{sen}\hat{A}\operatorname{sen}\hat{B}(1+\cos\hat{A})(1+\cos\hat{B})\\
&+ (1-\cos^2\hat{B})(1+\cos\hat{A})^2\\
&= (1+\cos\hat{A})(1+\cos\hat{B})\times\\
&\quad [(1-\cos\hat{A})(1+\cos\hat{B})+2\operatorname{sen}\hat{A}\operatorname{sen}\hat{B}+\\
&\quad\ (1-\cos\hat{B})(1+\cos\hat{A})]\\
&= (1+\cos\hat{A})(1+\cos\hat{B})\times\\
&\quad \left[2-2\cos\hat{A}\cos\hat{B}+2\operatorname{sen}\hat{A}\operatorname{sen}\hat{B}\right]\\
&= 2(1+\cos\hat{A})(1+\cos\hat{B})[1-\cos(\hat{A}+\hat{B})]\\
D^2 &= 16\cos^2\frac{\hat{A}}{2}\cos^2\frac{\hat{B}}{2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)\\
&= 16\left(\frac{1+\cos\hat{A}}{2}\right)\left(\frac{1+\cos\hat{B}}{2}\right)\left[\frac{1-\cos(\hat{A}+\hat{B})}{2}\right]\\
&= 2(1+\cos\hat{A})(1+\cos\hat{B})[1-\cos(\hat{A}+\hat{B})]
\end{aligned}$$

Logo $E^2 = D^2$, e como $E > 0$ e $D > 0$, tem-se que $E = D$ para todos os possíveis triângulos.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo inscrito num círculo e seja I o ponto de interseção de suas diagonais. As projeções ortogonais de I sobre os lados AB, BC, CD e DA são, respectivamente, M, N, P e Q. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é circunscritível a um círculo com centro em I.

Solução:



Analisando o quadrilátero inscritível $ABCD$, têm-se

$$\begin{cases} B\hat{C}A = B\hat{D}A\\ C\hat{A}B = C\hat{D}B\\ D\hat{A}C = D\hat{B}C\\ A\hat{B}D = A\hat{C}D \end{cases}$$

Analisando, ainda, os quadriláteros inscritíveis $AMIQ$, $BNIM$, $CPIN$ e $DQIP$, têm-se

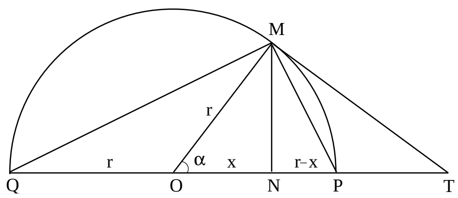
$$\begin{cases} I\hat{Q}M = I\hat{A}M = C\hat{A}B = C\hat{D}B = I\hat{D}P = I\hat{Q}P\\ I\hat{M}N = I\hat{B}N = D\hat{B}C = D\hat{A}C = I\hat{A}Q = I\hat{M}Q\\ I\hat{N}P = I\hat{C}P = A\hat{C}D = A\hat{B}D = I\hat{B}M = I\hat{N}M\\ I\hat{P}Q = I\hat{D}Q = B\hat{D}A = B\hat{C}A = I\hat{C}N = I\hat{P}N \end{cases}$$

Logo, I está nas bissetrizes de $M\hat{P}Q$, $N\hat{M}Q$, $P\hat{N}M$ e $Q\hat{P}N$ de forma que as distâncias de I aos lados QM, MN, NP e PQ são todas iguais. Assim, o quadrilátero $MNPQ$ é circunscritível a um círculo de centro em I.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Seja C um semi-círculo com centro O e diâmetro $PQ = 2r$. Sobre o segmento OP, toma-se um ponto N tal que $ON = x$, $0 \leq x \leq r$. Por N traça-se uma reta perpendicular a PQ que encontre o semi-círculo em M. A reta tangente ao semi-círculo em M corta a reta PQ em um ponto T:

a) Calcule, em função de r e x, o volume V_1 gerado pela rotação do triângulo MPQ em torno de PQ.
b) Calcule, em função de r e x, o volume V_2 gerado pela rotação do triângulo MPT em torno de PQ.
c) Considerando a razão $y = \frac{V_2}{V_1}$, quando x varia no intervalo $[0, r]$, faça o esboço do respectivo gráfico.

Solução:



Do triângulo retângulo ΔOMN, tem-se

$$x^2 + \overline{MN}^2 = r^2 \Rightarrow \overline{MN} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Dos triângulos retângulos ΔOMT e ΔOMT, tem-se

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{r}{\overline{OT}} \Rightarrow \overline{OT} = \frac{r^2}{x}$$

a) O volume V_1 é o volume do cone gerado pelo triângulo ΔQMN mais o volume do cone gerado pelo triângulo ΔMNP. Logo,

$$V_1 = \frac{\pi}{3}\overline{MN}^2\,\overline{NQ} + \frac{\pi}{3}\overline{MN}^2\,\overline{NP} = \frac{2r\pi}{3}(r^2 - x^2)$$

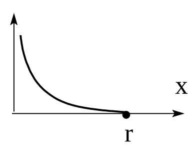
b) O volume V_2 é o volume do cone gerado pelo triângulo ΔMNT menos o volume do cone gerado pelo triângulo ΔMNP. Logo,

$$V_2 = \frac{\pi}{3}\overline{MN}^2\,\overline{NT} - \frac{\pi}{3}\overline{MN}^2\,\overline{NP} = \frac{r\pi}{3x}(r^2 - x^2)(r - x)$$

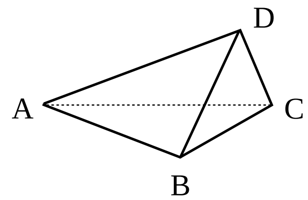
c) Pelos itens anteriores

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(r - x)}{2x}$$

cujo gráfico é representado a seguir.



10ª Questão [Valor: 1,0]
Na exploração de uma mina foi feito o corte indicado na figura abaixo. Para calcular o volume do minério extraído do corte, foram medidos: $CD = 10\sqrt{3}$ dm, CD é perpendicular ao plano ABC, $A\hat{D}C = A\hat{D}B = 60^o$ e $B\hat{D}C = 30^o$.



Calcule este volume.

Solução:
No triângulo ΔACD, $\overline{CD} = 10\sqrt{3}$, $\overline{CD} \perp \overline{AC}$ e $A\hat{D}C = 60^o$, logo $\overline{AD} = 20\sqrt{3}$ e $\overline{AC} = 30$.
No triângulo ΔBCD, $\overline{CD} = 10\sqrt{3}$, $\overline{CD} \perp \overline{BC}$ e $B\hat{D}C = 30^o$, logo $\overline{BD} = 20$ e $\overline{BC} = 10$.
Dos itens anteriores, no triângulo ΔABD, $\overline{AD} = 20\sqrt{3}$, $\overline{DB} = 20$ e $A\hat{D}B = 60^o$, logo, pela lei dos cossenos,

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= (20\sqrt{3})^2 + (20)^2 - 2(20\sqrt{3})(20)\cos 60^o \\ &= 400(4 - \sqrt{3}) \\ \Rightarrow \overline{AB} &= 20\sqrt{4 - \sqrt{3}}\end{aligned}$$

Assim, o triângulo ΔABC tem lados

$$\begin{cases}\overline{AB} = 20\sqrt{4 - \sqrt{3}} \\ \overline{BC} = 10 \\ \overline{AC} = 30\end{cases}$$

e semi-perímetro

$$p = 10(2 + \sqrt{4 - \sqrt{3}})$$

de forma que, definindo $k = \sqrt{4 - \sqrt{3}}$, sua área S pode ser calculada como

$$S = \sqrt{10^4(2+k)(2-k)(1+k)(-1+k)} = 10^2\sqrt{3(\sqrt{3}-1)}$$

O volume V desejado é então

$$V = \frac{S\,\overline{CD}}{3} = \frac{10^2\sqrt{3(\sqrt{3}-1)} \times 10\sqrt{3}}{3} = 10^3\sqrt{\sqrt{3}-1}\,\text{dm}^3$$

IME 1992/1993

1ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são inteiros positivos. Sabendo-se que uma das raízes dessa função é igual a $2i$, calcular os menores valores de a, b e c para que exista um ponto máximo e um ponto mínimo de reais.

Solução:
Pelo enunciado,

$$f(2i) = (2i)^3 + a(2i)^2 + b(2i) + c = -8i - 4a + 2bi + c = 0$$

logo, como a, b e c são inteiros positivos, têm-se, igualando as partes reais e imaginárias, que $b = 4$ e $c = 4a$, e assim,

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + ax^2 + 4x + 4a = (x+a)(x^2+4) \\ f'(x) = 3x^2 + 2ax + 4 \\ f''(x) = 6x + 2a \end{cases}$$

Para que $f(x)$ tenha pontos de máximo e mínimo, locais, então $f'(x)$ deve ter duas raízes reais distintas e $f''(x)$ deverá ter sinais opostos nestes mesmos pontos. Assim, devemos ter

$$4a^2 - 48 > 0 \Rightarrow a^2 > 12 \Rightarrow a \geq 4$$

Logo, os menores valores são

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \\ c = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 16 \\ f'(x) = 3x^2 + 8x + 4 = 3(x+2)(x+\frac{2}{3}) \\ f''(x) = 6x + 8 \end{cases}$$

Note que para as raízes de $f'(x)$, têm-se

$$\begin{cases} f''(-2) = -4 < 0 \\ f''(-\frac{2}{3}) = 4 > 0 \end{cases}$$

indicando que há um máximo local em $x = -2$ e um mínimo local em $x = -\frac{2}{3}$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Numa escola há 15 comissões, todas com igual número de alunos. Cada aluno pertence a duas comissões e cada duas comissões possui exatamente um membro em comum. Todos os alunos participam.

a) Quantos alunos tem a escola?

b) Quantos alunos participam de cada comissão?

Solução:
O total T de alunos é o número de alunos na primeira comissão, v, mais o número de alunos na segunda comissão distintos da primeira comissão, $(v-1)$, e assim sucessivamente, até a P-ésima comissão, toda composta por alunos que já participam de outras comissões. Logo,

$$T = \underbrace{v + (v-1) + \ldots + 0}_{P \text{ comissões}} = \frac{Pv}{2} = \frac{(v+1)v}{2}$$

a) Com $P = 15$, há $v = 14$ alunos em cada comissão e há um total de $T = 105$ alunos na escola.

b) $v = P - 1 = 14$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Prove, por indução, que:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n, \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Solução:
Seja o lema $C_n^a + C_n^{a+1} = C_{n+1}^{a+1}$, cuja prova segue o desenvolvimento

$$\begin{aligned} C_n^a + C_n^{a+1} &= \frac{n!}{(n-a)!\,a!} + \frac{n!}{(n-a-1)!\,(a+1)!} \\ &= \frac{n!\,[(a+1)+(n-a)]}{(n-a)!\,(a+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{[(n+1)-(a+1)]!\,(a+1)!} \\ &= C_{n+1}^{a+1} \end{aligned}$$

Verificando a relação do enunciado para $n = 1$,

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b = a + b$$

Seja agora a relação para $(n+1)$,

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + \ldots + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1} \\ &= \left(C_n^0 + C_n^{-1}\right) a^{n+1} + \left(C_n^1 + C_n^0\right) a^n b + \ldots + \\ &\quad \left(C_n^{n+1} + C_n^n\right) b^{n+1} \\ &= C_n^0 \left(a^{n+1} + a^n b\right) + C_n^1 \left(a^n b + a^{n-1} b^2\right) + \ldots + \\ &\quad C_n^n \left(a b^n + b^{n+1}\right) \\ &= (a+b)\left(C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n\right) \\ &= (a+b)(a+b)^n \end{aligned}$$

o que conclui a prova por indução.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Indique se é verdadeiro (V) ou falso (F) o que se segue e justifique sua resposta.

a) O conjunto dos números reais não tem pontos extremos reais.

b) Existe um número em $\mathbb{Q}$ (racionais) cujo quadrado é 2.

c) O ponto correspondente a $\frac{66}{77}$ na escala dos números reais $\mathbb{R}$ está situado entre os pontos $\frac{55}{66}$ e $\frac{77}{88}$.

Solução:

a) (V): Se existisse um ponto máximo x_o maior que todos os reais, então o número $(x_o + 1) > x_o$ não seria real, o que viola o fato do conjunto dos reais ser fechado para a adição.

b) (F): Assuma que existe $q = \frac{a}{b} = \sqrt{2}$, com a e b inteiros primos entre si. Logo $a^2 = 2b^2$ e então a é par, podendo ser escrito da forma $a = 2c$. Assim, $q = \frac{2c}{b} = \sqrt{2}$, logo $b^2 = 2c^2$ e então b é par, o que viola a hipótese de a e b serem primos entre si. Logo, por contradição, não existe racional $q = \sqrt{2}$.

c) (V): Pois $\frac{5}{6} < \frac{6}{7}$, já que $5 \times 7 = 35 < 36 = 6 \times 6$, e $\frac{6}{7} < \frac{7}{8}$, já que $6 \times 8 = 48 < 49 = 7 \times 7$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Determine os valores de x para que:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 4 & 6 \\ x & x+2 & 0 & 10 \\ x^2 & 0 & 4x & 4 \\ x & 4 & 10 & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

Solução:
Seja D o determinante desejado. Logo, por Laplace na segunda coluna,

$$\begin{aligned} D = -2\begin{vmatrix} x & 0 & 10 \\ x^2 & 4x & 4 \\ x & 10 & x-2 \end{vmatrix} &+ (x+2)\begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ x^2 & 4x & 4 \\ x & 10 & x-2 \end{vmatrix} \\ +4\begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ x & 0 & 10 \\ x^2 & 4x & 4 \end{vmatrix} & \\ = -2[4x^2(x-2)+100x^2-40x^2-40x] & \\ +(x+2)[4x^2(x-2)+16x+60x^2-24x^2-40x-4x^2(x-2)] & \\ +4[40x^2+24x^2-40x^2-16x] & \\ = 4x(7x^2+10x-8) & \\ = 28x(x+2)(x-\frac{4}{7}) & \end{aligned}$$

Assim, as raízes de $D = 0$ são $x = \{-2, 0, \frac{4}{7}\}$.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Faça o que se pede:

a) Calcule o argumento do seguinte número complexo $i(1+i)$.

b) Escreva sob forma trigonométrica o número complexo $Z = 1 + i\sqrt{3}$.

Solução:

1. $i(1+i) = -1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
   Logo, o argumento desejado é $\frac{3\pi}{4}$.

2. $Z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\cos\frac{\pi}{3} + 2i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}$

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma função $L : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ que satisfaz:

1. L é crescente, isto é, para quaisquer $0 < x < y$ tem-se $L(x) < L(y)$.
2. $L(x.y) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y > 0$.

Mostre que:
a) $L(1) = 0$.
b) $L(1/x) = -L(x)$ para todo $x > 0$.
c) $L(x/y) = L(x) - L(y)$ para quaisquer $x, y > 0$.
d) $L(x^n) = nL(x)$ para todo $x > 0$ e natural n.
e) $L(\sqrt[n]{x}) = \dfrac{1}{n}L(x)$ para todo $x > 0$ e natural n.
f) $L(x) < 0 < L(y)$ sempre que $0 < x < 1 < y$.

Solução:

a) $L(1) = L(1.1) = L(1) + L(1) = 2L(1)$. Logo, L(1)=0.

b) $0 = L(1) = L(x.\frac{1}{x}) = L(x) + L(1/x)$. Logo, $L(1/x) = -L(x)$.

c) $L(x/y) = L(x.\frac{1}{y}) = L(x) + L(1/y)$. Logo, pelo item anterior, $L(x/y) = L(x) - L(y)$.

d) $L(x^n) = L(\underbrace{xx\ldots x}_{n \text{ termos}}) = \underbrace{L(x) + L(x) + \ldots + L(x)}_{n \text{ termos}}$.
Logo $L(x^n) = nL(x)$.

e) $L(x) = L(\underbrace{x^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}}\ldots x^{\frac{1}{n}}}_{n \text{ termos}}) = \underbrace{L(x^{\frac{1}{n}}) + L(x^{\frac{1}{n}}) + \ldots + L(x^{\frac{1}{n}})}_{n \text{ termos}}$. Logo, $L(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}L(x)$.

f) Seja $0 < x < 1$, assim $x^2 < x$, e então, $L(x^2) = 2L(x) < L(x)$, já que L é estritamente crescente. Logo, $L(x) < 0$. Seja $1 < y$, assim $y^2 > y$, e então, $L(y^2) = 2L(y) > L(y)$, já que L é estritamente crescente. Logo, $L(y) > 0$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Demonstrar analiticamente que se uma reta, perpendicular a uma corda de uma circunferência, passa pelo seu centro, então ela divide a corda no seu ponto médio.

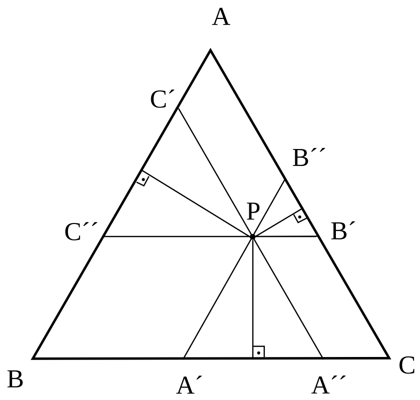
Solução:
Sejam o centro O da circunferência de raio r, os extremos A e B da corda, e a interseção C da reta por O com a corda. Dos triângulos retângulos ΔAOC e ΔBOC, têm-se que

$$\begin{cases} \overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OC}^2 = r^2 - \overline{OC}^2 \\ \overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OC}^2 = r^2 - \overline{OC}^2 \end{cases} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{BC}$$

e assim C é médio do segmento $\overline{AB}$.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Provar que a soma das distâncias de um ponto qualquer interior a um triângulo equilátero aos lados é constante.

Solução:



Trace, pelo ponto P interno ao triângulo, paralelas aos lados do triângulo original, determinando três novos triângulos equiláteros. A soma S desejada é a soma das alturas destes três novos triângulos $\Delta PA'A''$, $\Delta PB'B''$ e $\Delta PC'C''$, na figura acima, ou seja,

$$S = \frac{\overline{PA''}\sqrt{3}}{2} + \frac{\overline{B'B''}\sqrt{3}}{2} + \frac{\overline{PC'}\sqrt{3}}{2}$$

Mas, por paralelismo,

$$\begin{cases} \overline{PA''} = \overline{CB'} \\ \overline{PC'} = \overline{B''A} \end{cases}$$

Logo,

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}(\overline{CB'} + \overline{B'B''} + \overline{B''A}) = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

onde ℓ é o lado do triângulo original. Assim, S é constante e igual à altura do triângulo original.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a equação:

$$\operatorname{sen} x - \cos x = \operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1$$

Solução:
Do enunciado, tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x - \cos x &= \operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1 \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cos x - 2\cos^2 x + 1 - 1 \\ &= 2\cos x(\operatorname{sen} x - \cos x) \end{aligned}$$

Logo, devemos ter

$$(2\cos x - 1)(\operatorname{sen} x - \cos x) = 0$$

ou seja

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \cos x = \operatorname{sen} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

de modo que $x = 2k\pi + \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}\right\}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

IME 1991/1992

1ª Questão [Valor: 1,0]
Prove que $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$, onde Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{C}$.

Solução:
Sejam

$$\begin{cases} Z_1 = a + bi \\ Z_2 = c + di \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{Z_1} = a - bi \\ \overline{Z_2} = c - di \end{cases}$$

com a, b, c e d reais. Logo,

$$\begin{aligned} \overline{Z_1+Z_2} &= \overline{a+bi+c+di} \\ &= \overline{(a+c)+(b+d)i} \\ &= (a+c)-(b+d)i \\ &= (a-bi)+(c-di) \\ &= \overline{Z_1}+\overline{Z_2} \end{aligned}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Encontre todas as soluções de $\sec x - 2\cos x = 1$ em $[0, 2\pi]$.

Solução:

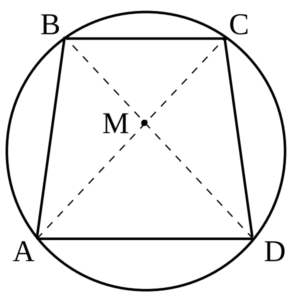
$$\begin{aligned} &\frac{1}{\cos x} - 2\cos x = 1 \\ &\Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \\ &\Rightarrow 2(\cos x + 1)(\cos x - \frac{1}{2}) = 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} \cos x = -1 \\ \text{ou} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dado o quadrilátero $ABCD$, inscrito num círculo de raio r, conforme a figura abaixo, prove que:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB.AD + BC.CD}{AB.BC + CD.AD}$$



Solução:
Usando a lei dos cossenos nos triângulos ΔABC, ΔADC, ΔABD e ΔCBD, respectivamente, têm-se

$$\begin{cases} \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\,\overline{BC}\cos\hat{B} \\ \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{AD}\,\overline{DC}\cos\hat{D} \\ \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AB}\,\overline{AD}\cos\hat{A} \\ \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{BC}\,\overline{DC}\cos\hat{C} \end{cases}$$

Além disto,

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = \pi \\ \hat{B} + \hat{D} = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\hat{C} = -\cos\hat{A} \\ \cos\hat{D} = -\cos\hat{B} \end{cases}$$

e assim,

$$\begin{cases} \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{-2\overline{AB}\,\overline{BC}} = -\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2}{-2\overline{AD}\,\overline{DC}} \\ \frac{\overline{BD}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2}{-2\overline{AB}\,\overline{AD}} = -\frac{\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}{-2\overline{BC}\,\overline{DC}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{AC}^2 = \frac{(\overline{AB}\,\overline{AD} + \overline{BC}\,\overline{DC})(\overline{AD}\,\overline{BC} + \overline{AB}\,\overline{DC})}{(\overline{AD}\,\overline{DC} + \overline{AB}\,\overline{BC})} \\ \overline{BD}^2 = \frac{(\overline{BC}\,\overline{AB} + \overline{CD}\,\overline{AD})(\overline{BC}\,\overline{AD} + \overline{AB}\,\overline{CD})}{(\overline{BC}\,\overline{CD} + \overline{AB}\,\overline{AD})} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{(\overline{AB}\,\overline{AD} + \overline{BC}\,\overline{DC})}{(\overline{BC}\,\overline{AB} + \overline{CD}\,\overline{AD})}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem no sistema de base 7.

Solução:
Há um total de $6 \times 7 \times 7$ possíveis números de três algarismos na base 7, assumindo que o algarismo da "centena" não possa ser 0. Destes, há 6 possibilidades de números do tipo aaa, com a = 1,2,3,4,5,6. Além disto, há ainda 6×6 possibilidades de números para cada tipo abb, aba e aab, com $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e $b = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 - \{a\}$. Logo, o número desejado é

$$294 - 6 - 36 - 36 - 36 = 180$$

sln: Se a "centena" puder ser 0, o total sobe para 210.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a equação da reta que passa por um dos vértices da curva definida por $4y^2 + 8y - x^2 = 4$, formando um ângulo de 45º com o eixo horizontal.

Solução:

$$4y^2 + 8y - x^2 = 4 \Rightarrow 4(y+1)^2 - x^2 = 8$$

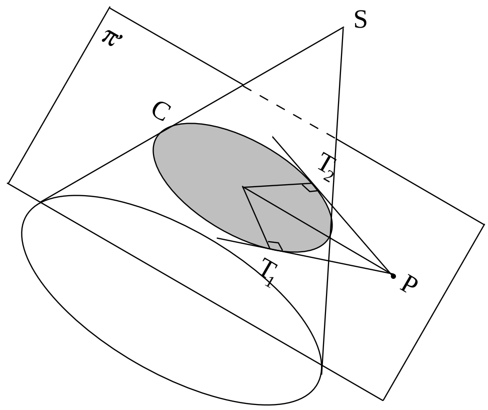
que corresponde a uma hipérbole com focos no eixo Y e extremos em $P_1 \equiv (0, \sqrt{2} - 1)$ e $P_2 \equiv (0, -\sqrt{2} - 1)$. Logo, as retas desejadas, com inclinação de 45º e passando por P_1 e P_2, são

$$\begin{cases} y = x + (\sqrt{2} - 1) \\ y = x + (-\sqrt{2} - 1) \end{cases}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Dados:
(1) Um cone de revolução com vértice S e cuja base circular está situada num plano π.
(2) Um ponto P exterior ao cone e não pertencente a π.

Pede-se: determinar, pelo ponto P, os planos tangentes ao cone.

Solução:
Traçando, paralelamente ao plano π, um plano π' por P que irá seccionar o cone em uma circunferência C de raio r. Traçando as tangentes a C por P, obtêm-se os pontos de tangência T_1 e T_2. Os planos de tangência são aqueles definidos pelas triplas de pontos $< P, S, T_1 >$ e $< P, S, T_2 >$.



7ª Questão [Valor: 1,0]
A partir da função

$$R(t) = e^{-At} + \frac{A}{B-A}\left(e^{-At} - e^{-Bt}\right)$$

onde t é a variável (tempo) e A e B são constantes reais, encontre a expressão de $R(t)$, para o caso em que A tende a B de modo que $R(t)$ seja uma função contínua.

Solução:

$$R(t) = e^{-At} + Ae^{-At}\frac{\left(1 - e^{-(B-A)t}\right)}{B-A}$$

Logo, fazendo $(B-A) = x$, tem-se

$$\begin{aligned}\lim_{B\to A} R(t) &= \lim_{x\to 0} e^{-At} + Ae^{-At}\frac{(1-e^{-xt})}{x}\\ &= e^{-At}\left[1 + A\lim_{x\to 0}\frac{(1-e^{-xt})}{x}\right]\end{aligned}$$

Assim, por L'Hôpital,

$$\begin{aligned}\lim_{B\to A} R(t) &= e^{-At}\left[1 + A\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{d}\left(1-e^{-xt}\right)}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}}\right]\\ &= e^{-At}\left(1 + A\lim_{x\to 0} te^{-xt}\right)\\ &= e^{-At}(1+At)\end{aligned}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que:
(1) $f(0) = 0$.
(2) $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$, $\forall x \in\,]0,\infty[$.
(3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Pedem-se:
a) Os intervalos onde f é crescente (respectivamente, descrescente).
b) Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima (respectivamente, para baixo).
c) Onde ocorrem os pontos de máximo e mínimo absolutos e de inflexão?

Defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0\\ -f(x), & x < 0\end{cases}$$

Esboce o gráfico de g.

Solução:

a)

$$\begin{cases} f \text{ crescente}: & f' > 0 : x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x > 1\\ f \text{ decrescente}: & f' < 0 : x^2 - 1 < 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1\end{cases}$$

b) Determinando f'',

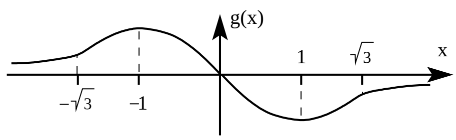
$$\begin{aligned} f'' &= \frac{(x^2+1)^2 2x - 2(x^2+1)2x(x^2-1)}{(x^2+1)^4}\\ &= \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}\\ &= \frac{2x(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(x^2+1)^3}\end{aligned}$$

No domínio de f, as parcelas $2x$, $(x+\sqrt{3})$ e $(x^2+1)^3$ são sempre não negativas. Assim, o sinal de f'', e conseqüentemente a concavidade de f, é regido pelo fator $(x-\sqrt{3})$, ou seja,

$$\begin{cases} f \text{ tem concavidade para cima}: f'' > 0 : x > \sqrt{3}\\ f \text{ tem concavidade para baixo}: f'' < 0 : 0 \leq x < \sqrt{3}\end{cases}$$

c) Considerando o enunciado e os itens anteriores, têm-se que f é mínima em $x = 1$, f é máxima em $x = 0$ e há inflexão em $x = \sqrt{3}$.

Pelos itens anteriores, podemos compor o gráfico de g como na figura a seguir.



9ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o valor do determinante abaixo:

$$D_n = \begin{vmatrix} m+x & m & m & m & \dots & m \\ m & m+x & m & m & \dots & m \\ m & m & m+x & m & \dots & m \\ m & m & m & m+x & m & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & m & m & \dots & m+x \end{vmatrix}$$

Solução:
Abrindo a soma da primeira coluna em duas parcelas,

$$D_n = \begin{vmatrix} m & m & m & m & \dots & m \\ m & m+x & m & m & \dots & m \\ m & m & m+x & m & \dots & m \\ m & m & m & m+x & m & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & m & m & \dots & m+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & m & m & m & \dots & m \\ 0 & m+x & m & m & \dots & m \\ 0 & m & m+x & m & \dots & m \\ 0 & m & m & m+x & m & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m & m & m & \dots & m+x \end{vmatrix}$$

Sejam E_n e F_n a primeira e segunda parcelas acima, respectivamente. A segunda coluna de E_n pode ser desmembrada em duas novas parcelas, de forma que

$$E_n = \begin{vmatrix} m & m & m & m & \dots & m \\ m & m & m & m & \dots & m \\ m & m & m+x & m & \dots & m \\ m & m & m & m+x & m & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & m & m & \dots & m+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & 0 & m & m & \dots & m \\ m & x & m & m & \dots & m \\ m & 0 & m+x & m & \dots & m \\ m & 0 & m & m+x & m & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & 0 & m & m & \dots & m+x \end{vmatrix}$$

onde a primeira parcela é nula por apresentar duas colunas iguais. Aplicando Laplace na segunda coluna da segunda parcela de E_n, tem-se

$$\begin{cases} E_n = xE_{n-1} \\ E_1 = m \end{cases} \Rightarrow E_n = x^{n-1}m$$

Aplicando Laplace na primeira coluna de F_n, tem-se

$$F_n = xD_{n-1}$$

Assim,

$$\begin{cases} D_n = E_n + F_n = x^{n-1}m + xD_{n-1} \\ D_1 = m + x \end{cases}$$

de forma que, por indução,

$$D_n = x^n + mnx^{n-1} = x^{n-1}(x + mn)$$

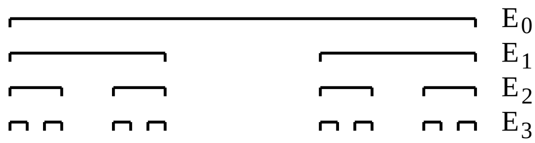
10ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam $E_0 = [0,1]$ e f_1, f_2: $E_0 \to E_0$ funções definidas por $f_1(x) = \frac{1}{3}x$ e $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Se $P(E_0)$ é o conjunto das partes de E_0, seja $F : P(E_0) \to P(E_0)$ a função definida por $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A)$, onde $f_i(A)$ é a imagem de A por f_i, $i = 1, 2$. Agora, para cada $n \geq 1$ definimos $E_n = F(E_{n-1})$.

a) Esboce graficamente E_0, E_1, E_2 e E_3. Mostre que $E_n \subset E_{n-1}$.

b) Calcule $\lim_{n\to\infty} |E_n|$, onde $|E_n|$ é a soma dos comprimentos dos intervalos que formam E_n.

Solução:
A imagem de f_1 é o primeiro terço do domínio e a imagem de f_2 é o último (terceiro) terço do domínio.

a) Pela definição, E_0, E_1, E_2 e E_3 são como na figura a seguir.



b) Também pela respectiva definição,

$$\begin{cases} |E_n| = \frac{2}{3}|E_{n-1}| \\ |E_0| = 1 \end{cases} \Rightarrow |E_n| = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} |E_n| = 0$$

IME 1990/1991 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine todas as matrizes X reais, de dimensões 2×2, tais que $AX = XA$, para toda matriz A real 2×2.

Solução:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

Logo, devemos ter

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_3 = a_1x_1 + a_3x_2 \\ a_1x_2 + a_2x_4 = a_2x_1 + a_4x_2 \\ a_3x_1 + a_4x_3 = a_1x_3 + a_3x_4 \\ a_3x_2 + a_4x_4 = a_2x_3 + a_4x_4 \end{cases}$$

Como estas relações devem ser satisfeitas para todas as matrizes A, tem-se que $a_2x_3 = a_3x_2 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = 0$, e então

$$\begin{cases} a_2x_4 = a_2x_1 \\ a_3x_1 = a_3x_4 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_4 = k$$

Logo X deve ser da forma $X = kI$, onde I é a matriz identidade 2×2.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 102\}$, pede-se o número de subconjuntos de A, com três elementos, tais que a soma destes seja um múltiplo de três.

Solução:
Sejam os subconjuntos auxiliares

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_1\} = \{1, 4, 7, \ldots, 100\} \\ A_2 &= \{a_2\} = \{2, 5, 8, \ldots, 101\} \\ A_3 &= \{a_3\} = \{3, 6, 9, \ldots, 102\} \end{aligned}$$

cada um com 34 elementos. Os subconjuntos desejados devem ser necessariamente dos tipos

$$\begin{aligned} \{a_1, a_1', a_1''\} &: \frac{34 \times 33 \times 32}{6} = 5984 \text{ possibilidades} \\ \{a_2, a_2', a_2''\} &: \frac{34 \times 33 \times 32}{6} = 5984 \text{ possibilidades} \\ \{a_3, a_3', a_3''\} &: \frac{34 \times 33 \times 32}{6} = 5984 \text{ possibilidades} \\ \{a_1, a_2, a_3\} &: 34 \times 34 \times 34 = 39394 \text{ possibilidades} \end{aligned}$$

onde o fator de $\frac{1}{6}$ aparece nos três primeiros tipos para eliminar as permutações simples. Logo o total de possibilidades é 57256.

3ª Questão [Valor: 1,0]
A coleção de selos de Roberto está dividida em três volumes. Dois décimos do total de selos estão no primeiro volume, alguns sétimos do total estão no segundo volume e 303 selos estão no terceiro volume. Quantos selos Roberto tem?

Solução:
Seja x o total desejado, logo, do enunciado, podemos escrever que

$$\frac{x}{5} + \frac{kx}{7} + 303 = x \Rightarrow x = \frac{10605}{28 - 5k}$$

onde $k < 6$, pois devemos ter $(28 - 5k) > 0$. Além disto, devemos ter $10605 = 3 \times 5 \times 7 \times 101$ múltiplo de $(28 - 5k)$, de modo que por inspeção, $k = 5$ e $x = 3535$.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que o número

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$$

é racional.

Solução:
Seja $\Delta = \sqrt{9 + \frac{125}{27}}$, assim podemos escrever que

$$x = \sqrt[3]{3 + \Delta} - \sqrt[3]{-3 + \Delta}$$

de modo que

$$\begin{aligned} x^3 &= (3 + \Delta) - 3\sqrt[3]{(3 + \Delta)^2(-3 + \Delta)} \\ &\quad + 3\sqrt[3]{(3 + \Delta)(-3 + \Delta)^2} - (-3 + \Delta) \\ &= 6 - 3\sqrt[3]{(3 + \Delta)(-3 + \Delta)} \left(\sqrt[3]{3 + \Delta} - \sqrt[3]{-3 + \Delta} \right) \\ &= 6 - 3\sqrt[3]{\frac{125}{27}} \left(\sqrt[3]{3 + \Delta} - \sqrt[3]{-3 + \Delta} \right) \\ &= 6 - 5x \end{aligned}$$

Logo

$$x^3 + 5x - 6 = (x - 1)(x^2 + x + 6) = 0$$

e então

$$x = \left\{ 1, \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{2} \right\}$$

Como, pela definição, x é real, logo devemos ter $x = 1$.

5ª Questão [Valor: 1,0]

a) Sendo dada a equação $x^3+px+q=0$, $p,q \in \mathbb{R}$, que relação deverá existir entre p e q para que uma das raízes seja igual ao produto das outras duas?

b) Mostre que a equação x^3-6x-4 satisfaz a relação encontrada e, em seguida, encontre suas raízes.

Solução:

a) Por Girard

$$\begin{cases} r_1+r_2+r_3=0 \\ r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=p \\ r_1r_2r_3=-q \end{cases}$$

Fazendo $r_2=r_1r_3$, devemos ter

$$\begin{cases} r_2=-(r_1+r_3) \\ r_2(r_1+r_3)+r_2=-r_2^2+r_2=p \\ r_2^2=-q \end{cases}$$

e então,

$$q \pm \sqrt{-q}=p \Rightarrow -q=(p-q)^2$$

b) De fato, com $p=-6$ e $q=-4$, temos que $4=(-6-(-4))^2$, de modo que

$$r_2=\frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}=\pm\sqrt{4}$$

de onde se conclui que $r_2=-2$, e então podemos escrever que

$$x^3-6x-4=(x+2)(x^2-2x-2)$$

cujas raízes são $x=\{-2,1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\}$.

6ª Questão [Valor: 1,0]

Seja $D=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0<x<1 \text{ e } 0<y<1\}$ e $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função tal que $\forall (x,y) \in D$ associa $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ onde

$$\begin{cases} x=y \\ y=(1-y)x \end{cases}$$

a) Sendo $T=\{(x,y)|\ x>0,\ y>0,\ x+y<1\}$, mostre que F é uma bijeção de D sobre T.

b) Esboce a imagem dos conjuntos da forma $\{(x,y) \in D|\ y=\lambda x\}$ para os seguintes valores de $\lambda:\ \lambda_0=\frac{1}{4};\ \lambda_1=\frac{1}{2};\ \lambda_2=1$.

Solução:

a) Seja $F(u,v)=(x,y)=(v,(1-v)u)$, de modo que

$$\begin{cases} x=v \Rightarrow 0<x<1 \\ y=(1-v)u=(1-x)u \Rightarrow 0<y<(1-x) \end{cases}$$

ou seja, a imagem de F é o conjunto T, e F é sobrejetiva para o contra-domínio T.

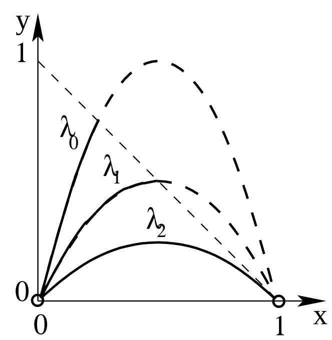
Sejam dois pontos distintos de D, $D_1 \equiv (u_1,v_1) \neq D_2 \equiv (u_2,v_2)$, tais que $F(D_1)=(x_1,y_1)=(v_1,(1-v_1)u_1)$ e $F(D_2)=(x_2,y_2)=(v_2,(1-v_2)u_2)$. Se $v_1 \neq v_2$, logo $x_1 \neq x_2$. Se $v_1=v_2$, então $u_1 \neq u_2$ (pois $D_1 \neq D_2$), logo $y_1 \neq y_2$. Em suma, pontos distintos de D são mapeados por F em pontos distintos de T, e F é injetiva.

Pelos resultados acima, F é bijeção de D em T.

b) Para $(u,v) \in D$ com $v=\lambda u$, temos que $F(u,v)=(x,y)=(\lambda u,(1-\lambda u)u)$, ou seja

$$y=(1-x)\frac{x}{\lambda}$$

que corresponde a uma parábola com concavidade para baixo, com vértice em $(\frac{1}{2},\frac{1}{4\lambda})$ e com extremos tendendo aos pontos $E_1 \equiv (0,0)$ e $E_2 \equiv (1,0)$. Naturalmente, a imagem inclui apenas o trecho das parábolas no interior de T, que corresponde a $0<x<\lambda$.



7ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}\frac{(2n+1)x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

Solução:
Para $n = 0$, a relação se reduz a

$$\frac{1}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

que naturalmente é válida.

Assumindo que a relação é válida para $n = k$, vamos analisar o caso para $n = (k+1)$:

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{(2k+1)x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} + \cos{(k+1)x} = \frac{\operatorname{sen}\frac{(2k+3)x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

Assim, devemos verificar que

$$\operatorname{sen}\frac{(2k+1)x}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos{(k+1)x} = \operatorname{sen}\frac{(2k+3)x}{2}$$

Desenvolvendo o lado esquerdo E da relação acima, têm-se

$$\begin{aligned}
E &= \operatorname{sen} kx \cos\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos kx \\
&+ 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos kx \cos x - 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen} kx \operatorname{sen} x \\
&= \operatorname{sen} kx(\cos\frac{x}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen} x) \\
&+ \cos kx(\operatorname{sen}\frac{x}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos x) \\
&= \operatorname{sen} kx\left[\cos\frac{x}{2} - \cos{(x-\frac{x}{2})} - \cos{(x+\frac{x}{2})}\right] \\
&+ \cos kx\left[\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \operatorname{sen}{(x+\frac{x}{2})} + \operatorname{sen}{(-\frac{x}{2}+x)}\right] \\
&= \operatorname{sen} kx \cos\frac{3kx}{2} + \cos kx \operatorname{sen}\frac{3kx}{2} \\
&= \operatorname{sen}\left(kx + \frac{3kx}{2}\right)
\end{aligned}$$

Assim, por indução finita, a validade da relação fica demonstrada.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a função racional

$$f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$$

e sabendo que a, b, c, m, n, $p \in \mathbb{Z}$ e que

i) $f(2) = 0$.

ii) Para $x = -1$ tem-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

iii) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -6$.

iv) $x = 1$ é raiz do polinômio $mx^2 + nx + p$.

v) $f(3) = \frac{1}{f(4)}$.

Determine os coeficientes a, b, c, m, n e p.

Solução:
Das relações do enunciado, têm-se

$$\begin{cases}
(i): & 8 + 4a + 2b + c = 0 \\
(ii): & -1 + a - b + c = 0 \\
(ii): & m - n + p = 0 \\
(iii): & \dfrac{3 - 2a + b}{-2m + n} = -6 \\
(iv): & m + n + p = 0 \\
(v): & \dfrac{27 + 9a + 3b + c}{9m + 3n + p} = \dfrac{16m + 4n + p}{64 + 16a + 4b + c}
\end{cases}$$

Das terceira e quinta relações acima, é fácil ver que $n = 0$ e então $p = -m$. Além disto, das primeira, segunda e quarta relações acima, têm-se

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -8 \\ a - b + c = 1 \\ -2a + b = 12m - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4m \\ b = 4m - 3 \\ c = 8m - 2 \end{cases}$$

Usando todos estes valores na última relação acima, tem-se

$$\frac{27-36m+12m-9+8m-2}{9m-m} = \frac{16m-m}{64-64m+16m-12+8m-2}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
(-16m + 16)(-40m + 50) &= (8m)(15m) \\
&\Rightarrow 4(1-m)(5-4m) = 3m^2 \\
&\Rightarrow 13m^2 - 36m + 20 = 0
\end{aligned}$$

Logo

$$m = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 1040}}{26} = \frac{36 \pm 16}{26}$$

Assim, $m = 2$, pois pelo enunciado m é inteiro, e então $a = -8$, $b = 5$, $c = 14$, $m = 2$, $n = 0$ e $p = -2$.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o quadrado $OABC$ cujos vértices são a origem e os pontos $A(1,1)$, $B(0,2)$ e $C(-1,1)$. Seja $F(0,1)$ o centro desse quadrado e P a parábola de foco F e cuja diretriz é o eixo das abscissas. Pede-se:

a) Mostre que P passa por A e C.

b) Determine a equação dessa parábola.

c) Calcule as coordenadas do ponto D, segundo ponto de interseção da reta BC com P.

d) Seja M um ponto qualquer de P cuja abscissa é x. Mostre que a potência de M em relação ao círculo (c) de diâmetro $\overline{CD}$ é $\frac{1}{4}(x+1)^3(x-3)$.

e) A partir do resultado anterior, encontre o conjunto dos pontos de P interiores a (c).

Solução:
A distância (ao quadrado) de F a um ponto (x,y) da parábola deve ser igual à distância (ao quadrado) deste ponto ao eixo das abcissas, assim

$$(x-0)^2+(y-1)^2=y^2 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

a) Na parábola, se $\pm x=1$, então $y=1$ e a parábola passa por A e C.

b) Do desenvolvimento acima, a equação da parábola é $y=\frac{x^2+1}{2}$.

c) A reta BC é descrita por $y=x+2$. Assim, na interseção tem-se

$$\frac{x^2+1}{2}=x+2 \Rightarrow x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0$$

Para $x=3$ na parábola, tem-se $y=5$, e então $D\equiv(3,5)$.

d) O centro O' do círculo é médio de C e D, assim $O'\equiv\frac{C+D}{2}=(\frac{-1+3}{2},\frac{1+5}{2})=(1,3)$. O raio é $R=\frac{\overline{CD}}{2}=\frac{\sqrt{(-1-3)^2+(1-5)^2}}{2}=2\sqrt{2}$. A potência P de $M\equiv(x,\frac{x^2+1}{2})$ é igual a

$$\begin{aligned}P&=\overline{MO'}^2-R^2\\&=(x-1)^2+(\frac{x^2+1}{2}-3)^2-8\\&=x^2-2x+1+\frac{x^4+2x^2+1}{4}-3(x^2+1)+9-8\\&=\frac{1}{4}(x^4-6x^2-8x-3)\\&=\frac{1}{4}(x+1)^3(x-3)\end{aligned}$$

e) Pontos interiores ao círculo são tais que $P<0$, assim devemos ter $-1<x<3$.

10ª Questão [Valor: 1,0]

a) A partir do estudo da variação do sinal das funções

$$f(x)=\ln(1+x)-x \quad\text{e}\quad g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$$

deduza a relação

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,\ \forall x\in\,]0,+\infty[$$

b) Sendo $n\in\mathbb{Z}^+$, seja

$$P(n)=(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\dots(1+\frac{n-1}{n^2})$$

Mostre que se $n\to\infty$, $P(n)$ admite um limite e calcule esse limite.

Solução:

a) Das respectivas definições, têm-se

$$f(0)=g(0)=0$$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}<0,\ \forall x\in\,]0,+\infty[\\g'(x)&=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0,\ \forall x\in\,]0,+\infty[\end{aligned}$$

Logo, $f(x)<0<g(x)$, $\forall x\in\,]0,+\infty[$, e a relação do enunciado se aplica.

b) Seja $S=\ln\lim\limits_{n\to\infty}P(n)$, que, por continuidade, é

$$S=\lim_{n\to\infty}\left[\ln\prod_{i=1}^{n-1}\left(1+\frac{i}{n^2}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)$$

Pelo item anterior, $S_a\le S\le S_b$, onde as igualdades podem ocorrer pois estamos considerando $n\to\infty$, com

$$\begin{aligned}S_a&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(\frac{i}{n^2}\right)-\left(\frac{i^2}{2n^4}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}i-\frac{1}{2n^4}\sum_{i=1}^{n-1}i^2\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}-\frac{1}{2n^4}p(n)\right]\\&=\frac{1}{2}-0\end{aligned}$$

pois $p(n)$ é um polinômio de ordem 3, e

$$S_b=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

Assim, $S=\frac{1}{2}$ e então $\lim\limits_{n\to\infty}P(n)=\sqrt{e}$.

IME 1990/1991 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam um círculo, com centro O e raio R, e um ponto P tal que $\overline{OP} = 3R$.

a) Determine o diâmetro $\overline{MN}$ de modo que o triângulo PMN seja retângulo com ângulo reto em M.
b) Calcule, em função de R, os lados e a área do triângulo PMN.
c) PN intercepta a circunferência em um segundo ponto K. Calcule $\overline{PK}$.
d) O diâmetro $\overline{MN}$ gira em torno de O. Qual o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P sobre $\overline{MN}$?
e) Determine a posição do diâmetro $\overline{MN}$ para que a área do triângulo PMN seja máxima.

Solução:

a) O diâmetro $\overline{MN}$ deve ser tal que o cosseno de seu ângulo com $\overline{OP}$ seja

$$\cos M\hat{O}P = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$$

b) Naturalmente, $\overline{MN} = 2R$. Assumindo que a condição do item (a) continua válida, dos triângulos retângulos ΔPMO e ΔPMN, têm-se, respectivamente, que

$$\begin{cases} \overline{PM} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OM}^2} = \sqrt{9R^2 - R^2} = 2\sqrt{2}R \\ \overline{PN} = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{MN}^2} = \sqrt{8R^2 + 4R^2} = 2\sqrt{3}R \end{cases}$$

e a área S_1 do triângulo ΔPMN fica dada por

$$S_1 = \frac{\overline{PM} \times \overline{MN}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 2}{2} R^2 = 2\sqrt{2}R^2$$

c) Usando o conceito de potência de P em relação ao círculo de centro O,

$$\overline{PK} = \frac{\overline{PM}^2}{\overline{PN}} = \frac{8R^2}{2\sqrt{3}R} = \frac{4\sqrt{3}}{3} R$$

d) Seja O' o ponto médio de $\overline{OP}$. Seja ainda M' o pé da perpendicular de P sobre $\overline{MN}$, de modo que o triângulo $\Delta OM'P$ é retângulo em M'. Assim,

$$\overline{M'O'} = \overline{OO'} = \overline{O'P} = \frac{3R}{2}$$

Com isto, o lugar geométrico de M' é a circunferência de centro O' e raio $\overline{O'M'} = \frac{3R}{2}$, excetuando os pontos P e O.

e) Seja α o ângulo entre $\overline{MN}$ e $\overline{OP}$ e seja M' o pé da perpendicular de P sobre $\overline{MN}$. Logo, a área S do triângulo ΔPMN é igual a

$$S = \frac{\overline{MN} \times \overline{PM'}}{2} = \frac{2R \times 3R \operatorname{sen}\alpha}{2} = 3R^2 \operatorname{sen}\alpha$$

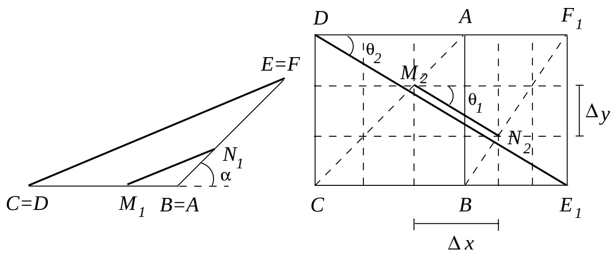
pois $\overline{PM'} = \overline{OP} \operatorname{sen}\alpha$. Logo, $S_{\text{máx}} = 3R^2$, que ocorre quando $\alpha = 90^\circ$, ou seja quando $\overline{MN} \perp \overline{OP}$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um círculo e uma reta que não se interceptam, ambos contidos num plano. Determine o lugar geométrico dos centros dos círculos que são tangentes ao círculo dado (exteriormente) e à reta dada.

Solução:
Sejam O e r o centro e o raio do círculo dado, respectivamente. O lugar geométrico pedido é o conjunto dos pontos cuja distância a O é igual à distância à reta dada adicionada de r. Assim, pela definição de parábola, a solução é uma parábola cujo foco é O e cuja diretriz é uma reta paralela, a uma distância r, à reta dada. Naturalmente, esta paralela deve estar no semi-plano, definido pela reta dada, que não contém O.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam dois quadrados $ABCD$ e $ABEF$, tendo um lado comum AB, mas não situados num mesmo plano. Sejam M e N pertencentes, respectivamente, às diagonais AC e BF tais que $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$. Mostre que MN é paralelo a DE.

Solução:



Na vista lateral, tem-se

$$\frac{BM_1}{BC} = \frac{BN_1}{BE} = \frac{1}{3}$$

e assim, os triângulos ΔBM_1N_1 e ΔBCE são semelhantes, de forma que as projeções das retas MN e DE na vista lateral são paralelas.

Na vista superior, têm-se

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{3} + \frac{a\cos\alpha}{3}} = \frac{1}{1+\cos\alpha} \\ \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{CD}{CE_1} = \frac{a}{a + a\cos\alpha} = \frac{1}{1+\cos\alpha} \end{cases}$$

de forma que $\operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}\theta_2$, e assim as projeções das retas MN e DE na vista superior são paralelas.

Como as projeções são paralelas nas duas vistas, as retas MN e DE são paralelas no espaço.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam A, B e C os ângulos de um triângulo. Mostre que

$$\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C = 4 \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C$$

Solução:
Como $2A = [2\pi - 2(B+C)]$, logo

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2A &= -\operatorname{sen} 2(B+C)\\ &= -(\operatorname{sen} 2B \cos 2C + \operatorname{sen} 2C \cos 2B)\\ &= [\operatorname{sen} 2B(1-2\cos^2 C) + \operatorname{sen} 2C(1-2\cos^2 B)]\end{aligned}$$

Definindo

$$S = \operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C$$

têm-se, então, que

$$\begin{aligned}S &= 2[\operatorname{sen} 2B(1-\cos^2 C) + \operatorname{sen} 2C(1-\cos^2 B)]\\ &= 4(\operatorname{sen} B \cos B \operatorname{sen}^2 C + \operatorname{sen} C \cos C \operatorname{sen}^2 B)\\ &= 4 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C(\cos B \operatorname{sen} C + \cos C \operatorname{sen} B)\\ &= 4 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \operatorname{sen}(B+C)\\ &= 4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C\end{aligned}$$

pois

$$\operatorname{sen}(B+C) = \operatorname{sen}[\pi - (B+C)] = \operatorname{sen} A$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que se num triângulo ABC vale a relação

$$\frac{\cos(B-C)}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen}(C-B)} = \operatorname{tg} B$$

então o triângulo é retângulo com ângulo reto em A.

Solução:
Analisando o lado esquerdo E da expressão do enunciado, têm-se que

$$\begin{aligned}E &= \frac{\cos(B-C)}{\operatorname{sen}(B+C) + \operatorname{sen}(C-B)}\\ &= \frac{\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B \cos C + \operatorname{sen} C \cos B + \operatorname{sen} C \cos B - \operatorname{sen} B \cos C}\\ &= \frac{\operatorname{cotg} C + \operatorname{tg} B}{2}\end{aligned}$$

Assim, para que a relação do enunciado seja válida, têm-se que

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg} C = \operatorname{tg} B &\Rightarrow\\ \frac{\cos C}{\operatorname{sen} C} = \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B} &\Rightarrow\\ \cos B \cos C - \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = \cos(B+C) = 0 &\Rightarrow\\ \cos[\pi - (B+C)] = \cos A = 0\end{aligned}$$

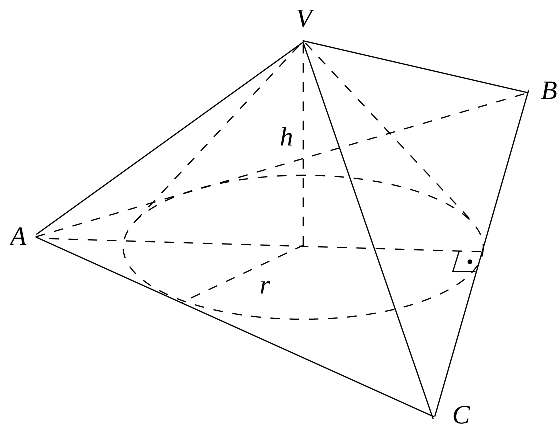
e como $A \in (0,\pi)$, então $A = 90^{\circ}$.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um cone reto de base circular, vértice V, altura h e raio de base r e seja ABC um triângulo equilátero circunscrito à base do cone. Pede-se:

a) Determinar a relação entre h e r para que o tetraedro, com vértices $VABC$, seja regular.

b) Satisfeitas essas condições, calcule, em função de r, o volume limitado pela superfície do cone, pelo plano de sua base e pelos dois planos tangentes que passam pela aresta VA.

Solução:



a) Seja ℓ a aresta do tetraedro $VABC$. Assim, devemos ter que

$$\begin{cases} r = \frac{1}{3}\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\\ h^2 + r^2 = \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}\\ h = \frac{\ell\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

Logo,

$$h = 2r\sqrt{2}$$

b) O volume V desejado é um terço da diferença entre os volumes V_t do tetraedro e V_c do cone. Assim,

$$\begin{aligned}V &= \frac{V_t - V_c}{3}\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \times h}{3} - \frac{\pi r^2 \times h}{3}\right)\\ &= \frac{2\sqrt{2}(3\sqrt{3}-\pi)}{9} r^3\end{aligned}$$

7ª Questão [Valor: 1,0]
Resolver o sistema

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 6 \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} + \dfrac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} = -6 \end{cases}$$

Sabendo que x e y pertencem ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Solução:
Desenvolvendo a segunda equação e usando o resultado da primeira, têm-se

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = -6 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \Rightarrow \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = -1$$

Usando este resultado em qualquer equação original, tem-se a equação bi-quadrada

$$\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = 6 \Rightarrow \operatorname{tg}^4 x - 6 \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$$

Logo,

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{6 \mp \sqrt{36-4}}{2} = 3 \mp 2\sqrt{2}$$

ou seja

$$\operatorname{tg} x = \mp\sqrt{3 \mp 2\sqrt{2}} = \mp\sqrt{(\sqrt{2} \mp 1)^2} = \mp(\sqrt{2} \mp 1)$$

e, correspondentemente,

$$\operatorname{tg} y = -\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \pm(\sqrt{2} \pm 1)$$

Calculando $\operatorname{tg} 2x$, têm-se

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\mp 2(\sqrt{2} \mp 1)}{1 - (\sqrt{2} \mp 1)^2} = \mp 1$$

Como $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, logo $2x \in [-\pi, \pi]$. Assim, têm-se quatro soluções

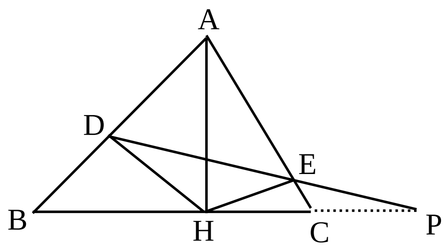
$$2x = \begin{cases} \mp\frac{\pi}{4} \\ \mp\frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \mp\frac{\pi}{8} \\ \mp\frac{3\pi}{8} \end{cases} \text{ e } y = \begin{cases} \pm\frac{3\pi}{8} \\ \pm\frac{\pi}{8} \end{cases}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja, sobre uma esfera, um círculo máximo (C) com diâmetro $\overline{AB} = 2R$. Traçam-se uma corda $\overline{MN}$ do círculo (C), paralela a AB, e duas retas x e y perpendiculares ao plano do círculo de diâmetro $\overline{AB}$ e passando, respectivamente, por M e N. Os planos definidos pelo ponto A e a reta x e o definido pelo ponto A e a reta y cortam a esfera segundo dois círculos. Mostre que quando MN varia, mantendo-se paralela a AB, a soma dos quadrados de seus raios é constante.

Solução:
Os círculos-seção têm raios iguais a $r_1 = \frac{\overline{AM}}{2}$ e $r_2 = \frac{\overline{AN}}{2}$. Por simetria, $\overline{AN} = \overline{MB}$, e assim

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{\overline{AM}^2}{4} + \frac{\overline{AN}^2}{4} = \frac{\overline{AM}^2}{4} + \frac{\overline{MB}^2}{4} = \frac{\overline{AB}^2}{4} = R^2$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Num triângulo ABC traçamos a altura $\overline{AH}$ e do pé H dessa altura construímos as perpendiculares $\overline{HD}$ e $\overline{HE}$ sobre os lados AB e AC. Seja P o ponto de interseção DE com BC. Construindo as alturas relativas aos vértices B e C determinam-se também, de modo análogo Q e R sobre os lados AC e AB. Demonstre que os pontos P, Q e R são colineares.



Solução:
Da semelhança dos triângulos ΔABH, ΔAHD e ΔHBD, e usando o teorema de Pitágoras no triângulo ΔABH, têm-se

$$\begin{cases} \frac{AB}{AH} = \frac{AH}{AD} \\ \frac{AB}{BH} = \frac{BH}{BD} \\ BH^2 = AB^2 - AH^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD = \frac{AH^2}{AB} \\ BD = \frac{AB^2 - AH^2}{AB} \end{cases}$$

Da semelhança dos triângulos ΔACH, ΔAHE e ΔHCE, e usando o teorema de Pitágoras no triângulo ΔACH, têm-se

$$\begin{cases} \frac{AC}{AH} = \frac{AH}{AE} \\ \frac{AC}{CH} = \frac{CH}{CE} \\ CH^2 = AC^2 - AH^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AE = \frac{AH^2}{AC} \\ CE = \frac{AC^2 - AH^2}{AC} \end{cases}$$

Pelo teorema de Menelaus com a reta PED, têm-se

$$\frac{AE.BD.PC}{CE.AD.PB} = \frac{\frac{AH^2}{AC}\frac{AB^2-AH^2}{AB}PC}{\frac{AC^2-AH^2}{AC}\frac{AH^2}{AB}PB} = 1$$

e assim

$$\frac{PC}{PB} = \frac{AC^2 - AH^2}{AB^2 - AH^2}$$

Analogamente, para Q e R têm-se

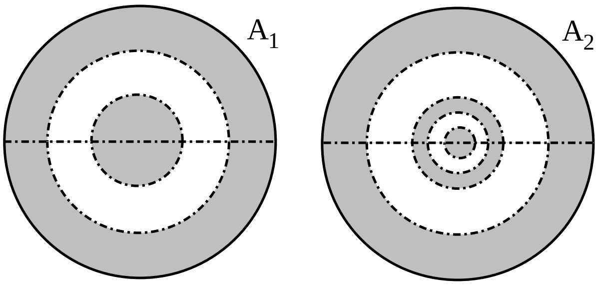
$$\begin{cases} \frac{QA}{QC} = \frac{AB^2 - AH^2}{BC^2 - AH^2} \\ \frac{RB}{RA} = \frac{BC^2 - AH^2}{AC^2 - AH^2} \end{cases}$$

de forma que

$$\frac{PC.QA.RB}{PB.QC.RA} = \frac{(AC^2 - AH^2)(AB^2 - AH^2)(BC^2 - AH^2)}{(AB^2 - AH^2)(BC^2 - AH^2)(AC^2 - AH^2)} = 1$$

e assim, pelo teorema de Menelaus, os pontos P, Q e R são colineares.

10ª Questão [Valor: 1,0]
No plano, considere um disco de raio R, chame este conjunto de A_0. Divida um raio de A_0 em três segmentos congruentes e retire de A_0 a coroa circular de raios $\dfrac{1}{3}R$ e $\dfrac{2}{3}R$, chame este conjunto de A_1. O conjunto A_1 contém um disco de raio $R_1 = \dfrac{1}{3}R$, divida um raio deste disco em três segmentos e, mais uma vez retire de A_1 a coroa circular de raios $\dfrac{1}{3}R_1$ e $\dfrac{2}{3}R_1$, chame este conjunto de A_2. Continue este processo indefinidamente e seja A o conjunto resultante.



a) Calcule a área do conjunto A_n obtido após a n-ésima etapa do processo descrito acima.
b) Calcule a área do conjunto resultante A.

Solução:
Pelo enunciado, para $n \geq 1$, têm-se

$$A_n = A_{n-1} - \frac{2\pi R_n^2}{3} + \frac{\pi R_n^2}{3} = A_{n-1} - \frac{\pi R_n^2}{3}$$

com $R_n = \frac{1}{3^{n-1}}R$ e $A_0 = \pi R^2$.
a) Assim,

$$\begin{cases} A_1 = A_0 - \frac{\pi R_1^2}{3} \\ A_2 = A_1 - \frac{\pi R_2^2}{3} \\ A_3 = A_2 - \frac{\pi R_3^2}{3} \\ \vdots \\ A_n = A_{n-1} - \frac{\pi R_n^2}{3} \end{cases}$$

Logo, usando o conceito de soma telescópica e a expressão para soma de progressão geométrica de n termos, com primeiro termo $R_1^2 = R^2$ e razão $\frac{1}{9}$, têm-se,

$$A_n = A_0 - \frac{\pi \displaystyle\sum_{i=1}^{n} R_i^2}{3} = \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{3}\left(\frac{1 - \frac{1}{9^n}}{1 - \frac{1}{9}}\right)$$

ou seja, para $n \geq 1$,

$$A_n = \frac{\pi R^2}{8}\left(5 + \frac{3}{9^n}\right)$$

b) Fazendo $n \to \infty$ na expressão acima, tem-se

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{5\pi R^2}{8}$$

IME 1989/1990 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o determinante da matriz $n \times n$ que possui zeros na diagonal principal e todos os outros elementos iguais a 1.

Solução:
Abrindo a soma da primeira coluna em duas parcelas,

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Sejam E_n e F_n a primeira e segunda parcelas acima, respectivamente. A segunda coluna de E_n pode ser desmembrada em duas novas parcelas, de forma que

$$E_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

onde a primeira parcela é nula por apresentar duas colunas iguais. Aplicando Laplace na segunda coluna da segunda parcela de E_n, tem-se

$$\begin{cases} E_n = (-1)E_{n-1} \\ E_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow E_n = (-1)^{n-1}$$

Aplicando Laplace na primeira coluna de F_n, tem-se

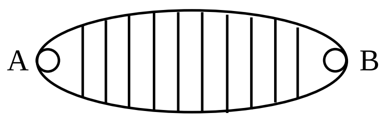
$$F_n = (-1)D_{n-1}$$

Assim,

$$\begin{cases} D_n = E_n + F_n = (-1)^{n-1} + (-1)D_{n-1} \\ D_1 = 0 \end{cases}$$

de forma que, por indução, $D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Ligando as cidades A e B existem duas estradas principais. Dez estradas secundárias de mão dupla, ligam as duas estradas principais, como mostra a figura. Quantos caminhos, sem auto-interseções, existem de A até B?
Obs: Caminho sem auto-interseções é um caminho que não passa por um ponto duas ou mais vezes.



Solução:
De início, têm-se 2 caminhos. Cada ponte multiplica o número de opções por 2. Logo, o total de caminhos é $2 \times 2^{10} = 2048$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a família de retas representada pela equação

$$y = mx - \frac{p(1+m^2)}{2m}$$

onde p é uma constante positiva dada e m um número real variável.

a) Determine a condição para que num ponto $M = (x_0, y_0)$ do plano cartesiano passem duas retas dessa família.

b) Determine o lugar geométrico dos pontos M para os quais as retas que por eles passem sejam perpendiculares.

Solução:
No ponto M, tem-se

$$m^2(2x_0 - p) - 2y_0 m - p = 0$$

Logo

$$m = \frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 + (2x_0 - p)p}}{2x_0 - p}$$

a) Para termos duas retas distintas, devemos ter

$$y_0^2 + (2x_0 - p)p > 0 \Rightarrow x_0 > -\frac{y_0^2}{2p} + \frac{p}{2}$$

b) Para que as retas sejam perpendiculares, o produto dos dois valores de m, que são os coeficientes angulares das retas, deve ser -1. Assim,

$$\frac{-p}{2x_0 - p} = -1 \Rightarrow x_0 = p$$

e a restrição do item (a) se torna $y_0^2 + p^2 > 0$. Assim, o lugar geométrico é a reta $x_0 = p > 0$ com y_0 qualquer.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Considere as funções:

$$f(x) = a^x, \text{ onde } a > 1$$
$$g(x) = \sqrt{2px}, \text{ onde } p > 0$$

Mostre que uma condição necessária e suficiente para que seus gráficos se tangenciem é

$$a = e^{\frac{p}{e}}$$

Neste caso, determine, em função de p, a equação da tangente comum.

Solução:
Calculando $f'(x)$ e $g'(x)$, têm-se

$$f'(x) = f(x)\ln a = a^x \ln a$$

$$g'(x) = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}$$

Para que os gráficos se tangenciem, devemos ter

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^x = \sqrt{2px} \\ a^x \ln a = \dfrac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

e assim

$$\sqrt{2px}\ln a = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}} \Rightarrow x = \frac{1}{2\ln a}$$

Usando este valor de x, tem-se que

$$a^{\frac{1}{2\ln a}} = \sqrt{\frac{p}{\ln a}}$$

Tirando-se o logaritmo natural da expressão acima, conclui-se que

$$\frac{1}{2\ln a}\ln a = \frac{1}{2}\ln\frac{p}{\ln a} \Rightarrow a = e^{\frac{p}{e}}$$

Usando este valor de a, as coordenadas (x_0, y_0) do ponto de contato são

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{2\ln e^{\frac{p}{e}}} = \dfrac{e}{2p} \\ y_0 = g(x_0) = \sqrt{2p}\sqrt{x_0} = \sqrt{e} \end{cases}$$

O coeficiente angular da reta tangente é dado por

$$g'(x_0) = \frac{p}{\sqrt{e}}$$

Com isto, é possível determinar a reta tangente como a descrita pela equação

$$y = \frac{p}{\sqrt{e}}x + \frac{\sqrt{e}}{2}$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Na elipse de excentricidade $\frac{1}{2}$, foco na origem e reta diretriz dada por $3x + 4y = 25$, determine
a) Um dos focos da elipse.
b) O outro foco.
c) A equação da outra reta diretriz.
sln: Quantos focos tem esta elipse?

Solução:

a) O centro da elipse é determinado pelo encontro das diretrizes (ver item (c)):

$$C \equiv \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \Rightarrow C \equiv (3, 4)$$

Note que C é médio dos dois focos, logo o outro foco é dado por $(6, 8)$.
b) Pelo enunciado, o outro foco está na origem.
c) A segunda diretriz é ortogonal à primeira, e por conter os focos, deve passar pela origem. Logo, sua equação é $y = \frac{4}{3}x$.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a função

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

definida em $0 < x < \infty$. Calcule o valor de f em cada ponto e esboce o seu gráfico.

Solução:
É fácil ver que $f(1) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1$. Em geral, podemos reescrever $f(x)$ da forma

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{2n}+1}{x^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\left(x^{2n}+1\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{x}L$$

onde, por continuidade,

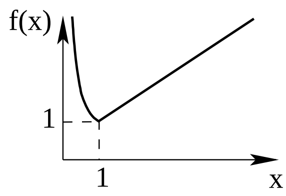
$$\ln L = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(x^{2n}+1\right)}{n}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ se } 0<x<1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\mathrm{d}(x^{2n}+1)}{\mathrm{d}n}}{(x^{2n}+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{2n}\ln x}{(x^{2n}+1)} = 2\ln x, \text{ se } 1<x \end{cases}$$

ou seja

$$L = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < 1 \\ x^2, & \text{se } 1 < x \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } 0 < x < 1 \\ x, & \text{se } 1 \leq x \end{cases}$$

cujo gráfico é mostrado a seguir.



7ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a equação

$$z^5 = \overline{z}$$

onde $\overline{z}$ é o conjugado do número complexo z.

Solução:
Usando $z = re^{i\theta}$, devemos ter

$$r^5 e^{5i\theta} = re^{-i\theta}$$

ou seja

$$\begin{aligned} r &= 1 \\ 5\theta &= -\theta + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{3} \end{aligned}$$

e assim

$$z = \cos\frac{k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{3}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja f uma função definida nos inteiros positivos satisfazendo

i) $f(1) = 1$.

ii) $f(2n) = 2f(n) + 1$.

iii) $f(f(n)) = 4n - 3$.

Calcule $f(1990)$.
sln: Caso a terceira equação seja $f(f(n)) = 4n + 3$, como anteriormente colocado, o caso $n = 1$ indicaria $f(f(1)) = f(1) = 4 \times 1 + 3 = 7$, o que é incoerente com a primeira relação.

Solução:
Para a versão corrigida, determinando $f(n)$ para diferentes valores de n, é simples perceber que $f(n) = 2n - 1$. Para evitar a prova desta relação, podemos a partir da mesma deduzir a seguinte seqüência de passos:

$$\begin{cases} f(2) = f(2\times 1) = 2f(1) + 1 = 3 \\ f(4) = f(2\times 2) = 2f(2) + 1 = 7 \\ f(8) = f(2\times 4) = 2f(4) + 1 = 15 \\ f(16) = f(2\times 8) = 2f(8) + 1 = 31 \\ f(32) = f(2\times 16) = 2f(16) + 1 = 63 \\ f(63) = f(f(32)) = 4\times 32 - 3 = 125 \\ f(125) = f(f(63)) = 4\times 63 - 3 = 249 \\ f(249) = f(f(125)) = 4\times 125 - 3 = 497 \\ f(498) = f(2\times 249) = 2f(249) + 1 = 995 \\ f(995) = f(f(498)) = 4\times 498 - 3 = 1989 \\ f(1990) = f(2\times 995) = 2f(995) + 1 = 3979 \end{cases}$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
IMEBOL é um jogo de três jogadores. Em cada partida o vencedor marca a pontos, o segundo colocado marca b pontos e o terceiro colocado marca c pontos, onde $a > b > c$ são inteiros positivos. Certo dia, Marcos, Flávio e Ralph resolvem jogar IMEBOL e após algumas partidas a soma dos pontos foi: Marcos: 20, Flávio: 10, Ralph: 9. Sabe-se que Flávio venceu a segunda partida. Encontre quantos pontos cada um marcou em cada partida disputada.

Solução:
O número de partidas é $n \geq 2$ e o número total de pontos distribuídos em cada partida é $k = (a+b+c) \geq 6$, pois $a > b > c \geq 1$. Assim, o número total de pontos em todas as partidas é $kn = (20+10+9) = 39$. Como k e n devem ser fatores inteiros de 39, a única possibilidade com $n \geq 2$ e $k \geq 6$ é $k = 13$ e $n = 3$.

Como Marcos fez 20 pontos nas três partidas, $a > 6$, e como Flávio fez 10 pontos nas mesmas três partidas, tendo ganhado pelo menos uma, $a \leq 8$. Assim, a princípio, $a = 7$ ou $a = 8$. Mas $a = 7$, significaria que Marcos teria tirado dois primeiros e um segundo, totalizando $(2a + b) = 20$ pontos, com $b = 6$. Isto é inviável, pois implicaria em $c = 0$, pois $(a+b+c) = 13$. Assim, $a = 8$, e Flávio tendo ganhado pelo menos uma partida, necessariamente tirou em terceiro nas outras duas com $c = 1$, de modo que $b = 4$. Para atingir seus 20 pontos, Marcos então tirou dois primeiros e um segundo, e assim as colocações de Ralph ficam também determinadas:
Primeira partida: 1º Marcos; 2º Ralph; 3º Flávio.
Segunda partida: 1º Flávio; 2º Marcos; 3º Ralph.
Terceira partida: 1º Marcos; 2º Ralph; 3º Flávio.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Para que valores de p a equação $x^4 + px + 3$ tem raiz dupla? Determine, em cada caso, as raízes da equação.

Solução:
Seja r a raiz dupla. Dividindo o polinômio $f(x)$ do enunciado pelo fator $(x^2 - 2xr + r^2)$, tem-se

$$f(x) = (x^2 - 2rx + r^2)(x^2 + 2rx + 3r^2) + (p + 4r^3)x + 3(1 - r^4)$$

Assim, devemos ter que

$$\begin{cases} 1 - r^4 = 0 \\ p + 4r^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \{1, -1, i, -i\} \\ p = -4r^3 = \{-4.4, 4i, -4i\} \end{cases}$$

e as outras duas raízes saem do fator $(x^2 + 2rx + 3r^2)$, isto é

$$x = \frac{-2r \pm \sqrt{4r^2 - 12r^2}}{2} = r(-1 \pm \sqrt{2}i)$$

Em suma, para os quatro possíveis valores de p, têm-se

$$\begin{cases} p = -4 \Rightarrow x = \{1, 1, -1 + \sqrt{2}i, -1 - \sqrt{2}i\} \\ p = 4 \Rightarrow x = \{-1, -1, 1 + \sqrt{2}i, 1 - \sqrt{2}i\} \\ p = 4i \Rightarrow x = \{i, i, \sqrt{2} - i, -\sqrt{2} - i\} \\ p = -4i \Rightarrow x = \{-i, -i, \sqrt{2} + i, -\sqrt{2} + i\} \end{cases}$$

sln: As relações acima, também poderiam ser obtidas forçando $f(x)$ e $f'(x)$ a terem uma mesma raiz.

IME 1989/1990 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o valor de

$$p = \text{sen}\,\frac{\pi}{24}\ \text{sen}\,\frac{5\pi}{24}\ \text{sen}\,\frac{7\pi}{24}\ \text{sen}\,\frac{11\pi}{24}$$

Solução:
Usando a expressão de transformação em produto,

$$\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

podemos escrever que

$$\begin{cases} \text{sen}\,\frac{5\pi}{24}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{24} = \frac{1}{2}\big(\cos\frac{4\pi}{24} - \cos\frac{6\pi}{24}\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \text{sen}\,\frac{11\pi}{24}\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{24} = \frac{1}{2}\big(\cos\frac{4\pi}{24} - \cos\frac{18\pi}{24}\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

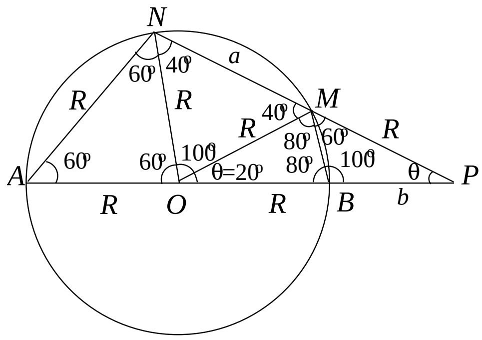
Logo,

$$p = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) = \frac{1}{16}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $\overline{AB}$ um diâmetro de um círculo de centro O e raio R. Sobre o prolongamento de $\overline{AB}$ escolhemos um ponto $P(\overline{PB} < \overline{PA})$. Partindo de P tomamos uma secante que corta o círculo nos pontos M e N ($\overline{PM} < \overline{PN}$), de modo que $\overline{PM} = \overline{AN} = R$.

a) Mostre que a corda $\overline{MB}$ é um lado de um polígono regular inscrito de dezoito lados.
b) Encontre uma equação (do 3º grau) que determina a distância de P ao centro do círculo em função de R.

Solução:



a) Como $PM = MO$, então $M\hat{O}P = M\hat{P}O = \theta$. Por uma análise angular simples, é possível verificar que

$$M\hat{O}B = \theta = \frac{60^o - \theta}{2} \Rightarrow \theta = 20^o$$

e assim MB corresponde ao lado do polígono regular de 18 lados inscrito no círculo, e todos os demais ângulos da figura acima ficam determinados.

b) Sejam $PB = b$ e $MN = a$. Usando o conceito de potência de P em relação ao círculo dado (ou então usando a semelhança dos triângulos ΔPMB e ΔPAN), tem-se

$$PN = \frac{PB.PA}{PM} \Rightarrow (R+a) = \frac{b(b+2R)}{R}$$

Usando a lei dos cossenos no triângulo ΔPAN, têm-se

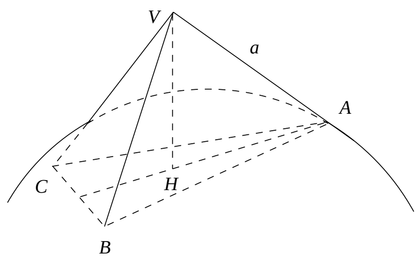
$$PN^2 = PA^2 + AN^2 - 2PA.AN\cos 60^o \Rightarrow$$
$$(R+a)^2 = (b+2R)^2 + R^2 - (b+2R)R$$

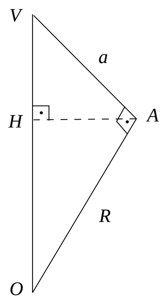
Assim, usando a expressão anterior para $(R+a)$ e definindo $OP = x = (b+R)$, têm-se

$$\left[\frac{(x-R)(x+R)}{R}\right]^2 = (x+R)^2 + R^2 - (x+R)R \Rightarrow$$
$$(x^2-R^2)^2 - R^4 = (x+R)(x+R-R)R^2 \Rightarrow$$
$$[(x^2-R^2)+R^2][(x^2-R^2)-R^2] = (x+R)xR^2 \Rightarrow$$
$$x(x^2-2R^2) = (x+R)R^2 \Rightarrow$$
$$x^3 - 3R^2x - R^3 = 0$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma esfera de raio R. Determine a figura geométrica à qual pertence o lugar geométrico dos vértices dos triedros nos quais as três arestas são tangentes a essa esfera e formam, duas a duas, ângulos de 60^o.

Solução:





Por simetria, as três arestas do tetraedro que são tangentes à esfera, VA, VB e VC, são congruentes entre si, e as três arestas internas à esfera, AB, AC e BC, são também congruentes entre si. No triângulo ΔAVB, como $A\hat{V}B = 60^o$, então $VA = VB = AB$, e então $VABC$ é um tetraedro regular de aresta a. Sendo assim, o pé H da altura do vértice V em relação à base ΔABC é tal que

$$AH = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

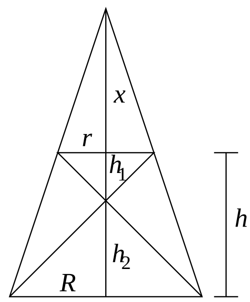
Da selhança entre os triângulos ΔAVH e ΔOVA, onde O é o centro da esfera, tem-se que

$$\frac{AH}{AV} = \frac{OA}{OV} \Rightarrow \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{R}{OV} \Rightarrow OV = R\sqrt{3}$$

que é constante. Logo, o lugar geométrico de V é a esfera de centro O e raio $R\sqrt{3}$.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Dois círculos de raios R e r são, ao mesmo tempo, bases de um tronco de cone e bases de dois cones opostos de mesmo vértice e mesmo eixo. Seja K a razão entre o volume do tronco e a soma dos volumes dos dois cones opostos e seja m a razão $\frac{R}{r}$. Determine m em função de K.

Solução:



Sejam h_1 e h_2 as alturas dos cones opostos. Logo,

$$\begin{cases} \frac{h_1}{r} = \frac{h_2}{R} = \frac{h_2}{mr} \\ h_1 + h_2 = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = \frac{h}{m+1} \\ h_2 = \frac{mh}{m+1} \end{cases}$$

Da semelhança de triângulos, têm-se

$$\frac{x}{r} = \frac{x+h}{R} \Rightarrow x = \frac{hr}{R-r} = \frac{h}{m-1}$$

Os volumes V_1 e V_2, dos cones opostos, e V do tronco de cone são dados por

$$\begin{cases} V_1 = \frac{\pi r^2 h_1}{3} \\ V_2 = \frac{\pi R^2 h_2}{3} \\ V = \frac{\pi[R^2(x+h) - r^2 x]}{3} \end{cases} \Rightarrow K = \frac{V}{V_1+V_2} = \frac{m^2(x+h)-x}{h_1+m^2h_2}$$

Usando os valores acima para x, h_1 e h_2, têm-se

$$\begin{aligned} K &= \frac{(m^2-1)\frac{h}{m-1} + m^2 h}{\frac{h}{m+1} + m^2\frac{mh}{m+1}} \\ &= \frac{\frac{m^3-1}{m-1}}{\frac{m^3+1}{m+1}} \\ &= \frac{m^2+m+1}{m^2-m+1} \end{aligned}$$

Logo,

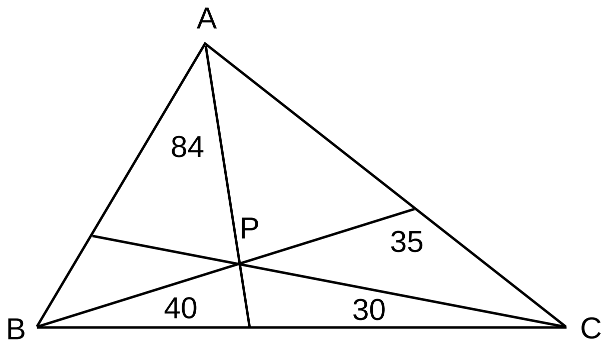
$$(K-1)m^2 - (K+1)m + (K-1) = 0$$

e então

$$\begin{aligned} m &= \frac{(K+1) \mp \sqrt{(K+1)^2 - 4(K-1)^2}}{2(K-1)} \\ &= \frac{(K+1) \mp \sqrt{(3K-1)(3-K)}}{2(K-1)} \end{aligned}$$

sln: Nesta solução, considerou-se que os cones opostos têm mesma abertura. Sem isto, a questão se torna indeterminada.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Seja P um ponto no interior de um triângulo ABC, dividindo-o em seis triângulos, quatro dos quais têm áreas 40, 30, 35 e 84, como mostra a figura. Calcule a área do triângulo ABC.



Solução:
Sejam A', B' e C' as interseções de AP com BC, BP com AC e CP com AB, respectivamente.

Como os triângulos $\Delta ABA'$ e $\Delta ACA'$ têm mesma altura relativa ao lado BC, então,

$$\frac{84+S_{PBC'}+40}{S_{PAB'}+35+30}=\frac{40}{30}$$

Analogamente, como os triângulos $\Delta BCB'$ e $\Delta BAB'$ têm mesma altura relativa ao lado AC, então,

$$\frac{40+30+35}{S_{PBC'}+84+S_{PAB'}}=\frac{35}{S_{PAB'}}$$

Logo,

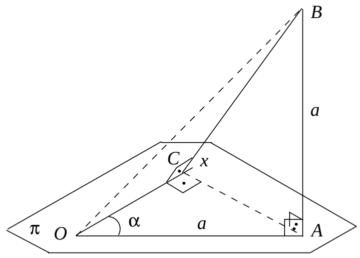
$$\begin{cases} 4S_{PAB'}-3S_{PBC'}=112 \\ 2S_{PAB'}-S_{PBC'}=84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{PBC'}=56 \\ S_{PAB'}=70 \end{cases}$$

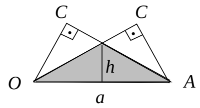
e assim

$$S_{ABC}=84+70+56+35+40+30=315$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um segmento fixo OA de comprimento a e uma semi-reta variável Ox tal que $A\hat{O}x=\alpha$, α ângulo agudo, pertencente a um plano fixo π. Seja a perpendicular ao plano π em A e seja B pertencente a esta perpendicular tal que $AB=a$. Seja C o pé da perpendicular traçada de B sobre Ox. Pedidos:
a) Qual a propriedade comum a todas as faces do tetraedro $OABC$?
b) Calcule o comprimento das seis arestas de $OABC$ em função de a e α.
c) Calcule o volume v do tetraedro em função de a e α.
d) Determine α de modo que $v=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ (existem dois valores).
e) Determine o volume comum aos dois sólidos encontrados no item anterior.

Solução:





a) Da figura, é possível constatar que todas as faces do tetraedro são triangulôs retângulos.
b) Ainda da figura e do enunciado, têm-se

$$\begin{cases} OA=AB=a \\ OB=\sqrt{OA^2+AB^2}=a\sqrt{2} \\ OC=a\cos\alpha;\ \ AC=a\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=a\sqrt{1+\mathrm{sen}^2\alpha} \end{cases}$$

c)

$$v=\frac{1}{3}\times\frac{OC\times AC}{2}\times AB=\frac{a^3\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha}{6}=\frac{a^3\,\mathrm{sen}\,2\alpha}{12}$$

d) Com $\alpha\in(0,90^\circ)$, têm-se

$$\frac{a^3\,\mathrm{sen}\,2\alpha}{12}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}\Rightarrow\mathrm{sen}\,2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=\begin{cases}30^\circ\\60^\circ\end{cases}$$

e) A interseção das bases ΔABC nos dois casos do item anterior é ilustrada acima, à direita, onde

$$h=\frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,30^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Assim, a área S_i da base e o volume V_i da interseção são iguais a

$$\begin{cases} S_i=\frac{ah}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12} \\ V_i=\frac{S_i\times AB}{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{36} \end{cases}$$

7ª Questão [Valor: 1,0]

a) Obtenha a expressão para $\operatorname{tg} 3\alpha$ em função de $\operatorname{tg}\alpha = x$.

b) Utilize o item anterior para determinar as soluções da equação

$$x^3 - 3mx^2 - 3x + m = 0$$

onde m é um número real dado.

Solução:

1. Usando a expressão da tangente da soma, têm-se

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 3\alpha &= \operatorname{tg}(2\alpha+\alpha)\\ &= \frac{\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}\\ &= \frac{\left(\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right) + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \left(\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)\operatorname{tg}\alpha}\\ &= \frac{2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{(1-\operatorname{tg}^2\alpha) - 2\operatorname{tg}^2\alpha}\\ &= \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}\end{aligned}$$

2. Pelo item anterior, têm-se

$$\operatorname{tg}3\alpha - 3\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}3\alpha = 3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha \Rightarrow$$
$$\operatorname{tg}^3\alpha - 3\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}^2\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}3\alpha = 0$$

Assim, definindo

$$\begin{cases} m = \operatorname{tg}3\alpha\\ x = \operatorname{tg}\alpha\end{cases}$$

a equação acima se torna igual à equação do enunciado, cuja solução é então da forma

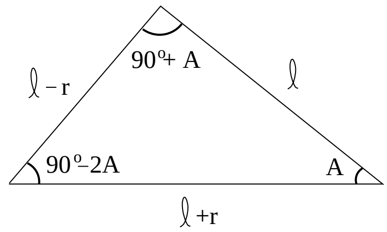
$$x = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} m\right)$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Os lados de um triângulo estão em progressão aritmética e o lado intermediário mede ℓ. Sabendo-se que o maior ângulo excede o menor em 90^o, calcule a razão entre os lados.

Solução:
Sejam os ângulos emordem crescente (A, B, C), com $C = (90^o + A)$, de modo que

$$B = 180^o - (A+C) = 90^o - 2A$$

Assim, tem-se o triângulo da figura a seguir.



Usando a lei dos cossenos, têm-se

$$\begin{cases}(\ell-r)^2 = \ell^2+(\ell+r)^2-2\ell(\ell+r)\cos A\\ \ell^2 = (\ell-r)^2+(\ell+r)^2-2(\ell-r)(\ell+r)\cos(90^o-2A)\\ (\ell+r)^2 = \ell^2+(\ell-r)^2-2\ell(\ell-r)\cos(90^o+A)\end{cases}$$

e assim

$$\begin{cases}\cos A = \frac{4r+\ell}{2(\ell+r)}\\ \operatorname{sen} 2A = \frac{\ell^2+2r^2}{2(\ell^2-r^2)}\\ \operatorname{sen} A = \frac{4r-\ell}{2(\ell-r)}\end{cases}$$

Logo, como $\operatorname{sen} 2A = 2\operatorname{sen} A\cos A$, tem-se que

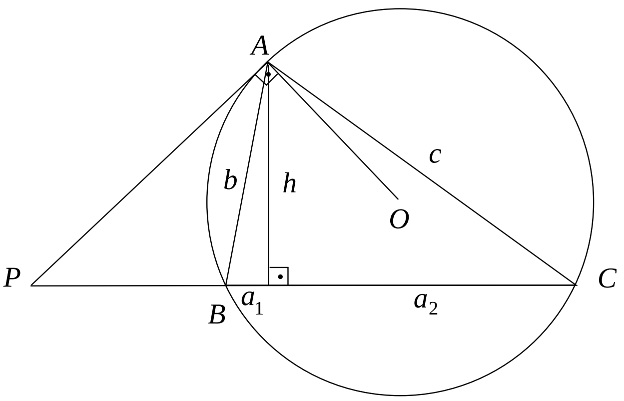
$$\frac{\ell^2+2r^2}{2(\ell^2-r^2)} = 2\frac{4r-\ell}{2(\ell-r)}\,\frac{4r+\ell}{2(\ell+r)} \Rightarrow \ell^2+2r^2 = 16r^2-\ell^2$$

e então

$$r = \frac{\ell\sqrt{7}}{7}$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Prove que as tangentes ao círculo circunscrito a um triângulo, passando nos seus vértices, interceptam os lados opostos em três pontos colineares.

Solução:



Sejam P, Q e R as interseções das tangentes ao círculo circunscrito ao triângulo ΔABC pelos vértices A, B e C, respectivamente, com os respectivos lados opostos. Seja ainda h o comprimento da altura por A do triângulo ΔABC. Assim,

$$\begin{cases} a_1^2 = b^2 - h^2 \\ a_2^2 = c^2 - h^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 - a_2^2 = b^2 - c^2 \\ a_1 + a_2 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 = \frac{a^2+b^2-c^2}{a} \\ 2a_2 = \frac{a^2-b^2+c^2}{a} \end{cases}$$

Do conceito de potência do ponto P, têm-se

$$PB.PC = PB(PB+a) = PA^2 = h^2 + (PB+a_1)^2$$

e assim

$$\begin{cases} PB = \frac{h^2+a_1^2}{a-2a_1} = \frac{b^2}{a-\frac{a^2+b^2-c^2}{a}} = \frac{ab^2}{c^2-b^2} \\ PC = PB + a = \frac{b^2}{c^2-b^2} + a = \frac{ac^2}{c^2-b^2} \end{cases}$$

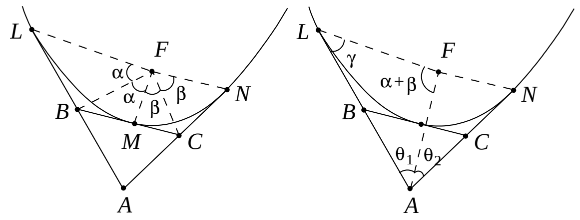
Logo, para P, e analogamente para Q e R, têm-se que

$$\begin{cases} \frac{PB}{PC} = \frac{b^2}{c^2} \\ \frac{QC}{QA} = \frac{c^2}{a^2} \\ \frac{RA}{RB} = \frac{a^2}{b^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{PB.QC.RA}{PC.QA.RB} = 1$$

e então, pelo teorema de Manelaus, os pontos P, Q e R são colineares.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um triângulo ABC cujos lados são tangentes a uma parábola. Prove que o círculo circunscrito ao triângulo passa pelo foco.

Solução:



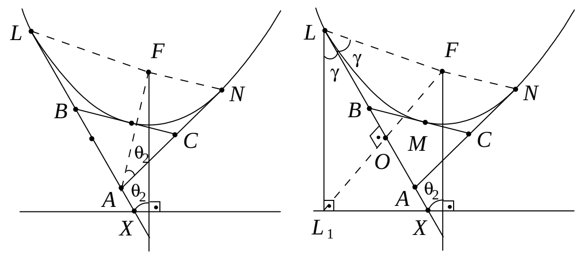
Sejam L, M e N os três pontos de tangência dos lados do triângulo ABC em relação à parábola P de foco F, como indicado na figura acima.

Pelo teorema de Poncelet, AF, BF e CF são bissetrizes de $L\hat{F}N$, $L\hat{F}M$ e $M\hat{F}N$, respectivamente. Assim,

$$\begin{cases} L\hat{F}B = M\hat{F}B = \alpha \\ N\hat{F}C = M\hat{F}C = \beta \end{cases} \Rightarrow L\hat{F}A = N\hat{F}A = \alpha + \beta$$

Assim, do triângulo ΔLFA, tem-se que

$$\alpha + \beta + \gamma + \theta_1 = 180^{\text{o}}$$



O teorema de Poncelet nos diz ainda que o ângulo θ_2 que AF faz com uma tangente AN é igual ao ângulo que a outra tangente AL faz com o eixo de simetria da parábola.

Prolongando tangente AL até interceptar a diretriz d em X, considere o seguinte resultado:
Lema: A mediatriz m do segmento L_1F, onde L_1 pertence à diretriz da parábola P com foco F, é a tangente a P no ponto L, tal que $LL_1 \perp d$.
sln: Ver a prova deste resultado na 10ª questão de 1985/1986 (geometria).

■

Seja O a interseção de m com L_1F. Como L pertence à parábola P, então $LL_1 = LF$, e os triângulos ΔLL_1O e ΔLFO são congruentes, de forma que $L_1\hat{L}O = F\hat{L}O = \gamma$.

Assim, como LL_1 é paralela ao eixo de simetria da parábola, e ambas as retas são interceptadas por LX prolongada, então por Tales, $\theta_2 = \gamma$. Com isto, podemos escrever que

$$\alpha + \beta + \theta_2 + \theta_1 = 180^{\text{o}}$$

ou seja, o quadrilátero $ABCF$ é inscritível, o que equivale a dizer que F pertence ao círculo circunscrito ao triângulo ΔABC.

IME 1988/1989 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o coeficiente de x^{-9} no desenvolvimento de

$$\left(x^2+\frac{1}{x^5}\right)^2.\left(x^3+\frac{1}{x^4}\right)^5$$

Solução:
A expressão do enunciado pode ser reescrita como

$$\frac{\left(x^7+1\right)^2}{x^{10}}\frac{\left(x^7+1\right)^5}{x^{20}}=\frac{\left(x^7+1\right)^7}{x^{30}}$$

Logo, o coeficiente desejado é o de x^{21} no desenvolvimento de $(x^7+1)^7$ que é dado por

$$\left(\begin{array}{c}7\\4\end{array}\right)=\frac{7!}{4!3!}=35$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Esboce o gráfico da função

$$y=f(x)=5x^{2/3}-x^{5/3}$$

assinalando os pontos críticos.

Solução:
Podemos escrever que

$$\begin{aligned}f(x)&=x^{2/3}(5-x)\\ f'(x)&=\frac{2}{3}x^{-1/3}(5-x)-x^{2/3}=\frac{5}{3}x^{-1/3}(2-x)\\ f''(x)&=\frac{-5}{9}x^{-4/3}(2-x)-\frac{5}{3}x^{-1/3}=-\frac{10}{9}x^{-4/3}(1+x)\end{aligned}$$

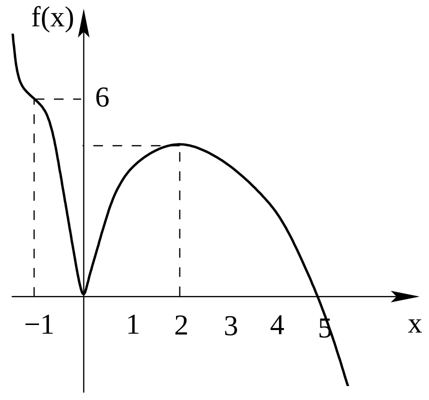
E assim têm-se:

$$\left\{\begin{array}{l}f(0)=f(5)=0;\ f(1)=4>0\\ \displaystyle\lim_{x\to\mp\infty}f(x)=\pm\infty\\ \left\{\begin{array}{l}f(x)>0,\ \text{se }(x\neq 0)<5\\ f(x)<0,\ \text{se }5<x\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}f'(0)=\nexists;\ f'(1)=\frac{5}{3}>0;\ f'(2)=0\\ \displaystyle\lim_{x\to 0^\mp}f'(x)=\mp\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to\mp\infty}f'(x)=\frac{5}{3}\lim_{x\to\mp\infty}\frac{-1}{\frac{1}{3}x^{2/3}}=-\infty\\ \left\{\begin{array}{l}f'(x)>0,\ \text{se }0<x<2\\ f'(x)<0,\ \text{se }x<0\ \text{ e }\ 2<x\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}f''(-1)=0;\ f''(0)=\nexists; f''(1)=-\frac{20}{9}<0\\ \displaystyle\lim_{x\to 0^\mp}f''(x)=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to\mp\infty}f''(x)=-\frac{10}{9}\lim_{x\to\mp\infty}\frac{1}{\frac{4}{3}x^{1/3}}=0\\ \left\{\begin{array}{l}f''(x)>0,\ \text{se }x<-1\\ f''(x)<0,\ \text{se }\ -1<(x\neq 0)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

O que determina os seguintes pontos de interesse: $(-1,6)$ é ponto de inflexão, $(0,0)$ é ponto cuspidal e raiz, $(2,3\sqrt[3]{4})$ é máximo local e $(5,0)$ é raiz. O gráfico de $f(x)$ é mostrado a seguir.



3ª Questão [Valor: 1,0]
Um ponto se move de modo que o quadrado de sua distância à base de um triângulo isósceles é igual ao produto de suas distâncias aos outros dois lados do triângulo. Determine a equação da trajetória deste ponto, identificando a curva descrita e respectivos parâmetros.

Solução:
Seja o triângulo isósceles de altura h, base b, ângulo da base tal que $\operatorname{tg}\theta = \frac{2h}{b}$ e com os vértices $A \equiv (0, h)$, $B \equiv (-\frac{b}{2}, 0)$ e $C \equiv (\frac{b}{2}, 0)$, de modo que seus lados pertencem às retas descritas por

$$\begin{cases} r_1(AB): y = x\operatorname{tg}\theta + h \\ r_2(AC): y = -x\operatorname{tg}\theta + h \\ r_3(BC): y = 0 \end{cases}$$

Lembrando-se que a distância d de um ponto $P \equiv (x_0, y_0)$ à uma reta $y = \alpha x + \beta$ é

$$d = \frac{|y_0 - \beta - \alpha x_0|}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}$$

logo, as distâncias de P às retas r_1, r_2 e r_3 são, respectivamente,

$$\begin{cases} d_1 = \dfrac{|y_0 - h - x_0\operatorname{tg}\theta|}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta + 1}} = \dfrac{|y_0 - h - x_0\operatorname{tg}\theta|}{|\sec\theta|} \\ d_2 = \dfrac{|y_0 - h + x_0\operatorname{tg}\theta|}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta + 1}} = \dfrac{|y_0 - h + x_0\operatorname{tg}\theta|}{|\sec\theta|} \\ d_3 = |y_0| \end{cases}$$

Assim, devemos ter que

$$d_3^3 = d_1 d_2 \Rightarrow y_0^2 = \frac{|(y_0 - h)^2 - x_0^2\operatorname{tg}^2\theta|}{\sec^2\theta}$$

Observando que $(y_0 - h)/x_0$ é a inclinação de AP, tem-se que se esta inclinação for maior, em módulo, que a inclinação $\operatorname{tg}\theta$ de AB, então

$$y_0^2\sec^2\theta = (y_0 - h)^2 - x_0^2\operatorname{tg}^2\theta$$

$$\Rightarrow \left(y_0 + \frac{h}{\operatorname{tg}^2\theta}\right)^2 + x_0^2 = h^2\operatorname{cotg}^2\theta\operatorname{cossec}^2\theta$$

que corresponde a uma circunferência de raio $h\operatorname{cotg}\theta\operatorname{cossec}\theta$ e centro $(0, -h/\operatorname{tg}^2\theta)$. Se, porém, a inclinação de AP for menor, em módulo, que a inclinação de AB, então

$$y_0^2\sec^2\theta = x_0^2\operatorname{tg}^2\theta - (y_0 - h)^2$$

$$\Rightarrow x_0^2\operatorname{tg}^2\theta - \left(y_0\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\theta} - \frac{h}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\theta}}\right)^2 = \frac{h^2}{2+\operatorname{sen}^2\theta}$$

que corresponde a uma hipérbole com eixo focal $y = \frac{h}{2+\operatorname{tg}^2\theta}$.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Três números, cuja soma é 126, estão em progressão aritmética e outros três em progressão geométrica. Somando os termos correspondentes das duas progressões obtêm-se 85, 76 e 84 respectivamente. Encontre os termos destas progressões.

Solução:
Sejam os termos a, b, c da progressão aritmética e d, e, f da progressão geométrica. Como $2b = (a + c)$ e $(a+b+c) = 126$, então $b = \frac{126}{3} = 42$, $e = (76-42) = 34$, e assim $df = e^2 = 1156$. Como $(a + d) = 85$ e $(c + f) = 84$, logo $(d + f) = [169 - (a + c)] = (169 - 2b) = 85$. Assim, d e f são as raízes de

$$x^2 - 85x + 1156 = (x - 68)(x - 17)$$

Assim, temos duas opções:

$$(a, b, c, d, e, f) = \begin{cases} (68, 42, 16, 17, 34, 68) \\ \text{ou} \\ (17, 42, 67, 68, 34, 17) \end{cases}$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a equação

$$x^2 + y^2 - 2mx - 4(m + 1)y + 3m + 14 = 0$$

a) Determine os valores de m, para que esta equação corresponda a um círculo.
b) Determine o lugar geométrico dos centros destes círculos.

Solução:
Completando os quadrados na expressão do enunciado, tem-se

$$\begin{aligned}(x-m)^2 + (y-2(m+1))^2 &= 5m^2+5m-10 \\ &= 5(m+2)(m-1)\end{aligned}$$

a) Para que a equação acima corresponda a um círculo, devemos ter $5(m + 2)(m - 1) > 0$, ou seja, $m < -2$ ou $m > 1$.
b) O centro do círculo estará no ponto $(x_0, y_0) = (m, 2(m + 1))$, ou seja, seu lugar geométrico é a reta $y_0 = 2(x_0 + 1)$, sem o segmento que une os pontos $(-2, -2)$ e $(1, 4)$.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que todas as raízes da equação

$$(z + 1)^5 + z^5 = 0$$

pertencem a uma mesma reta paralela ao eixo imaginário.

Solução:
Seja $z = (a + bi)$, assim devemos ter

$$(a + bi + 1)^5 = -(a + bi)^5 = (-a - bi)^5$$

Igualando os módulos dos números acima, tem-se

$$(a + 1)^2 + b^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Logo, as soluções devem pertencer à reta $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$, que é paralela ao eixo imaginário.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Em cada uma das faces de um cubo constrói-se um círculo e em cada círculo marcam-se n pontos. Unindo-se estes pontos,

a) Quantas retas, não contidas numa mesma face do cubo, podem ser formadas?

b) Quantos triângulos, não contidos numa mesma face do cubo, podem ser formados?

c) Quantos tetraedros, com base numa das faces do cubo, podem ser formados?

d) Quantos tetraedros, com todos os vértices em faces diferentes, podem ser formados?

Obs: Suponha que, se 4 pontos não pertencem a uma mesma face, então não são coplanares.

Solução:

a) Cada um dos $6n$ pontos pode ser conectado a $5n$ pontos das demais faces para formar uma reta. Eliminando a redundância das retas AB e BA, tem-se um total de apenas $\frac{6n\times 5n}{2} = 15n^2$ possibilidades.

b) O total de triângulos possíveis é $\frac{6n\times(6n-1)\times(6n-2)}{6}$, onde o fator de $\frac{1}{6}$ elimina as permutações dos vértices. Deste total, $6 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ estão sobre uma mesma face. Assim, o total de triângulos não contidos numa mesma face é $[n(6n-1)(6n-2) - n(n-1)(n-2)] = 5n^2(7n-3)$.

c) Cada um dos $n(n-1)(n-2)$ em uma face pode ser conectado a $5n$ pontos das demais faces para compor o tetraedro, dando um total de $5n^2(n-1)(n-2)$ possíveis tetraedros.

d) Temos 15 combinações de 6 faces 4 a 4. Como cada face do cubo tem n pontos, o total de possibilidades aqui é $15n \times n \times n \times n = 15n^4$.

Solução:
Seja D o determinante desejado. Forma-se uma nova matriz de colunas c'_i a partir da matriz original de colunas c_i, para $i = 1, 2, \ldots, 4$, sem alterar o valor de D, com as seguintes operações

$$\left\{\begin{array}{l} c'_2 = c_2 - c_1 \\ c'_3 = c_3 - c_1 \\ c'_4 = c_4 - c_1 \end{array}\right. \Rightarrow D = \left|\begin{array}{cccc} a^2 & 2a{+}1 & 4a{+}4 & 6a{+}9 \\ b^2 & 2b{+}1 & 4b{+}4 & 6b{+}9 \\ c^2 & 2c{+}1 & 4c{+}4 & 6c{+}9 \\ d^2 & 2d{+}1 & 4d{+}4 & 6d{+}9 \end{array}\right|$$

Fazendo uma nova transformação

$$\left\{\begin{array}{l} c''_3 = c'_3 - 2c'_2 \\ c''_4 = c'_4 - 3c'_2 \end{array}\right. \Rightarrow D = \left|\begin{array}{cccc} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{array}\right| = 0$$

pois há duas colunas proporcionais.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4 \\ x + y = 20 \end{array}\right.$$

Solução:
Definindo $z = \sqrt[6]{xy}$, a primeira equação torna-se

$$7z^2 - 3z^3 = 4 \Rightarrow 3(z-1)(z-2)(z+\frac{2}{3}) = 0$$

Assim, temos as três possibilidades:

$$\sqrt[6]{xy} = \left\{\begin{array}{l} 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} xy = 1 \\ x+y = 20 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10 \pm 3\sqrt{11} \\ y = 10 \mp 3\sqrt{11} \end{array}\right. \\ -\frac{2}{3} \Rightarrow \nexists\, x, y \\ 2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} xy = 64 \\ x+y = 20 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10 \pm 6 \\ y = 10 \mp 6 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja uma elipse cujo eixo maior $AA' = 2a$ e cuja excentricidade é $1/2$. Seja F o foco da elipse, correspondente ao vértice A. Considere a parábola, cujo vértice é o ponto O, centro da elipse, e cujo foco coincide com o foco F da elipse. Determine o ângulo entre as duas curvas nos pontos de interseção.

Solução:
A elipse é descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e como $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ e $(b^2 + c^2) = a^2$, então $b^2 = \frac{3a^2}{4}$. A parábola tem foco $(-c, 0) = (-\frac{a}{2}, 0)$, vértice na origem e diretriz $x = c = \frac{a}{2}$. Assim um ponto (x, y) desta parábola é tal que

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = (x-c) \Rightarrow y^2 = -4cx = -2ax$$

Determinando as interseções:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2 + 4y^2 = 3a^2 \\ y^2 = -2ax \end{array}\right. \Rightarrow 3x^2 - 8ax - 3a^2 = 3(x+\frac{a}{3})(x-3a) = 0$$

cuja raiz de interesse, com $x < 0$, é $x = -\frac{a}{3}$, e então $y = \pm\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Calculando as inclinações das curvas:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{elipse :} & 3x\,\mathrm{d}x + 4y\,\mathrm{d}y = 0 \\ \text{parábola :} & 2y\,\mathrm{d}y = -2a\,\mathrm{d}x \end{array}\right.$$

Assim, nos pontos de interseção:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{elipse :} & \mathrm{tg}\,\theta_1 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{3x}{4y} = \frac{\sqrt{6}}{8} \\ \text{parábola :} & \mathrm{tg}\,\theta_2 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{y} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$$

Usando a fórmula da tangente da diferença de dois ângulos,

$$|\,\mathrm{tg}\,(\theta_2 - \theta_1)| = \left|\frac{\mathrm{tg}\,\theta_2 - \mathrm{tg}\,\theta_1}{1 + \mathrm{tg}\,\theta_2 \mathrm{tg}\,\theta_1}\right| = \left|\frac{-\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{8}}{1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\frac{\sqrt{6}}{8}}\right| = \sqrt{6}$$

e os ângulos entre as curvas são $\pm\mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{6}$.

IME 1988/1989 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a seguinte desigualdade:

$$\frac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} \geq 2,$$

para $0 \leq x \leq \pi$.

Solução:
Seja $x \in I_1 \equiv \{[0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi]\}$, de modo que o denominador D seja positivo. Neste caso, a inequação se torna

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos x - 1 \geq 2\cos 2x \Rightarrow \\ \cos 2x - \cos x + 1 \leq 0 \Rightarrow \\ 2\cos^2 x - \cos x \leq 0 \Rightarrow \\ \cos x(2\cos x - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

Logo, devemos ter que

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \cos x \geq 0 \\ \text{e} \\ \cos x \leq \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \text{e} \\ x \in [\frac{\pi}{3}, \pi] \end{array} \right. \\ \text{ou} \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos x \leq 0 \\ \text{e} \\ \cos x \geq \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ \text{e} \\ x \in [0, \frac{\pi}{3}] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Assim, o resultado é tal que

$$x \in I_2 \equiv [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$$

Achando a interseção deste resultado I_2 com o intervalo I_1 em que $D > 0$, o conjunto-solução para este caso é vazio.

Se o denominador D for negativo, a solução é a interseção do complemento de I_1 (com exceção dos pontos em que $D = 0$) com o complemento de I_2 (incluindo os pontos em que a igualdade pode ocorrer). Ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \\ \text{e} \\ x \in \{[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]\} \end{array} \right. \Rightarrow x \in \{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})\}$$

que é de fato o conjunto-solução da questão, já que no primeiro caso não houve solução.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Numa circunferência de centro O e de diâmetro $AB = 2R$, prolonga-se o diâmetro AB até um ponto M, tal que $BM = R$. Traça-se uma secante MNS tal que $MN = NS$, onde N e S são os pontos de interseção da secante com a circunferência. Determine a área do triângulo MOS.

Solução:
Usando o conceito de potência do ponto M em relação ao círculo de centro O, têm-se

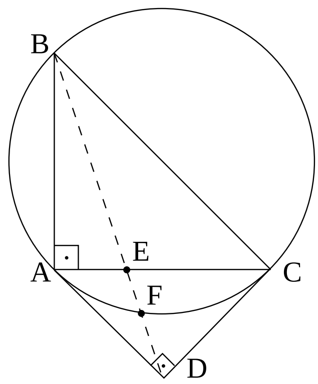
$$\text{Pot}\, M = \left\{ \begin{array}{l} MN \times MS = MN \times 2MN \\ MB \times MA = R \times 3R \end{array} \right. \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{6}}{2} R$$

e assim o triângulo ΔMOS tem lados de comprimentos $R\sqrt{6}, 2R, R$, de modo que sua área S é

$$S = \frac{R^2}{4}\sqrt{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)} = \frac{\sqrt{15}}{4} R^2$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam ABC e ACD dois triângulos retângulos isósceles com o lado AC comum, e os vértices B e D situados em semiplanos distintos em relação ao lado AC. Nestes triângulos $AB = AC = a$ e $AD = CD$.
a) Calcule a diagonal BD do quadrilátero $ABCD$.
b) Seja E o ponto de interseção de AC com BD. Calcule BE e ED.
c) Seja F a interseção da circunferência de diâmetro BC com a diagonal BD. Calcule DF e EF.

Solução:
A figura abaixo representa a situação do problema.



a) Os triângulos ΔABC e ΔADC são retângulos e isósceles, de modo que $D\hat{C}B = 90^o$, e o triângulo ΔBCD também é retângulo, com

$$\left\{ \begin{array}{l} BC = a\sqrt{2} \\ CD = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

b) CE é bissetriz de $D\hat{C}B$. Logo, pelo teorema das bissetrizes

$$\frac{BC}{BE} = \frac{CD}{ED} = \frac{BC + CD}{BE + ED} = \frac{a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

e assim

$$\left\{ \begin{array}{l} BE = \frac{BC}{\frac{3\sqrt{5}}{5}} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{5}}{5}} = \frac{a\sqrt{10}}{3} \\ ED = \frac{CD}{\frac{3\sqrt{5}}{5}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{5}}{5}} = \frac{a\sqrt{10}}{6} \end{array} \right.$$

c) Seja (c) o círculo circunscrito ao triângulo ΔABC, de modo que DC é tangente a este círculo. A potência de D em relação a (c) é então

$$\text{Pot}\, D = \left\{ \begin{array}{l} DF \times DB = DF \times \frac{a\sqrt{10}}{2} \\ DC^2 = \frac{a^2}{2} \end{array} \right. \Rightarrow DF = \frac{a\sqrt{10}}{10}$$

e ainda

$$EF = ED - DF = \frac{a\sqrt{10}}{6} - \frac{a\sqrt{10}}{10} = \frac{a\sqrt{10}}{15}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que a área total do cilindro equilátero inscrito em uma esfera é média geométrica entre a área da esfera e a área total do cone equilátero inscrito nessa esfera.

Solução:
Seja R o raio da esfera de área $S_{esf} = 4\pi R^2$. O cilindro equilátero tem altura h_{cil} e diâmetro d_{cil} das bases iguais, de modo que $d_{cil} = h_{cil} = R\sqrt{2}$, e a área total S_{cil} do cilindro é

$$S_{cil} = 2\frac{\pi d_{cil}^2}{4} + \pi d_{cil}h_{cil} = \pi R^2 + 2\pi R^2 = 3\pi R^2$$

A seção do cone equilátero, gerada por um círculo máximo da esfera passando pelo vértice do cone, é um triângulo equilátero inscrito no círculo de raio R. A geratriz g_{con} e o diâmetro d_{con} da base do cone são iguais ao lado do triângulo equilátero. Assim, $d_{con} = g_{con} = \ell$, com $\ell = R\sqrt{3}$, e a área total S_{con} do cone é

$$S_{con} = \frac{\pi d_{con}^2}{4} + \pi\frac{d_{con}}{2}g_{con} = \frac{3}{4}\pi R^2 + \frac{3}{2}\pi R^2 = \frac{9}{4}\pi R^2$$

Logo, é fácil agora ver que

$$S_{con} \times S_{esf} = 9\pi^2 R^4 = S_{cil}^2$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que, se os ângulos de um triângulo ABC verificam a igualdade $\operatorname{sen} 4A + \operatorname{sen} 4B + \operatorname{sen} 4C = 0$, então o triângulo é retângulo.

Solução:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 4A &= \operatorname{sen}[4\pi - 4(B+C)]\\ &= -\operatorname{sen} 4(B+C)\\ &= -(\operatorname{sen} 4B\cos 4C + \operatorname{sen} 4C\cos 4B)\end{aligned}$$

Definindo,

$$S = \operatorname{sen} 4A + \operatorname{sen} 4B + \operatorname{sen} 4C$$

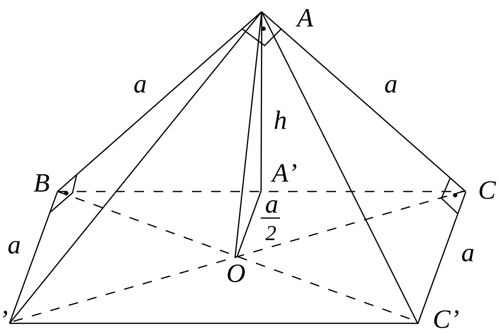
têm-se, então, que

$$\begin{aligned}S &= \operatorname{sen} 4B(1-\cos 4C) + \operatorname{sen} 4C(1-\cos 4B)\\ &= 4\operatorname{sen} 2B\cos 2B\operatorname{sen}^2 2C + 4\operatorname{sen} 2C\cos 2C\operatorname{sen}^2 2B\\ &= 4\operatorname{sen} 2B\operatorname{sen} 2C(\operatorname{sen} 2C\cos 2B + \operatorname{sen} 2B\cos 2C)\\ &= 4\operatorname{sen} 2B\operatorname{sen} 2C\operatorname{sen} 2(B+C)\\ &= -4\operatorname{sen} 2B\operatorname{sen} 2C\operatorname{sen} 2A\end{aligned}$$

Assim, se $S = 0$, como $A, B, C \in (0, \pi)$, então algum ângulo deve ser reto, e o triângulo deve ser retângulo.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja ABC um triângulo retângulo isósceles, com $AB = AC = a$. Sejam BB' e CC' dois segmentos de comprimento a, perpendiculares ao plano ABC e situados no mesmo semi-espaço em relação a este plano.
a) Calcule a área total da pirâmide de vértice A e base $BCC'B'$.
b) Calcule o volume desta pirâmide.
c) Mostre que os pontos A, B, C, C' e B' pertencem a uma esfera.
d) Determine o centro e o raio desta esfera.

Solução:



a) Da figura, têm-se

$$\begin{cases} AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = a\sqrt{2}\\ AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = a\sqrt{2}\end{cases}$$

e o triângulo $\Delta AB'C'$ é equilátero de lado $a\sqrt{2}$. Com isto, a área total S da pirâmide é

$$\begin{aligned}S &= S_{ABC} + S_{ABB'} + S_{ACC'} + S_{AB'C'} + S_{BB'CC'}\\ &= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} + a^2\sqrt{2}\\ &= \frac{a^2}{2}(3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2})\end{aligned}$$

b) Seja A' o pé da altura de A em relação à base $BB'CC'$. Logo, $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ e o volume V da pirâmide é dado por

$$V = \frac{S_{BB'CC'} \times h}{3} = \frac{a^2\sqrt{2} \times \frac{a\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{a^3}{3}$$

c) Veja o próximo item.
d) Seja O o centro da base $BB'CC'$. Do triângulo retângulo $\Delta AA'O$, tem-se que

$$OA' = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Calculando a distância de O para os vértices da base, têm-se

$$OB = OB' = OC = OC' = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

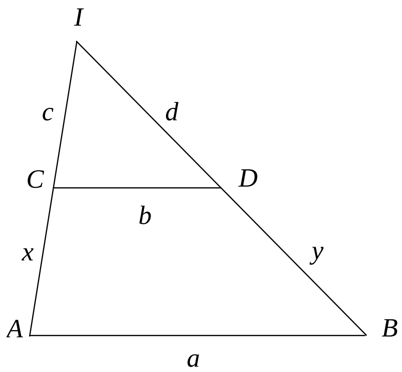
Logo, O é centro de uma esfera, de raio $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, circunscrita à pirâmide $ABB'CC'$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $ABCD$ um trapézio cuja base maior $AB = a$ é fixa e cuja base menor CD tem comprimento constante igual a b. A soma dos lados não paralelos é constante e igual a L. Os prolongamentos dos lados não paralelos se cortam em I.

a) Demonstre que o lugar geométrico decrito pelo ponto I, quando a base CD se desloca, é uma cônica.

b) Determine os eixos e a distância focal.

Solução:



a) Da semelhança entre os triângulos ΔIAB e ΔICD, têm-se

$$\frac{a}{b} = \frac{c+x}{c} = \frac{d+y}{d} = \frac{c+x+d+y}{c+d} = \frac{c+d+L}{c+d} \Rightarrow$$

$$c+d = \frac{bL}{a-b} \Rightarrow$$

$$IA + IB = c+d+x+y = c+d+L = \frac{aL}{a-b}$$

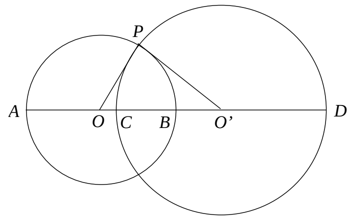
Logo, $(IA + IB)$ é constante, e o lugar geométrico de I é uma elipse (E) de focos A e B.

b) Do item (a), a distância focal de (E) é igual a $AB = a$ e o eixo principal é igual a $(IA+IB) = \frac{aL}{a-b}$. Assim, o eixo secundário $2y$ é igual a

$$2y = \sqrt{\frac{a^2L^2}{(a-b)^2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2(a-b)}\sqrt{4L^2-(a-b)^2}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
São dados um segmento AB e os pontos C e D, que o dividem, internamente e externamente na mesma razão. Mostre que as circunferências de diâmetros AB e CD são ortogonais.

Solução:



Sejam O e O' os centros dos círculos de diâmetros $2R = AB$ e $2r = CD$. Seja ainda P um dos pontos de interseção dos círculos. Do enunciado,

$$\frac{CB}{CA} = \frac{DB}{DA} \Rightarrow \frac{CB}{2R-CB} = \frac{2r-CB}{2R+2r-CB}$$

de forma que

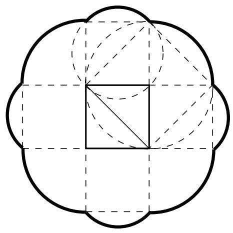
$$2CB^2 - 4CB(R+r) + 4Rr = 0$$

que é equivalente à condição de ortogonalidade dos círculos dada por

$$OO'^2 = OP^2 + O'P^2 \Rightarrow [(R+r)-CB]^2 = R^2 + r^2$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um quadrado de lado a e um ponto P, exterior ao quadrado. Chame de "ângulo sob o qual o quadrado é visto pelo ponto P" o menor ângulo com vértice em P que contenha o quadrado. Determine o lugar geométrico dos pontos P, de onde o quadrado é visto sob um ângulo de 45^o.

Solução:



Estendendo os lados do quadrado, formam-se oito regiões de dois tipos: o tipo 1, entre as extensões de dois lados paralelos, e o tipo 2, na diagonal das regiões do tipo 1.

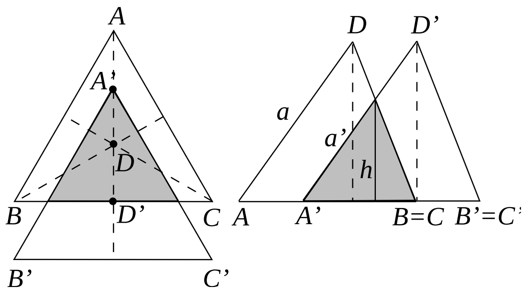
Para as quatro regiões do tipo 1, a projeção do quadrado é um dos seus lados. Assim, o lugar geométrico de P é a porção do arco capaz de 45^o relativo ao respectivo lado na região em questão. Este arco capaz é determinado pelo círculo circunscrito a um quadrado auxiliar formado a partir do lado em questão.

Para as quatro regiões do tipo 2, a projeção do quadrado é uma de suas diagonais. Assim, o lugar geométrico de P é a porção do arco capaz de 45^o relativo à respectiva diagonal na região em questão. Este arco capaz é determinado pelo círculo circunscrito a um quadrado auxiliar formado a partir da diagonal em questão.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $ABCD$ um tetraedro regular de aresta a. Seja O o baricentro da face ABC. Efetua-se uma translação do tetraedro igual a $AO/2$, obtendo-se um novo tetraedro $A'B'C'D'$.

a) Determine o volume da esfera inscrita no sólido comum aos tetraedros $ABCD$ e $A'B'C'D'$.
b) Determine o volume da esfera circunscrita a este sólido.

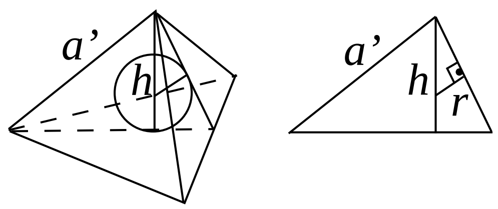
Solução:



O deslocamento d é dado por

$$d = \frac{AO}{2} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

de forma que $d = AA' = A'O = OO'$, onde O' é baricentro da base transladada $\Delta A'B'C'$. Sendo assim, é simples perceber que a interseção dos dois tetraedros regulares de aresta a é, por sua vez, um tetraedro regular de aresta $a' = \frac{2a}{3}$.



a) Pela figura acima, para um tetraedro de aresta a', a altura h é tal que

$$\begin{cases} h^2 = \sqrt{a'^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{a'\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ h^2 = \sqrt{\left(\frac{a'\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\frac{a'\sqrt{3}}{2}\right)^2} \end{cases} \Rightarrow h = \frac{a'\sqrt{6}}{3}$$

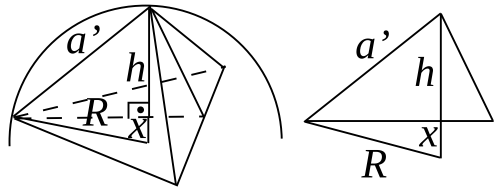
e o raio r da esfera inscrita é tal que

$$(h-r)^2 = r^2 + \left(\frac{a'\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}\frac{a'\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$r = \frac{h^2 - \frac{a'^2}{3}}{2h} = \frac{a'\sqrt{6}}{12} = \frac{a\sqrt{6}}{18}$$

e o volume V_i da esfera inscrita é

$$V_i = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{729}$$



b) Já o raio R da esfera circunscrita é tal que

$$R^2 = x^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{a'\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (R-h)^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{a'\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$R^2 = (R-h)^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{a'\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$R = \frac{h^2 + \frac{a'^2}{3}}{2h} = \frac{a'\sqrt{6}}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

e o volume V_c da esfera circunscrita é

$$V_c = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}$$

IME 1987/1988 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o valor de a para que o sistema abaixo tenha mais de uma solução e resolva-o neste caso:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+az=3 \\ x+ay+3z=2 \end{cases}$$

Solução:
Para evitar que o sistema tenha solução única, o determinante abaixo deve ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow -(a+3)(a-2)=0$$

A opção $a=-3$ torna o sistema

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y-3z=3 \\ x-3y+3z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-z=1-x \\ y-z=\frac{3-2x}{3} \\ y-z=\frac{x-2}{3} \end{cases}$$

que não tem solução. A opção $a=2$ torna o sistema

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+2z=3 \\ x+2y+3z=2 \end{cases}$$

e assim, a segunda equação corresponde à soma das outras duas equações, o que faz com que o sistema tenha múltiplas soluções. Fazendo $z=t$, têm-se

$$\begin{cases} x+y=1+t \\ x+2y=2-3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5t \\ y=1-4t \end{cases}$$

e a solução geral é da forma $(x,y,z)=(5t,(1-4t),t)$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Para que valores de x a função

$$f(x)=|x|^{\frac{1}{\ln x^4}}.\ln x^2$$

assume o valor $e^{\frac{1}{4}}$?
Obs: ln denota logaritmo neperiano.

Solução:
Considerando, $x>0$, podemos escrever que

$$f(x)=x^{\frac{1}{4\ln x}}.2\ln x=2e^{\frac{1}{4}}\ln x$$

Assim, com $x>0$, $f(x)=e^{\frac{1}{4}}$, se

$$2\ln x=1\Rightarrow x=\sqrt{e}$$

Como $f(x)$ é uma função par, os valores $x=\pm\sqrt{e}$ satisfazem a condição do enunciado.

3ª Questão [Valor: 1,0]

a) Mostre que se $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_1x^3+a_0x^4$, então existe um polinômio $g(x)$ do 2º grau, tal que $p(x)=x^2g(x+x^{-1})$.

b) Determine todas as raízes do polinômio $p(x)=1+4x+5x^2+4x^3+x^4$.

Solução:

a)

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{x^2} &= \frac{a_0}{x^2}+\frac{a_1}{x}+a_2+a_1x+a_0x^2 \\ &= a_0\left(\frac{1}{x^2}+2+x^2\right)+a_1\left(\frac{1}{x}+x\right)+(a_2-2a_0) \\ &= a_0\left(\frac{1}{x}+x\right)^2+a_1\left(\frac{1}{x}+x\right)+(a_2-2a_0) \\ &= g(\frac{1}{x}+x) \end{aligned}$$

com

$$g(x)=a_0x^2+a_1x+(a_2-2a_0)$$

b) Do item anterior, as raízes de $f(x)$ podem ser obtidas a partir das raízes de $g(y)=0$. Com $a_0=1$, $a_1=4$ e $a_2=5$, tem-se

$$g(y)=y^2+4y+3=(y+3)(y+1)=0$$

Fazendo $y=(\frac{1}{x}+x)$, as raízes em x são

$$\frac{1}{x}+x=\begin{cases} -1\Rightarrow x^2+x+1=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \\ -3\Rightarrow x^2+3x+1=0\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja a função

$$f(x) = 6\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$$

a) Determine os pontos de máximo, mínimo e de inflexão de $f(x)$, caso existam.
b) Trace o gráfico desta função.

Solução:
Podemos escrever que

$$f(x) = 6\left(\frac{1-x}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = 6\left(\frac{x^2(-1) - 2x(1-x)}{x^4}\right) = 6\left(\frac{x-2}{x^3}\right)$$

$$f''(x) = 6\left(\frac{x^3(1) - 3x^2(x-2)}{x^6}\right) = 12\left(\frac{3-x}{x^4}\right)$$

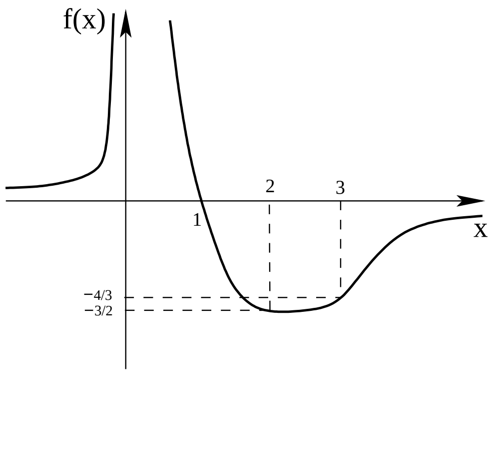
E assim têm-se:

$$\begin{cases} f(1) = 0;\ f(2) = -\frac{3}{2} < 0;\ f(3) = -\frac{4}{3} < 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x) = 0^{\pm} \\ \begin{cases} f(x) > 0, \text{ se } x < 1 \\ f(x) < 0, \text{ se } 1 < x \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(1) = -6 < 0;\ f'(2) = 0;\ f'(3) = \frac{2}{9} > 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^{\mp}} f'(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to\mp\infty} f'(x) = 0 \\ \begin{cases} f'(x) > 0, \text{ se } x < 0 \text{ e } 2 < x \\ f'(x) < 0, \text{ se } 0 < x < 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(1) = 24 > 0;\ f''(2) = \frac{3}{4} > 0; f''(3) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^{\mp}} f''(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\mp\infty} f''(x) = \pm\infty \begin{cases} f''(x) > 0, \text{ se } (x \neq 0) < 3 \\ f''(x) < 0, \text{ se } 3 < x \end{cases} \end{cases}$$

O que determina os seguintes pontos de interesse: $x = 0$ é ponto de descontinuidade, $(1,0)$ é raiz, $(2, -\frac{3}{2})$ é mínimo local e $(3, -\frac{4}{3})$ é ponto de inflexâo (mudança de concavidade). O gráfico de $f(x)$ é mostrado a seguir.



5ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a seqüência cujos primeiros termos são: $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$ Seja a_n seu n-ésimo termo. Mostre que

$$a_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

para todo $n \geq 2$.

Solução:
A seqüência de Fibonacci é descrita por

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3 \\ a_1 = 1;\ a_2 = 2 \end{cases}$$

Usando o operador deslocamento, $z[a_n] = a_{n-1}$, a série pode ser descrita por

$$(z^2 - z - 1)[a_n] = 0 \Rightarrow z = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$$

Logo, a forma geral do termo da série é

$$a_n = c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

onde c_1 e c_2 são determinadas a partir das condições iniciais a_1 e a_2 dadas. Após um intenso desenvolvimento algébrico, têm-se que

$$c_1 = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right); \quad c_2 = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)$$

Assim, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &< \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Logo,

$$a_n < \left(\frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \Rightarrow a_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a equação e o raio do círculo de menor diâmetro, que possui com o círculo $x^2+y^2-8x-25=0$, eixo radical $y-2x-5=0$.

Solução:
Os pontos de interseção, P_1 e P_2, do eixo radical com o círculo são tais que

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x-25=0 \\ y-2x-5=0 \end{cases} \Rightarrow x^2+(2x+5)^2-8x-25=0$$

Logo, $P_1 \equiv (0,5)$ e $P_2 \equiv (-\frac{12}{5}, \frac{1}{5})$.

O círculo de menor raio será aquele com diâmetro P_1P_2, e assim, o raio r e o centro O deste círculo são

$$\begin{cases} r = \frac{\overline{P_1P_2}}{2} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \\ O \equiv \frac{P_1+P_2}{2} = (-\frac{6}{5}, \frac{13}{5}) \end{cases}$$

Logo, a equação deste círculo é

$$(x+\frac{6}{5})^2 + (y-\frac{13}{5})^2 = \frac{36}{5}$$

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um torneio de xadrez com 10 participantes. Na primeira rodada cada participante joga somente uma vez, de modo que há 5 jogos realizados simultaneamente. De quantas formas distintas esta primeira rodada pode ser realizada? Justifique sua resposta.

Solução:
Os jogadores podem se sentar em 10! permutações distintas nas 10 cadeiras disponíveis para as 5 partidas. As 5 partidas podem se permutar de 5! maneiras. Logo o número de formas distintas para cada rodada é

$$\frac{10!}{5!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$$

sln: Note que o jogo $A \times B$ é distinto de $B \times A$, já que a primeira posição indica o jogador com as peças brancas, que dá início à partida. Se esta distinção nao for feita, o número de formas da rodada se reduz para

$$\frac{10!}{2^5 5!} = \frac{30240}{32} = 945$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que por todo ponto não situado no eixo OX passam exatamente duas parábolas com foco na origem e eixo de simetria OX e que estas parábolas interceptam-se ortogonalmente.

Solução:
Parábolas com foco na origem, simetria em torno de OX e diretriz em $x=a$ são tais que

$$x^2+y^2=(x-a)^2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2a}y^2 + \frac{a}{2}$$

de modo que

$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{2a}2y\,\mathrm{d}y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{y}$$

Em um ponto fora do eixo OX, (x_0,y_0) com $y_0 \neq 0$, temos que

$$a^2 - 2x_0a - y_0^2 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = x_0 \mp \sqrt{x_0^2+y_0^2}$$

e assim, têm-se duas parábolas passando por este ponto. O produto P dos coeficientes angulares das retas tangentes destas duas parábolas é

$$P = (-\frac{a_1}{y_0})(-\frac{a_2}{y_0}) = \frac{a_1a_2}{y_0^2} = -1$$

e assim as parábolas são ortogonais entre si em todo ponto (x_0,y_0).

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam A, B e C matrizes 5×5, com elementos reais. Denotando-se por A' a matriz transposta de A:
a) Mostre que se $A.A' = \mathbf{0}$, então $A = \mathbf{0}$.
b) Mostre que se $B.A.A' = C.A.A'$, então $B.A = C.A$.

Solução:

a) Seja $A = [a_{ij}]$ e $AA' = [\alpha_{ij}]$, de modo que

$$\alpha_{ii} = \sum_{j=1}^{5} a_{ij}^2$$

para $1 \leq i \leq 5$. Assim, se $AA' = \mathbf{0}$, então traço$\{AA'\} = 0$ e assim,

$$\sum_{i=1}^{5} \alpha_{ii} = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} a_{ij}^2 = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0, \forall\ 1 \leq i,j, \leq 5$$

b)

$$\begin{aligned} BAA' = CAA' &\Rightarrow \\ (B-C)AA' = \mathbf{0} &\Rightarrow \\ (B-C)AA'(B-C)' = \mathbf{0} &\Rightarrow \\ [(B-C)A]\,[(B-C)A]' = \mathbf{0} & \end{aligned}$$

Logo, pelo item (a),

$$(B-C)A = \mathbf{0} \Rightarrow BA = CA$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Considere os seguintes conjuntos de números complexos: $A = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1, \text{Im}(z) > 0\}$ e $B = \{z \in \mathbb{C}/\text{Re}(z) = 1, \text{Im}(z) > 0\}$, onde $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$ são as partes real e imaginária do número complexo z, respectivamente.

a) Mostre que para cada $z \in A$, o número $\dfrac{2z}{z+1}$ pertence a B.
b) Mostre que cada $w \in B$ pode ser escrito da forma $\dfrac{2z}{z+1}$ para algum $z \in A$.

Solução:

a) Seja $z = e^{i\theta}$, com $\theta \in (0, \pi)$. Logo,

$$\begin{aligned} s &= \frac{2z}{z+1} \\ &= \frac{2e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} \\ &= \frac{2e^{i\theta}(1+e^{-i\theta})}{(1+e^{i\theta})(1+e^{-i\theta})} \\ &= \frac{2(e^{i\theta}+1)}{2+(e^{i\theta}+e^{-i\theta})} \\ &= \frac{1+\cos\theta + i \,\text{sen}\,\theta}{1+\cos\theta} \\ &= 1 + i\frac{\text{sen}\,\theta}{1+\cos\theta} \end{aligned}$$

Logo, as partes real e imaginária de s são tais que

$$\begin{cases} \text{Re}(s) = 1 \\ \text{Im}(s) = \frac{\text{sen}\,\theta}{1+\cos\theta} > 0, \forall \theta \in (0,\pi) \end{cases}$$

de modo que $s \in B$.

b) Seja $w = 1 + ki$, com $k > 0$. Logo, forçando as relações

$$\begin{cases} k = \dfrac{a}{1+b} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow k^2(1+b)^2 + b^2 = 1$$

e assim

$$b = \frac{-2k^2 \mp \sqrt{4k^4 - 4(k^2+1)(k^2-1)}}{2(k^2+1)} = \frac{-k^2 \mp 1}{k^2+1}$$

Desprezando a opção $b = -1$, têm-se para $k > 0$ que

$$\begin{cases} -1 < \left(b = \frac{1-k^2}{1+k^2} = \cos\theta\right) < 1 \\ 0 < \left(a = \frac{2k}{1+k^2} = \text{sen}\,\theta\right) \leq 1 \end{cases}$$

com $\theta \in (0, \pi)$. Assim, pelo item (a), tem-se que para algum $z \in A$,

$$w = 1 + ik = 1 + i\frac{a}{1+b} = 1 + i\frac{\text{sen}\,\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2z}{z+1}$$

IME 1987/1988 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Demonstre que num triângulo ABC

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C}{\cos B+\cos C}$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotg}\frac{A}{2} &= \frac{\cos\frac{A}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}\\
&= \frac{\cos\frac{\pi-(B+C)}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi-(B+C)}{2}}\\
&= \frac{\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{(B+C)}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{(B+C)}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{(B+C)}{2}-\operatorname{sen}\frac{(B+C)}{2}\cos\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{\operatorname{sen}\frac{(B+C)}{2}}{\cos\frac{(B+C)}{2}}\\
&= \frac{\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}
\end{aligned}$$

Logo, usando as expressões do arco-metade

$$\begin{cases}\cos 2x = 2\cos^2 x-1 \Rightarrow \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}\\ \cos 2x = 1-2\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\end{cases}$$

podemos escrever que

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotg}\frac{A}{2} &= \frac{\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos C}{2}}+\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos B}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos B}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos C}{2}}-\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}}\\
&= \frac{\sqrt{(1-\cos B)(1+\cos C)}+\sqrt{(1-\cos C)(1+\cos B)}}{\sqrt{(1+\cos B)(1+\cos C)}-\sqrt{(1-\cos B)(1-\cos C)}}\\
&\times \frac{\sqrt{(1+\cos B)(1+\cos C)}+\sqrt{(1-\cos B)(1-\cos C)}}{\sqrt{(1+\cos B)(1+\cos C)}+\sqrt{(1-\cos B)(1-\cos C)}}\\
&= \frac{N}{D}
\end{aligned}$$

com

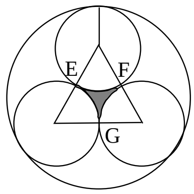
$$\begin{aligned}
N &= (1+\cos C)\sqrt{1-\cos^2 B}+(1-\cos B)\sqrt{1-\cos^2 C}\\
&+ (1+\cos B)\sqrt{1-\cos^2 C}+(1-\cos C)\sqrt{1-\cos^2 B}\\
&= (1+\cos C)\operatorname{sen}B+(1-\cos B)\operatorname{sen}C\\
&+ (1+\cos B)\operatorname{sen}C+(1-\cos C)\operatorname{sen}B\\
&= 2(\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C)\\
D &= (1+\cos B)(1+\cos C)-(1-\cos B)(1-\cos C)\\
&= 2(\cos B+\cos C)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C}{\cos B+\cos C}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Dado um círculo de raio R e centro O, constroem-se três círculos iguais de raios r, tangentes dois a dois, nos pontos E, F e G e tangentes interiores ao círculo dado. Determine, em função de R, o raio destes círculos e a área da superfície EFG, compreendida entre os três círculos e limitada pelos arcos EG, GF e FE.

Solução:



Da figura, tem-se que

$$R=r+\frac{2}{3}\frac{2r\sqrt{3}}{2}\Rightarrow r=\frac{3R}{2\sqrt{3}+3}=(2\sqrt{3}-3)R$$

A área S desejada é

$$S=S_{EFG}-3S_s$$

onde S_{EFG} é a área do triângulo ΔEFG e S_s é a área do setor de 60º do círculo de raio r, de modo que $3S_s$ é metade da área deste círculo. Logo,

$$S=\frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi r^2}{2}=\frac{(2\sqrt{3}-\pi)(2\sqrt{3}-3)^2}{2}R^2$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Demonstre a identidade

$$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x = 2\left(\frac{3+\cos 4x}{1-\cos 4x}\right)$$

Solução:
Desenvolvendo os lados esquerdo E e direito D da equação, têm-se que $E=D$, pois

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\\
&= \frac{(1-\cos^2 x)^2+\cos^4 x}{\cos^2 x(1-\cos^2 x)}\\
&= \frac{2\cos^4 x-2\cos^2 x+1}{-\cos^4 x+\cos^2 x}\\
D &= \frac{6+2(2\cos^2 2x-1)}{1-(2\cos^2 2x-1)}\\
&= \frac{4+4\cos^2 2x}{2-2\cos^2 2x}\\
&= \frac{2+2(2\cos^2 x-1)^2}{1-(2\cos^2 -1)^2}\\
&= \frac{2+2(4\cos^4 x-4\cos^2 x+1)}{1-(4\cos^4 x-4\cos^2 x+1)}\\
&= \frac{8\cos^4 x-8\cos^2 x+4}{-4\cos^4 x+4\cos^2 x}
\end{aligned}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o lado c de um triângulo ABC, em função de sua área S, do ângulo C e de $k = a + b - c$.

Solução:
Pela lei dos cossenos, como $(a + b) = (k + c)$, têm-se

$$\begin{cases} c^2 = (a+b)^2 - 2ab(1+\cos C) \Rightarrow 2ab = \frac{k(k+2c)}{1+\cos C} \\ c^2 = (a-b)^2 + 2ab(1-\cos C) \Rightarrow 2ab = \frac{c^2-(a-b)^2}{1-\cos C} \end{cases}$$

Seja S a área do triângulo ΔABC, logo,

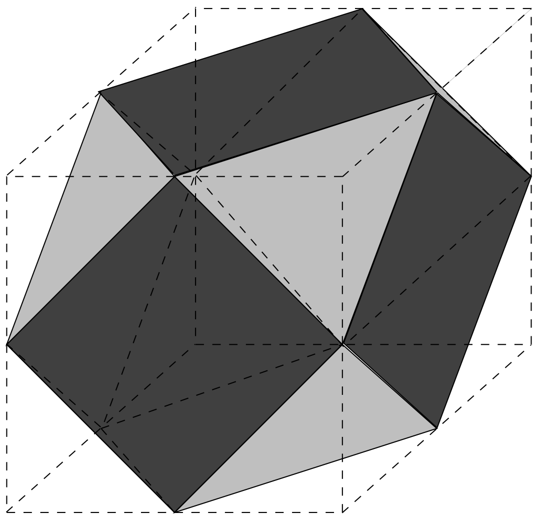
$$\begin{aligned} p(p-a)(p-b)(p-c) = S^2 &\Rightarrow \\ (p-a)(p-b) = \frac{S^2}{p(p-c)} &\Rightarrow \\ \frac{c^2-(a-b)^2}{4} = \frac{4S^2}{(k+2c)k} &\Rightarrow \\ 2ab = \frac{16S^2}{(k+2c)k(1-\cos C)} & \end{aligned}$$

Logo, igualando duas expressões para $2ab$, têm-se

$$\begin{aligned} \frac{k(k+2c)}{1+\cos C} = \frac{16S^2}{(k+2c)k(1-\cos C)} &\Rightarrow \\ k^2(k+2c)^2(1-\cos C) = 16S^2(1+\cos C) &\Rightarrow \\ k^2(k+2c)^2(1-\cos^2 C) = 16S^2(1+\cos C)^2 &\Rightarrow \\ k(k+2c)\operatorname{sen} C = 4S(1+\cos C) &\Rightarrow \\ c = \frac{2S(1+\cos C)}{k \operatorname{sen} C} - \frac{k}{2} & \end{aligned}$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Secciona-se um cubo de aresta a por planos passando pelos pontos médios das arestas concorrentes em cada vértice. Considere o sólido formado ao retirar-se as oito pirâmides obtidas. Calcule a soma das arestas, a área e o volume deste sólido.

Solução:



Cada face do cubo tem 4 arestas de comprimentos iguais a $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Logo, a soma A das arestas é

$$A = 24 \times \frac{a\sqrt{2}}{2} = 12a\sqrt{2}$$

Existem 6 quadrados e 8 triângulos equiláteros, todos de lado $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Assim, a área S total é

$$\begin{aligned} S &= 6 \times \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8 \times \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= 3a^2 + a^2\sqrt{3} \\ &= a^2(3+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

O volume desejado é o volume do cubo original subtraído do volume de 8 tetraedros iguais. Cada tetraedro tem base equilátera de lado $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ e demais arestas iguais a $\frac{a}{2}$. Assim, a altura h de cada tetraedro é tal que

$$h^2 = \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2\right] - \left(\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{12}}{12}$$

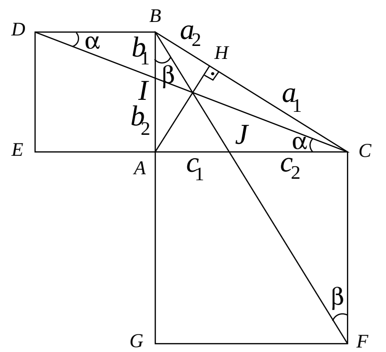
de modo que o volume V desejado é

$$\begin{aligned} V &= a^3 - 8 \times \frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} h \\ &= a^3 - \frac{a^3}{6} \\ &= \frac{5a^3}{6} \end{aligned}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]

Sobre os catetos AB e AC de um triângulo retângulo ABC constroem-se dois quadrados $ABDE$ e $ACFG$. Mostre que os segmentos CD, BF e a altura AH são concorrentes.

Solução:



Sejam I e J as interseções de AC com BF e de AB com CD, respectivamente. Sejam ainda $CH = a_1$, $BH = a_2$, $AI = b_1$, $CI = b_2$, $BJ = c_1$ e $AJ = c_2$. Da semelhança dos triângulos ΔABC, ΔHBA e ΔHAC, têm-se

$$\begin{cases} \frac{b}{a_1} = \frac{a}{b} \\ \frac{a_2}{c} = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{b^2}{a} \\ a_2 = \frac{c^2}{a} \end{cases}$$

Da semelhança dos triângulos ΔABI e ΔCFI, têm-se

$$\frac{b_1}{c} = \frac{b_2}{b} = \frac{b_1 + b_2}{b + c} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{bc}{b+c} \\ b_2 = \frac{b^2}{b+c} \end{cases}$$

Da semelhança dos triângulos ΔACJ e ΔBDJ, têm-se

$$\frac{c_2}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{c_2 + c_1}{b + c} = \frac{c}{b + c} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{c^2}{b+c} \\ c_2 = \frac{bc}{b+c} \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{CH.AI.BJ}{BH.CI.AJ} = \frac{a_1 b_1 c_1}{a_2 b_2 c_2} = \frac{\frac{b^2}{a}\frac{bc}{b+c}\frac{c^2}{b+c}}{\frac{c^2}{a}\frac{b^2}{b+c}\frac{bc}{b+c}} = 1$$

e assim, pelo teorema de Ceva, os segmentos AH, BF e CD são concorrentes.

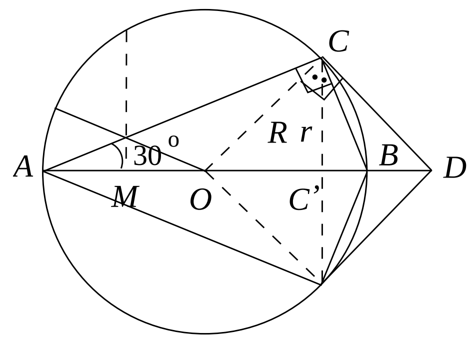
7ª Questão [Valor: 1,0]

Considere um semi-círculo de diâmetro $AB = 2R$. Por A, traça-se uma reta que forma um ângulo de 30º com o diâmetro AB e que corta o semi-círculo em C. Por C, traça-se a tangente ao semi-círculo, que intercepta a reta que contém AB no ponto D. Fazendo-se uma rotação em torno da reta que contém AB, o semi-círculo gera uma esfera (E) e o triângulo ACD gera um sólido (S).

a) Calcule o volume deste sólido (S), em função do raio R.

b) Seja M um ponto sobre AB tal que $AM = \frac{R}{3}$. Considere um plano (π) passando por M e perpendicular à reta AB, seccionando-se a esfera (E) e o sólido (S). Calcule a razão entre a área destas duas secçẽs.

Solução:



a) De uma análise angular, é simples constatar que

$$A\hat{C}O = O\hat{C}C' = C'\hat{C}B = B\hat{C}D = 30^{\text{o}}$$

O sólido (S) é formado por dois cones justapostos pela base, de raio da base r e alturas h_1 e h_2, com

$$\begin{cases} r = 2R\cos 30^{\text{o}} \cos A\hat{C}C' = R\sqrt{3}\cos 60^{\text{o}} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \\ h_1 = h_2 = \frac{r}{\operatorname{tg} 30^{\text{o}}} = \frac{3R}{2} \end{cases}$$

Logo, o volume V de (S) é

$$V = \frac{\pi r^2 h_1}{3} + \frac{\pi r^2 h_2}{3} = \frac{3\pi R^3}{4}$$

b) As duas seções em (E) e (S) são círculos de raios r_1 e r_2, respectivamente tais que

$$\begin{cases} r_1^2 + \left(\frac{2R}{3}\right)^2 = R^2 \\ \operatorname{tg} 30^{\text{o}} = \frac{r_2}{\frac{R}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{R\sqrt{5}}{3} \\ r_2 = \frac{R\sqrt{3}}{9} \end{cases}$$

de modo que a razão Q entre as áreas das duas seções é

$$Q = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{3}{81}} = 15$$

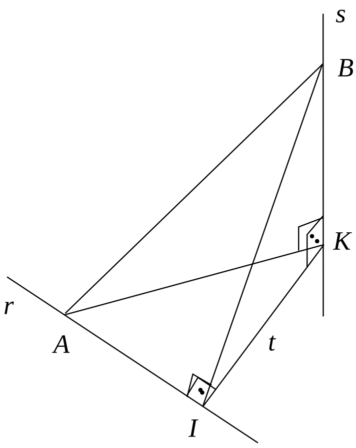
8ª Questão [Valor: 1,0]

Dadas duas retas reversas r e s, ortogonais e sua perpendicular comum t, que corta r em I e s em K. Considere um segmento AB, de comprimento constante, que se move apoiando suas extremidades A e B, respectivamente sobre r e s. Unindo-se A a K e I a B, forma-se um tetraedro variável $ABIK$.

a) Demonstre que a soma dos quadrados das arestas deste tetraedro é constante.

b) Calcule o raio da esfera circunscrita ao tetraedro em função da distância AB.

Solução:



a) Calculando a soma S do quadrado das arestas, têm-se

$$\begin{aligned} S &= AB^2 + (AK^2) + AI^2 + BK^2 + (BI^2) + KI^2 \\ &= AB^2 + (AB^2 - BK^2) + AI^2 + \\ &\quad BK^2 + (AB^2 - AI^2) + KI^2 \\ &= 3AB^2 + KI^2 \end{aligned}$$

que é constante.

b) Os triângulos ΔAKB e ΔAIB são retângulos em K e I, respectivamente. Logo, os pontos K, I, A e B pertencem a uma mesma esfera, de raio $\frac{AB}{2}$ e centro no ponto médio de AB, que é a esfera circunscrita ao tetraedro.

9ª Questão [Valor: 1,0]

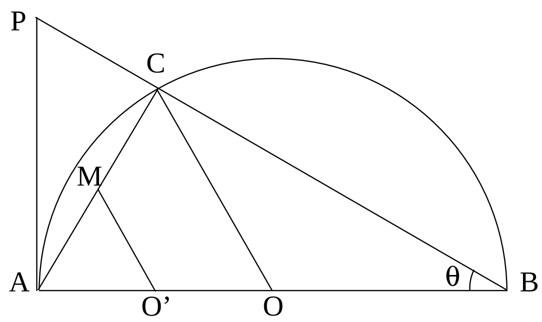
Seja o semi-círculo de diâmetro $AB = 2R$ e r sua tangente em A. Liga-se um ponto P da reta r ao ponto B, interceptando o semi-círculo no ponto C.

a) Demonstre que o produto $PB.BC$ é constante.

b) Determine o lugar geométrico do ponto médio de AC, quando P desloca-se sobre a tangente.

c) Seja $AP = \dfrac{PB}{2}$, calcule a área da porção do triângulo PAB situada no exterior do semi-círculo.

Solução:



a) Como o triângulo ΔABC está inscrito em uma semi-circunferência, ele é retângulo em C. Assim,

$$\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{PB} \Rightarrow= PB.BC = AB^2 = 4R^2$$

b) Sejam O, O' e M os pontos médios de AB, AO e AC, respectivamente. Assim, $O'M$ é base média do triângulo ΔAOC relativa ao lado OC, de modo que

$$O'M = \frac{OC}{2} = \frac{R}{2}$$

Quando P percorre a tangente r, C percorre a semi-circunferência e M percorrerá a semi-circunferência de centro O', ponto médio de AO, e raio $\frac{R}{2}$.

c) A área S desejada é a área S_{ABC} do triângulo ΔABC subtraída de uma área S_1, que é a área S_s do setor circular de ângulo $A\hat{O}C$ e raio R adicionada à área S_{COB} do triângulo ΔCOB.

Da figura, tem-se que se $PB = 2AP$, então

$$AP = 2R\,\mathrm{tg}\,\theta = \frac{PB}{2} \Rightarrow PB = 4R\,\mathrm{tg}\,\theta$$

e do triângulo retângulo ΔAPB, têm-se

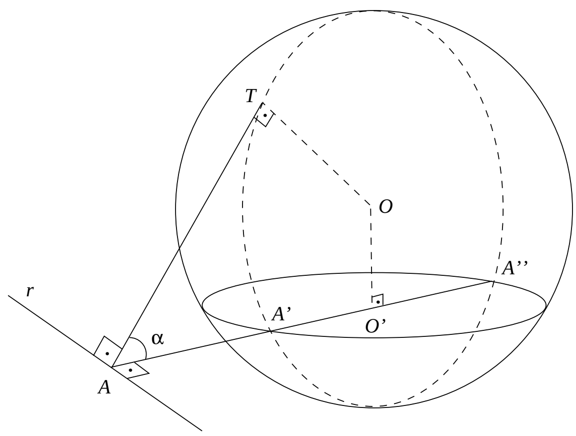
$$PB^2 = AP^2 + AB^2 \Rightarrow 16R^2\,\mathrm{tg}^2\theta = 4R^2\,\mathrm{tg}^2\theta + 4R^2$$

e assim $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ou seja $\theta = 30^{\mathrm{o}}$, pois $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Logo,

$$\begin{aligned} S &= S_{ABC} - (S_s + S_{COB}) \\ &= \frac{4R^2\,\mathrm{tg}\,30^{\mathrm{o}}}{2} - \left(\frac{\pi R^2}{6} + \frac{2R^2\cos 30^{\mathrm{o}}\cos 60^{\mathrm{o}}}{2}\right) \\ &= \frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{12}R^2 \end{aligned}$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Considere as esferas cuja interseção com um plano (π) é um círculo fixo (C). Seja r uma reta do plano (π), exterior ao círculo. Determine o lugar geométrico dos pontos de contato dos planos tangentes a tais esferas e que contêm a reta r.

Solução:



Sejam os pontos fixos O', centro de (C), e A, pertencente a r e tal que $AO' \perp r$. Seja (E) uma esfera, de centro O, cuja interseção com o plano (π) é (C). Por simetria, O está na perpendicular a (π) por O', e assim $AO \perp r$. Seja T o ponto de tangência do plano que contém a reta r com a esfera (E). Como $AO \perp r$, o ponto T deve ser tal que também $AT \perp r$, ou seja o pé da altura de T em relação a r é sempre o ponto A, que é fixo.

Os pontos A, T, O e O' definem um plano (π') que secciona a esfera (E) numa circunferência m áxima (C') e a circunferência (C) em dois pontos diametralmente opostos A' e A''. Do conceito de potência de A em relação a (C') e a (C), têm-se

$$\text{Pot}\, A = AT^2 = AA' \times AA'' = AT'^2$$

que é constante, onde T' é um ponto de tangência a (C) por A.

Assim, o lugar geométrico de T é o arco da circunferência de centro fixo A e raio igual a AT'. Naturalmente, se $\alpha = T\hat{A}O'$, existe um valor mínimo de α, em que $O = O'$, e então

$$\text{tg}\, \alpha_{\text{mín}} = \frac{OT}{AT} = \frac{O'T'}{AT'}$$

Devemos ainda eliminar o ponto diametralmente oposto a O' em relação a A deste lugar geométrico.

IME 1986/1987 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Dois números complexos Z_1 e Z_2, não nulos, são tais que

$$|Z_1 + Z_2| = |Z_1 - Z_2|$$

Mostre que $\frac{Z_2}{Z_1}$ é imaginário puro.

Solução:
Sejam $Z_1 = (a+bi)$ e $Z_2 = (c+di)$, com a, b, c, d reais. tais que $(a^2 + b^2) \neq 0$ e $(c^2 + d^2) \neq 0$. Do enunciado,

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} \Rightarrow ac+bd = 0$$

Assim,

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2}$$

que é imaginário, pois $(ac+bd) = 0$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Determine as soluções reais do sistema

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 70 \\ (x+y).(x^2+y^2) = 203 \end{cases}$$

Solução:
Somando a primeira equação multiplicada por 2 à segunda equação, tem-se

$$2xy(x+y)+(x+y)(x^2+y^2) = (x+y)^3 = 343$$

Logo,

$$\begin{cases} x+y = 7 \\ xy = 10 \end{cases} \Rightarrow x^2-7x+10 = 0 \Rightarrow (x,y) = (2,5) \text{ ou } (5,2)$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dados dois conjuntos A e B, define-se

$$A\Delta B = (A-B) \cup (B-A)$$

Prove que dados três conjuntos arbitrários X, Y e Z

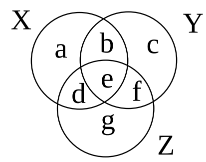
$$X \cap (Y\Delta Z) = (X \cap Y)\Delta(X \cap Z)$$

Solução:
Usando diagrama de Venn, os lados esquerdo, E, e direito, D, da relação do enunciado são iguais a

$$\begin{aligned} E &= X \cap [(Y-Z) \cup (Z-Y)] \\ &= (a,b,d,e) \cap [(b,c) \cup (d,g)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= [(X\cap Y) - (X \cap Z)] \cup [(X \cap Z) - (X \cap Y)] \\ &= [(b,e) - (d,e)] \cup [(d,e) - (b,e)] \end{aligned}$$

E assim $E = D = (b,d)$.



4ª Questão [Valor: 1,0]
Dados um sistema de eixos ortogonais XOY e um ponto A, de coordenadas (x_0,y_0), $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, considere dois pontos variáveis P e Q, P pertencente ao eixo OX e Q pertencente ao eixo OY, tais que a área do triângulo APQ seja constante e igual a K, $K \in \mathbb{R}$. Calcule e identifique a equação do lugar geométrico do ponto médio do segmento PQ.

Solução:
Sejam $P \equiv (p,0)$ e $Q \equiv (0,q)$, tais que a reta PQ é descrita por $qx + py = pq$. A distância h do ponto (x_0,y_0) à reta PQ é dada por

$$h = \frac{|qx_0 + py_0 - pq|}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

Igualando a área S do triângulo APQ a K, tem-se

$$S = \frac{\overline{PQ} \times h}{2} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{2}\frac{|qx_0+py_0-pq|}{\sqrt{p^2+q^2}} = K$$

logo, devemos ter

$$|qx_0 + py_0 - pq| = 2K \Rightarrow qx_0 + py_0 - pq = \mp 2K$$

O ponto médio de PQ é descrito por $(x,y) = (\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$, de modo que seu lugar geométrico deve ser tal que

$$\begin{aligned} &2yx_0+2xy_0-4xy = \mp 2K \Rightarrow \\ &(2x-x_0)(2y-y_0) = (\pm 2K + x_0y_0) \end{aligned}$$

que corresponde a uma hipérbole.

5^a Questão [Valor: 1,0]

Seja f uma função de uma variável real definida por

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 3)$$

onde ln é o logaritmo neperiano.

a) Calcule o domínio e a imagem de f.

b) Determine uma função $\varphi(x)$ com $\lim_{n\to\infty} \varphi(x) = 0$, tal que $f(x) = 2x + \varphi(x)$, para todo x pertencente ao domínio de f.

c) Faça o gráfico de $f(x)$, indicando seus mínimos e máximos relativos e suas assíntotas.

Solução:

a) Definindo $g(x) = (e^{2x} - e^x + 3)$, o domínio de $f(x)$ é o intervalo de x para o qual $g(x) > 0$. Porém, é simples perceber que $g(x) > 0$, para todo x real. Assim, o domínio de $f(x)$ é o conjunto $\mathbb{R}$.

A função logarítmica natural é sempre crescente. Assim, a imagem de $f(x)$ pode ser determinada a partir da imagem de $g(x)$, cujo valor máximo tende a infinito e cujo valor mínimo é tal que, sendo $h(x) = e^x$,

$$2h(x) - 1 = 0 \Rightarrow h(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow f_{\min} = \ln(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3)$$

ou seja $\ln \frac{11}{4} \leq f(x) < \infty$.

b) Trivialmente,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) - 2x \\ &= \ln(e^{2x} - e^x + 3) - \ln e^{2x} \\ &= \ln(1 - e^{-x} + 3e^{-2x}) \end{aligned}$$

de modo que $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \ln 1 = 0$, indicando que a reta $y = 2x$ é uma assíntota de $f(x)$ quando $x \to \infty$.

c) Podemos escrever que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 3} \\ f''(x) &= \frac{(e^{2x} - e^x + 3)(4e^{2x} - e^x) - (2e^{2x} - e^x)^2}{(e^{2x} - e^x + 3)^2} \\ &= \frac{-e^{3x} + 12e^{2x} - 3e^x}{(e^{2x} - e^x + 3)^2} \end{aligned}$$

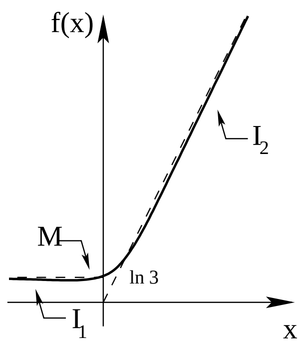
E assim têm-se:

$$\begin{cases} f(0) = \ln 3;\ f(\ln \frac{1}{2}) = \ln \frac{11}{4} \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 3;\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(\ln \frac{1}{2}) = 0; \\ \lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0;\ \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 2 \\ \begin{cases} f'(x) > 0,\ \text{se}\ \ln \frac{1}{2} < x \\ f'(x) < 0,\ \text{se}\ x < \ln \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(r_{1,2}) = 0,\ \text{com}\ r_{1,2} = 6 \mp \sqrt{33} \\ \lim_{x\to-\mp\infty} f''(x) = 0 \\ \begin{cases} f''(x) > 0,\ \text{se}\ r_1 < x < r_2 \\ f''(x) < 0,\ \text{se}\ x < r_1\ \text{e}\ r_2 < x \end{cases} \end{cases}$$

O que determina os seguintes pontos de interesse: $M \equiv (\ln \frac{1}{2})$ é mínimo global, $I_1 \equiv (r_1, f(r_1))$ e $I_2 \equiv (r_2, f(r_2))$ são pontos de inflexâo (mudança de concavidade). Além disto as assíntotas são para $x \to -\infty : y = \ln 3$ e para $x \to \infty : y = 2x$. O gráfico de $f(x)$ é mostrado a seguir.



6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja f uma função bijetora de uma variável real e a relação h, definida por

$$\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \rightarrow & \big(x^3, x-f(y)\big) \end{array}$$

Verifique se h é bijetora e calcule uma relação g, tal que

$$\begin{array}{l} g\circ h(x,y)=(x,y) \\ h\circ g(x,y)=(x,y),\ \forall x,\ \forall y\in\mathbb{R} \end{array}$$

Solução:
Seja a função h calculada em dois pontos distintos $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$. Se $x_1\neq x_2$, tem-se $x_1^3\neq x_2^3$ e então $h(x_1,y_1)\neq h(x_2,y_2)$. Se, porém, $x_1=x_2$ e $y_1\neq y_2$, tem-se $(x_1-f(y_1))\neq(x_2-f(y_2))$, pois $f(y_1)\neq f(y_2)$ já que f é bijetora, e então novamente $h(x_1,y_1)\neq h(x_2,y_2)$. Logo, pontos distintos são mapeados por h em pontos distintos, e assim h é injetora.

Seja Im$[F]$, a imagem de uma função F. Assim, para cada $x=x_0$, Im$[x_0-f(y)]=\mathbb{R}$, pois f é bijetora de contra-domínio $\mathbb{R}$. Logo,

$$\text{Im}[h]=\text{Im}[x^3]\times\text{Im}[x-f(y)]=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

isto é, a imagem de h é todo o seu contra-domínio, o plano $\mathbb{R}^2$, e h é sobrejetora.

Logo, por tudo isto, h é função bijetora. Determinando a inversa de h, tem-se

$$g(x,y)=h^{-1}(x,y)=h^{-1}(\alpha^3,\alpha-f(\beta))$$

com

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha^3=x\\ \alpha-f(\beta)=y\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=\sqrt[3]{x}\\ \beta=f^{-1}(\alpha-y)=f^{-1}(\sqrt[3]{x}-y)\end{array}\right.$$

e assim $g(x,y)=(\sqrt[3]{x},f^{-1}(\sqrt[3]{x}-y))$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam a, b, c números inteiros tais que $100a+10b+c$ seja divisível por 109. Mostre que $(9a-c)^2+9b^2$ também é divisível por 109.

Solução:
Definindo $\Delta=[(9a-c)^2+9b^2]$, têm-se

$$\begin{array}{l}
(100a+10b+c)\equiv 0\ (\text{mod}\,109)\Rightarrow\\
(109a-9a+10b+c)\equiv 0\ (\text{mod}\,109)\Rightarrow\\
(-9a+10b+c)\equiv 0\ (\text{mod}\,109)\Rightarrow\\
(-9a+10b+c)^2\equiv 0\ (\text{mod}\,109)\Rightarrow\\
\left[(9a-c)^2+100b^2-180ab+20bc\right]\equiv 0\ (\text{mod}\,109)\Rightarrow\\
(\Delta+91b^2-180ab+20bc)\equiv 0\ (\text{mod}\,109)\Rightarrow\\
[\Delta+20b(10b+100a+c)-109b(b+20a)]\equiv 0\ (\text{mod}\,109)\Rightarrow\\
\Delta\equiv 0\ (\text{mod}\,109)
\end{array}$$

onde na última passagem, usamos a condição inicial do problema. Assim, se esta condição é válida, tem-se que $\Delta=[9b^2+(9a-c)^2]$ também deve ser múltiplo de 109.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que para todo número natural n maior ou igual a 2,

$$2^{\frac{5n}{4}}<\binom{2n}{n}$$

Solução:
Como

$$\left[2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}\right]<\left[\binom{4}{4}=\frac{4!}{2!2!}=6=\sqrt{36}\right]$$

a relação do enunciado é válida para $n=2$.

Analisando os lados esquerdo, E, e direito D, da expressão do enunciado para o caso $(n+1)$:

$$\left\{\begin{array}{l}E=2^{\frac{5(n+1)}{4}}=2^{\frac{5}{4}}2^{\frac{5n}{4}}\\[2ex] D=\binom{2(n+1)}{(n+1)}=\frac{[2(n+1)]!}{(n+1)!(n+1)!}=\frac{2(2n+1)}{(n+1)}\binom{2n}{n}\end{array}\right.$$

Como, para $n>1$,

$$\left[2^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{32}\right]<\left[3=\sqrt[4]{81}\right]<\frac{2(2n+1)}{(n+1)}$$

logo, assumindo que a expressão é válida no caso n, tem-se que

$$\left[E=2^{\frac{5}{4}}2^{\frac{5n}{4}}\right]<\frac{2(2n+1)}{(n+1)}2^{\frac{5n}{4}}<\left[\frac{2(2n+1)}{(n+1)}\binom{2n}{n}=D\right]$$

e a expressão é também válida no caso $(n+1)$. Assim, por indução finita, a validade da expressão do enunciado fica demonstrada para $n\geq 2$.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} i & j & l & m \\ n & o & p & q \end{pmatrix}$$

duas matrizes de elementos inteiros. Verifique se a matriz AB é inversível.

Solução:
O determinante D de AB é

$$D = \begin{vmatrix} (ai+bn) & (aj+bo) & (al+bp) & (am+bq) \\ (ci+dn) & (cj+do) & (cl+dp) & (cm+dq) \\ (ei+fn) & (ej+fo) & (el+fp) & (em+fq) \\ (gi+hn) & (gj+ho) & (gl+hp) & (gm+hq) \end{vmatrix}$$

Fazendo a primeira coluna receber a primeira coluna multiplicada por j menos a segunda coluna multiplicada por i, tem-se

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} b\alpha & (aj+bo) & (al+bp) & (am+bq) \\ d\alpha & (cj+do) & (cl+dp) & (cm+dq) \\ f\alpha & (ej+fo) & (el+fp) & (em+fq) \\ h\alpha & (gj+ho) & (gl+hp) & (gm+hq) \end{vmatrix} \\ &= \alpha \begin{vmatrix} b & (aj+bo) & (al+bp) & (am+bq) \\ d & (cj+do) & (cl+dp) & (cm+dq) \\ f & (ej+fo) & (el+fp) & (em+fq) \\ h & (gj+ho) & (gl+hp) & (gm+hq) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

com $\alpha = (nj - oi)$. Fazendo a segunda coluna receber a segunda coluna multiplicada por l menos a terceira coluna multiplicada por j, tem-se

$$\begin{aligned} D &= \alpha \begin{vmatrix} b & b\beta & (al+bp) & (am+bq) \\ d & d\beta & (cl+dp) & (cm+dq) \\ f & f\beta & (el+fp) & (em+fq) \\ h & h\beta & (gl+hp) & (gm+hq) \end{vmatrix} \\ &= \alpha\beta \begin{vmatrix} b & b & (al+bp) & (am+bq) \\ d & d & (cl+dp) & (cm+dq) \\ f & f & (el+fp) & (em+fq) \\ h & h & (gl+hp) & (gm+hq) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

com $\beta = (ol - pj)$. Logo $D = 0$ por ter duas colunas iguais, e a matriz AB é não inversível.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $p(x)$ um polinômio de grau 16 e coeficientes inteiros.

a) Sabendo-se que $p(x)$ assume valores ímpares para $x = 0$ e $x = 1$, mostre que $p(x)$ não possui raízes inteiras.
b) Sabendo-se que $p(x) = 7$ para quatro valores de x, inteiros e diferentes, para quantos valores inteiros de x, $p(x)$ assume o valor 14?

Solução :
Seja

$$p(x) = a_{16}x^{16} + a_{15}x^{15} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{16} a_i x^i$$

com $a_i \in \mathbb{Z}$, para $i = 0, 1, \ldots, 16$.

a) Sendo r uma raiz inteira de $p(x)$, podemos escrever que $p(x) = (x - r)q(x)$, onde $q(x)$ também seria um polinômio de coeficientes inteiros. Para $x = 1$, tem-se $p(1) = (1 - r)q(1)$, e então, como $p(1)$ é ímpar, $(1 - r)$ também o é, pois caso $(1 - r)$ fosse par, $p(1)$ também seria par. Logo $(1 - r)$ é ímpar, e então r não pode ser ímpar. Mas se r é uma raiz inteira de $p(x)$, logo $\frac{a_0}{a_{16}}$ é múltiplo de r, e então a_0 é múltiplo de r. Como $p(0) = a_0$ é ímpar, r não pode ser par, pois em tal caso, a_0 sendo múltiplo de r, também seria par.

   Logo, r não pode ser nem par nem ímpar, ou seja, r não pode ser inteira.

b) **(Baseada em solução de Guilherme Augusto)**
   Sejam a, b, c e d valores inteiros distintos para os quais $p(x) = 7$. Assim, podemos escrever que

$$p(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)q(x) + 7$$

   onde $q(x)$ é um polinômio de coeficientes inteiros em x. Suponha que exista $x = k$ inteiro tal que $p(k) = 14$. Assim,

$$p(k) = (k - a)(k - b)(k - c)(k - d)q(k) + 7 = 14 \Rightarrow$$
$$(k - a)(k - b)(k - c)(k - d)q(k) = 7$$

   onde os fatores $(k - a)$, $(k - b)$, $(k - c)$ e $(k - d)$ são necessariamente inteiros distintos e $q(k)$ é inteiro. Como não é possível decompor o número 7 em quatro fatores inteiros distintos (o número máximo de fatores inteiros distintos seria três: -1, 1 e -7), então não pode haver k inteiro tal que $p(k) = 14$.

IME 1986/1987 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível. Demonstre que os círculos inscritos nos triângulos ABC e ACD têm, com a diagonal AC, um mesmo ponto em comum.

Solução:
Sejam E, F e G os pontos de contato do círculo inscrito no triângulo ΔABC com os respectivos lados AB, BC e AC. Logo,

$$AE = AG;\ BE = BF;\ CF = CG$$

Analogamente, sejam E', F' e G' os pontos de contato do círculo inscrito no triângulo ΔACD com os respectivos lados AD, DC e AC. Logo,

$$AE' = AG';\ DE' = DF';\ CF' = CG'$$

Mas como o quadrilátero $ABCD$ é circunscritível, têm-se que

$$AB+CD = BC+AD \Rightarrow$$
$$(AE+BE)+(CF'+DF') = (BF+CF)+(AE'+DE') \Rightarrow$$
$$(AG+BF)+(CG'+DE') = (BF+CG)+(AG'+DE')$$

e assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} AG + CG = AG' + CG' \\ AG + CG' = CG + AG' \end{array} \right. \Rightarrow AG = AG' \Rightarrow G \equiv G'$$

de modo que os círculos inscritos nos triângulos ABC e ACD têm um ponto em comum G na diagonal AC.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva a inequação

$$\frac{2\cos x + 2\,\text{sen}\,x + \sqrt{2}}{\cos x - \text{sen}\,x} < 0$$

Solução:
Igualando o numerador N a zero, têm-se

$$\begin{aligned} 2\cos x + 2\,\text{sen}\,x + \sqrt{2} = 0 &\Rightarrow \\ \cos x + \text{sen}\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2} &\Rightarrow \\ \cos^2 x + 2\cos x\,\text{sen}\,x + \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} &\Rightarrow \\ \text{sen}\,2x = -\frac{1}{2} &\Rightarrow \\ 2x = \frac{3\pi}{2} \mp \frac{\pi}{3} + 2k\pi &\Rightarrow \\ x = \frac{3\pi}{4} \mp \frac{\pi}{6} + k\pi &\Rightarrow \end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. No intervalo $[0, \pi]$, temos então quatro soluções dadas por

$$x_1 = \frac{7\pi}{12};\ x_2 = \frac{11\pi}{12};\ x_3 = \frac{19\pi}{12};\ x_4 = \frac{23\pi}{12}$$

que dividem o círculo trigonométrico em quatro regiões

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 : (x_4 - 2\pi) < x < x_1 \\ r_2 : x_1 < x < x_2 \\ r_3 : x_2 < x < x_3 \\ r_4 : x_3 < x < x_4 \end{array} \right.$$

Analisando o sinal de N para pontos particulares destas regiões, vê-se que elas são caracterizadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \in r_1 : 2\cos 0 + 2\,\text{sen} 0 + \sqrt{2} > 0 \Rightarrow r_1 > 0 \\ \frac{3\pi}{4} \in r_2 : 2\cos\frac{3\pi}{4} + 2\,\text{sen}\frac{3\pi}{4} + \sqrt{2} > 0 \Rightarrow r_2 > 0 \\ \pi \in r_3 : 2\cos\pi + 2\,\text{sen}\pi + \sqrt{2} < 0 \Rightarrow r_3 < 0 \\ \frac{7\pi}{4} \in r_4 : 2\cos\frac{7\pi}{4} + 2\,\text{sen}\frac{7\pi}{4} + \sqrt{2} > 0 \Rightarrow r_4 > 0 \end{array} \right.$$

Igualando o denominador D a zero, têm-se duas novas regiões sobre o círculo trigonométrico definidas por

$$\left\{ \begin{array}{l} r_5 : \frac{5\pi}{4} - 2\pi < x < \frac{\pi}{4} \\ r_6 : \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \end{array} \right.$$

Analisando o sinal de D nestas regiões, vê-se que elas são caracterizadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \in r_5 : \cos 0 - \text{sen} 0 > 0 \Rightarrow r_5 > 0 \\ \pi \in r_6 : \cos\pi - \text{sen}\,\pi < 0 \Rightarrow r_6 < 0 \end{array} \right.$$

Resolvendo assim a inequação, devemos ter que

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} N < 0 \\ \text{e} \\ D > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in r_3 \\ \text{e} \\ x \in r_6 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{5\pi}{4} < x < \frac{19\pi}{12} \\ \text{ou} \\ \left\{ \begin{array}{l} N > 0 \\ \text{e} \\ D < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in r_1, r_2, r_4 \\ \text{e} \\ x \in r_5 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{11\pi}{12} \end{array} \right.$$

Assim,

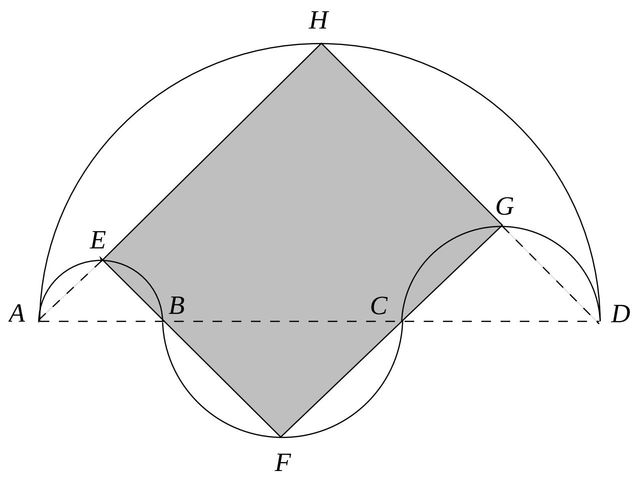
$$x \in \left\{ \left(\frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{19\pi}{12}\right) \right\} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Sobre uma reta r marcam-se, nesta ordem, os pontos A, B, C e D. Em um dos semiplanos determinados por r, traçam-se as semicircunferências de diâmetros AB, CD e AD; no outro semiplano traça-se a semicircunferência de diâmetro BC. Calcule a razão entre a área delimitada por estas semicircunferências e a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos médios das semicircunferências. Mostre que esta razão independe dos pontos A, B, C e D.

Solução:
A área S_1 delimitada pelas semicircunferências é dada por

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\pi AD^2}{8} - \frac{\pi AB^2}{8} + \frac{\pi BC^2}{8} - \frac{\pi CD^2}{8} \\ &= \frac{\pi}{8}(AD^2 - AB^2 + BC^2 - CD^2) \end{aligned}$$

Sejam E, F, G e H os pontos médios das semicircunferências, como indicado na figura abaixo, onde, por uma análise angular, é fácil verificar que os pontos são colineares, três a três.



Assim, a área S_2 delimitada pelo quadrilátero é a área S_{AHD} do triângulo ΔAHD, subtraída da área S_{AEB} do triângulo ΔAEB, adicionada da área S_{BFC} do triângulo ΔBFC, e subtraída da área S_{CGD} do triângulo ΔCGD. Logo,

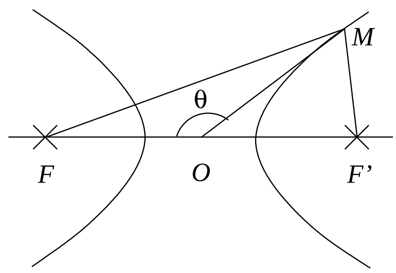
$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{AD \times \frac{AD}{2}}{2} - \frac{AB \times \frac{AB}{2}}{2} + \frac{BC \times \frac{BC}{2}}{2} - \frac{CD \times \frac{CD}{2}}{2} \\ &= \frac{1}{4}(AD^2 - AB^2 + BC^2 - CD^2) \end{aligned}$$

de forma que

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi}{2}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja uma hipérbole equilátera de centro O e focos F e F'. Mostre que o segmento determinado por O e por um ponto M qualquer da hipérbole é média proporcional entre os segmentos MF e MF'.

Solução:



Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ΔFMO e $\Delta F'MO$, têm-se

$$\begin{cases} MF^2 = MO^2 + OF^2 - 2MO \times OF \cos\theta \\ MF'^2 = MO^2 + OF'^2 + 2MO \times OF' \cos\theta \end{cases}$$

e, como $OF^2 = OF'^2 = c^2$, então

$$MF^2 + MF'^2 = 2MO^2 + 2c^2$$

Assim, considerando que na hipérbole equilátera

$$2c^2 = 4a^2 = (MF - MF')^2$$

então

$$\begin{aligned} 2MO^2 &= MF^2 + MF'^2 - (MF - MF')^2 \\ &= 2MF \times MF' \end{aligned}$$

ou seja,

$$MO^2 = MF \times MF'$$

como era desejado demonstrar.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Dado um triângulo ABC de lados a, b, c opostos aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ respectivamente e de perímetro $2p$, mostre que

$$a = \frac{p \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}}{\cos \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2}}$$

Solução:
Pela lei dos senos, têm-se

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{2p}{\operatorname{sen} \hat{A} + \operatorname{sen} \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C}}$$

Logo,

$$\begin{aligned} a &= \frac{2p \operatorname{sen} \hat{A}}{\operatorname{sen}(\pi - \hat{B} - \hat{C}) + \operatorname{sen} \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C}} \\ &= \frac{2p \operatorname{sen} \hat{A}}{\operatorname{sen}(\hat{B} + \hat{C}) + \operatorname{sen} \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C}} \\ &= \frac{2p \operatorname{sen} \hat{A}}{\operatorname{sen} \hat{B} \cos \hat{C} + \operatorname{sen} \hat{C} \cos \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C}} \\ &= \frac{2p \operatorname{sen} \hat{A}}{\operatorname{sen} \hat{B}(\cos \hat{C} + 1) + \operatorname{sen} \hat{C}(\cos \hat{B} + 1)} \end{aligned}$$

e usando as expressões do arco-metade

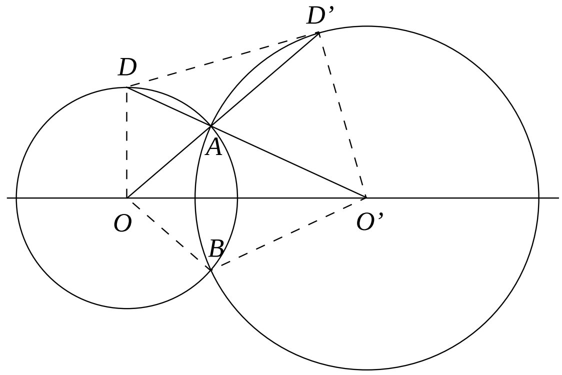
$$\begin{cases} \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} \\ \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \Rightarrow \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \end{cases}$$

podemos escrever que

$$\begin{aligned} a &= \frac{2p \operatorname{sen} \hat{A}}{4 \operatorname{sen} \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2} \cos^2 \frac{\hat{C}}{2} + 4 \operatorname{sen} \frac{\hat{C}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2} \cos^2 \frac{\hat{B}}{2}} \\ &= \frac{2p \operatorname{sen} \hat{A}}{4 \cos \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2} \left(\operatorname{sen} \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2} + \operatorname{sen} \frac{\hat{C}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2} \right)} \\ &= \frac{2p \operatorname{sen} \hat{A}}{4 \cos \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2} \operatorname{sen} \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}} \\ &= \frac{4p \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{A}}{2}}{4 \cos \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi - \hat{A}}{2}} \\ &= \frac{p \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{A}}{2}}{\cos \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2} \cos \frac{\hat{A}}{2}} \\ &= \frac{p \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}}{\cos \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2}} \end{aligned}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam duas circunferências, não ortogonais, de centros O e O' que se interceptam em A e B. Sendo D e D' os pontos onde as retas $O'A$ e OA interceptam, respectivamente, as circunferências de centro O e O', demonstre que o pentágono $BODD'O'$ é inscritível.

Solução:



Seja $D\hat{O}A = \alpha$. Como os triângulos ΔDOA e $\Delta D'OA'$ são isósceles, então

$$O\hat{D}A = D\hat{A}O = D'\hat{A}O' = O'\hat{D}'A = 90^{\text{o}} - \frac{\alpha}{2}$$

e assim $A\hat{O}'D' = \alpha$. Note ainda que $D\hat{B}D'$ pode ser determinado como

$$D\hat{B}D' = D\hat{B}A + A\hat{B}D' = \frac{D\hat{O}A}{2} + \frac{A\hat{O}'D'}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

Logo,

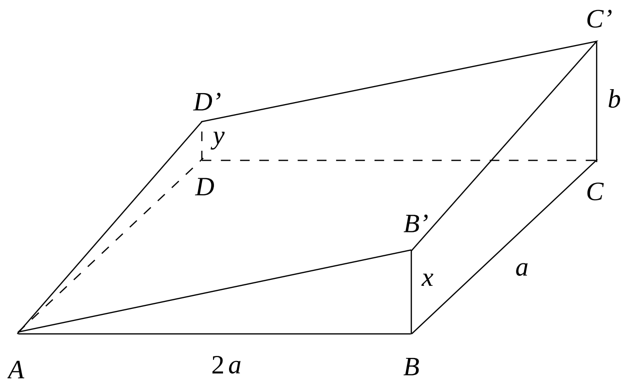
$$D\hat{O}D' = D\hat{O}'D' = D\hat{B}D'$$

e assim, os pontos O, O' e B estão no arco-capaz de ângulo α relativo à corda DD', e então o pentágono $BODD'O'$ é inscritível.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Num plano π tem-se um retângulo $ABCD$ de dimensões $AB = 2a$ e $AD = a$. Consideram-se a superfície prismática, cujas arestas são as retas perpendiculares a π, passando por A, B, C, D e um ponto C', sobre a aresta traçada por C, tal que $CC' = b$. Seccionando-se esta superfície por um plano passando por AC':

a) Mostre que é possível obter-se para seção plana um losango $AB'C'D'$, onde B' e D' são pontos das arestas que passam respectivamente por B e D.
b) Determine, em função de a e b, uma condição necessária e suficiente para que o losango esteja situado em um mesmo semiespaço em relação ao plano π.
c) Calcule o volume do tronco de prisma $ABCDB'C'D'$, supondo satisfeitas as condições do item anterior.

Solução:



a) Sejam $BB' = x$ e $DD' = y$. Calculando as arestas da seção, têm-se

$$\begin{cases} AB' = 4a^2 + x^2 \\ B'C' = a^2 + (b-x)^2 \\ C'D' = 4a^2 + (b-y)^2 \\ D'A = a^2 + y^2 \end{cases}$$

Assim, para termos um losango devemos ter as quatro arestas iguais, ou seja

$$\begin{cases} 4a^2 + x^2 = a^2 + (b-x)^2 \\ 4a^2 + x^2 = 4a^2 + (b-y)^2 \\ 4a^2 + (b-y)^2 = a^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{b^2-3a^2}{2b} \\ y = \frac{b^2+3a^2}{2b} \end{cases}$$

b) Para que o losango-seção esteje todo em um mesmo sub-espaço, devemos ter $b, x, y \geq 0$, e assim $b \geq 0$ e $b \geq a\sqrt{3}$.
c) O volume V é dado pelo produto da área média das faces ABB' e $CC'DD'$ pela altura do tronco. Assim,

$$V = (\frac{2ax}{2} + \frac{b+y}{2} \times 2a)\frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}(x+b+y)$$

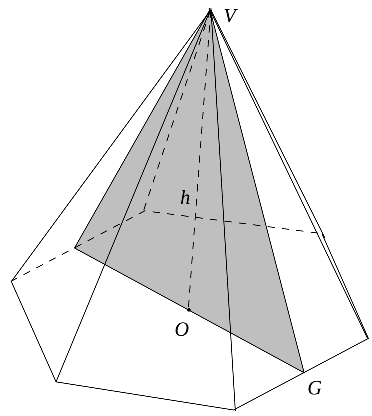
Nas condições do item (a), têm-se

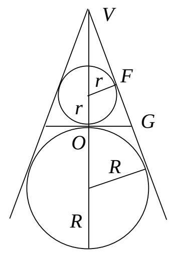
$$V = \frac{a^2}{2}\left(\frac{b^2-3a^2}{2b} + b + \frac{b^2+3a^2}{2b}\right) = a^2 b$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice V e base $ABCDEF$, de lado da base igual a ℓ e altura h:

a) Mostre que existem duas esferas tangentes aos planos das faces dessa pirâmide.
b) Calcule os raios dessas esferas.
c) Mostre que o produto desses raios independe de h.

Solução:





a) Fazendo uma seção na pirâmide como indicado na figura acima, podemos planificar o problema. As esferas corresponderiam aos círculos inscrito e ex-inscrito em relação ao ângulo em V no triângulo da seção.
b) Como o lado da base hexagonal é ℓ, então

$$OG = GF = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow VG = \sqrt{h^2 + \frac{3\ell^2}{4}}$$

Assim, $VF = (VG - GF)$ e por Pitágoras

$$(h-r)^2 = r^2 + VF^2 = r^2 + \left(\sqrt{h^2+\frac{3\ell^2}{4}} - \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

ou seja

$$\frac{3\ell^2}{2} + 2hr = \ell\sqrt{3}\sqrt{h^2 + \frac{3\ell^2}{4}} \Rightarrow$$
$$4hr^2 + 6\ell^2 r - 3\ell^2 h = 0 \Rightarrow$$
$$r = \frac{\ell}{4h}\left(\sqrt{9\ell^2 + 12h^2} - 3\ell\right)$$

Da semelhança de triângulos, têm-se

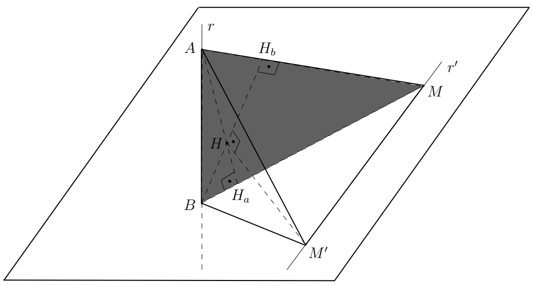
$$\frac{h-r}{r} = \frac{h+R}{R} \Rightarrow R = \frac{hr}{h-2r}$$

com r calculado anteriormente.
c) Do item anterior, seja $S = \sqrt{9\ell^2 + 12h^2}$. Assim,

$$\begin{aligned} Rr &= \frac{hr^2}{h-2r} \\ &= \frac{\frac{h\ell^2}{16h^2}\left(9\ell^2 + 12h^2 - 6\ell S + 9\ell^2\right)}{\frac{1}{4h}\left[4h^2 - 2\ell(S-3\ell)\right]} \\ &= \frac{3\ell^2}{4} \end{aligned}$$

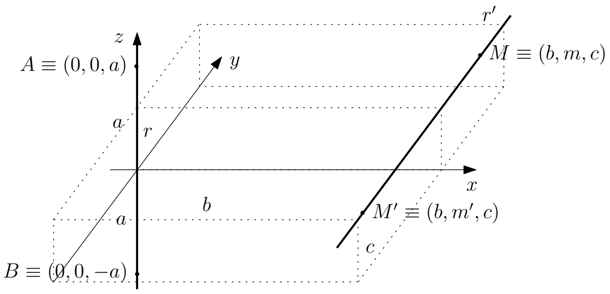
9ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam duas retas ortogonais r e r' não coplanares. Considere sobre r dois pontos fixos A e B e sobre r' dois pontos variáveis M e M', tais que a projeção de M' sobre o plano que contém o triângulo MAB é o ortocentro H deste triângulo. Determine o lugar geométrico dos centros das esferas circunscritas ao tetraedro $ABMM'$.

Solução (Baseada em solução de Paulo Santa Rita):
Definição: Duas retas r_1 e r_2 são ortogonais no espaço se e somente se existe um plano que contém r_1 e é perpendicular a r_2.



Seja a figura acima, na qual a projeção de M' no plano do triângulo ΔABM, que aparece em destaque, é o ortocentro H deste triângulo, como colocado no enunciado. Logo, B, M' e H definem um plano que contém BM' e é perpendicular a AM (em H_b, pé de B em AM), de forma que BM' e AM são ortogonais, pela definição acima. Analogamente, A, M' e H definem um plano que contém AM' e é perpendicular a BM (em H_a, pé de A em BM), de forma que AM' e BM são ortogonais.

Vamos situar este tetraedro num conjunto de eixos cartesianos em que a reta r coincide com o eixo z e o plano xOy é perpendicular a r no ponto médio de $AB = 2a$. Para facilitar, considere a reta r' alinhada com o eixo y, de forma que esta reta é descrita pelos pontos (b, R, c), com $b \neq 0$ (para evitar que r' intercepte r) e c constantes, e com R real.



Assim, $A \equiv (0, 0, a)$, $B \equiv (0, 0, -a)$ e $M \equiv (b, m, c)$, com $m \in \mathbb{R}$. Podemos determinar M' usando o fato de que $AM' = (M' - A)$ e $BM = (M - B)$ são ortogonais. Logo, o produto escalar $AM'.BM$ é nulo e assim

$$[b, m', c-a].[b, m, c+a] = 0 \Rightarrow m' = \frac{p}{m}$$

com $p = (a^2 - b^2 - c^2)$ constante.

O centro $O \equiv (x_o, y_o, z_o)$ da esfera circunscrita ao tetraedro é a interseção, se houver, dos planos ortogonais às arestas do tetraedro pelos respectivos pontos médios. Para a aresta AB, é simples ver que o plano é $\pi_1 : z = 0$. Para a aresta $M'M$, o plano passa por $\frac{M'+M}{2}$ e é ortogonal ao vetor $MM' = (M - M')$. Logo,

$$([x, y, z] - [b, \frac{m^2+p}{2m}, c]).[0, \frac{m^2-p}{m}, 0] = 0$$

$$\Rightarrow \pi_2 : y = \frac{m^2+p}{2m}$$

Para a aresta BM, o plano passa por $\frac{B+M}{2}$ e é ortogonal ao vetor $BM = (M - B)$. Logo,

$$([x, y, z] - [\frac{b}{2}, \frac{m}{2}, \frac{c-a}{2}]).[b, m, c+a] = 0$$

$$\Rightarrow \pi_3 : bx + my + (c-a)z = \frac{m^2-p}{2}$$

Achando a interseção de π_1, π_2 e π_3, encontra-se

$$O \equiv (-\frac{p}{b}, \frac{m^2+p}{2m}, 0)$$

cujo lugar geométrico então pertence (mas não é necessariamente igual a) a uma reta paralela a r'.

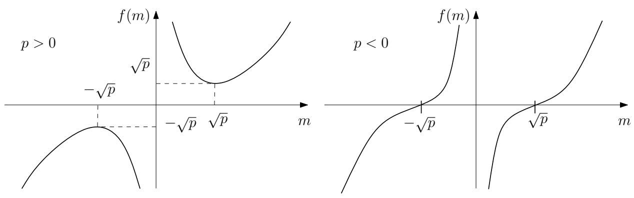
Analisando a função $y_o = f(m)$, tem-se

$$\begin{cases} f(m) = \frac{m^2+p}{2m} \\ f'(m) = \frac{(2m)(2m)-(2)(m^2+p)}{4m^2} = \frac{m^2-p}{2m^2} \\ f''(m) = \frac{(4m^2)(2m)-(4m)(m^2-p)}{4m^4} = \frac{m^2+p}{m^3} \end{cases}$$

e ainda

$$\lim_{m \to \mp\infty} = \mp\infty; \quad \lim_{m \to 0^{\mp}} = \text{sign}(p)\,\infty$$

de forma que se $p > 0$, há extremos locais em $m = \mp\sqrt{p}$, e se $p < 0$, não há extremos locais em $m = \mp\sqrt{p}$ mas sim mudança de concavidade. Um esboço dos gráficos de $f(m)$ para estes dois casos é dado a seguir. Naturalmente, se $p = 0$, então tem-se a simplificação $f(m) = \frac{m}{2}$.



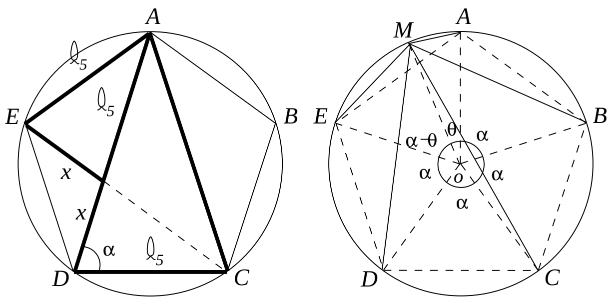
Com tudo isto, se $p \leq 0$, então a imagem de y_0 é o conjunto dos reais, e assim o lugar geométrico de O é uma reta paralela a r' cruzando o plano xOz em $(-\frac{p}{b}, 0, 0)$. Se, porém, $p > 0$, a imagem de y_0 é o intervalo $I = (-\infty, -\sqrt{p}) \cup (\sqrt{p}, \infty)$, e o lugar geométrico de O consiste apenas em duas semi-retas paralelas a r', com origens nos pontos $(-\frac{p}{b}, -\sqrt{p}, 0)$ e $(-\frac{p}{b}, \sqrt{p}, 0)$.

sln: No caso $p > 0$, o centro O da esfera passa a ser externo ao tetraedro, pois neste caso x_o fica com sinal oposto a b. Este fato deve causar a discontinuidade no lugar geométrico de O.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam A, B, C, D, E os vértices de um pentágono regular inscrito num círculo e M um ponto qualquer sobre o arco $\overset{\frown}{AE}$. Unindo-se M a cada um dos vértices do pentágono, mostre que os segmentos satisfazem

$$MB + MD = MA + MC + ME$$

Solução:



Na figura à esquerda, a partir de uma análise angular, é possível constatar que os dois triângulos em destaque são isósceles com ângulo do vértice igual a 36º, de modo que eles são semelhantes. Assim, têm-se que

$$\frac{\ell_5}{\ell_5+x} = \frac{x}{\ell_5} \Rightarrow x^2+\ell_5 x-\ell_5^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ell_5$$

pois a outra raiz é negativa. Assim, da mesma figura,

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\frac{\ell_5}{2}}{\ell_5+x} = \frac{1}{2}\frac{x}{\ell_5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

Da figura à direita, seja $M\hat{O}A = \theta < \frac{\alpha}{2}$, onde $\alpha = 72^{\circ}$. Logo,

$$\begin{cases} MA = 2R\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} \\ MB = 2R\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha+\theta}{2} = 2R\left(\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) \\ MC = 2R\,\mathrm{sen}\,\frac{2\alpha+\theta}{2} = 2R\left(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\alpha\right) \\ MD = 2R\,\mathrm{sen}\,\frac{2\alpha-\theta}{2} = 2R\left(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\frac{\theta}{2} - \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\alpha\right) \\ ME = 2R\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha-\theta}{2} = 2R\left(\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$$

de forma que a equação do enunciado se aplica pois

$$\begin{aligned} S &= (MA + MC + ME) - (MB + MD) \\ &= 2R\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\left(1 + 2\cos\alpha - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2R\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\left(1 + 2\frac{\sqrt{5}-1}{4} - 2\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

O caso $M\hat{O}E = \theta < \frac{\alpha}{2}$ é análogo ao caso acima.

IME 1985/1986 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine $\log_{\sqrt{0{,}333\ldots}} \sqrt{0{,}037037\ldots}$

Solução:
Seja

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0{,}037037\ldots \\ 1000x = 37{,}037037\ldots \end{array} \right. \Rightarrow x = \frac{37}{999} = \frac{1}{27}$$

Logo, a expressão do enunciado é igual a

$$\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} \sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{\frac{1}{2}\log_3 \frac{1}{27}}{\frac{1}{2}\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{-3}{-1} = 3$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
No produto abaixo, o "*" substitui algarismos diferentes de "3" e não necessariamente iguais. Determine o multiplicando e o multiplicador.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & * & * & 3 & * \\ & & & & * & * & 3 \\ \hline & & & 3 & * & * & * \\ & * & * & * & 3 & 3 & \\ & * & * & * & * & & \\ \hline * & * & * & * & * & * & * \end{array}$$

Solução:
Reescrevendo o produto da forma

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a & b & 3 & c \\ & & & & d & e & 3 \\ \hline & & & 3 & f & g & h \\ & i & j & l & 3 & 3 & \\ & m & n & o & p & & \\ \hline q & r & s & t & u & v & x \end{array}$$

têm-se:
(i) Devido ao 3 presente na primeira parcela, $a = 1$ e assim b é menor ou igual a 2, pois $3b = f < 10$.
(ii) Com $a = 1$, para gerar i na segunda parcela, devemos ter e alto. $e = 8$ não é possível, pois $8c$ não pode terminar em 3. Assim, $e = 9$ e $i = 1$, de forma que $c = 7$, $h = 1$, $g = 1$, $x = 1$ e $v = 4$.
(iii) Com $a = 1$, b pequeno e $i = 1$, então, d deve ser alto para gerar m alto, de modo a gerar q. $d = 9$ não é possível, pois faria $p = 3$, o que não é aceitável pelo enunciado. Testando $d = 7$, tem-se também que esta não é uma solução aceitável. De fato, $d = 8$, de modo que $b = 2$ e o produto fica da forma:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & 2 & 3 & 7 \\ & & & & 8 & 9 & 3 \\ \hline & & & 3 & 7 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & \\ & 9 & 8 & 9 & 6 & & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais não nulos e $n \in \mathbb{N}^*$. Mostre que a relação $R_n = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{N}^*$ e $|a-b|$ é múltiplo de $n\}$ é uma relação de equivalência.

Solução:
Como $|a-a| = 0$, que é múltiplo de n, logo $(a,a) \in R_n$. Seja $(a,b) \in R_n$, de modo que $|a-b| = |b-a|$ é múltiplo de n, e assim tem-se também que $(b,a) \in R_n$. Sejam $(a,b) \in R_n$ e $(b,c) \in R_n$, de modo que $|a-b|$ e $|b-c|$ são múltiplos de n, e então,

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b = k_1 n,\ k_1 \in \mathbb{Z} \\ b - c = k_2 n,\ k_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Rightarrow |a-c| = |k_1 + k_2| n$$

Logo, $|a-c|$ também é múltiplo de n, e assim $(a,c) \in R_n$.

Dos resultados acima, R_n é reflexiva, simétrica e transitiva. Logo, R_n é uma relação de equivalência.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Uma padaria trabalha com 4 tipos de farinha cujos teores de impureza são os seguintes:

TIPO	TEOR
A	8%
B	12%
C	16,7%
D	10,7%

Para fabricar farinha tipo D, o padeiro mistura uma certa quantidade de farinha A com 300 gramas de farinha tipo B; em seguida, substitui 200 gramas dessa mistura por 200 gramas de farinha tipo C. Determine a quantidade de farinha tipo A utilizada.

Solução:
Seja x a quantidade desejada de farinha tipo A. Na fabricação de D, inicialmente têm-se $(0{,}08x + 0{,}12 \times 300)$ gramas de impureza, em um total de $(x + 300)$ gramas de mistura. Trocando 200 gramas desta mistura por farinha tipo C, tiramos y gramas de impureza e adicionamos $(0{,}167 \times 200) = 33{,}4$ gramas de impureza. Assim, ficamos com um total final de impureza igual a $(0{,}08x + 36 - y + 33{,}4)$ gramas, em $(x + 300)$ gramas de farinha, em um percentual de impureza que deve ser igual a 10,7%. Logo, têm-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{200(0{,}08x+0{,}12\times 300)}{(x+300)} \\ \frac{(0{,}08x+36-y+33{,}4)}{(x+300)} = 0{,}107 \Rightarrow y = -0{,}027x + 37{,}3 \end{array} \right.$$

Igualando y nas duas equações acima, tem-se

$$0{,}027x^2 - 13{,}2x - 3990 = 0 \Rightarrow x = \frac{13{,}2 \mp 24{,}6}{0{,}054}$$

Logo, desprezando a raiz negativa, $x = 700$ gramas.

5ª Questão [Valor: 1,0]
A derivada de ordem n de uma função $y = f(x)$ é a primeira derivada da derivada de ordem $n-1$ da mesma função, ou seja:

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y^{(n-1)}$$

Calcule $\left[(x^2+1)\,\mathrm{sen}\,x\right]^{(20)}$.

Solução:

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= 2x\,\mathrm{sen}\,x + (x^2+1)\cos x\\
f^{(2)}(x) &= 4x\cos x + (-x^2+1)\,\mathrm{sen}\,x\\
f^{(3)}(x) &= -6x\,\mathrm{sen}\,x + (-x^2+5)\cos x\\
f^{(4)}(x) &= -8x\cos x + (x^2-11)\,\mathrm{sen}\,x\\
f^{(5)}(x) &= 10x\,\mathrm{sen}\,x + (x^2-19)\cos x\\
f^{(6)}(x) &= 12x\cos x + (-x^2+29)\,\mathrm{sen}\,x\\
f^{(7)}(x) &= -14x\,\mathrm{sen}\,x + (-x^2-41)\cos x\\
f^{(8)}(x) &= -16x\cos x + (x^2-55)\,\mathrm{sen}\,x\\
&\vdots
\end{aligned}$$

de modo que para $k \geq 1$,

$$f^{(4k)}(x) = -2(4k)x\cos x + [x^2-(4k)^2+(4k)+1]\,\mathrm{sen}\,x \Rightarrow$$
$$f^{(20)}(x) = -40x\cos x + (x^2-379)\,\mathrm{sen}\,x$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a equação e identifique o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos determinados pela interseção da cônica

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$$

com as retas de coeficiente angular igual a $\frac{1}{2}$.

Solução:
Determinando as interseções da cônica com as retas do tipo $y = \frac{1}{2}x + k$, têm-se

$$\frac{13}{4}x^2 - (k+6)x + (5k^2-4k-4) = 0$$

Para garantir que o sistema tenha duas soluções, devemos ter que

$$(k+6)^2 - 13(5k^2-4k+4) = -8k^2+8k+11 > 0 \Rightarrow$$
$$\frac{2-\sqrt{26}}{4} < k < \frac{2+\sqrt{26}}{4}$$

Assim, as soluções $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ têm ponto médio $P \equiv (x_0, y_0)$ da forma

$$P = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{4}+k\right) = \left(\frac{2(k+6)}{13}, \frac{(k+6)}{13}+k\right)$$

Logo, o lugar geométrico de P é descrito por

$$\begin{cases} k = \frac{13x_0-12}{2} \\ k = \frac{13y_0-6}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{26-\sqrt{26}}{26} < x_0 < \frac{26+\sqrt{26}}{26} \\ \frac{26-7\sqrt{26}}{26} < y_0 < \frac{26+7\sqrt{26}}{26} \end{cases}$$

Em suma, o lugar geométrico é segmento de reta $y = (7x-6)$ estritamente entre as extremidades acima.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja a curva representada pela equação

$$y = \frac{w\ell}{1+w\ell} + \frac{1}{1+w\ell}\sum_{i=1}^{4}\frac{w}{w+\lambda_i}$$

onde ℓ, λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 são constantes reais, tais que $1 > \lambda_{i+1} > \lambda_i > \ell > 0$. Esboce o gráfico de y, caracterizando as assíntotas, num sistema cartesiano ortogonal.

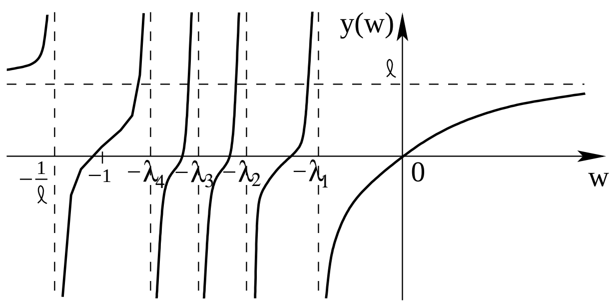
Solução:
Podemos escrever que

$$y(w) = \frac{w}{1+w\ell}\left(\ell + \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{w+\lambda_i}\right)$$

E assim têm-se:

$$\begin{cases} y(-\frac{1}{\ell}) = \nexists;\ y(-\lambda_i) = \nexists;\ y(0) = 0 \\ \lim\limits_{w \to (-\frac{1}{\ell})^{\mp}} y(w) = \pm\infty \\ \lim\limits_{w \to (-\lambda_i)^{\mp}} y(w) = \pm\infty \\ \lim\limits_{w \to \mp\infty} y(w) = \ell \end{cases}$$

O que determina as seguintes assíntotas verticais em $w = -\frac{1}{\ell}$, $w = -\lambda_i$, para $i = 1, 2, 3, 4$, e assíntotas horizontais $y = \ell$ para $w \to \pm\infty$. O gráfico de $y(w)$ é mostrado a seguir.



8ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que os números 12, 20 e 35 não podem ser termos de uma mesma progressão geométrica.

Solução:
Assuma, por hipótese, que 12, 20 e 35 sejam termos de uma mesma progressão geométrica. Logo, para k_1, k_2 e k_3 inteiros não negativos, devemos ter

$$\begin{cases} 12 = a_1 q^{k_1} \\ 20 = a_1 q^{k_2} \\ 35 = a_1 q^{k_3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{35}{12} = q^{k_3-k_1} \\ \frac{20}{12} = q^{k_2-k_1} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{35}{12}\right)^{k_2} = \left(\frac{20}{12}\right)^{k_3}$$

Se $k_2 > 0$, o termo da esquerda tem um fator 7 e o termo da direita não, logo, devemos necessariamente ter $k_2 = 0$. Analogamente, devemos ter $k_1 = k_3 = 0$, o que é inadmissível, pois tornaria $12 = 20 = 35$. Logo a hipótese inicial deve ser falsa.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sabendo-se que x é um número real, $-1 \le x \le 1$, $0 \le \arccos x \le \pi$ e n é um número inteiro positivo, mostre que a expressão

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

pode ser desenvolvida como um polinômio em x, de grau n, cujo coeficiente do termo de maior grau é igual a 2^{n-1}.

Solução:

$$\begin{cases} \cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos\theta - \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen}\theta \\ \cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos\theta + \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Logo,

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta$$

Definindo, $f_n = \cos n\theta$, podemos então escrever que

$$f_{n+1} = 2f_n f_1 - f_{n-1}$$

Definindo $x = \cos\theta$, tem-se então

$$\begin{cases} f_1 = \cos\theta = x \\ f_2 = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1 \end{cases}$$

Como f_1 e f_2 são polinômios em x, logo com a recursão acima $f_3, f_4, \ldots, f_n$ também o serão. Além disto, da recursão, o termo de maior grau de f_{n+1} é $2x$ vezes o termo de maior grau de f_n. Como o termo de maior grau de f_1 é x, o termo de maior grau de f_2 é $2x^2$, o de f_3 é $4x^3$ e o termo de maior grau de f_n é da forma $2^{n-1}x^n$.

10ª Questão [Valor: 1,0]
12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

Solução:
Numerando os cavaleiros como em um relógio, podemos formar 15 grupos, devidamente ordenados, com o cavaleiro de número 12:

$$\begin{array}{ccc} (2,4,6,8,12) & (2,4,6,9,12) & (2,4,6,10,12) \\ (2,4,7,9,12) & (2,4,7,10,12) & (2,4,8,10,12) \\ (2,5,7,9,12) & (2,5,7,10,12) & (2,5,8,10,12) \\ (2,6,8,10,12) & (3,5,7,9,12) & (3,5,7,10,12) \\ (3,5,8,10,12) & (3,6,8,10,12) & (4,6,8,10,12) \end{array}$$

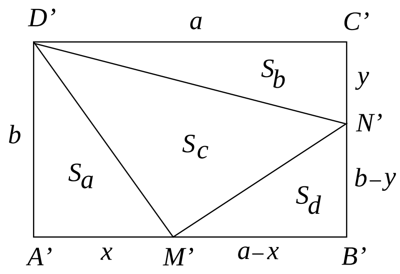
Assim, para todos os 12 cavaleiros, teríamos um total de $15 \times 12 = 180$ grupos devidamente ordenados. Porém, cada grupo estaria sendo contado 5 vezes com as ordenações (a,b,c,d,e), (b,c,d,e,a), (c,d,e,a,b), (d,e,a,b,c) e (e,a,b,c,d). Logo, o número de grupos distintos é apenas $\frac{180}{5} = 36$.

IME 1985/1986 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um paralelepípedo retângulo de bases $ABCD$ e $A'B'C'D'$, cujas arestas AA', BB', CC' e DD' tenham por comprimento h e os lados da base sejam, respectivamente, $AB = a$ e $AD = b$. Por DD' considere dois planos $DD'MM'$ e $DD'NN'$.

a) Determine as distâncias $AM = x$ e $CN = y$ para que esses dois planos dividam o paralelepípedo em três partes de mesmo volume.
b) Determine a razão entre os volumes dos sólidos $MBNM'B'N'$ e $MDNM'D'N'$.
c) Encontre a relação entre a e b, que estabeleça a condição necessária e suficiente para que o diedro de aresta MM', cujas faces passem por DD' e NN', seja reto.

Solução:



Por ser um paralelepípedo, o problema se torna todo plano, envolvendo áreas, ao invés de ser um problema espacial, envolvendo volumes.

a) Para que as três partes tenham a mesma área da base, têm-se

$$\begin{cases} S_a = \frac{bx}{2} = \frac{ab}{3} \\ S_b = \frac{ay}{2} = \frac{ab}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2a}{3} \\ y = \frac{2b}{3} \end{cases}$$

b) Usando áreas ao invés de volumes, têm-se

$$S_c = ab - S_a - S_b - S_d = ab - \frac{bx}{2} - \frac{ay}{2} - S_d$$

Assim, usando também as condições do item (a), têm-se

$$\begin{cases} S_d = \frac{(a-x)(b-y)}{2} \\ S_c = \frac{ab-xy}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_d = \frac{ab}{18} \\ S_c = \frac{5ab}{18} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_d}{S_c} = \frac{1}{5}$$

c) Por Pitágoras, devemos ter

$$D'M'^2 + M'N'^2 = D'N'^2 \Rightarrow$$

$$D'A'^2 + A'M'^2 + M'B'^2 + B'N'^2 = D'C'^2 + C'N'^2 \Rightarrow$$

$$(b^2 + x^2) + [(a-x)^2 + (b-y)^2] = (a^2 + y^2) \Rightarrow$$

$$b^2 + x^2 - ax - by = 0$$

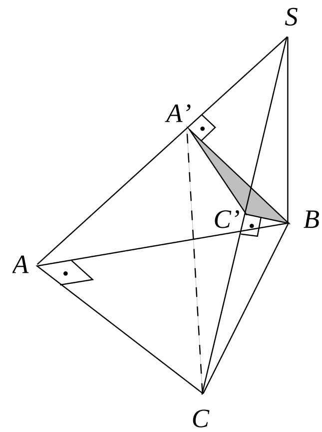
Nas condições do item (a), têm-se

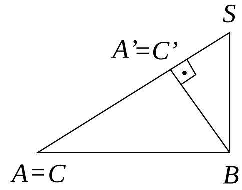
$$a\sqrt{2} = b\sqrt{3}$$

sln: Esta condição, em conjunto com a condição do item (a), se torna necessária e suficiente para que $D'\hat{M}'N' = 90^o$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um triângulo ABC, retângulo em A. Por B, traça-se uma reta perpendicular ao plano do triângulo. Sobre esta, fixa-se um ponto S. Por B, passa-se um plano que intercepta SC em C' e seja perpendicular a SC. O plano corta SA em A'. Demonstre que os cinco pontos A, B, C, A' e C' pertencem a uma mesma esfera.

Solução:





Pelo enunciado, é simples ver que os triângulos ΔABC e $\Delta C'BC$ são retos em A e C', respectivamente.

Além disto, tomando a projeção do tetraedro na face ΔSAB, as projeções das arestas AS e BS coincidem, de forma que o plano $BA'C'$ é ortogonal ao plano da face CAS. Logo, $BA' \perp AS$ e então

$$\begin{cases} A'B^2 = AB^2 - AA'^2 \\ A'C^2 = AA'^2 + AC^2 \end{cases}$$

de modo que

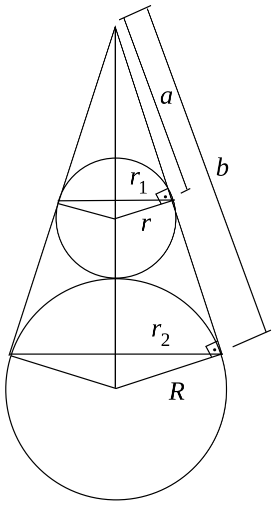
$$A'B^2 + A'C^2 = AB^2 + AC^2 = BC^2$$

ou seja, o triângulo $\Delta A'BC$ é retângulo em A'.

Sendo assim, os pontos A, A' e C' pertencem a uma mesma esfera de diâmetro BC.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dadas duas esferas de raios respectivamente iguais a R e r, tangentes exteriores, e um cone circunscrito a elas. Calcule a área da superfície lateral do tronco do cone que tenha por bases os círculos de contato das esferas com o cone.

Solução:



Seja x a distância do vértice do cone ao centro da esfera de raio r. Logo, da semelhança de triângulos, tem-se

$$\frac{x}{r} = \frac{x+r+R}{R} \Rightarrow x = \frac{r(R+r)}{R-r}$$

Por Pitágoras,

$$\begin{cases} a = \sqrt{x^2 - r^2} = \frac{2r\sqrt{rR}}{R-r} \\ b = \sqrt{(x+r+R)^2 - R^2} = \frac{2R\sqrt{rR}}{R-r} \end{cases}$$

e com isto,

$$\begin{cases} xr_1 = ra \\ (x+r+R)r_2 = Rb \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{2r\sqrt{rR}}{R+r} \\ r_2 = \frac{2R\sqrt{rR}}{R+r} \end{cases}$$

A superfície lateral S é então igual a

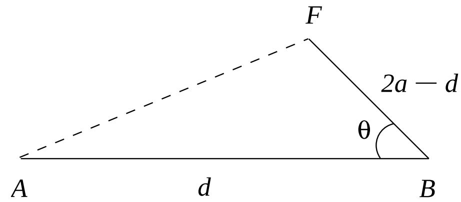
$$\begin{aligned} S &= \pi(r_2 b - r_1 a) \\ &= \pi\left(\frac{2R\sqrt{rR}}{R+r} \times \frac{2R\sqrt{rR}}{R-r} - \frac{2r\sqrt{rR}}{R+r} \times \frac{2r\sqrt{rR}}{R-r}\right) \\ &= \pi\left(\frac{4rR^3}{(R^2-r^2)} - \frac{4r^3R}{(R^2-r^2)}\right) \\ &= 4\pi rR \end{aligned}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Dados dois pontos fixos A e B ($\overline{AB} = d$), considere as elipses passando por B, com foco em A e eixo maior de comprimento $2a$, tal que $2a > d$.

a) Determine o lugar geométrico do segundo foco F das elipses.

b) Determine o lugar geométrico dos centros de gravidade dos triângulos ABF.

Solução:



a) Da definição de elipse, tem-se

$$BF + BA = 2a \Rightarrow BF = 2a - d$$

Logo, BF é constante, e assim o lugar geométrico de F é a circunferência de centro B e raio $(2a-d)$, a menos dos pontos colineares a A e B.

b) Seja $A\hat{B}F = \theta$. Situando um sistema de coordenadas em A com o eixo x ao longo de AB, os vértices do triângulo ΔABF estão nas posições

$$\begin{cases} A \equiv (0,0) \\ B \equiv (d,0) \\ F \equiv (d-(2a-d)\cos\theta, (2a-d)\,\text{sen}\,\theta) \end{cases}$$

Logo, o centro de gravidade G do triângulo ΔABF está na posição

$$(x_o, y_o) \equiv \left(\frac{d+d-(2a-d)\cos\theta}{3}, \frac{(2a-d)\,\text{sen}\,\theta}{3}\right)$$

de forma que

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{2d-3x_o}{2a-d} \\ \text{sen}\,\theta = \frac{3y_o}{2a-d} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{2d-3x_o}{2a-d}\right)^2 + \left(\frac{3y_o}{2a-d}\right)^2 = 1$$

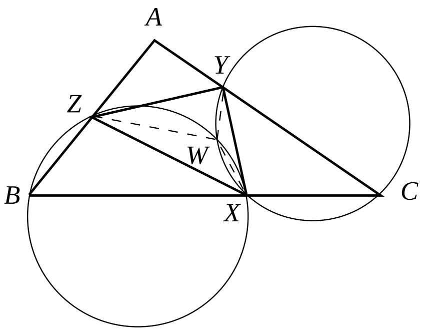
e então

$$\left(\frac{2d}{3} - x_o\right)^2 + y_o^2 = \left(\frac{2a-d}{3}\right)^2$$

e o lugar geométrico de G é a circunferência de centro $(\frac{2d}{3}, 0)$ e raio $\frac{2a-d}{3}$, a menos dos pontos colineares a A e B.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um triângulo ABC qualquer e três pontos X, Y e Z, tais que $X \in BC$, $Y \in AC$ e $Z \in AB$. Considere os círculos (C_1), (C_2) e (C_3) que passam respectivamente pelos pontos CXY, AYZ e BXZ. Demonstre que (C_1), (C_2) e (C_3) se encontram em um ponto W.

Solução:



Seja W a interseção de (C_1) e (C_3). Logo,

$$\begin{cases} Z\hat{W}X = 180^\circ - B \\ Y\hat{W}X = 180^\circ - C \end{cases} \Rightarrow Y\hat{W}Z = B + C$$

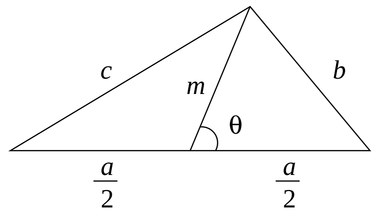
Com isto, $(Y\hat{W}Z + Y\hat{A}Z) = 180^\circ$ e o quadrilátero $AWYZ$ é inscritível. Logo, o círculo (C_2), circunscrito ao triângulo ΔAYZ, também passa por W.

A demonstração para o caso em que W é exterior ao triângulo ΔXYZ é inteiramente análoga.

6ª Questão [Valor: 1,0]

a) Demonstre que a diferença entre os quadrados de dois lados de um triângulo é igual ao dobro do produto do terceiro lado pela projeção, sobre ele, da mediana correspondente.
b) Determine o lugar geométrico dos centros dos círculos que cortam dois círculos exteriores, de centros O_1 e O_2 e raios respectivamente iguais a R_1 e R_2, em pontos diametralmente opostos.

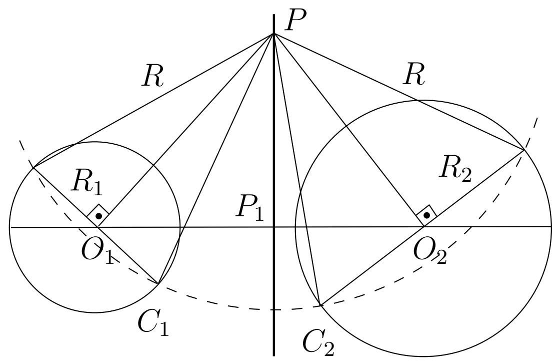
Solução:



a) Usando a lei dos cossenos (ou diretamente o teorema de Stewart), têm-se

$$\begin{cases} b^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - 2m\frac{a}{2}\cos\theta \\ c^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} + 2m\frac{a}{2}\cos\theta \end{cases} \Rightarrow c^2 - b^2 = 2am\cos\theta$$

b) **(Baseada em solução de Jean-Pierre, Eric e Francisco Javier García Capitán, via Luís Lopes)**



Seja R o raio da circunferência de centro P. Logo,

$$\begin{cases} R^2 = R_1^2 + PO_1^2 \\ R^2 = R_2^2 + PO_2^2 \end{cases} \Rightarrow PO_1^2 - PO_2^2 = R_2^2 - R_1^2$$

Seja Q um ponto do eixo radical de C_1 e C_2. Assim,

$$\begin{cases} \text{Pot}\, Q = QO_1^2 - R_1^2 \\ \text{Pot}\, Q = QO_2^2 - R_2^2 \end{cases} \Rightarrow QO_1^2 - QO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$$

Pode-se concluir então que o lugar geométrico de P é o eixo radical dos círculos de centros O_1 e O_2 e raios R_2 e R_1, respectivamente. Ou seja, é a reta perpendicular ao segmento O_1O_2 passando pelo ponto P_1 tal que

$$P_1O_1 - P_1O_2 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{O_1O_2}$$

sln: É possível concluir que o lugar geométrico é a reta simétrica ao eixo radical de C_1 e C_2 em relação ao ponto médio de O_1O_2.

7ª Questão [Valor: 1,0]

a) Resolva a equação

$$m\cos x - (m+1)\operatorname{sen} x = m, \quad m \in \mathbb{R}$$

b) Determine m de modo que essa equação admita raízes x' e x'' cuja diferença seja $\pi/2$.

Solução:

a) Se $\operatorname{sen} x = 0$, tem-se $m\cos x = m$. Assim, se também $m = 0$, então $x = k\pi$. Se $m \neq 0$, devemos ter $\cos x = 1$, e então $x = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Em geral, podemos re-escrever a equação do enunciado como

$$m\cos x - m\operatorname{sen} x = m + \operatorname{sen} x$$

e elevando ao quadrado, os lados esquerdo E e direito D desta equação tornam-se

$$\begin{aligned}
E^2 &= m^2\cos^2 x - 2m^2\cos x\operatorname{sen} x + m^2\operatorname{sen}^2 x\\
&= m^2(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) - 2m^2\cos x\operatorname{sen} x\\
&= m^2 - 2m^2\cos x\operatorname{sen} x\\
D^2 &= m^2 + 2m\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x
\end{aligned}$$

Logo,

$$E^2 = D^2 \Rightarrow (2m + \operatorname{sen} x + 2m^2\cos x)\operatorname{sen} x = 0$$

Assim, ou $\operatorname{sen} x = 0$, e então teríamos o caso discutido acima, ou então

$$\begin{cases} m\cos x - (m+1)\operatorname{sen} x = m\\ \operatorname{sen} x + 2m^2\cos x = -2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{-2m(m+1)}{1+2m(m+1)}\\ \cos x = \frac{-(2m+1)}{1+2m(m+1)} \end{cases}$$

b) A opção $m = 0$ gera soluções da forma $x = k\pi$, o que não serve para este item. Para um m geral, o caso $\operatorname{sen} x = 0$ gera soluções da forma $x' = 2k\pi$, e o outro caso descrito acima gera uma única solução $x'' \in [0, 2\pi)$. Assim, as duas únicas formas de se ter duas soluções com diferença igual a $\pi/2$ são:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow x' = 0 \text{ e } x'' = \frac{\pi}{2}\\ \operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow x' = 2\pi \text{ e } x'' = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Analisando estes casos, têm-se

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 1,\ \cos x = 0 \Rightarrow -(m+1) = m \Rightarrow m = -\frac{1}{2}\\ \operatorname{sen} x = -1,\ \cos x = 0 \Rightarrow (m+1) = m \Rightarrow \nexists m \end{cases}$$

Logo, $m = -\frac{1}{2}$, e a equação original se torna

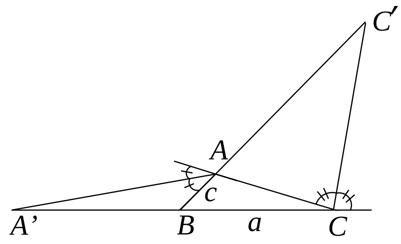
$$\cos x + \operatorname{sen} x = 1$$

8ª Questão [Valor: 1,0]

Num triângulo ABC ($\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$) traçam-se as bissetrizes externas AA' do ângulo $\hat{A}$, com A' sobre o prolongamento de BC, e CC' do ângulo $\hat{C}$, com C' sobre o prolongamento de AB. Se $AA' = CC'$ mostre que

$$c\operatorname{sen}\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} = a\operatorname{sen}\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$$

Solução:



De uma análise angular da figura acima, é possível verificar que

$$\begin{cases} A\hat{B}A' = 180^\circ - B\\ B\hat{A}A' = 90^\circ - \frac{A}{2} \end{cases} \Rightarrow A\hat{A}'B = B + \frac{A}{2} - 90^\circ = \frac{B-C}{2}$$

$$\begin{cases} C\hat{A}C' = 180^\circ - A\\ A\hat{C}C' = 90^\circ - \frac{C}{2} \end{cases} \Rightarrow C\hat{C}'A = A + \frac{C}{2} - 90^\circ = \frac{A-B}{2}$$

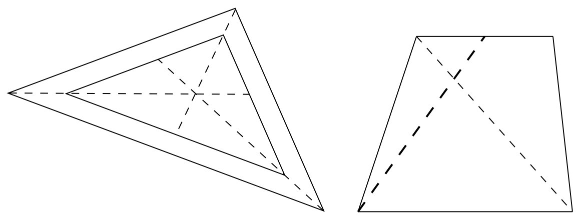
Aplicando a lei dos senos nos triângulos $\Delta ABA'$ e $\Delta CBC'$, têm-se que

$$\begin{cases} \frac{AA'}{\operatorname{sen}(180^\circ - B)} = \frac{AA'}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen}\frac{B-C}{2}}\\ \frac{CC'}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}} \end{cases}$$

e assim, se $AA' = CC'$, então a equação do enunciado fica demonstrada.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Dado um tronco de pirâmide triangular de bases paralelas, demonstre que as retas que ligam os vértices da base inferior aos pontos médios dos lados opostos da base superior são concorrentes.

Solução:



Podemos deformar o tronco da pirâmide para torná-lo reto. Por ser uma transformação biunívoca, esta deformação leva pontos distintos para pontos distintos, e assim ela não altera as propriedades de concorrência de retas no interior do sólido.

Sejam r_1, r_2 e r_3 as retas que unem os vértices da base inferior aos pontos médios dos lados opostos da base superior.

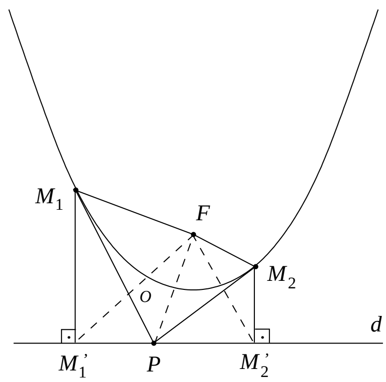
Na vista superior as projeções destas retas se confundem com as medianas da base superior, que são concorrentes.

Dois pontos médios da base superior são ligados pela base média do triângulo que é paralela a um dos lados do triângulo. Tomando a vista lateral em relação a este lado, a base média e este lado são vistos como um ponto. Assim duas das retas r_1, r_2 e r_3 se confundem nesta vista lateral, pois elas ligam os vértices do lado aos vértices da base média. Com isto, a concorrência das projeções das três retas se verifica também nesta vista.

Como as projeções das retas são concorrentes em duas vistas ortogonais, então as retas são concorrentes no espaço.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja uma parábola de foco F e diretriz d. Por um ponto $P \in d$, traçam-se tangentes à parábola que a interceptam em M_1 e M_2. Demonstre que M_1, M_2 e F estão em linha reta.

Solução:



Lema: A mediatriz m do segmento $M_1'F$, onde M_1' pertence à diretriz de uma parábola (P) com foco F, é a tangente a (P) no ponto M_1, tal que $M_1M_1' \perp d$.
Prova: Sejam M_1 uma interseção de m com (P) e M_1'' a projeção de M_1 na diretriz d. Como $M_1 \in m$ e $M_1 \in (P)$, então $M_1M_1' = M_1F = M_1M_1''$, com $M_1', M_1'' \in d$. Como $M_1M_1'' \perp d$, então $M_1' \equiv M_1''$, e assim $M_1M_1' \perp d$.

Para provar que m é tangente a (P), considere um ponto $M \in m$, diferente de M_1, cuja projeção na diretriz d seja M', diferente de M_1'. Assim, o segmento MM_1' é maior que o segmento MM'. Mas como $M \in m$, então $MM_1' = MF$. Logo, $MF > MM'$, e assim o ponto M não pertence a (P). Com isto, a interseção de m e (P) é única.

■

Seja m_1 uma tangente à parabola (P) por $P \in d$. Seja M_1' a projeção do ponto de tangência M_1 em d. Pelo lema acima, a mediatriz de $M_1'F$ é a tangente m_1. Seja O a interseção de m com $M_1'F$. Como $M_1F = M_1M_1'$ e $OF = OM_1'$, então os triângulos ΔM_1FO e $\Delta M_1M_1'O$ são congruentes, e assim $F\hat{M}_1O = M_1'\hat{M}_1O$. Desta forma, os triângulos ΔM_1FP e $\Delta M_1M_1'P$ são congruentes (caso LAL), e então $M_1\hat{F}P = M_1\hat{M}_1'P = 90^o$.

Analogamente para a outra tangente à (P), no ponto M_2, por $P \in d$, tem-se $M_2\hat{F}P = M_2\hat{M}_2'P = 90^o$. Sendo assim, $M_1\hat{F}M_2 = 180^o$ e os pontos M_1, F e M_2 são colineares.

IME 1984/1985 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam as funções

$$z = \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{1-x^4}$$

Mostre que no subconjunto dos reais onde as funções são definidas

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{z}{x^4}$$

Solução:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})^2}{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})} \\ &= \frac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^2} \end{aligned}$$

logo, podemos determinar que

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \frac{(x^2)\frac{1}{2}(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}(-4x^3)-(2x)(1+\sqrt{1-x^4})}{x^4} \\ &= -\frac{2(1+\sqrt{1-x^4})}{x^3\sqrt{1-x^4}} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2}(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}(-4x^3) = -\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}} \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{-\frac{2(1+\sqrt{1-x^4})}{x^3\sqrt{1-x^4}}}{-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}} = \frac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^6} = \frac{z}{x^4}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Encontre o valor de k para que a reta determinada pelos pontos $A(0,3)$ e $B(5,-2)$ seja tangente à curva $y = \dfrac{k}{x+1}$ para $x \neq -1$.

Solução:
A reta AB é descrita por $y = (3-x)$. Assim, para haver tangência, devemos ter que

$$\begin{cases} \frac{k}{x+1} = 3-x \\ (\frac{k}{x+1})' = (3-x)' \Rightarrow -\frac{k}{(x+1)^2} = -1 \end{cases}$$

ou seja,

$$x+1 = 3-x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow k = 4$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o valor de b tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \log_p 5^{t+1} = 4$$

onde $p = b^{(t+1)2^t}$.

Solução:
O limite L do enunciado é dado por

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \frac{\log 5^{t+1}}{\log b^{(t+1)2^t}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \frac{(t+1)}{(t+1)2^t} \log_b 5 \\ &= \log_b 5 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2^t} \\ &= 2\log_b 5 \end{aligned}$$

Logo,

$$L = 4 \Rightarrow \log_b 5 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{5}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja A uma relação definida sobre os reais, contendo os pontos pertencentes às retas $y = \frac{1}{2}x$ e $y = 2x$. Determine os pontos que necessariamente devem pertencer à A para que A seja transitiva.

Solução:
Como A contém as retas $y = \frac{1}{2}x$ e $y = 2x$, um ponto x_0 pode ser mapeado por A em $x_1 = 2x_0$ ou $x_1 = \frac{1}{2}x_0$. Por sua vez, o ponto x_1 poderá ser mapeado por A em $x_2 = 2x_1$ ou $x_2 = \frac{1}{2}x_1$. Ou seja, $x_2 = 4x_0$, $x_2 = x_0$ ou $x_2 = \frac{1}{4}x_0$. Por sua vez, o ponto x_2 poderá ser mapeado por A em $x_3 = 2x_2$ ou $x_3 = \frac{1}{2}x_2$. Ou seja, $x_3 = 8x_0$, $x_3 = 2x_0$, $x_3 = \frac{1}{2}x_0$ ou $x_3 = \frac{1}{8}x_0$. Para que A seja transitiva, ela deve conter todos os possíveis pontos $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Logo, A deve conter todas as retas do tipo $y = 2^k x$, com $k \in \mathbb{Z}$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam z_1 e z_2 complexos de raios vetores OP_1 e OP_2, respectivamente. Mostre que OP_1 e OP_2 são perpendiculares se e somente se $z_1\overline{z_2}$ é um imaginário puro.
Obs: $\overline{z}$ é o conjugado complexo de z.

Solução:
Sejam

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \end{array}\right. \Rightarrow z_1\overline{z_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Logo,

$$z_1 \perp z_2 \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 \mp \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} = r_1 r_2 e^{\mp\frac{\pi}{2}i} = \mp r_1 r_2 i$$

que é imaginário.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Sabe-se que as raízes do polinômio abaixo são todas reais e distintas

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0;$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$; $a_n \neq 0$. Mostre que a derivada $f'(x)$ possui também todas as suas raízes reais e distintas.

Solução:
Como $f(x)$ é um polinômio, ela é contínua e continuamente diferenciável, e podemos aplicar o Teorema do Valor Médio em sua função derivada. De fato, $f'(x)$ será um polinômio de ordem $(n-1)$, com conseqüentemente $(n-1)$ raízes.

Sejam $b_n > b_{n-1} > \ldots > b_1$, as n raízes reais e distintas de $f(x)$. Logo, entre duas raízes, b_k e b_{k-1}, existe ao menos um ponto x_0 em que

$$f'(x_0) = \frac{f(b_k) - f(b_{k-1})}{b_k - b_{k-1}} = 0$$

pois $f(b_k) = f(b_{k-1}) = 0$, para $k = 2, 3, \ldots, n$. Ou seja, entre duas raízes consecutivas de $f(x)$ deve haver uma raiz de $f'(x)$. Assim, podemos mostrar que $f'(x)$ possui as $(n-1)$ raízes reais e distintas.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja a sequência $\{v_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, definida a partir de seus dois primeiros termos v_0 e v_1 e pela fórmula geral

$$v_n = 6v_{n-1} - 9v_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 2$$

Define-se uma nova sequência $\{u_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, pela fórmula $v_n = 3^n u_n$.

a) **[Valor: 0,4]** Calcule $u_n - u_{n-1}$ em função de u_0 e u_1.
b) **[Valor: 0,3]** Calcule u_n e v_n em função de n, v_1 e v_0.
c) **[Valor: 0,3]** Identifique a natureza das sequências $\{v_n\}$ e $\{u_n\}$ quando $v_1 = 1$ e $v_0 = \frac{1}{3}$.

Solução:
Usando a relação de v_n e u_n na recursão de v_n, têm-se

$$\begin{aligned} 3^n u_n = 6 \times 3^{n-1} u_{n-1} - 9 \times 3^{n-2} u_{n-2} \Rightarrow \\ u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} \Rightarrow \\ u_n - u_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2} \end{aligned}$$

a) Do desenvolvimento acima,

$$\left.\begin{array}{l} u_n - u_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2} \\ u_{n-1} - u_{n-2} = u_{n-2} - u_{n-3} \\ u_{n-2} - u_{n-3} = u_{n-3} - u_{n-4} \\ \vdots \\ u_2 - u_1 = u_1 - u_0 \end{array}\right\} \Rightarrow u_n - u_{n-1} = u_1 - u_0$$

b) Da relação entre v_n e u_n, têm-se que

$$\left\{\begin{array}{l} v_0 = u_0 \\ v_1 = 3u_1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_0 = v_0 \\ u_1 = \frac{1}{3}v_1 \end{array}\right.$$

Do item (a), tem-se que $(u_n - u_{n-1})$ é constante, o que caracteriza uma progressão aritmética, e assim podemos escrever que

$$\left\{\begin{array}{l} u_n = u_0 + n(u_1 - u_0) \\ v_n = 3^n[u_0 + n(u_1 - u_0)] \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_n = v_0 + n(\frac{1}{3}v_1 - v_0) \\ v_n = 3^n[v_0 + n(\frac{1}{3}v_1 - v_0)] \end{array}\right.$$

c) Com $v_1 = 1$ e $v_0 = \frac{1}{3}$, têm-se

$$\left\{\begin{array}{l} u_n = \frac{1}{3} \\ v_n = 3^{n-1} \end{array}\right.$$

e assim, $\{u_n\}$ é um seqüência constante e $\{v_n\}$ é uma progressão geométrica.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Dois clubes do Rio de Janeiro participaram de um campeonato nacional de futebol de salão onde cada vitória valia um ponto, cada empate meio ponto e cada derrota zero ponto. Sabendo que cada participante enfrentou todos os outros apenas uma vez, que os clubes do Rio de Janeiro totalizaram, em conjunto, oito pontos e que cada um dos outros clubes alcançou a mesma quantidade k de pontos, determine a quantidade de clubes que participou do torneio.

Solução:
Cada partida distribui sempre o total de 1 ponto. Logo, o número total de pontos do campeonato é igual ao número total de partidas realizadas ao longo do mesmo. Assim, seja N o número de clubes, têm-se

$$8+(N-2)k = \frac{N(N-1)}{2} \Rightarrow k = \frac{(N+1)}{2} - \frac{14}{2(N-2)}$$

Logo, $2(N-2)$ deve ser divisor de 28. Verificando as possibilidades, observamos que as únicas alternativas viáveis são

$$\begin{cases} 2(N-2) = 14 \Rightarrow N = 9 \Rightarrow k = 4 \\ 2(N-2) = 28 \Rightarrow N = 16 \Rightarrow k = 8 \end{cases}$$

de modo que $N = 9$ ou $N = 16$ clubes.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Um exame vestibular se constitui de 10 provas distintas, 3 das quais da área de Matemática. Determine de quantas formas é possível programar a seqüência das 10 provas, de maneira que duas provas da área de Matemática não se sucedam.

Solução:
O total geral de possibilidades é 10!.

Destas, $3! \times 8 \times 7!$ possibilidades possuem as três provas de Matemática consecutivas, onde o fator 3! surge da ordem das três provas de Matemática, o fator 8 surge da posição das provas de Matemática no conjunto das 10 provas, e o fator 7! surge da ordem das demais 7 provas.

Além disto, se tivermos duas provas de Matemática como as duas primeiras ou as duas últimas provas, têm-se $6 \times 7 \times 7!$ possibilidades, onde o fator 6 surge da escolha das duas provas de Matemática dentre as três possibilidades, o fator 7 surge da ordem da terceira prova de Matemática não consecutiva às outras duas para não cair no caso anterior, e o fator 7! surge da ordem das demais 7 provas.

Se as duas provas de Matemática ocorrerem em seqüência no meio do exame, há $6 \times 6 \times 7 \times 7!$ possibilidades, onde o primeiro fator 6 surge da escolha das duas provas de Matemática dentre as três possibilidades, o segundo fator 6 surge da ordem da terceira prova de Matemática não consecutiva às outras duas para não cair no caso anterior, o fator 7 surge da posição das duas provas consecutivas de Matemática no conjunto das 10 provas, e o fator 7! surge da ordem das demais 7 provas.

Logo o número aceitável de formas é

$$10! - (3!8! + 42 \times 7! + 42 \times 7! + 252 \times 7!) = 1.693.440$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Uma reta m_1 passa pelo ponto fixo $P_1(-1,-3)$ e intercepta a reta $m_2 : 3x + 2y - 6 = 0$ no ponto A e a reta $m_3 : y - 3 = 0$ no ponto B. Determinar a equação do lugar geométrico do ponto médio do segmento retilíneo AB à medida que a reta m_1 gira em torno do ponto P_1.

Solução:
A reta m_1 é da forma $(y-ax+3-a) = 0$. Determinando as interseções, $A \equiv (x_a, y_a)$ e $B \equiv (x_b, y_b)$, de m_1 com m_2 e m_3, têm-se, respectivamente, que

$$\begin{cases} y_a - ax_a + 3 - a = 0 \\ 3x_a + 2y_a - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow A \equiv (\tfrac{12-2a}{3+2a}, \tfrac{9a-9}{3+2a})$$

$$\begin{cases} y_b - ax_b + 3 - a = 0 \\ y_b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow B \equiv (\tfrac{6-a}{a}, 3)$$

Logo, o ponto médio M de AB é tal que

$$M \equiv \frac{A+B}{2} = (\frac{-4a^2 + 21a + 18}{2a(3+2a)}, \frac{15a}{2(3+2a)})$$

cujo lugar geométrico, quando a varia, é tal que

$$y_m = \frac{15a}{2(3+2a)} \Rightarrow a = \frac{6y_m}{15-4y_m}$$

e então

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{-4\left(\frac{6y_m}{15-4y_m}\right)^2 + 21\left(\frac{6y_m}{15-4y_m}\right) + 18}{2\left(\frac{6y_m}{15-4y_m}\right)\left(3 + 2\frac{6y_m}{15-4y_m}\right)} \\ &= \frac{-4(36y_m^2) + 21(6y_m)(15-4y_m) + 18(15-4y_m)^2}{12y_m[3(15-4y_m) + 12y_m]} \\ &= \frac{-4y_m^2 - 3y_m + 45}{6y_m} \end{aligned}$$

ou seja, o lugar geométrico de M é descrito pela equação

$$4y^2 + 6xy + 3y = 45$$

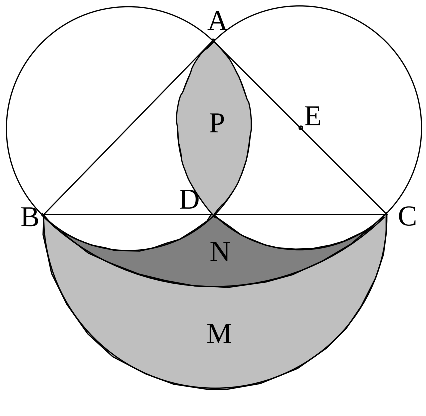
IME 1984/1985 - Geometria

1ª Questão [Valor: 0,6]
Dá-se um triângulo retângulo isósceles de catetos $AB = AC = \ell$. Descreve-se um quarto de círculo (Q) de centro A, ligando os vértices B a C. Com diâmetro BC, descreve-se um semi-círculo (S) exterior ao triângulo e que não contém A. Traçam-se duas semicircunferências de diâmetros AB e AC, (S_b) e (S_c), ambas passando pelo ponto D, meio de BC. Seja M a superfície compreendida entre (Q) e (S). Seja N a superfície entre (Q) e o arco BD de (S_b) e o arco CD de (S_c). Seja P a superfície limitada pelos arcos AD de (S_c) e AD de (S_b). Demonstre que:

a) A área M é igual a área do triângulo ABC.

b) As áreas N e P são iguais.

Solução:



a) A área M é a área do semi-círculo de raio $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$ subtraída de uma área S_1, que por sua vez é a área do setor circular de 90° com raio ℓ subtraída da área S_{ABC} do triângulo ΔABC. Assim,

$$M = \frac{\pi\frac{\ell^2}{2}}{2} - \left(\frac{\pi\ell^2}{4} - S_{ABC}\right) = S_{ABC} = \frac{\ell^2}{2}$$

b) A área N é a área S_1 subtraída de uma área S_2, que por sua vez é o dobro da área do setor circular de 90° com raio $\frac{\ell}{2}$ subtraída da área S_{EDC} do triângulo ΔEDC, onde E é ponto médio de AC. Assim,

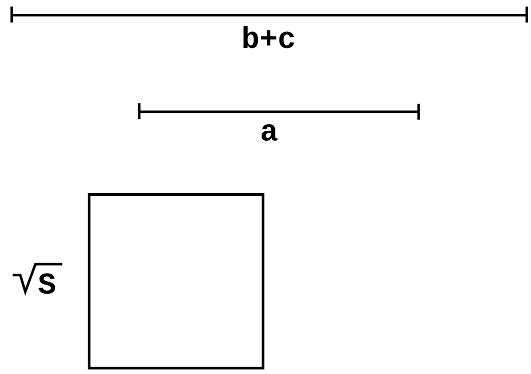
$$N = \left(\frac{\pi\ell^2}{4} - \frac{\ell^2}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi\ell^2}{16} - \frac{\ell^2}{8}\right) = \frac{(\pi-2)\ell^2}{8}$$

Já a área P é igual à area S_2, de modo que

$$P = 2\left(\frac{\pi\ell^2}{16} - \frac{\ell^2}{8}\right) = \frac{(\pi-2)\ell^2}{8}$$

e então $N = P$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Em um triângulo ABC são dados o lado a, a soma dos outros dois lados, $b + c = \ell$, e a área S.
a) Construa o triângulo com régua e compasso.
b) Calcule os ângulos A, B e C e os lados b e c.



Solução:

a) Do desenvolvimento do item (b), devemos realizar os seguintes passos:

(i) Determine

$$x_1 = \sqrt{\ell^2 - a^2} \Rightarrow \ell^2 = x_1^2 + a^2$$

traçando o triângulo retângulo com hipotenusa ℓ e catetos a e x_1. Para tal, trace a semi-circunferência $c_1$de diâmetro $LM = \ell$ e marque $LN = a$, com N sobre c_1, de modo que $NM = x_1$.

(ii) Determine

$$x_2 = \frac{4S}{\sqrt{\ell^2 - a^2}} = \frac{4S}{x_1} \Rightarrow \frac{x_2}{2\sqrt{S}} = \frac{2\sqrt{S}}{x_1}$$

traçando o triângulo retângulo com hipotenusa x_1 e cateto $2\sqrt{S}$, seguindo procedimento similar ao usado no passo (i) acima. A projeção do cateto sobre a hipotenusa é o segmento x_2 desejado, o que pode ser verificado por semelhança de triângulos.

(iii) Determine

$$x_3 = \sqrt{a^2 - \frac{16S^2}{\ell^2 - a^2}} = \sqrt{a^2 - x_2^2} \Rightarrow a^2 = x_2^2 + x_3^2$$

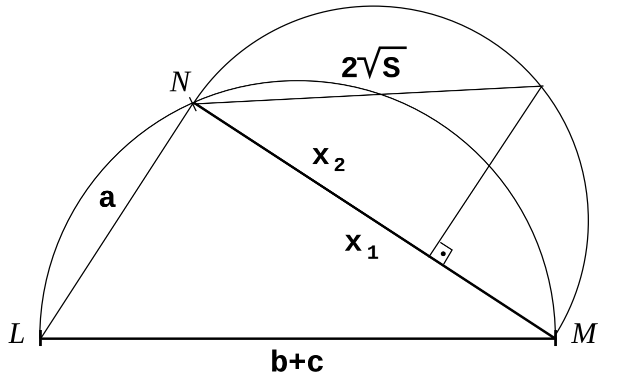
traçando o triângulo retângulo com hipotenusa a e catetos x_2 e x_3, seguindo procedimento similar ao usado no passo (i) acima.

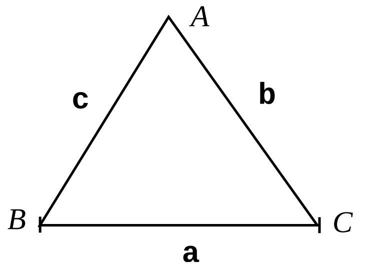
(iv) Os lados b e c do triângulo ΔABC são obtidos por

$$b, c = \frac{\ell \mp x_3}{2}$$

e, tendo o lado a, a construção desejada fica completa.

sln: No problema, $(b + c) = 6{,}80$ cm, $a = 3{,}72$ cm e $\sqrt{S} = 2{,}30$ cm. Assim, $x_2 \approx a$ e então $x_3 \approx 0$, de forma que $b \approx c = \frac{\ell}{2} = 3{,}4$ cm.





b) Usando a expressão $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, têm-se

$$\begin{aligned} 16S^2 &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \\ &= (a+\ell)(-a+\ell)[a-(b-c)][a+(b-c)] \\ &= (\ell^2-a^2)[a^2-(b-c)^2] \end{aligned}$$

e então

$$\begin{cases} b-c=\mp\sqrt{a^2-\frac{16S^2}{\ell^2-a^2}} \\ b+c=\ell \end{cases} \Rightarrow b,c=\frac{\ell\mp\sqrt{a^2-\frac{16S^2}{\ell^2-a^2}}}{2}$$

Traçando a altura h_b por B, é simples verificar que

$$S=\frac{bh_b}{2}=\frac{bc\,\text{sen}\,A}{2}$$

Logo,

$$\text{sen}\,A=\frac{2S}{bc}=\frac{8S(\ell^2-a^2)}{(\ell^2-a^2)^2+16S^2}$$

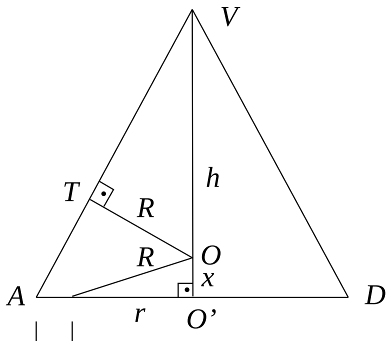
onde bc pode ser determinada pelas expressões de b e c dadas acima. Usando a lei dos senos,

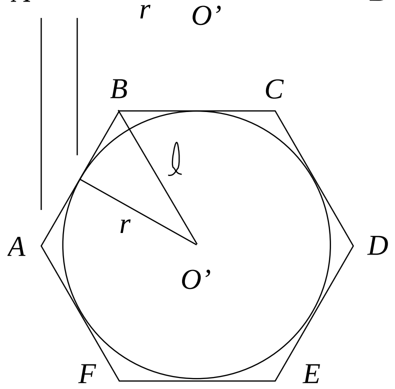
$$\text{sen}\,B,C=\frac{b,c\,\text{sen}\,A}{a}$$

com b,c e sen A determinados anteriormente.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice V e base $ABCDEF$, de lado da base igual a ℓ e altura h, determine, em função de ℓ e h, a posição do centro da esfera que é tangente às doze arestas da pirâmide.

Solução:





Sejam T o ponto de tangência da esfera na aresta AV, r e O' o raio e o centro, respectivamente, da seção da esfera no plano da base da pirâmide, e R e O o raio e o centro, respectivamente, da esfera pedida. Note que os pontos de tangência da esfera com as arestas da base hexagonal distam r do centro O' e R do centro O.

Da semelhança entre os triângulos $\Delta AVO'$ e ΔOVT, tem-se

$$\frac{AO'}{AV}=\frac{OT}{OV}\Rightarrow\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+h^2}}=\frac{R}{h-x}$$

onde $OO'=x$. Além disto, têm-se ainda que

$$\begin{cases} R^2=x^2+r^2 \\ r=\frac{\sqrt{3}}{2}\ell \end{cases} \Rightarrow R=\sqrt{x^2+\frac{3}{4}\ell^2}$$

Assim, eliminando R na equação inicial, têm-se

$$(h-x)\ell=\sqrt{(x^2+\frac{3}{4}\ell^2)(\ell^2+h^2)}$$

$$\Rightarrow (h^2-2hx+x^2)\ell^2=x^2\ell^2+x^2h^2+\frac{3}{4}\ell^4+\frac{3}{4}h^2\ell^2$$

$$\Rightarrow h^2x^2+2\ell^2hx+\frac{3\ell^4-\ell^2h^2}{4}=0$$

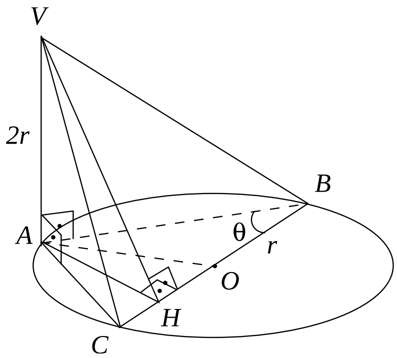
Eliminando a raiz negativa, a posição do centro da esfera fica determinada por

$$x=\frac{\ell}{2h}\left(\sqrt{\ell^2+h^2}-2\ell\right)$$

4ª Questão [Valor: 1,4]
Em um plano π dão-se uma circunferência de centro O e raio r, um ponto fixo A sobre ela e um diâmetro variável BC tal que o ângulo $\widehat{ABC}$ seja igual a Θ $(0 \leq \Theta \leq \pi/2)$. Sobre a perpendicular a π em A, marca-se um ponto V tal que $AV = 2r$. Considere-se um tetraedro $ABCV$.

a) Calcule em função de r e Θ as arestas do tetraedro.
b) Mostre que a soma dos quadrados destas arestas é constante quando Θ varia.
c) Qual o lugar geométrico do ponto H de π, pé da altura VH do triângulo VBC?
d) Para que posição de BC a área do triângulo VBC é máxima e qual o valor desse máximo?
e) Calcule, em função de Θ, a tangente de α, onde α é igual ao ângulo $\widehat{VHA}$.
f) Deduza o valor de Θ que corresponde ao mínimo do diedro de aresta BC.
g) Calcule Θ para que se tenha tangente de α igual a $4/\sqrt{3}$.

Solução:



a) Da figura e do enunciado, têm-se

$$\begin{cases} AV = 2r \\ BC = 2r \\ AB = 2r\cos\theta \\ AC = 2r\,\text{sen}\,\Theta \\ BV = \sqrt{AV^2 + AB^2} = 2r\sqrt{1+\cos^2\Theta} \\ CV = \sqrt{AV^2 + AC^2} = 2r\sqrt{1+\,\text{sen}^2\Theta} \end{cases}$$

b) Do item anterior,

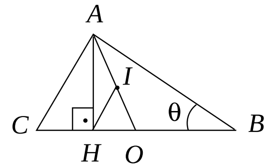
$$S = BC^2 + AB^2 + AC^2 + AV^2 + BV^2 + CV^2$$
$$= 4r^2(1+\cos^2\Theta + \text{sen}^2\Theta + 1 + 1 + \cos^2\Theta + 1 + \text{sen}^2\Theta)$$
$$= 24r^2$$

c) Como $AV \perp BC$, o pé H da altura de V em relação a BC é o mesmo pé da altura de A também em relação a BC.

Seja I o ponto médio de AO. Como o triângulo ΔAHO é retângulo em H, logo,

$$HI = IA = IO = \frac{AO}{2} = \frac{r}{2}$$

Assim, o lugar geométrico de H é a circunferência de centro I, ponto médio de AO, e raio $\frac{r}{2}$.



d) A área S do triângulo ΔVBC é dada por

$$S = \frac{VH \times BC}{2} = \frac{\sqrt{AH^2 + 4r^2} \times 2r}{2}$$

Assim, S é máxima quando AH for máxima. Mas,

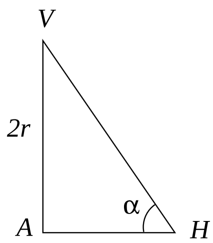
$$AH = AB\,\text{sen}\,\Theta = 2r\cos\Theta\,\text{sen}\,\Theta = r\,\text{sen}\,2\Theta$$

Logo, S é máxima quando

$$\Theta = 45^\text{o} \Rightarrow AH_{\text{máx}} = r \Rightarrow VH_{\text{máx}} = r\sqrt{5} \Rightarrow S_{\text{máx}} = r^2\sqrt{5}$$

e) Do triângulo retângulo ΔVAH, tem-se

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{AV}{AH} = \frac{2r}{r\,\text{sen}\,2\Theta} = \frac{2}{\text{sen}\,2\Theta}$$



f) O mínimo α corresponde a $\text{sen}\,2\Theta$ máximo, ou seja $\Theta = 45^\text{o}$, quando então $\alpha_{\text{mín}} = \text{arc tg}\,2$.

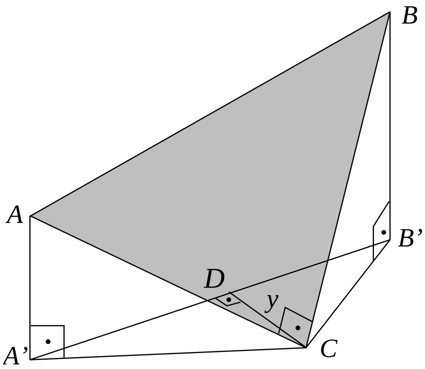
g)

$$\frac{2}{\text{sen}\,2\Theta} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{sen}\,2\Theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Theta = 30^\text{o}$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Dão-se um plano π e dois pontos A e B não pertencentes a π, situados em um mesmo semi-espaço de π, sendo:
i) $AB = \ell$.
ii) a e b as cotas de A e B em relação a π.
iii) $a < b$.

Determine um triângulo ABC isósceles, retângulo em C, tal que o vértice C pertença ao plano π. Discuta a possibilidade da existência desse triângulo e o número de soluções.

Solução:



Sejam A' e B' as projeções de A e B, respectivamente, no plano π, e D a projeção de C na reta $A'B'$. Seja ainda a notação

$$\begin{cases} A'D = c_1; \quad B'D = c_2 \\ A'C = d_1; \quad B'C = d_2 \\ CD = y \end{cases}$$

Da figura, têm-se que

$$\begin{cases} d_1^2 + a^2 = \frac{\ell^2}{2} \\ d_2^2 + b^2 = \frac{\ell^2}{2} \\ c_1^2 + y^2 = d_1^2 \\ c_2^2 + y^2 = d_2^2 \end{cases} \Rightarrow c_1^2 - c_2^2 = a^2 - b^2$$

Logo, como $(c_1 + c_2)^2 + (b - a)^2 = \ell^2$, têm-se que

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{\ell^2 - (b-a)^2}} \\ c_1 + c_2 = \sqrt{\ell^2 - (b-a)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{\ell^2 - 2a(a-b)}{2\sqrt{\ell^2 - (b-a)^2}} \\ c_2 = \frac{\ell^2 - 2b(b-a)}{2\sqrt{\ell^2 - (b-a)^2}} \end{cases}$$

e assim y fica determinado por

$$y = \sqrt{d_1^2 - c_1^2} = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{\ell^2 - 2(a^2 + b^2)}{\ell^2 - (b-a)^2}}$$

Conhecendo-se c_1 e y, podemos localizar o vértice C. Para haver solução, devemos ter

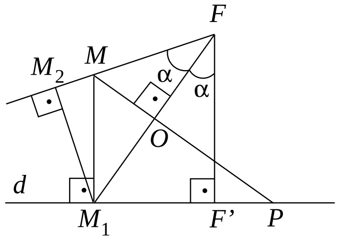
$$y \geq 0 \Rightarrow \frac{\ell^2}{2} \geq (a^2 + b^2)$$

De fato, se $\frac{\ell^2}{2} > (a^2 + b^2)$, há duas soluções, uma de cada lado da reta $A'B'$. Se $\frac{\ell^2}{2} = (a^2 + b^2)$, então $y = 0$ e há apenas uma solução sobre a reta $A'B'$, com $c_1 = b$ e $c_2 = a$. Se $\frac{\ell^2}{2} < (a^2 + b^2)$, então não há solução.

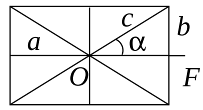
6ª Questão [Valor: 1,0]

a) **[Valor: 0,5]** Dá-se (P) uma parábola de foco F e diretriz d. Sejam M um ponto qualquer de (P); M_1 sua projeção sobre d; M_2 a projeção de M_1 sobre FM. Identifique o lugar geométrico de M_2 quando M descreve a parábola (P).
b) **[Valor: 0,5]** Em uma hipérbole (H) são dados um foco F e a diretriz correspondente d, que distam entre si 5 cm. A direção de uma assíntota forma um ângulo de 30º com o eixo focal. Pede-se calcular os valores dos semi-eixos de (H).

Solução:



(a)



(b)

a) **Lema:** A mediatriz m do segmento M_1F, onde M_1 pertence à diretriz de uma parábola (P) com foco F, é a tangente a (P) no ponto M, tal que $MM_1 \perp d$.
sln: Ver a prova deste resultado na 10ª questão de 1985/1986 (geometria).

■

Seja O o ponto médio de M_1F. O lema acima afirma que a mediatriz de M_1F tangencia a parábola em M. Como M pertence à parábola, $MF = MM_1$, e assim os triângulos ΔMFO e ΔMM_1O são congruentes, de forma que $M_1\hat{M}O = F\hat{M}O = (90^\circ - \alpha)$. Com isto, é simples concluir que $M\hat{F}O = F'\hat{F}O = \alpha$, onde F' é a projeção de F na diretriz d. Assim, dos triângulos ΔM_1M_2F e $\Delta M_1F'F$, têm-se que

$$FM_2 = FM_1 \cos\alpha = FF'$$

Logo, FM_2 é constante e igual ao parâmetro $2a$ da parábola, que é a distância do foco F à diretriz d. Assim, o lugar geométrico de M_2 é a circunferência de centro F e raio $2a$.

b) A inclinação de uma assíntota é tal que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{c}$.

A diretriz d é a reta cuja distância $\overline{Md}$ a um ponto M de (H) vezes a excentricidade e é igual ao raio vetor de M ao foco correspondente. Logo,

$$e\overline{Md} = \overline{MF} \Rightarrow \frac{c}{a}\overline{Md} = \frac{c}{a}x_m \pm a \Rightarrow \overline{Md} = x_m \pm \frac{a^2}{c}$$

Assim, d é uma reta, perpendicular ao eixo focal, cuja distância ao foco correspondente é igual a $\Delta = (c - \frac{a^2}{c})$. Logo, do enunciado, têm-se

$$\begin{cases} \frac{b}{c} = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \Delta = \frac{b^2}{c} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 10 \\ c = 20 \\ a = \sqrt{c^2 - b^2} = 10\sqrt{3} \end{cases}$$

7ª Questão [Valor: 0,8]
Em um triângulo ABC retângulo em A, é dada a razão k entre o produto das bissetrizes internas dos ângulos B e C e o quadrado da hipotenusa. Calcule B, em função de k. Determine entre que valores pode variar a razão k para que o problema tenha solução.

Solução:
Seja B' o pé da bissetriz b_B por B no triângulo ΔABC, que divide o lado AC nos segmentos $AB' = b_1$ e $CB' = b_2$, de forma que pelo teorema das bissetrizes têm-se

$$\frac{b_1}{c} = \frac{b_2}{a} = \frac{b_1+b_2}{c+a} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{bc}{c+a} \\ b_2 = \frac{ab}{c+a} \end{cases}$$

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo $\Delta BAB'$, tem-se então que

$$\begin{cases} b_B^2 = c^2 + b_1^2 = c^2 \frac{[(c+a)^2+b^2]}{(c+a)^2} = \frac{2ac^2}{c+a} \\ b_C^2 = \frac{2ab^2}{b+a} \end{cases}$$

onde o resultado para b_C, a bissetriz por C, é obtido de forma análoga ao resultado para b_B. Assim,

$$\begin{aligned} k &= \frac{b_B b_C}{a^2} \\ &= \frac{2bc}{a\sqrt{(c+a)(b+a)}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}h}{a+b+c} \end{aligned}$$

pois $ah = bc$ e $(a+b+c)^2 = 2(c+a)(b+a)$. Logo,

$$\begin{aligned} k(b+c) = 2\sqrt{2}h - ka &\Rightarrow \\ k^2(b^2+2bc+c^2) = 8h^2 - 4\sqrt{2}hka + ka^2 &\Rightarrow \\ 2k^2ah = 8h^2 - 4\sqrt{2}hka &\Rightarrow \\ \frac{h}{a} = \frac{k(k+2\sqrt{2})}{2} & \end{aligned}$$

Analisando o ângulo B, têm-se

$$\begin{cases} \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \\ \cos B = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow 2 \operatorname{sen} B \cos B = \operatorname{sen} 2B = \frac{bc}{a^2} = \frac{h}{a}$$

e então

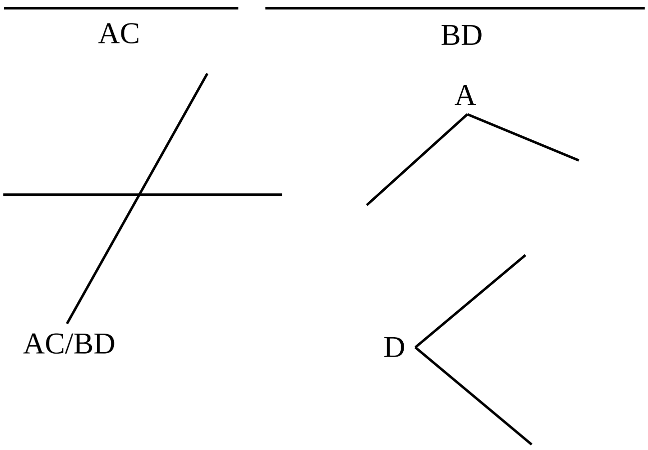
$$B = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{k(k+2\sqrt{2})}{2}$$

Como $0 < B < 90^{\circ}$, então $0 < 2B < 180^{\circ}$, e assim $0 < \operatorname{sen} 2B < 1$, de modo que

$$\begin{aligned} 0 < \frac{k(k+2\sqrt{2})}{2} < 1 &\Rightarrow \\ 0 < k(k+2\sqrt{2}) < 2 &\Rightarrow \\ 2 < (k+\sqrt{2})^2 < 4 &\Rightarrow \\ \sqrt{2} < k + \sqrt{2} < 2 &\Rightarrow \\ 0 < k < (2-\sqrt{2}) & \end{aligned}$$

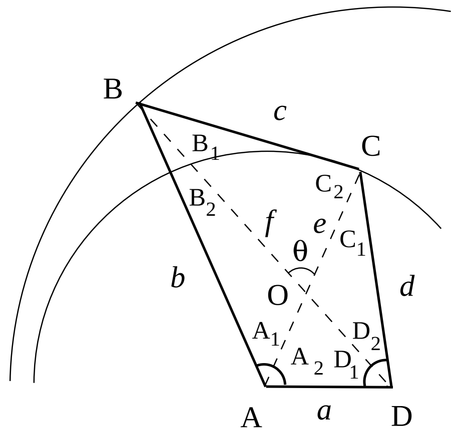
8ª Questão [Valor: 1,0]

a) **[Valor: 0,5]** Construa um quadrilátero convexo $ABCD$, dados: os comprimentos das diagonais AC e BD; o ângulo de AC com BD; os ângulos adjacentes A e D.



b) **[Valor: 0,5]** São dados dois círculos concêntricos, (C_1) e (C_2), de raios r_1 e r_2 $(r_1 > r_2)$ e centro O. Por um ponto A de (C_1) determine uma corda AD de (C_1), que corta (C_2) em B e C, tal que $AD = 3BC$. Discuta a possibilidade e o número de soluções.

Solução:



a) Seja a notação definida na figura acima. Aplicando a lei dos senos nos triângulos ΔADC e ΔADB, têm-se

$$\begin{cases} \frac{e}{\operatorname{sen} D} = \frac{a}{\operatorname{sen} C_1} \\ \frac{f}{\operatorname{sen} A} = \frac{a}{\operatorname{sen} B_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} C_1 = \frac{a \operatorname{sen} D}{e} \\ \cos C_1 = \frac{\sqrt{e^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 D}}{e} \\ \operatorname{sen} B_2 = \frac{a \operatorname{sen} A}{f} \\ \cos B_2 = \frac{\sqrt{f^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 A}}{f} \end{cases}$$

Além disto, da figura, é simples ver que

$$\begin{cases} B + C = B_1 + B_2 + C_1 + C_2 = 360^{\circ} - (A+D) \\ B_1 + C_2 + \theta = 180^{\circ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi = B_2 + C_1 = 180^{\circ} + \theta - (A+D) = 180^{\circ} + \phi'$$

onde $\phi' = [\theta - (A+D)]$, e assim

$$\cos\phi = -\cos\phi'; \;\operatorname{sen}\phi = -\operatorname{sen}\phi'$$

Assim, definindo

$$m = a\operatorname{sen}A; \; n = a\operatorname{sen}D$$

têm-se que

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \cos B_2\cos C_1 - \operatorname{sen}B_2\operatorname{sen}C_1\\ &= \frac{\sqrt{(f^2-m^2)(e^2-n^2)}-mn}{ef}\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(ef\cos\phi+mn)^2 = (f^2-m^2)(e^2-n^2) \Rightarrow\\ e^2m^2+f^2n^2+2efmn\cos\phi = e^2f^2(1-\cos^2\phi) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$a = \frac{ef\operatorname{sen}\phi}{\sqrt{e^2\operatorname{sen}^2A+f^2\operatorname{sen}^2D+2ef\operatorname{sen}A\operatorname{sen}D\cos\phi}}$$

Note que a grandeza

$$p^2 = e^2\operatorname{sen}^2A+f^2\operatorname{sen}^2D-2ef\operatorname{sen}A\operatorname{sen}D\cos\phi'$$

pode ser obtida a partir da construção de um triângulo Δ com lados $r = e\operatorname{sen}A$ e $s = f\operatorname{sen}D$ e ângulo ϕ' entre eles. Além disto, aplicando a lei dos senos neste triângulo Δ, tem-se

$$\frac{p}{\operatorname{sen}\phi'} = 2R \Rightarrow a = \frac{ef\operatorname{sen}\phi'}{p} = \frac{ef}{2R}$$

onde $2R$ é o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo Δ.

Assim, tem-se a seguinte construção:

(i) Obtenha os comprimentos $r = AC\operatorname{sen}A$ e $s = BD\operatorname{sen}D$, usando os semi-círculos de diâmetros AC e BD, e marcando os ângulos A e D, correspondentemente. Como A é obtuso, pode-se usar $(180^{\circ}-A)$.

(ii) Construa o triângulo Δ, de lados r e s e ângulo $\phi' = (\theta - A - D)$ entre estes dois lados.

(iii) Determine o diâmetro $2R$ do círculo circunscrito ao triângulo Δ a partir do encontro das mediatrizes dos lados deste triângulo.

(iv) Determine o lado $a = \frac{AC\times BD}{2R}$ do quadrilátero. A partir deste lado, usando os demais dados do enunciado, determine o quadrilátero de forma completa. O resultado desta construção é dado na figura inicial da solução deste problema.

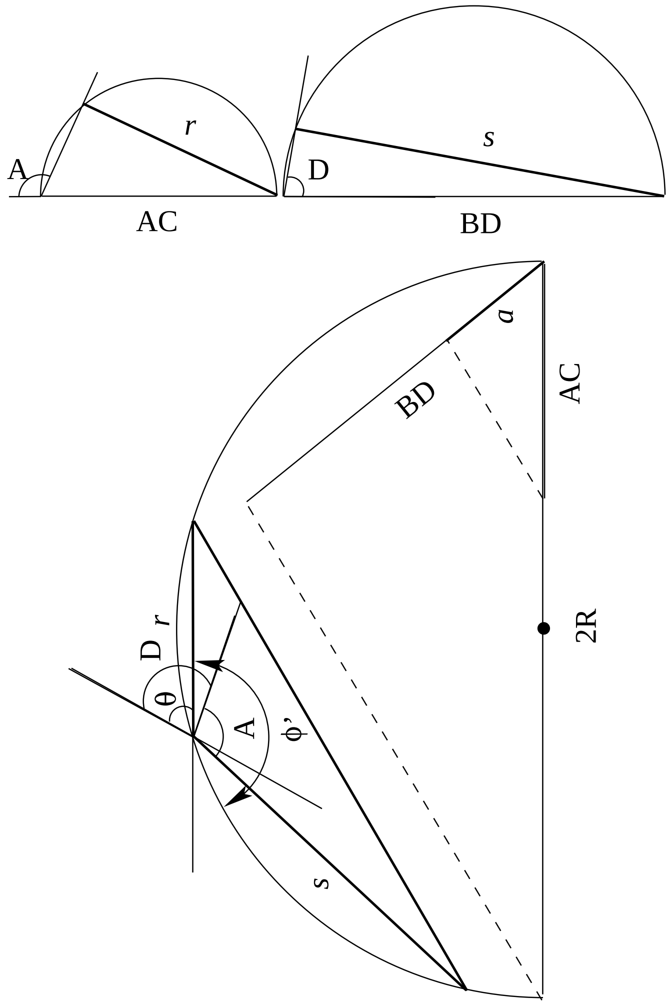
b) Como

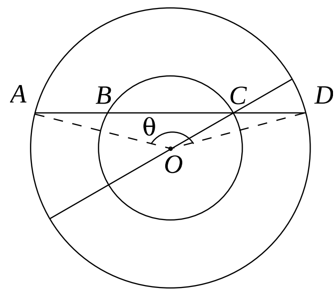
$$\begin{cases} AD = AB+BC+CD = 2AB+BC\\ AD = 3BC\end{cases}$$

$$\Rightarrow AB = BC = CD = x$$

a potência do ponto C é tal que

$$\operatorname{Pot}C = x\times 2x = (r_1-r_2)(r_1+r_2)$$





e então

$$r_1^2 = r_2^2 + 2x^2$$

Do triângulo ΔAOD,

$$(3x)^2 = r_1^2 + r_1^2 - 2r_1^2\cos\theta \Rightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{2r_1^2-9x^2}{2r_1^2} = \frac{9r_2^2-5r_1^2}{4r_1^2}$$

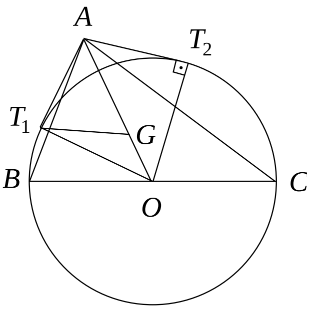
Para haver solução, devemos ter que

$$-1 \leq \cos\theta < 1 \Rightarrow r_2 < r_1 \leq 3r_2$$

onde no caso $r_1 = 3r_2$ a corda AD é diâmetro de (C_1).

9ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um triângulo acutângulo $A_1A_2A_3$. Traça-se um círculo de diâmetro A_2A_3 e de A_1 traçam-se tangentes a ele, com pontos de contato T_1 e T_1'. Analogamente procede-se com os lados A_3A_1 e A_1A_2, obtendo-se os pontos de contato T_2, T_2' e T_3, T_3'. Mostre que os seis pontos de contato obtidos pertencem a um círculo de centro G (baricentro de $A_1A_2A_3$).

Solução:



O comprimento da mediana $AO = m_a$ do triângulo ΔABC é tal que

$$\begin{cases} c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2m_a\frac{a}{2}\cos A\hat{O}B \\ b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2m_a\frac{a}{2}\cos(180^{\text{o}} - A\hat{O}B) \end{cases}$$

e assim

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

Seja G o baricentro do triângulo ΔABC, de modo que $AG = 2GO = \frac{2m_a}{3}$. Determinando a distância $T_1G = r$, ceviana do triângulo ΔOT_1A, retângulo em T_1, tem-se

$$\begin{cases} AT_1^2 = r^2 + \frac{4m_a^2}{9} - 2r\frac{2m_a}{3}\cos T_1\hat{G}A \\ \frac{a^2}{4} = r^2 + \frac{m_a^2}{9} - 2r\frac{m_a}{3}\cos(180^{\text{o}} - T_1\hat{G}A) \\ AT_1^2 = m_a^2 - \frac{a^2}{4} \end{cases}$$

Eliminando $\cos T_1\hat{G}A$ nas equações acima, tem-se

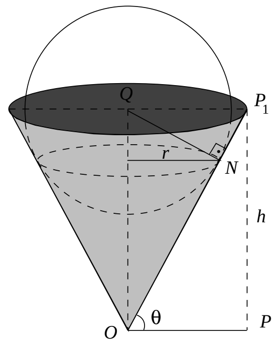
$$r^2 = \frac{4m_a^2 + 3a^2}{36} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{18}$$

Assim, pode-se concluir que a distância r, de T_1 a G, independe do vértice para o qual o cálculo é feito. Logo, os seis pontos de tangência têm a mesma distância r para o baricentro G do triângulo ΔABC.

10ª Questão [Valor: 1,2]
Dão-se um plano horizontal π, um de seus pontos O e a vertical em O, OV. A cada ponto P de π faz-se corresponder um ponto P_1 sobre a vertical em P, tal que $\frac{PP_1}{OP} = k$ (constante). Com essa correspondência, π transforma-se em uma superfície (S).

a) Deduza a natureza de (S), as seções de (S) por planos passando por OV e as seções de (S) por planos perpendiculares a OV; identifique o plano tangente a (S) em um ponto qualquer P_1.
b) De um ponto Q fixo sobre OV tal que $OQ = h$, traça-se uma perpendicular sobre OP_1: considera-se a esfera (E) de centro Q e raio QN. (N é o pé da perpendicular sobre OP_1). Determine a curva comum a (E) e a (S) e calcule o volume compreendido entre (E) e (S).

Solução:



a) A superfície (S) é um cone com vértice em O e abertura tal que $\operatorname{tg}\theta = k$. As seções de (S) por planos passando por OV são dois segmentos de retas que passam por O e têm inclinação θ com relação a π. Já as seções de (S) por planos perpendiculares a OV são circunferências de centro em OV. O plano tangente a (S) por P_1 é aquele com inclinação θ em relação a π e que contém a reta OP_1.
b) A curva comum é uma circunferência (c) de raio

$$r = QN\operatorname{sen}\theta = h\cos\theta\operatorname{sen}\theta = \frac{hk}{k^2+1}$$

a uma altura, em relação a O, igual a

$$h' = ON\operatorname{sen}\theta = h\operatorname{sen}^2\theta = \frac{hk^2}{k^2+1}$$

O volume V' desejado é o volume V_1 do cone de base (c) e altura h' menos o volume V_2 da calota esférica de base (c) e altura

$$h'' = QN(1-\cos\theta) = \frac{h}{k^2+1}(\sqrt{k^2+1}-1)$$

Assim,

$$\begin{aligned} V' &= \frac{\pi r^2 h'}{3} - \frac{\pi h''(3r^2 + h''^2)}{6} \\ &= \frac{\pi h^3}{3(k^2+1)^3}\Big[k^4 - (\sqrt{k^2+1}-1)(2k^2+1-\sqrt{k^2+1})\Big] \\ &= \frac{\pi h^3}{3(k^2+1)^3}\left[k^4 + 3k^2 + 2 - 2(k^2+1)^{\frac{3}{2}}\right] \end{aligned}$$

IME 1983/1984 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $\log a$ o logaritmo decimal de a e $\log_3 a$ o logaritmo de a na base 3. São dados: $\log 2 = \alpha$ e $\log 3 = \beta$. Calcule em função de α e β os valores de $\log N$ e $\log_3 N$ onde

$$N = 243 \sqrt[4]{\frac{364{,}5}{\sqrt[3]{2}}}$$

Solução:

$$\begin{aligned}\log N &= \log 3^5 + \frac{1}{4}\log\frac{3^6}{2} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\log 2\\ &= 5\beta + \frac{6}{4}\beta - \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{12}\alpha\\ &= \frac{13}{2}\beta - \frac{1}{3}\alpha\\ \log_3 N &= \frac{\log N}{\log 3} = \frac{13}{2} - \frac{1}{3}\frac{\alpha}{\beta}\end{aligned}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o polinômio

$$p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tal que $p(x) = p(1-x)$, $p(0) = 0$ e $p(-1) = 6$.

Solução:
Como $p(0) = 0$, então $d = 0$. Usando $x = 1$ e $x = 2$, têm-se

$$\left\{\begin{array}{l} p(1) = p(0) = 0\\ p(2) = p(-1) = 6\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} p(1) = 1+a+b+c = 0\\ p(2) = 16+8a+4b+2c = 6\\ p(-1) = 1-a+b-c = 6\end{array}\right.$$

Logo, somando as primeira e terceira equações, tem-se que $b = 2$, e assim

$$\left\{\begin{array}{l} a + c = -3\\ 8a + 2c = -18\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2\\ c = -1\end{array}\right.$$

de modo que $p(x) = (x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x)$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Quais as relações entre os coeficientes reais a, b, c, d da equação

$$x^2 + 2(a + ib)x + c + id = 0$$

de modo que ela seja satisfeita para um valor real $x = k$?
Obs: $i^2 = -1$.

Solução:
Para $x = k$ real, tem-se

$$k^2 + 2(a + ib)k + c + id = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} k^2 + 2ak + c = 0\\ 2bk + d = 0\end{array}\right.$$

Logo, para k real ser único, devemos ter

$$\left\{\begin{array}{l} c = a^2\\ -\frac{d}{2b} = -a\end{array}\right.$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Determine os valores de m para os quais as quatro raízes da equação biquadrada

$$x^4 - (3m + 5)x^2 + (m + 1)^2 = 0$$

sejam reais e estejam em progressão aritmética.

Solução:
Sejam as raízes da forma

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 = a - 3q\\ r_2 = a - q\\ r_3 = a + q\\ r_4 = a + 3q\end{array}\right.$$

Logo, por Girard, tem-se que

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 4a = 0 \Rightarrow a = 0$$

e as demais relações de Girard nos dizem que

$$\left\{\begin{array}{l} r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4 = -(3m+5)\\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = 0\\ r_1r_2r_3r_4 = (m + 1)^2\end{array}\right.$$

de modo que

$$\left\{\begin{array}{l} q^2(3-3-9-1-3+3) = -(3m+5)\\ q^3(3+9-9-3) = 0\\ 9q^4 = (m+1)^2\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} q^2 = \frac{3m+5}{10}\\ q^2 = \mp\frac{m+1}{3}\end{array}\right.$$

ou seja

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{3m+5}{10} = \frac{m+1}{3}\\ \text{ou}\\ \frac{3m+5}{10} = -\frac{m+1}{3}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m = 5 \ \text{ e } \ q^2 = 2\\ \text{ou}\\ m = -\frac{25}{19} \ \text{ e } \ q^2 = \frac{2}{19}\end{array}\right.$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a soma de todos os números inteiros que são obtidos permutando-se, sem repetição, os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

Solução:
Seja N o número total de números obtidos pela permutação sem repetição dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Para cada número $n_1 = abcde$ tem-se o seu complemento da forma $n_2 = (6-a)(6-b)(6-c)(6-d)(6-e)$ tal que $(n_1 + n_2) = 66666$. Logo, a soma total S dos N números é

$$S = 66666 \times \frac{N}{2} = 66666 \times \frac{5!}{2} = 3.999.960$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja o desenvolvimento $\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\right)^n$ onde n é um inteiro positivo. Determine n sabendo-se que o maior dos coeficientes é o do termo em x^{n-9}.

Solução:
O maior coeficiente do desenvolvimento é tal que

$$\binom{n}{n-8}2^8 < \binom{n}{n-9}2^9 > \binom{n}{n-10}2^{10}$$

Logo,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{n!}{(n-8)!8!}2^8 < \frac{n!}{(n-9)!9!}2^9\\ \frac{n!}{(n-9)!9!}2^9 < \frac{n!}{(n-10)!10!}2^{10}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 9 < 2(n-8)\\ 10 < 2(n-9)\end{array}\right. \Rightarrow n = 13$$

7ª Questão [Valor: 1,0]
São dadas duas retas paralelas r e r' e um ponto O. Determine o lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas de O aos segmentos da reta AA', vistos de O sob um ângulo reto e tais que A pertence a r e A' pertence a r'. Sabe-se que:
Distância de O a r : d.
Distância de O a r': p.
Distância de r a r': $p - d$.

Solução:
Sejam os pontos $O \equiv (0,0)$, $A \equiv (x_a, d)$ e $A' \equiv (x'_a, p)$, de modo que as retas OA e OA' são descritas por

$$\begin{cases} OA : y = \frac{d}{x_a}x \\ OA' : y = \frac{p}{x'_a}x \end{cases}$$

Como OA e OA' devem ser ortogonais, então devemos ter $x_a x'_a = -pd$. Assim, eliminando x'_a, a reta AA' pode descrita por

$$AA' : y = \frac{(d-p)x_a}{x_a^2 + pd}x + \frac{p(d^2 + x_a^2)}{x_a^2 + pd}$$

e a reta OM, sendo ortogonal a AA' e passando pela origem, passa a ser descrita por

$$OM : y = -\frac{x_a^2 + pd}{(d-p)x_a}x$$

Logo, o ponto M, interseção de AA' com OM, é tal que

$$-\frac{x_a^2 + pd}{(d-p)x_a}x_m = \frac{(d-p)x_a}{x_a^2 + pd}x_m + \frac{p(d^2 + x_a^2)}{x_a^2 + pd}$$

e assim é possível determinar que

$$(x_m, y_m) = (\frac{p(p-d)x_a}{x_a^2 + p^2}, \frac{p(x_a^2 + pd)}{x_a^2 + p^2})$$

Determinando o lugar geométrico de M, tira-se da equação de y_m que

$$x_a = \mp p\sqrt{\frac{d - y_m}{y_m - p}}$$

Usando este valor na equação de x_m, tem-se

$$x_m = \mp\frac{p(p-d)p\sqrt{\frac{d-y_m}{y_m-p}}}{\frac{p^2(d-y_m)}{y_m-p} + p^2} = \pm\sqrt{(d-y_m)(y_m-p)}$$

Logo o lugar geométrico de M é tal que

$$x_m^2 = (d-y_m)(y_m-p) \Rightarrow x_m^2 + \left[y - \left(\frac{d+p}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{d-p}{2}\right)^2$$

que corresponde à circunferência de centro $(0, \frac{d+p}{2})$ e raio $\frac{p-d}{2}$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a função definida nos reais por

$$y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$$

a) **[Valor: 0,6]** Estude a sua variação quanto a: continuidade e possível simetria de sua representação, crescimento ou descrescimento, extremos, inflexões e assíntotas.
b) **[Valor: 0,4]** Faça o esboço gráfico da curva representativa da função.

Solução:
É simples perceber que y é contínua no domínio $x \neq \mp 1$ e simétrica em relação ao eixo y. Além disto, no domínio de y, têm-se que

$$y' = \frac{(x^2-1)(2x)-(2x)(x^2)}{(x-1)^2}e^{\frac{x^2}{x^2-1}} = -\left(\frac{2x}{(x^2-1)^2}\right)e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$$

$$y'' = \left(\frac{6x^4 - 2}{(x^2-1)^4}\right)e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$$

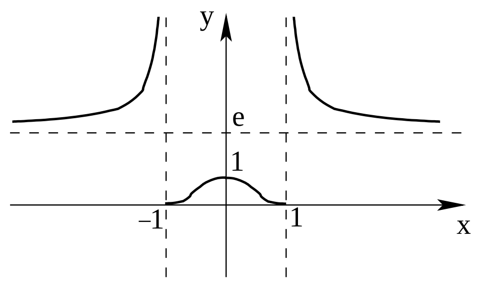
E assim têm-se:

$$\begin{cases} y(0) = 1 > 0; y(\mp\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\sqrt{e}}{e} > 0 \\ \lim\limits_{x\to\mp\infty} y = e \\ \lim\limits_{x\to-1^-} y = \lim\limits_{x\to 1^+} y = \infty \\ \lim\limits_{x\to-1^+} y = \lim\limits_{x\to 1^-} y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(0) = 0; \\ \lim\limits_{x\to-1^-} y' = -\infty; \quad \lim\limits_{x\to 1^+} y' = \infty \\ \lim\limits_{x\to-1^+} y' = \lim\limits_{x\to 1^-} y' = 0 \\ \lim\limits_{x\to\mp\infty} y' = 0 \\ \begin{cases} y' > 0, \text{ se } (x \neq -1) < 0 \\ y' < 0, \text{ se } (x \neq 1) > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''(\mp\frac{\sqrt{3}}{3}) = 0; \ y''(0) = -2\sqrt{e} < 0 \\ \lim\limits_{x\to\mp\infty} y'' = 0 \\ \begin{cases} y'' > 0, \text{ se } (x \neq -1) < -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e } \frac{\sqrt{3}}{3} < (x \neq 1) \\ y'' < 0, \text{ se } -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \end{cases}$$

O que determina os seguintes pontos de interesse: $(0,1)$ é máximo local, $(\mp\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{e}}{e})$ são pontos de inflexão (mudança de concavidade). Além disto, têm-se a assíntota horizontal $y = e$ e assíntotas verticais em $x \to \mp 1$. O gráfico de y é mostrado a seguir.



9ª Questão [Valor: 1,0]
Seja D o determinante da matrix $A = [a_{ij}]$ de ordem n, tal que $a_{ij} = |i - j|$. Mostre que:

$$D = (-1)^{n-1}.(n-1).2^{n-2}$$

Solução:
Da definição

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & (n-2) & (n-1) \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & (n-3) & (n-2) \\ 2 & 1 & 0 & \ldots & (n-4) & (n-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (n-2) & (n-3) & (n-4) & \ldots & 0 & 1 \\ (n-1) & (n-2) & (n-3) & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Forma-se uma nova matriz de colunas c'_i a partir da matriz original de colunas c_i, sem alterar o valor de D, realizando a seguinte operação

$$c'_{i-1} = c_{i-1} - c_i$$

para $i = 1, 2, \ldots, (n-1)$, de modo que

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & (n-1) \\ +1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & (n-2) \\ +1 & +1 & -1 & \ldots & -1 & (n-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ +1 & +1 & +1 & \ldots & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & \ldots & +1 & 0 \end{vmatrix}$$

Repetindo a operação acima, só que agora para $i = 1, 2, \ldots, (n-2)$, tem-se

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & (n-1) \\ 2 & 0 & 0 & \ldots & -1 & (n-2) \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & -1 & (n-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & +1 & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicando Laplace na primeira linha, nota-se que o termo correspondente à penúltima coluna é nulo, pois tal termo teria a última linha nula. Assim, sobra apenas o termo correspondente à última coluna que é dado por

$$D = (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & +1 \end{vmatrix}$$

Assim, D é o determinante de uma matriz triangular superior, isto é, D é o produto dos termos da diagonal principal, de modo que

$$D = (-1)^{n-1}.(n-1).2^{n-2}$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a matriz $M = (m_{ij})$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, define-se em A uma relação R por:

$$a_i \; R \; a_j \Leftrightarrow m_{ij} = 1$$

Verifique se R é uma relação de equivalência.

Solução:
É simples ver que R é reflexiva pois todos os elementos da diagonal principal de M são iguais a 1. É simples também perceber que como M é simétrica, R também o será.

Além disto $m_{24} = m_{43} = 1$, logo $a_2 R a_4$ e $a_4 R a_3$ são definidos. Porém, $m_{23} \neq 1$, e assim $a_2 R a_3$ não é definido. Logo, R não é transitiva e, desta forma, R não é uma relação de equivalência.

IME 1983/1984 - Geometria

1ª Questão [Valor: 0,8]
Um triângulo equilátero ABC, de lado a, gira em torno de um eixo XX' de seu plano, passando por A sem atravessar o triângulo. Sendo S a área total da superfície gerada pelo triângulo e designando por Θ o ângulo $X\hat{A}B$, pede-se determinar os valores de Θ para que:

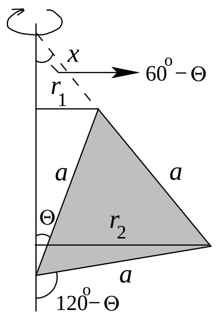
a) S seja máximo.

b) S seja mínimo.

c) $S = 3\pi a^2$.

Descreva o sólido obtido em cada um dos três casos.

Solução:



A área total S é a área de um cone de raio da base r_1 e geratriz a, mais a área de um cone de raio da base r_2 e geratriz a, mais a área lateral de um tronco de cone de bases com raios r_1 e r_2. Assim, da figura, com $0 \leq \Theta \leq 60^\circ$ (por simetria), têm-se que a área lateral S_T do tronco é

$$\begin{aligned} S_T &= \pi a^2[\,\mathrm{sen}\,(60^\circ+\Theta)(\frac{x}{a}+1) - \frac{x}{a}\,\mathrm{sen}\,\Theta] \\ &= \pi a x[\,\mathrm{sen}\,(60^\circ+\Theta) - \,\mathrm{sen}\,\Theta] + \pi a^2\,\mathrm{sen}\,(60^\circ+\Theta) \\ &= \pi a x[\,2\,\mathrm{sen}\,30^\circ\cos(30^\circ+\Theta)] + \pi a^2\,\mathrm{sen}\,(60^\circ+\Theta) \\ &= \pi a^2[\,\mathrm{sen}\,\Theta + \,\mathrm{sen}\,(60^\circ+\Theta)] \end{aligned}$$

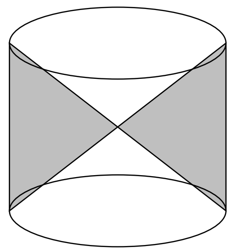
pois

$$\begin{cases} r_1 = a\,\mathrm{sen}\,\Theta = x\,\mathrm{sen}\,(60^\circ-\Theta) \\ \cos(30^\circ+\Theta) = \,\mathrm{sen}\,(60^\circ-\Theta) \end{cases}$$

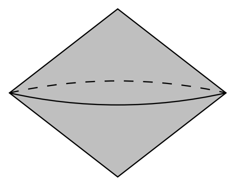
Logo,

$$\begin{aligned} S &= \pi a^2[r_1+r_2] + S_T \\ &= 2\pi a^2[\,2\cos(-30^\circ)\,\mathrm{sen}\,(30^\circ+\Theta)] \\ &= 2\pi a^2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,(30^\circ+\Theta) \end{aligned}$$

a) Como S é crescente com Θ, $S_{\text{máx}} = 2\pi a^2\sqrt{3}$, obtido com $\Theta = 60^\circ$. A superfície é composta de um cilindro (c), de altura a e raio da base $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, subtraído de dois cones opostos pelo vértice, de mesmos eixos e raios da base que (c), e altura $\frac{a}{2}$ cada.



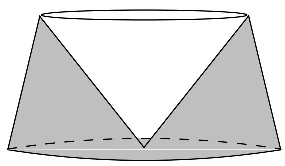
b) Como S é crescente com Θ, $S_{\text{mín}} = \pi a^2\sqrt{3}$, obtido com $\Theta = 0^\circ$. A superfície é composta de dois cones, opostos pela base, com altura $\frac{a}{2}$ e raio da base $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.



c)

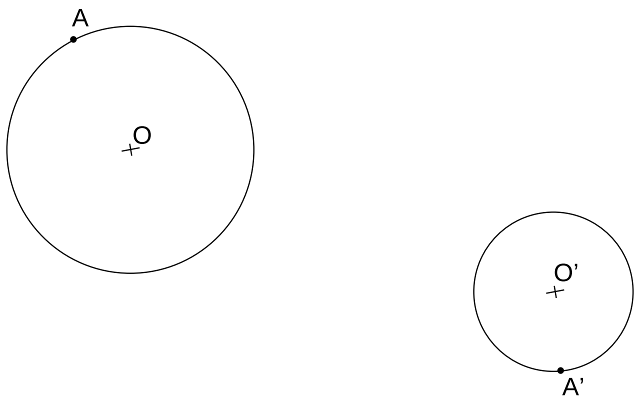
$$S = 3\pi a^2 \Rightarrow \,\mathrm{sen}\,(30^\circ+\Theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Theta = 30^\circ$$

A superfície gerada é composta de um cilindro (c) de raio da base a e altura $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, subtraído de um cone de mesmos raio da base e altura que (c).



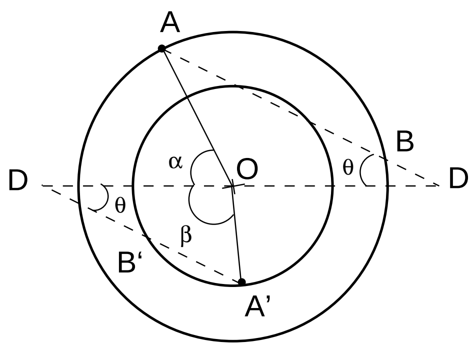
2ª Questão [Valor: 1,4]

a) **[Valor: 0,8]** São dados dois círculos $C(O,r)$ e $C'(O',r')$, um ponto fixo A sobre C e um ponto fixo A' sobre C'. Traçam-se cordas paralelas AB e $A'B'$ nos círculos C e C', respectivamente. Determine a direção destas cordas para que o produto $AB.A'B'$ seja máximo.



b) **[Valor: 0,6]** Dá-se um triângulo ABC. De um ponto P variável (e não pertencente às retas suportes dos lados do triângulo) traçam-se retas PB e PC. Sejam L e M os pés das perpendiculares de A a estas retas. Com a variação de P, o comprimento LM também varia. Qual o comprimento máximo de LM?
Obs: Para resolver este item não é necessário determinar a posição de P, correspondente a este máximo de LM.

Solução:



a) Podemos trabalhar com os dois círculos concêntricos, transpondo o centro de um deles para o centro do outro. Sejam, nesta nova figura, o diâmetro DD' e os ângulos $A\hat{O}D = \alpha$ e $A'\hat{O}D = \beta$. Seja ainda a direção ótima desejada $A'\hat{D}O = A\hat{D'}O = \theta$. Da figura, têm-se que

$$\begin{cases} O\hat{A}B = O\hat{B}A = \alpha - \theta \\ O\hat{A'}B' = O\hat{B'}A' = 180^\circ - \beta - \theta \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} AB = 2R\cos(\alpha-\theta) \\ A'B' = 2r\cos(180^\circ - \beta - \theta) = -2r\cos(\beta+\theta) \end{cases}$$

e então

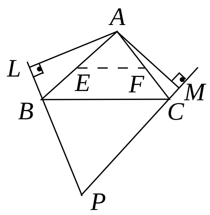
$$\begin{aligned} AB.A'B' &= -4rR\cos(\alpha-\theta)\cos(\beta+\theta) \\ &= -2rR\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\beta-\alpha+2\theta)\right] \end{aligned}$$

Como $\cos(\alpha+\beta)$ é constante, $AB.A'B'$ é máximo quando $\cos(\beta-\alpha+2\theta)$ for mínimo, ou seja, quando

$$\theta = \frac{\pi+\alpha-\beta}{2}$$

Note que a bissetriz de $A\hat{O}A'$ faz com o eixo OD um ângulo igual a $\frac{\beta-\alpha}{2}$. Logo, a direção θ é perpendicular a esta bissetriz.

b) **(Baseada em solução do Colégio Princesa Isabel)**



Sejam E e F os pontos médios dos lados $AB = c$ e $AC = b$, respectivamente. Os pontos L e M pertencem às circunferências de centros E e F e raios $\frac{AB}{2}$ e $\frac{AC}{2}$, respectivamente. Pela desigualdade triangular,

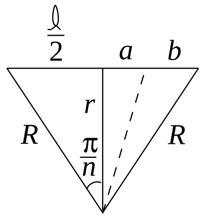
$$LM \leq LE + EF + FM \Rightarrow$$

$$LM_{\text{máx}} = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} = \frac{c+a+b}{2} = p$$

3ª Questão [Valor: 0,5]
Sejam ℓ o lado de um polígono regular de n lados, r e R, respectivamente, os raios dos círculos inscrito e circunscrito a este polígono. Prove que

$$r + R = \frac{\ell}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}$$

Solução:



Da figura, o ângulo $\frac{\pi}{2n}$ é obtido traçando a bissetriz do triângulo retângulo de catetos $\frac{\ell}{2}$ e r e hipotenusa R, de modo que

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n} = \frac{r}{a}$$

Mas, pelo teorema das bissetrizes,

$$\frac{r}{a} = \frac{R}{b} = \frac{r+R}{a+b} = \frac{r+R}{\frac{\ell}{2}}$$

logo,

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n} = \frac{r+R}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow r + R = \frac{\ell}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}$$

4ª Questão [Valor: 0,8]
Um paralelepípedo tem a base $ABCD$ sobre um plano horizontal e as arestas verticais são AA', BB', CC' e DD'. As três arestas concorrentes $AB = a$, $AD = b$ e $AA' = c$ formam um triedro tri-retângulo, sendo $a > b > c$. Um plano secante corta a aresta AB em seu ponto médio M, a aresta BB' no ponto N, tal que $\frac{NB'}{NB} = \frac{1}{3}$ e a aresta $B'C'$ em P, tal que $B'P = x$, com $0 < x \leq b$. Pede-se estudar a forma das seções obtidas pelo plano secante MNP no paralelepípedo, quando a distância x varia nas condições dadas.

Solução:
Situando uma origem de eixos cartesianos em A, e chamando $B'P = p$ (ao invés de x, como indicado no enunciado, para evitar confusão com a abscissa no nosso sistema de coordenadas), tem-se que o plano MNP é descrito pela equação

$$\begin{cases} M \equiv (\frac{a}{2}, 0, 0) \\ N \equiv (a, 0, \frac{3c}{4}) \;\Rightarrow MNP: \;\dfrac{2}{a}x + \dfrac{1}{3p}y - \dfrac{4}{3c}z = 1 \\ P \equiv (a, p, c) \end{cases}$$

Os planos $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são caracterizados por

$$\begin{cases} ABCD \equiv (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, z = 0) \\ A'B'C'D' \equiv (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, z = c) \end{cases}$$

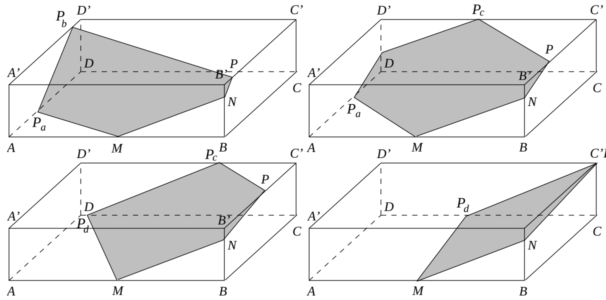
Definem-se quatro casos:

$$\begin{cases} \text{Caso 1}: 0 \leq p \leq \frac{b}{7} \\ \text{Caso 2}: \frac{b}{7} \leq p \leq \frac{b}{3} \\ \text{Caso 3}: \frac{b}{3} \leq p < b \\ \text{Caso 4}: p = b \end{cases}$$

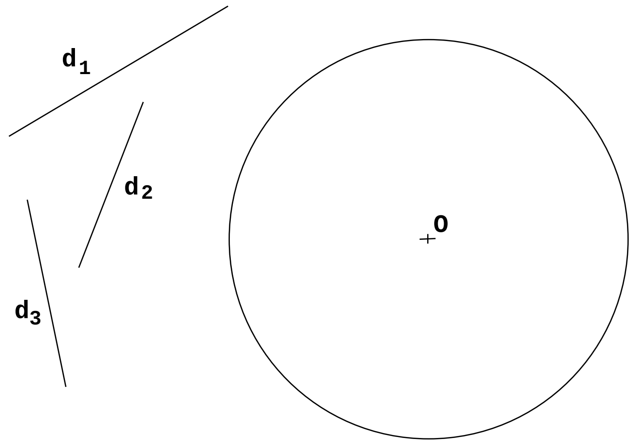
As interseções do plano MNP com $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são as retas r_1 e r_2, respectivamente descritas por

$$\begin{cases} r_1: \;\frac{2}{a}x + \frac{1}{3p}y = 1 \\ r_2: \;\frac{2}{a}x + \frac{1}{3p}y = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Assim, no Caso 1, r_1 encontra AD em $P_a \equiv (0, 3p, 0)$ e r_2 encontra $A'D'$ em $P_b \equiv (0, 7p, c)$. No Caso 2, r_1 ainda encontra AD no ponto P_a, mas a reta r_2 passa a encontrar $D'C'$ em $P_c \equiv (\frac{7a}{6} - \frac{ba}{6p}, b, c)$. No Caso 3, r_1 passa a encontrar DC em $P_d \equiv (\frac{a}{2} - \frac{ba}{6p}, b, 0)$, e r_2 ainda encontra $D'C'$ no ponto P_c. No Caso 4, $p = b$, e então $P \equiv P_c \equiv C'$, e a seção se torna um quadrilátero. Os quatro casos são ilustrados na figura a seguir.

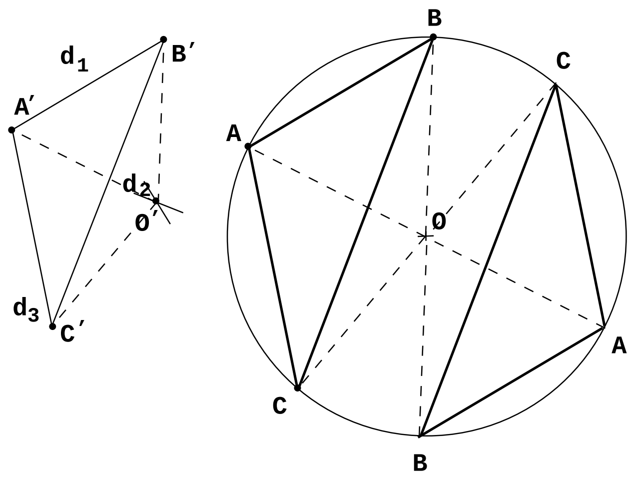


5ª Questão [Valor: 0,6]
Dão-se um círculo (c), de centro O, e três direções d_1, d_2 e d_3. Inscreva em (c) os triângulos cujos lados AB, BC e CA têm, respectivamente, as direções d_1, d_2 e d_3 e cujos vértices A, B e C se sucedem no círculo (c), no sentido do movimento dos ponteiros do relógio.



Solução:
Prolongue d_1, d_2 e d_3, determinando o triângulo auxiliar $\Delta A'B'C'$, com $A'B'$ sobre d_1, $B'C'$ sobre d_2 e $A'C'$ sobre d_3, com A', B' e C' no sentido horário.

Determine o circuncentro O' (encontro das mediatrizes) do triângulo $\Delta A'B'C'$. Assim, basta traçarmos paralelas a $O'A'$, $O'B'$ e $O'C'$ por O para determinarmos uma solução para A, B e C, respectivamente, sobre (c). A outra solução pode ser obtida por simetria em relação ao centro O de (c), como indicado na figura a seguir.

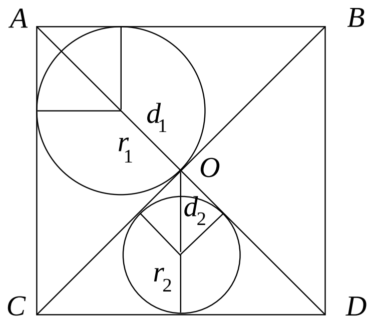


A justificativa para estas construçẽs é que a partir do circuncentro os ângulos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}A$ se preservam. Assim, o mesmo acaba ocorrendo para os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, que são determinados pelos encontros das direções dadas, duas-a-duas.

sln: As figuras do enunciado e da solução estão ligeiramente escaladas, em relação ao tamanho original, por motivo de formatação.

6ª Questão [Valor: 0,6]
Dão-se um quadrado de vértices A, B, C e D e o seu centro O. Mostre que os incentros dos triângulos, cujos vértices são cada 3 pontos não colineares deste conjunto de 5 pontos, são vértices de um polígono regular convexo e calcule, em função do lado ℓ do quadrado, o raio do círculo no qual está inscrito o polígono.

Solução:



Têm-se, fundamentalmente, duas situações ilustradas na figura acima. Há quatro casos do tipo 1 em que os três pontos são vértices do quadrado: ABC, ABD, ACD e BCD. Há ainda quatro casos do tipo 2 em que O é um dos vértices do triângulo: ABO, BCO, CDO e DAO. Sejam r_1 e r_2 os raios dos círculos inscritos ao triângulo nas situações dos tipos 1 e 2, respectivamente. Da figura, têm-se

$$\begin{cases} r_1 + r_1\sqrt{2} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \\ r_2 + r_2\sqrt{2} = \frac{\ell}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{\ell\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} \\ r_2 = \frac{\ell}{2(1+\sqrt{2})} \end{cases}$$

Para cada tipo, a distância do centro do círculo inscrito ao centro do quadrado é dada por

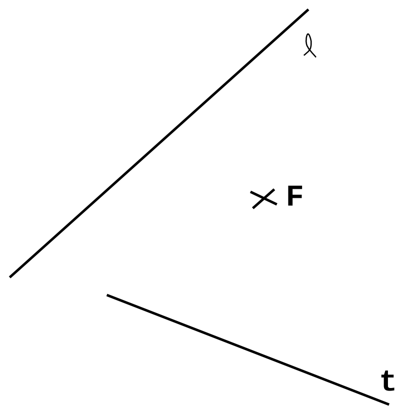
$$\begin{cases} d_1 = r_1 = \frac{\ell\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} \\ d_2 = r_2\sqrt{2} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} \end{cases}$$

de modo que em todos os oito casos a distância é sempre a mesma e igual ao raio do círculo no qual o octógono regular está inscrito.

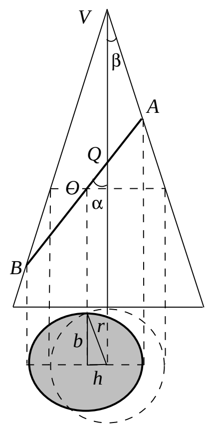
7ª Questão [Valor: 1,4]

a) **[Valor: 0,8]** São dados um cone de revolução de vértice V, cuja geratriz faz com o eixo do cone um ângulo β e uma elipse de semi-eixos a e b.
   (1) Mostre que esta elipse pode ser sempre obtida como seção plana do cone dado.
   (2) Sendo AB o traço do plano secante com o plano meridiano AVB, que lhe é perpendicular, demonstre a relação $VA.VB = b^2 \operatorname{cossec}^2 \beta$.

b) **[Valor: 0,6]** Em uma hipérbole (h) são dados: um foco F, uma assíntota (ℓ) e uma tangente (t). Pede-se determinar graficamente o outro foco, a outra assíntota e os comprimentos dos eixos, justificando a construção executada.



Solução:



a) 1º) Sejam A e B os extremos do eixo principal da elipse, e Q a interseção de $AB = 2a$ com o eixo do cone. Seja ainda $x = VQ$. Da lei dos senos nos triângulos ΔVAQ e ΔVBQ, têm-se

$$\begin{cases} \frac{x}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{AQ}{\operatorname{sen}\beta} \\ \frac{x}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)} = \frac{BQ}{\operatorname{sen}\beta} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \operatorname{sen}\beta = AQ(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha) \\ x \operatorname{sen}\beta = BQ(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\beta = \frac{AQ \operatorname{sen}\alpha}{x - AQ\cos\alpha}\cos\beta \\ \operatorname{sen}\beta = \frac{BQ \operatorname{sen}\alpha}{x + BQ\cos\alpha}\cos\beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{2AQ.BQ\cos\alpha}{BQ - AQ} \\ \operatorname{sen}\beta = \frac{(BQ-AQ)\operatorname{sen}\alpha}{(AQ+BQ)\cos\alpha}\cos\beta \end{cases}$$

Como β é dado, podemos re-escrever a última relação acima como

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AQ+BQ}{BQ-AQ}\operatorname{tg}\beta \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \frac{AQ+BQ}{\Delta}\operatorname{sen}\beta \\ \cos\alpha = \frac{BQ-AQ}{\Delta}\cos\beta \end{cases}$$

com

$$\Delta = \sqrt{AQ^2+2AQ.BQ(\operatorname{sen}^2\beta-\cos^2\beta)+BQ^2}$$

O centro O da elipse é tal que $OQ = \frac{BQ-AQ}{2}$. Assim, as distâncias vertical, v, e horizontal, h, de O a V são

$$\begin{cases} v = x + OQ\cos\alpha = \frac{(AQ+BQ)^2}{2(BQ-AQ)}\cos\alpha \\ h = OQ\operatorname{sen}45^{\text{o}} = \frac{(BQ-AQ)}{2}\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

Na altura de O, um plano paralelo à base do cone gera uma seção circular de raio

$$r = v\operatorname{tg}\beta = \frac{(AQ+BQ)^2\operatorname{sen}\beta}{2\Delta}$$

Assim, com algum algebrismo simples mas longo, o eixo secundário $2b$ da elipse é tal que

$$b^2 = r^2 - h^2 = AQ.BQ\operatorname{sen}^2\alpha$$

Considerando que $(AQ+BQ) = 2a$, Podemos, então, re-escrever que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha &= \frac{2a\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{AQ^2+2AQ.BQ(\operatorname{sen}^2\beta-\cos^2\beta)+BQ^2}} \\ &= \frac{2a}{\sqrt{4a^2+4AQ.BQ\cos^2\beta}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{b^2\cos^2\beta}{\operatorname{sen}^2\alpha}}}\end{aligned}$$

e assim

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\beta + b^2\cos^2\beta}}{a}$$

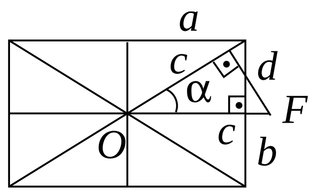
Com este valor, pode-se determinar que

$$x = VQ = \frac{b^2\cos\beta}{a\operatorname{sen}\beta}$$

2º) Pela lei dos senos nos triângulos ΔVAQ e ΔVBQ, ou pelo teorema das bissetrizes no triângulo ΔVAB, têm-se que

$$\begin{cases} \frac{VA}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{AQ}{\operatorname{sen}\beta} \\ \frac{VB}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{BQ}{\operatorname{sen}\beta} \end{cases} \Rightarrow$$

$$VA.VB = \frac{AQ.BQ\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\beta} = \frac{b^2}{\operatorname{sen}^2\beta} = b^2\operatorname{cossec}^2\beta$$



b) Seja a seguinte construção:

(i) Determine a distância d de F a ℓ, e trace uma paralela x_1 a ℓ, a uma distância d, com ℓ entre x_1 e F. Note que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{c} = \frac{d}{OF} = \frac{d}{c}$$

Logo $2d = 2b$ é o eixo não-focal da hipérbole.

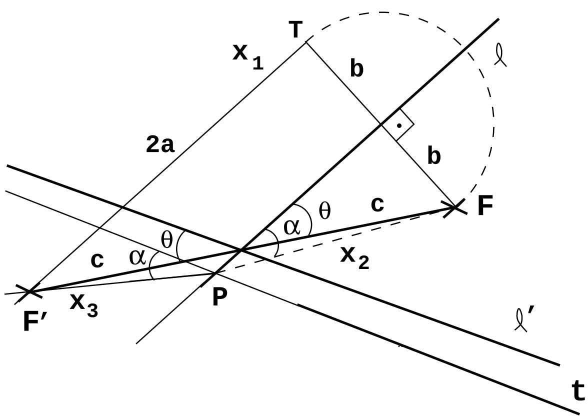
(ii) Prolongue ℓ e t, determinando sua interseção P, e trace a reta $x_2 = PF$, determinando o ângulo α entre x_2 e a assíntota ℓ.

(iii) Por P, trace uma reta x_3, entre os prolongamentos de ℓ e t, fazendo um ângulo α com a tangente t.

(iv) Por simetria, $F' \in x_1$, e pelo teorema de Poncelet, $F' \in x_3$. Logo, F' é interseção de x_1 e x_3.

(v) Determine a distância focal $2c = FF'$. O eixo focal é dado por $2a = 2\sqrt{c^2-b^2}$. Na figura, $2a = F'T$, onde $T \in x_1$ é o ponto simétrico de F em relação a ℓ.

(vi) A outra assíntota ℓ' intercepta o ponto médio de FF' e faz com este segmento o mesmo ângulo θ que ℓ.



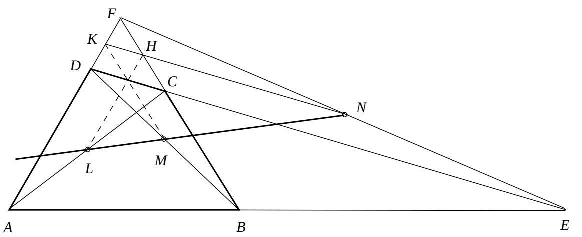
8ª Questão [Valor: 1,4]

a) **[Valor: 0,8]** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que os dois pares de lados opostos não são paralelos; AB encontra CD em E e AD encontra BC em F. Sejam L, M e N os pontos médios dos segmentos AC, BD e EF, respectivamente. Prove que L, M e N são colineares.

b) **[Valor: 0,6]** Dá-se um quadrilátero convexo inscritível em um círculo, cujos lados são cordas deste círculo e de comprimentos a, b, c e d e que se sucedem na ordem a, b, c, d.
   (1) Calcule, em função de a, b, c, d os comprimentos das diagonais x e y.
   (2) Permutando a ordem de sucessão das cordas, deduza, com auxílio de figuras, se as diagonais dos novos quadriláteros obtidos têm comprimentos diferentes de x e de y.
   (3) Sabendo-se que a área de um quadrilátero inscritível é $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ e supondo que o quadrilátero, além de inscritível também é circunscritível, mostre que a fórmula de sua área reduz-se a $S = \sqrt{abcd}$.

Solução:

a) **(Baseada em solução do Colégio Princesa Isabel)**



Trace uma paralela a CD por N, determinando K sobre DF e H sobre CF. Como N é médio de EF, então no triângulo ΔDEF, KN é base média de DE, e assim K é médio de DF. Com isto, no triângulo ΔCDF, KH é base média de CD, e assim H é médio de CF.

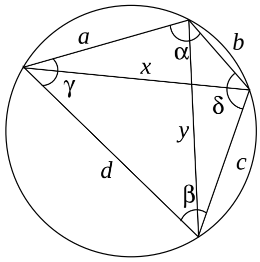
No triângulo ΔACF, H e L são os respectivos pontos médios de CF e AC. Assim, HL é base média de AF e então $HL \parallel AF$. Seja G a interseção de HL com CD. No triângulo ΔCDF, como H é médio de CF e $HG \parallel FD$ (pois $HL \parallel AF$), então HG é base média de DF, e assim G é médio de CD.

Analogamente, no triângulo ΔBDF, K e M são os respectivos pontos médios de DF e BD. Assim, KM é base média de BF e então $KM \parallel BF$. Seja G' a interseção de KM com CD. No triângulo ΔCDF, como K é médio de DF e $KG' \parallel FC$ (pois $KM \parallel BF$), então KG' é base média de CF, e assim $G' \equiv G$ é médio de CD.

Aplicando o teorema de Menelaus no triângulo ΔCDF com a reta ABE, têm-se

$$1 = \frac{AD.BF.EC}{AF.BC.ED} = \frac{2GL.2KM.2HN}{2HL.2GM.2KN} = \frac{GL.KM.HN}{HL.GM.KN}$$

Logo, pelo teorema de Menelaus no triângulo ΔGKH, têm-se que L, M e N são colineares.



b) 1) Pela lei dos cossenos, têm-se

$$\begin{cases} x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \\ x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta \\ y^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\gamma \\ y^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\delta \end{cases}$$

Assim, como $\beta = (180^o - \alpha)$ e $\delta = (180^o - \gamma)$,

$$\begin{cases} cdx^2 = cd(a^2 + b^2) - 2abcd\cos\alpha \\ abx^2 = ab(c^2 + d^2) + 2abcd\cos\alpha \\ bcy^2 = bc(a^2 + d^2) - 2abcd\cos\gamma \\ ady^2 = ad(b^2 + c^2) + 2abcd\cos\gamma \end{cases}$$

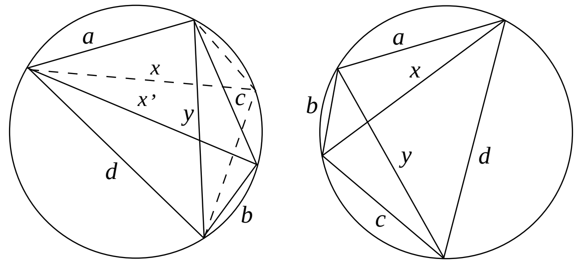
e então

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} \\ y = \sqrt{\frac{(ad+cb)(ac+bd)}{ab+cd}} \end{cases}$$

2) Usando, por exemplo, $a' = a$, $b' = c$, $c' = b$ e $d' = d$, as novas diagonais teriam comprimentos

$$\begin{cases} x' = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}} = x \\ y' = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ab+cd)}{ac+bd}} \neq y \end{cases}$$

Assim, uma das diagonais se preserva e outra se altera. Naturalmente se invertêssemos $a' = a$, $b' = d$, $c' = c$ e $d' = b$, as diagonais não se alterariam, apenas o quadrilátero fica refletido em torno do centro do círculo.



3) Se o quadrilátero é circunscritível, então

$$a + c = b + d = p \Rightarrow \begin{cases} p - a = c \\ p - b = d \\ p - c = a \\ p - d = b \end{cases}$$

Logo, S é tal que

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \sqrt{cdab} = \sqrt{abcd}$$

9ª Questão [Valor: 0,8]
Determine os ângulos de um triângulo, dados o perímetro $2p$, o lado a e a altura correspondente ao lado a, h_a.

Solução:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{ah}{2} \Rightarrow$$

$$(p-b)(p-c) = p^2 - (b+c)p + bc = \frac{a^2h_a^2}{4p(p-a)}$$

Logo,

$$\begin{cases} b+c = 2p-a \\ bc = \frac{a^2h_a^2}{4p(p-a)} - p^2 + (2p-a)p = \frac{a^2h_a^2+4p^2(p-a)^2}{4p(p-a)} \end{cases}$$

Com isto, b e c são soluções da equação

$$x^2 - (2p-a)x + \frac{a^2h_a^2+4p^2(p-a)^2}{4p(p-a)} = 0$$

e assim,

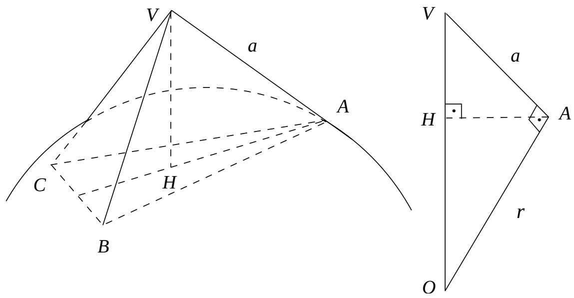
$$\operatorname{sen}\hat{B}, \hat{C} = \frac{h_a}{c, b} = \frac{2h_a}{(2p-a) \mp a\sqrt{1-\frac{h_a^2}{p(p-a)}}}$$

e ainda, pela lei dos senos,

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a\operatorname{sen}\hat{B}}{b} = \frac{ah_a}{bc} = \frac{4ah_ap(p-a)}{a^2h_a^2+4p^2(p-a)^2}$$

10ª Questão [Valor: 0,6]
Determine o lugar geométrico do vértice V de um triedro cujas faces medem 60º cada e cujas arestas tangenciam uma esfera (e) dada, de raio r e centro O.

Solução:



Por simetria, as três arestas do tetraedro que são tangentes à esfera, VA, VB e VC, são congruentes entre si, e as três arestas internas à esfera, AB, AC e BC, são também congruentes entre si. No triângulo ΔAVB, como $A\hat{V}B = 60º$, então $VA = VB = AB$, e então $VABC$ é um tetraedro regular de aresta a. Sendo assim, o pé H da altura do vértice V em relação à base ΔABC é tal que

$$AH = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Da selhança entre os triângulos ΔAVH e ΔOVA, tem-se que

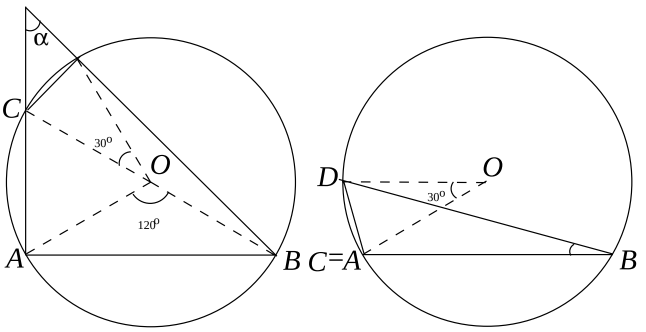
$$\frac{AH}{AV} = \frac{OA}{OV} \Rightarrow \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{r}{OV} \Rightarrow OV = r\sqrt{3}$$

que é constante. Logo, o lugar geométrico de V é a esfera de centro O e raio $r\sqrt{3}$.

11ª Questão [Valor: 0,6]

Numa circunferência são dadas uma corda fixa AB, igual ao lado do triângulo equilátero inscrito e uma corda móvel CD, de comprimento constante e igual ao lado do dodecágono regular convexo inscrito. As duas cordas são os lados opostos de um quadrilátero convexo inscrito $ABCD$. Determine o lugar geométrico do ponto de encontro dos outros dois lados, especificando a delimitação deste lugar.

Solução:



Sejam O e R o centro e o raio, respectivamente, da circunferência dada. A partir de uma análise angular da figura à esquerda, é possível mostrar que

$$\alpha = \frac{120^{\text{o}} - 30^{\text{o}}}{2} = 45^{\text{o}}$$

ou seja, o lugar geométrico desejado é tal que α é constante e igual a 45^{o}. Este lugar geométrico é então o arco-capaz de 45^{o} relativo à corda AB. Este arco-capaz é parte da circunferência (c'), de centro O' e raio R', para a qual AB é lado de um quadrado inscrito, de modo que $A\hat{O}'B = 90^{\text{o}}$. Assim, têm-se que

$$\begin{cases} AB = R'\sqrt{2} = R\sqrt{3} \Rightarrow R' = \frac{\sqrt{6}}{2}R \\ O'O = O'I - OI = \frac{\sqrt{2}}{2}R' - \frac{1}{2}R = \frac{\sqrt{3}-1}{2}R \end{cases}$$

onde I é médio de AB e O' está acima de O.

A delimitação do lugar geométrico é determinada considerando a situação extrema em que o lado do dodecágono é adjacente ao lado do triângulo equilátero. Por exemplo, o caso em que A e C são coincidentes é visto na figura à direita acima, de modo que se $E \in (c')$ é um extremo do arco-capaz, então

$$A\hat{B}D = A\hat{B}E = \frac{A\hat{O}D}{2} = \frac{A\hat{O}'E}{2} = 15^{\text{o}} \Rightarrow A\hat{O}'E = 30^{\text{o}}$$

Se $E' \in (c')$ é o outro extremo do arco-capaz, tem-se então que o lugar geométrico é o arco de valor

$$E\hat{O}'E' = 360^{\text{o}} - (A\hat{O}'E + A\hat{O}'B + B\hat{O}'E') = 210^{\text{o}}$$

12ª Questão [Valor: 0,5]

Obtenha uma relação entre a, b e c, eliminando x entre as duas equações abaixo:

$$a \operatorname{sen} x - b \cos x = \frac{1}{2} c \operatorname{sen} 2x$$
$$a \cos x + b \operatorname{sen} x = c \cos 2x$$

Solução:

Dividindo as equações do enunciado, tem-se

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x = \frac{a \operatorname{sen} x - b\cos x}{a\cos x + b \operatorname{sen} x} = \frac{\frac{a \operatorname{sen} x}{a\cos x} - \frac{b\cos x}{a\cos x}}{\frac{a\cos x}{a\cos x} + \frac{b \operatorname{sen} x}{a\cos x}} = \frac{\operatorname{tg} x - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}\operatorname{tg} x}$$

Logo, usando a fórmula da tangente do arco-dobro, têm-se

$$\frac{1}{2}\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x - \frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}\operatorname{tg} x} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} x\left(1 + \frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right) = \left(\operatorname{tg} x - \frac{b}{a}\right)\left(1 - \operatorname{tg}^2 x\right) \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} x + \frac{b}{a}\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x - \frac{b}{a} + \frac{b}{a}\operatorname{tg}^2 x \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}^3 x = -\frac{b}{a}$$

e então

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{1 + \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}$$

Elevando cada equação do enunciado ao quadrado e adicionando os resultados, têm-se

$$\begin{cases} a^2 \operatorname{sen}^2 x - 2ab \operatorname{sen} x\cos x + b^2\cos^2 x = \frac{c^2}{4}\operatorname{sen}^2 2x \\ a^2\cos^2 x + 2ab \operatorname{sen} x\cos x + b^2 \operatorname{sen}^2 x = c^2\cos^2 2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$(a^2+b^2)(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \frac{c^2}{4}(\operatorname{sen}^2 2x + 4\cos^2 2x) \Rightarrow$$

$$\frac{4(a^2+b^2)}{c^2} = (\operatorname{sen}^2 2x + 4\cos^2 2x)$$

Divindo esta expressão por $\cos^2 2x$ e lembrando que $\sec^2 2x = (\operatorname{tg}^2 2x + 1)$, têm-se

$$\left[\frac{4(a^2+b^2)}{c^2}\right](\operatorname{tg}^2 2x + 1) = \operatorname{tg}^2 2x + 4 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{4(a^2+b^2) - c^2}{c^2}\right]\operatorname{tg}^2 2x = \frac{4(c^2 - a^2 - b^2)}{c^2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}^2 2x = \frac{4(c^2-a^2-b^2)}{4(a^2+b^2) - c^2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} 2x = \mp 2\sqrt{\frac{(c^2-a^2-b^2)}{4(a^2+b^2)-c^2}}$$

Logo, igualando as duas expressões obtidas anteriormente para $\operatorname{tg} 2x$, tem-se

$$\frac{-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{1+\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}} = \mp\sqrt{\frac{(c^2-a^2-b^2)}{4(a^2+b^2)-c^2}}$$

IME 1982/1983 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine a equação, identificando a sua natureza, do lugar geométrico de um ponto que se desloca de tal forma que o quadrado de sua distância ao ponto $(1,1)$ é proporcional à sua distância à reta $x+y=0$.

Solução:
Do enunciado,

$$(x-1)^2+(y-1)^2 = k\tfrac{|x+y|}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\left[x-\left(\tfrac{2\sqrt{2}\pm k}{2\sqrt{2}}\right)\right]^2+\left[y-\left(\tfrac{2\sqrt{2}\pm k}{2\sqrt{2}}\right)\right]^2 = \tfrac{k(k\pm 4\sqrt{2})}{4}$$

Se $(x+y)>0$, então usa-se o sinal $+$ na equação acima e tem-se uma circunferência (c_1) de centro (r_0,r_0) e raio $r=\sqrt{2r_0^2-2}$, com $r_0=\frac{k+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$. Note que como $r<r_0\sqrt{2}$, então (c_1), que sempre existe, está toda acima da reta $(x+y)>0$.

Se $(x+y)<0$, então usa-se o sinal $-$ na equação acima e tem-se uma circunferência (c_2) de centro (r'_0,r'_0) e raio $r'=\sqrt{2{r'_0}^2-2}$, com $r'_0=\frac{2\sqrt{2}-k}{2\sqrt{2}}$. Note, novamente, que como $r'<r'_0\sqrt{2}$, então, se existir, (c_2) está toda abaixo da reta $(x+y)<0$.

Analisando a existência de (c_2), o lugar geométrico pedido é

$$\begin{cases} 0<k<4\sqrt{2} : (c_1) \\ k=4\sqrt{2} : (c_1)\cup(-1,-1) \\ k>4\sqrt{2} : (c_1)\cup(c_2) \end{cases}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a equação $2mx^2-2x-3m-2=0$, onde $m\in\mathbb{R}$:
a) **[Valor: 0,3]** Determine m tal que uma raiz seja nula; calcule a outra raiz.
b) **[Valor: 0,3]** Mostre que a equação dada tem sempre duas raízes distintas.
c) **[Valor: 0,4]** Determine m para que uma raiz seja inferior a 1 e a outra seja superior a 1.

Solução:
Seja $f(x)$ o polinômio de x.
a) Se $f(x)$ tem uma raiz nula, então $f(0)=(-3m-2)=0$, logo $m=-\frac{2}{3}$ e a outra raiz é $x=-\frac{3}{2}$.
b) O discriminante Δ de $f(x)$ é tal que

$$\Delta=(-2)^2+4(2m)(3m+2)=24\left[(m+\frac{1}{3})^2+\frac{1}{18}\right]$$

de modo que $\Delta>0$, para todo m real. Logo, $f(x)$ tem sempre duas raízes reais e distintas.
sln: Na verdade, $f(x)$ só terá duas raízes se $m\neq 0$.
c) Sejam r_1 e r_2 as raízes reais e distintas. Logo,

$$(r_1-1)(r_2-1)=1-(r_1+r_2)+r_1r_2<0\Rightarrow$$
$$1-\frac{1}{m}-\frac{3m+2}{2m}<0\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m>0 \\ 2m-2-3m-2<0 \end{array}\right. \Rightarrow m>0 \\ \text{ou} \\ \left\{\begin{array}{l} m<0 \\ 2m-2-3m-2>0 \end{array}\right. \Rightarrow m<-4 \end{array}\right.$$

Assim, devemos ter $m<-4$ ou $m>0$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Seja F o conjunto das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que satisfazem $f(xy)=f(x)+f(y)$. Dados $f\in F$ e $a\in\mathbb{R}$ define-se a função $g_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g_a(x)=f(ax)-f(x)$.
a) **[Valor: 0,4]** Mostre que $f(1)=0, \forall f\in F$.
b) **[Valor: 0,6]** Mostre que $\forall a\in\mathbb{R}$, g_a é função constante.
Obs: Para o item (b), desenvolver $g_a(xy)$ e leve em conta o item (a).

Solução:

a) Para $y=1$, tem-se

$$f(x.1)=f(x)=f(x)+f(1)\Rightarrow f(1)=0$$

b)

$$g_a(x)=f(a)-f(x)-f(x)=f(a)$$

que, dado $a\in\mathbb{R}$, é uma função constante.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o polinômio $p(x)$ do 4º grau, sabendo que $p''(x)=ax^2+bx+c$ e que $p(x)$ é divisível por $p''(x)$.

Solução:
Como $p''(x)=ax^2+bx+c$, então podemos escrever $p(x)$ da forma

$$p(x)=\frac{1}{12}(ax^4+2bx^3+6cx^2+12dx+12e)$$

faltando determinar os valores de d e e em função de a, b, c. Divindo $p(x)$ por $p''(x)$, tem-se

$$p(x)=p''(x)q(x)+r(x)$$

onde

$$\begin{cases} q(x)=\frac{1}{12}x^2+\frac{b}{12a}x+\frac{5ca-b^2}{12a^2} \\ r(x)=\left[\frac{(12da-bc)a-(5ca-b^2)b}{12a^2}\right]x+\left[e-\frac{(5ca-b^2)c}{12a^2}\right] \end{cases}$$

Assim, devemos ter $r(x)\equiv 0,\ \forall x$, ou seja

$$\begin{cases} d=\dfrac{6abc-b^3}{12a^2} \\ e=\dfrac{5ac^2-b^2c}{12a^2} \end{cases}$$

de modo que

$$p(x)=\frac{1}{12}\left[ax^4+2bx^3+6cx^2+\frac{6abc-b^3}{a^2}x+\frac{5ac^2-b^2c}{a^2}\right]$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a função $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = \sqrt[3]{x^3+3x^2-4}$:

a) **[Valor: 0,6]** Estude a sua variação quanto a: continuidade, crescimento, assíntota e pontos notáveis, inclusive o ponto em que a curva corta a assíntota.

b) **[Valor: 0,4]** Faça o esboço do gráfico da curva representativa da função.
Obs: Para determinação da assíntota é conveniente colocar x em evidência para fora do radical e desenvolver a função pelo binômio de Newton.

Solução:
y é contínua para todo x real e podemos escrever que

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2} \\ y' &= \frac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}} \\ y'' &= -\frac{2}{\sqrt[3]{(x-1)^5(x+2)^4}} \end{aligned}$$

E assim têm-se:

$$\left\{\begin{array}{l} y(-2) = y(1) = 0;\ y(0) = -\sqrt[3]{4} < 0 \\ \lim\limits_{x\to\mp\infty} y = \mp\infty \\ \left\{\begin{array}{l} y > 0,\ \text{se } 1 < x \\ y < 0,\ \text{se } (x \neq -2) < 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

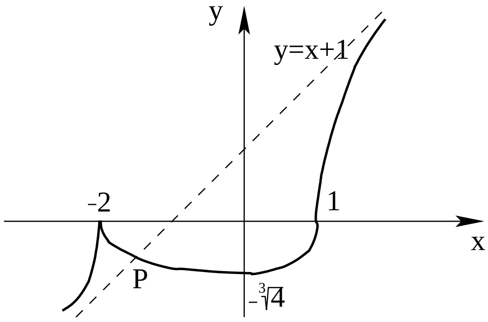
$$\left\{\begin{array}{l} y'(-2) = \nexists;\ y'(0) = 0;\ y'(1) = \nexists \\ \lim\limits_{x\to\mp\infty} y' = 1;\ \lim\limits_{x\to -2^{\mp}} y' = \pm\infty;\ \lim\limits_{x\to 1^{\mp}} y' = \infty \\ \left\{\begin{array}{l} y' > 0,\ \text{se } x < -2 \ \text{ e } \ 0 < x \\ y' < 0,\ \text{se } \ -2 < x < 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} y''(-2) = \nexists;\ y''(0) > 0; y''(1) = \nexists \\ \lim\limits_{x\to\mp\infty} y'' = 0 \\ \left\{\begin{array}{l} y'' > 0,\ \text{se } (x \neq -2) < 1 \\ y'' < 0,\ \text{se } 1 < x \end{array}\right. \end{array}\right.$$

O que determina os seguintes pontos de interesse: $(-2,0)$ é raiz e ponto cuspidal, $(1,0)$ é raiz e ponto de inflexão (mudança de concavidade), $(0,-\sqrt[3]{4})$ é mínimo local. Além disto, o comportamento de y' indica que existem assíntotas para $x \to \mp\infty$ da forma $y = (x+\alpha)$, onde

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{x\to\mp\infty} [y - x] \\ &= \lim_{x\to\mp\infty} [x(1 + x^{-1} + \ldots) - x] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, as assíntotas coincidem e são iguais a $y = (x+1)$, de modo que a interseção da curva original com a assíntota se dá no ponto $P \equiv (-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3})$. O gráfico de y é mostrado a seguir.



6ª Questão [Valor: 1,0]
Uma rua possui um estacionamento em fila com N vagas demarcadas junto ao meio-fio de um dos lados. N automóveis, numerados de 1 a N, devem ser acomodados, sucessivamente, pela ordem numérica no estacionamento. Cada carro deve justapor-se a um carro já estacionado, ou seja, uma vez estacionado o carro 1 em qualquer uma das vagas, os seguintes se vão colocando imediatamente à frente do carro mais avançado ou atrás do carro mais recuado. Quantas configurações distintas podem ser obtidas desta maneira? A figura abaixo mostra uma das disposições possíveis.

Solução **(Baseada em solução do Colégio Impacto):**
Dada a posição do carro 1, os demais carros têm 2 opções cada, à esquerda ou à direita da fila de carros já estacionados. Assim, tem-se um total de 2^{N-1} possibilidades. Neste raciocínio, ignoramos inicialmente as posições das vagas, pois qualquer que seja a ordenação dos carros, sempre podemos deslocá-los (de forma biunívoca) para o conjunto de 10 vagas inicialmente existentes.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a função f definida nos reais por

$$f(x) = (x-1)\ln|x-1| - x\ln x :$$

a) **[Valor: 0,5]** Dê seu domínio e calcule $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) **[Valor: 0,5]** Dada a função g definida nos reais por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \notin \{0,1\} \\ 0, & \text{se } x \in \{0,1\} \end{cases}$$

verifique se g é contínua em $x=1$ e se é derivável neste ponto.

Solução:

a) O domínio de $f(x)$ é tal que

$$\begin{cases} |x-1| > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow (x \neq 1) > 0$$

Neste intervalo, podemos reescrever $f(x)$ como

$$f(x) = \ln\left[\frac{|x-1|^{x-1}}{x^x}\frac{|x-1|}{|x-1|}\right] = \ln\left[\frac{|1-\frac{1}{x}|^x}{|x-1|}\right]$$

logo,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ln\lim_{x\to\infty}\frac{|1-\frac{1}{x}|^x}{|x-1|} = \ln\frac{e}{\lim\limits_{x\to\infty}|x-1|} = -\infty$$

b) Podemos reescrever $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{\ln|x-1|}{\frac{1}{x-1}} - x\ln x$$

logo, têm-se que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^{\mp}} \frac{\ln|x-1|}{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1^{\mp}} \frac{\frac{\mp 1}{x-1}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim\limits_{x\to 1^{\mp}} \pm(x-1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1} x\ln x = 0 \end{cases}$$

e assim $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = g(1) = 0$, de modo que $g(x)$ é contínua em $x=1$.

Determinando a derivada de $f(x)$ na redondeza do ponto $x=1$, tem-se

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mp\frac{x-1}{|x-1|} + \ln|x-1| - \frac{x}{x} - \ln x \\ &= (\mp 1 - 1) + \ln|1-\frac{1}{x}| \end{aligned}$$

logo,

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = -\infty$$

e $g(x)$ é não diferenciável em $x=1$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um determinante definido por $\Delta_1 = |1|$ e

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

a) **[Valor: 0,5]** Pede-se a fórmula de recorrência (isto é, a relação entre Δ_n e Δ_{n-1}).

b) **[Valor: 0,5]** Calcule a expressão de Δ_n em função de n.

Solução:
Aplicando Laplace na primeira coluna, tem-se

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$-(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

a) Logo, podemos ver que

$$\Delta_n = 2^{n-1} + \Delta_{n-1}$$

b) Do item anterior,

$$\begin{cases} \Delta_n = 2^{n-1} + \Delta_{n-1} \\ \Delta_{n-1} = 2^{n-2} + \Delta_{n-2} \\ \Delta_{n-2} = 2^{n-3} + \Delta_{n-3} \\ \vdots \\ \Delta_2 = 2^1 + \Delta_1 \end{cases}$$

logo,

$$\Delta_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^1 + 2^0 = 2^n - 1$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Seja m um inteiro positivo. Define-se uma relação Θ_m por

$$R_{\Theta_m} = \{(i,j)|\ i = j + km,\ k \text{ inteiro}\}.$$

Mostre que Θ_m é uma relação de equivalência.

Solução:
Com $k_{ij} = 0$, tem-se $R_{\Theta_m} = (i,i)$, e R_{Θ_m} é reflexiva. Com $k_{ji} = -k_{ij}$, então $R_{\Theta_m} = (i,j) = (j,i)$, e R_{Θ_m} é simétrica. Seja $R_{\Theta_m} = (i,j)$ e $R_{\Theta_m} = (j,l)$, com $i = (j + k_{ij}m)$ e $j = (l + k_{jl}m)$, de modo que com $i = (l + k_{il}m)$, onde $k_{il} = (k_{ij} + k_{jl})$, tem-se $R_{\Theta_m} = (i,l)$, e R_{Θ_m} é transitiva.

Logo, R_{Θ_m} é uma relação de equivalência.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja

$$S_n = \sum_{1}^{n} a_n$$

onde os a_n são complexos. Os módulos dos a_n estão em progressão geométrica. Os argumentos dos a_n estão em progressão aritmética. São dados:

$$\begin{aligned} a_1 &= 13{,}5(\sqrt{3}+i) \\ a_4 &= \frac{i\sqrt{3}-1}{2} \end{aligned}$$

Calcule o $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Solução:
Fazendo $a_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, podemos escrever para $n \geq 1$ que

$$a_n = r_n e^{i\theta_n} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r_n = r_1 q^{n-1} \\ \theta_n = \theta_1 + (n-1)r \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$a_n = [r_1 q^{n-1}] e^{[i\theta_1 + i(n-1)r]} = a_1 z^{n-1}$$

com $z = qe^{ir}$, de modo que

$$\frac{a_4}{a_1} = z^3 = \frac{\frac{i\sqrt{3}-1}{2}}{13{,}5(\sqrt{3}+i)} \times \frac{-i\sqrt{3}-1}{-i\sqrt{3}-1} = \frac{1}{27}i$$

e então

$$z = \sqrt[3]{\frac{1}{27}e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{6}(\sqrt{3}+i)$$

Para a definição do enunciado, $S_n = na_n$, e assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} na_n \\ &= \lim_{n\to\infty} na_1 z^{n-1} \\ &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (na_1)'}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(z^{1-n}\right)'} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{(1-n)z^{-n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 z^n}{1-n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois $|z| < 1$.
sln: A definição dada para S_n é confusa. Parece que o correto seria

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

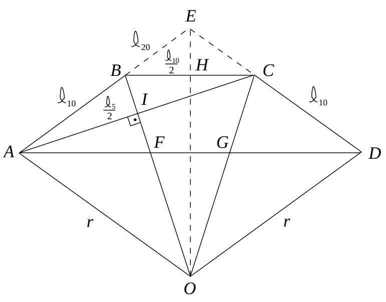
de modo que, como $|z| < 1$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-z} = \frac{13{,}5(\sqrt{3}+i)}{1-\frac{1}{6}(\sqrt{3}+i)}$$

IME 1982/1983 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que o lado do icoságono regular convexo é igual à diferença, dividida por $\sqrt{2}$, entre o lado do decágono regular estrelado e o lado do pentágono regular convexo. Todos os três polígonos estão inscritos em um mesmo círculo de raio r.

Solução:



De uma análise angular, é possível verificar que $AB = AF = OF = \ell_{10}$ de forma que os triângulos ΔAOB e ΔFAB são semelhantes, e então

$$\frac{OA}{AB} = \frac{AB}{BF} \Rightarrow \frac{r}{\ell_{10}} = \frac{\ell_{10}}{r-\ell_{10}} \Rightarrow \ell_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r$$

Da semelhança dos triângulos ΔOBC e ΔOFG, têm-se

$$\frac{OB}{BC} = \frac{OF}{FG} \Rightarrow \frac{r}{\ell_{10}} = \frac{\ell_{10}}{FG} \Rightarrow FG = \frac{\ell_{10}^2}{r}$$

de forma que

$$\ell_{10}^* = AF + FG + GD = 2\ell_{10} + FG = \frac{1+\sqrt{5}}{2}r$$

Do triângulo ΔAIF,

$$AI^2 = AF^2 + FI^2 \Rightarrow \frac{\ell_5^2}{4} = \ell_{10}^2 - \left(\frac{r-\ell_{10}}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell_5 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}r$$

Dos triângulos ΔOBH e ΔBEH, têm-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} BE^2 = BH^2 + HE^2 \\ BO^2 = BH^2 + OH^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ell_{20}^2 = \frac{\ell_{10}^2}{4} + (r-OH)^2 \\ r^2 = \frac{\ell_{10}^2}{4} + OH^2 \end{array} \right.$$

de onde se tem que

$$\ell_{20} = \frac{\ell_{10}^2}{4} + \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{\ell_{10}^2}{4}}\right)^2 = \sqrt{2 - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}r$$

Logo,

$$\left(\frac{\ell_{10}^* - \ell_5}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2 - 2(1+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}} + (10-2\sqrt{5})}{8}$$

$$= 2 - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \ell_{20}^2$$

e a relação do enunciado fica comprovada.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a equação

$$\cos{(2x + \frac{\pi}{6})} - m\,\text{sen}^2 x = 0,$$

determine a condição a que deve satisfazer m para que ela tenha pelo menos uma solução x_0, tal que $0 < x_0 < 2\pi$.

Solução:
Verificando se $x_0 = \pi$ pode ser solução:

$$\cos{(2\pi + \frac{\pi}{6})} - m\,\text{sen}^2\pi = 0 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{6} = 0$$

o que não se aplica. Assim, $\text{sen}\, x \neq 0$, e então

$$m = \frac{\cos{(2x + \frac{\pi}{6})}}{\text{sen}^2 x}$$

$$= \frac{\cos 2x \cos\frac{\pi}{6} - \text{sen}\, 2x\, \text{sen}\frac{\pi}{6}}{\text{sen}^2 x}$$

$$= \frac{(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)\sqrt{3} - 2\,\text{sen}\, x \cos x}{2\text{sen}^2 x}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\text{cotg}^2 x - \text{cotg}\, x - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e assim

$$\text{cotg}\, x = \frac{1 \mp \sqrt{1 + 4\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + m)}}{\sqrt{3}}$$

Logo, para haver solução, devemos ter

$$1 + 4\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + m) \geq 0 \Rightarrow m \geq -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Consideram-se todos os pares de pontos do espaço M, M', tais que o ângulo $\widehat{MOM'} = 90^\circ$, sendo O um ponto fixo dado.

a) **[Valor: 0,5]** Qual o lugar geométrico de M', sendo M e M' variáveis porém fixo o ponto médio I, de MM'?
b) **[Valor: 0,5]** Considere outro ponto fixo O', tal que também $\widehat{MO'M'} = 90^\circ$. O ponto M sendo fixo, obtenha o lugar geométrico de M'.

Solução:
a) Como $\widehat{MOM'} = 90^\circ$, então, no espaço, M, O e M' devem pertencer a uma esfera de centro em I, ponto médio de MM'. Se I e O são dados, o lugar geométrico de M' é a esfera de centro em I e raio OI.
b) Dados M, O e O', então M' deve pertencer aos planos π_1, ortogonal à reta MO por O, e π_2, ortogonal à reta MO' por O'. Assim, se M, O e O' não são colineares, o lugar geométrico de M' é a reta interseção de π_1 e π_2, ortogonal ao plano definido pelos três pontos dados. Esta reta passa pelo ponto M^* diametralmente oposto a M no círculo circunscrito ao triângulo $\Delta MOO'$, pois neste ponto tem-se $\widehat{MOM^*} = \widehat{MO'M^*} = 90^\circ$. Se, porém, M, O e O' são colineares, então π_1 e π_2 são paralelos, e o lugar geométrico de M' é vazio.

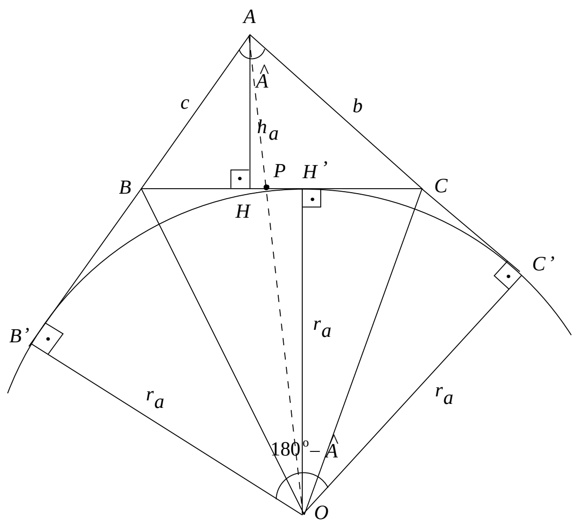
4ª Questão [Valor: 1,5]

Em um triângulo ABC dão-se o ângulo $\hat{A}$, o raio do círculo ex-inscrito r_a (relativo ao ângulo $\hat{A}$) e a altura h_a (relativa ao lado a).

a) **[Valor: 0,8]** Indique a construção do triângulo ABC e conclua daí a condição que deve haver entre os elementos dados para que a construção seja possível, isto é, para que exista o triângulo ABC, escaleno.

b) **[Valor: 0,7]** Deduza as expressões de a, $b.c$ e de $b+c$, em função dos elementos dados.

Solução:



a) Do quadrilátero $ABCO$, têm-se que $B'\hat{O}C' = (180^{\text{o}} - \hat{A})$ e $h_a \parallel r_a$. Assim, o triângulo desejado pode ser obtido a partir da seguinte construção:

(i) Trace circunferência (c_1), de centro O e raio r_a, e marque o ângulo central $(180^{\text{o}} - \hat{A})$, determinando os pontos B' e C' sobre (c_1).

(ii) Trace as tangentes t_1 e t_2 a (c_1), por B' e C', respectivamente, determinando o vértice A, interseção de t_1 e t_2.

(iii) Trace circunferância (c_2), de centro A e raio h_a.

(iv) Trace uma tangente interna comum a (c_1) e (c_2), determinando os vértices B e C, respectivamente sobre as tangentes t_1 e t_2, traçadas anteriormente.

Para haver solução escalena, deve existir a tangente comum interna. Assim, do triângulo $\Delta AB'O$, deve-se ter

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2} = \frac{r_a}{AO} \\ AO > r_a + h_a \end{cases} \Rightarrow r_a > \frac{h_a \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}}{1 + \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}}$$

sln: A tangente comum é obtida determinando-se P sobre AO tal que

$$\frac{AP}{OP} = h_a r_a \Rightarrow \begin{cases} AP = \frac{AOh_a}{h_a + r_a} \\ OP = \frac{AOr_a}{h_a + r_a} \end{cases}$$

Tendo P, o problema torna-se traçar as tangentes a (c_1) e (c_2) por P.

b) Seja O o centro do círculo ex-inscrito relativo ao ângulo A. A área S do quadrilátero $AB'C'O$ pode ser escrita como

$$S = \begin{cases} S_{ABC} + \frac{r_a BB'}{2} + \frac{r_a BH'}{2} + \frac{r_a CH'}{2} + \frac{r_a CC'}{2} \\ S_{ABO} + S_{ACO} = \frac{r_a(c+BB')}{2} + \frac{r_a(b+CC')}{2} \end{cases}$$

ou seja

$$S = \begin{cases} S_{ABC} + r_a a \\ \frac{r_a(a+b+c)}{2} = pr_a \end{cases} \Rightarrow S_{ABC} = r_a(p-a)$$

pois $BB' = BH'$ e $CC' = CH'$, $(BH' + CH') = a$ e $2p = (a+b+c)$.

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ΔABC, tem-se

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \\ &= (b+c)^2 - 2bc(1+\cos\hat{A}) \\ &= (2p-a)^2 - 2bc(1+\cos\hat{A}) \\ &= 4p(p-a) + a^2 - 2bc(1+\cos\hat{A}) \Rightarrow \\ bc &= \frac{2p(p-a)}{1+\cos\hat{A}} \end{aligned}$$

Com isto,

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{bc \operatorname{sen}\hat{A}}{2} = \frac{p(p-a)\operatorname{sen}\hat{A}}{1+\cos\hat{A}} = r_a(p-a) \Rightarrow \\ p &= \frac{r_a(1+\cos\hat{A})}{\operatorname{sen}\hat{A}} \end{aligned}$$

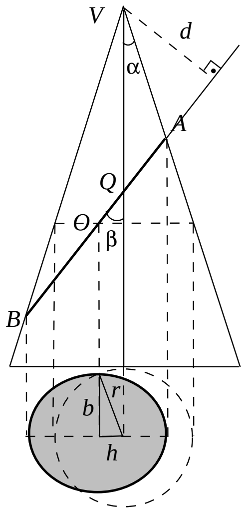
Logo, podemos determinar que

$$\begin{aligned} \frac{ah_a}{2} &= r_a(p-a) \Rightarrow \\ a &= \frac{2r_a p}{h_a + 2r_a} = \frac{2r_a^2(1+\cos\hat{A})}{(h_a+2r_a)\operatorname{sen}\hat{A}} \\ bc &= \frac{ah_a}{\operatorname{sen}\hat{A}} \\ &= \frac{2r_a^2 h_a(1+\cos\hat{A})}{(h_a+2r_a)\operatorname{sen}^2\hat{A}} \\ &= \frac{2r_a^2 h_a}{(h_a+2r_a)(1-\cos\hat{A})} \\ b+c &= 2p-a \\ &= \frac{2r_a(1+\cos\hat{A})}{\operatorname{sen}\hat{A}} - \frac{2r_a^2(1+\cos\hat{A})}{(h_a+2r_a)\operatorname{sen}\hat{A}} \\ &= \frac{2r_a(h_a+r_a)(1+\cos\hat{A})}{(h_a+2r_a)\operatorname{sen}\hat{A}} \end{aligned}$$

5ª Questão [Valor: 1,0]

É dada uma elipse de eixo focal $2a$ e excentricidade igual a $\sqrt{2/3}$. Essa elipse é seção de um cone de revolução: o ângulo que o plano da elipse forma com o eixo do cone é $\beta = 45^{\text{o}}$. Pede-se, em função de a, a distância do vértice V do cone ao plano da elipse.

Solução:



Dados o eixo focal $2a$ e a excentricidade e, a distância focal $2c$ e o eixo secundário $2b$ são respectivamente iguais a

$$\begin{cases} 2c = 2ae \\ 2b = 2a\sqrt{1-e^2} \end{cases}$$

Sejam A e B os extremos do eixo principal da elipse, e Q a interseção de $AB = 2a$ com o eixo do cone. Seja ainda $x = VQ$. Da lei dos senos nos triângulos ΔVAQ e ΔVBQ, têm-se

$$\begin{cases} \frac{x}{\operatorname{sen}(135^{\text{o}}-\alpha)} = \frac{AQ}{\operatorname{sen}\alpha} \\ \frac{x}{\operatorname{sen}(45^{\text{o}}-\alpha)} = \frac{BQ}{\operatorname{sen}\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\operatorname{sen}\alpha = AQ\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) \\ x\operatorname{sen}\alpha = BQ\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha) \end{cases}$$

e assim

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \frac{AQ\sqrt{2}}{2x - AQ\sqrt{2}}\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{BQ\sqrt{2}}{2x + BQ\sqrt{2}}\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{AQ\times BQ\sqrt{2}}{BQ-AQ} \\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{BQ-AQ}{AQ+BQ}\cos\alpha \end{cases}$$

Logo, usando a relação trigonométrica fundamental, têm-se

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \frac{BQ-AQ}{\sqrt{2(AQ^2+BQ^2)}} \\ \cos\alpha = \frac{AQ+BQ}{\sqrt{2(AQ^2+BQ^2)}} \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{BQ-AQ}{AQ+BQ)} \end{cases}$$

O centro O da elipse é tal que $OQ = \frac{BQ-AQ}{2}$. Assim, as distâncias vertical, v, e horizontal, h, de O a V são

$$\begin{cases} v = x + OQ\cos 45^{\text{o}} = \frac{(AQ+BQ)^2\sqrt{2}}{4(BQ-AQ)} \\ h = OQ\operatorname{sen}45^{\text{o}} = \frac{(BQ-AQ)\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Na altura de O, um plano paralelo à base do cone gera uma seção circular de raio

$$r = v\operatorname{tg}\alpha = \frac{(AQ+BQ)\sqrt{2}}{4}$$

Assim, o eixo secundário $2b$ da elipse é dado por

$$2b = 2\sqrt{r^2-h^2} = \sqrt{2AQ\times BQ} = 2a\sqrt{1-e^2}$$

e então

$$\begin{cases} AQ\times BQ = 2a^2(1-e^2) \\ AQ+BQ = 2a \end{cases} \Rightarrow$$

$$AQ^2 - 2aAQ + 2a^2(1-e^2) = 0 \Rightarrow$$

$$AQ, BQ = a(1 \mp \sqrt{2e^2-1}) \Rightarrow$$

$$BQ - AQ = 2a\sqrt{2e^2-1}$$

Logo, a distância d desejada é igual a

$$\begin{aligned} d &= x\cos 45^{\text{o}} \\ &= \frac{AQ\times BQ\sqrt{2}}{BQ-AQ}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{2a^2(1-e^2)}{2a\sqrt{2e^2-1}} \\ &= \frac{a\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

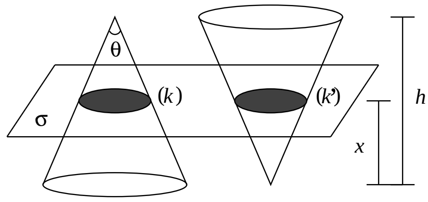
6ª Questão [Valor: 1,5]

São dadas duas superfícies cônicas de revolução, congruentes e de eixos paralelos. Seccionam-se essas duas superfícies por dois planos π e π' perpendiculares ao eixo de revolução, passando cada qual pelo vértice de uma das superfícies. Designam-se por (c) e (c') os cones resultantes situados entre os dois planos. Seja h a distância entre π e π'. Cortam-se (c) e (c') por um terceiro plano σ, paralelo a π e π', a uma distância variável x de π.

a) **[Valor: 0,7]** Mostre que a soma dos perímetros das seções (k) e (k'), determinadas por σ em (c) e (c') é constante.

b) **[Valor: 0,8]** Determine x de forma que a soma das áreas das duas seções (k) e (k') seja igual ao produto de um número real m pela área da base de um dos cones (c) ou (c'). Entre que valores poderá variar m?

Solução:



a) Os raios, r e r', das seções (k) e (k') são respectivamente iguais a

$$\begin{cases} r = (h-x)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} \\ r' = x\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

Logo, a soma P dos perímetros de (k) e (k') é dada por

$$P = 2\pi(r+r') = 2\pi h\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}$$

que é constante.

b) A soma S das áreas de (k) e (k') é dada por

$$S = \pi(r^2+r'^2) = \pi[x^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2} + (h-x)^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}]$$

O raio R da base dos cones é $R = h\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}$. Assim, se $S = m\pi R^2$, logo devemos ter que

$$x^2 + (h-x)^2 = mh^2 \Rightarrow$$

$$2x^2 - 2xh + h^2(1-m) = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1 \mp \sqrt{2m-1}}{2}h$$

Os limites de m são tais que

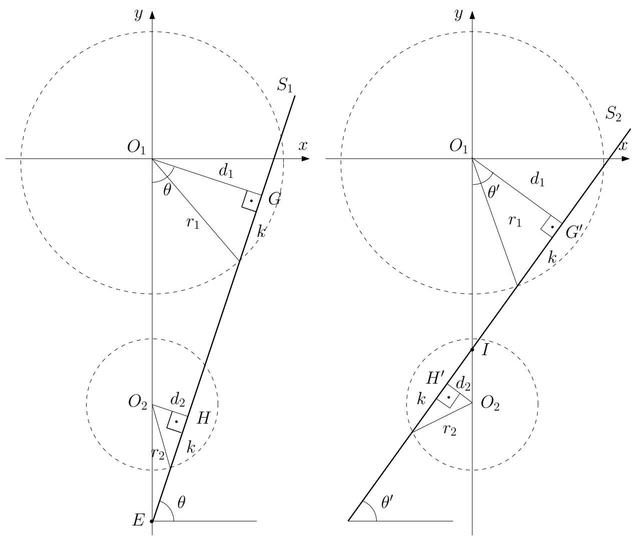
$$\begin{cases} 2m-1 \geq 0 \\ x \leq h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{2} \\ m \leq 1 \end{cases}$$

ou seja $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$.

7ª Questão [Valor: 1,5]

Dados dois círculos externos de raios distintos, mostre que o conjunto de secantes que determinam em ambos cordas iguais, é tal que, cada uma dessas secantes é tangente a uma parábola, que se pede identificar.

Solução (Baseada em solução de Paulo Santa Rita):



Sejam C_1 e C_2 dois círculos distintos de raios $r_1 > r_2$, centros em $O_1 \equiv (0,0)$ e $O_2 \equiv (0,-d)$, respectivamente, e com $d > (r_1 + r_2)$, para garantir que C_1 e C_2 sejam externos.

Pela simetria do problema, o eixo da parábola P em questão deve coincidir com a reta suporte do segmento O_1O_2. Assim, vamos escrever que $P: y = ax^2 + b$, que tem vértice $V \equiv (0,b)$, foco $F \equiv (0,f)$ e diretriz $y = (2b-f)$. Como o ponto $p_1 \equiv (\sqrt{\frac{f-b}{a}}, f)$ pertence a P, então, pela definição de parábola, tem-se que f é tal que

$$\sqrt{\frac{f-b}{a}} = f - (2b-f) = 2(f-b) \Rightarrow f = \frac{1}{4a} + b$$

Além disto, uma tangente $T: y = (\alpha x + \beta)$ a P no ponto (x_0, y_0) é tal que $\alpha = 2ax_0$ e ainda

$$\begin{cases} y_0 = (2ax_0)x_0 + \beta \\ y_0 = ax_0^2 + b \end{cases} \Rightarrow \beta = b - ax_0^2$$

A chave do problema é encontrar os coeficientes a e b de P. Para isto, o que será útil mais adiante, vamos eliminar x_0 nas expressões acima de α e β, obtendo

$$\beta = b - a\left(\frac{\alpha}{2a}\right)^2 \Rightarrow \alpha^2 = 4a(b-\beta) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\alpha^2}{4(b-\beta)} \\ \text{ou} \\ b = \beta + \frac{\alpha^2}{4a} \end{cases}$$

O enunciado do problema sugere que, ignorando a simetria em torno do eixo y já considerada na expressão de P usada acima, há dois tipos de secantes formando em C_1 e C_2 cordas iguais, de comprimento $2k$: os tipos S_1 e S_2, que formam ângulos agudos θ e θ' com o eixo x, e que cortam o eixo y em pontos E (externo) e I

(interno) ao segmento O_1O_2, repectivamente. Assim, tanto para S_1 e S_2, têm-se

$$\begin{cases} r_1^2 = d_1^2 + k^2 \\ r_2^2 = d_2^2 + k^2 \end{cases} \Rightarrow d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2$$

Para o tipo S_1, representado à esquerda na figura inicial, é fácil ver que $G\hat{O}_1O_2 = \theta$, e assim, traçando uma paralela a S_1 por O_2, tem-se

$$\cos\theta = \frac{d_1 - d_2}{d} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} = \sqrt{\left(\frac{d}{d_1-d_2}\right)^2 - 1}$$

e ainda, pela semelhança dos triângulos ΔEO_1G e ΔEO_2H, tem-se

$$\frac{EO_1}{d_1} = \frac{EO_2}{d_2} = \frac{EO_1 - EO_2}{d_1 - d_2} \Rightarrow EO_1 = \frac{dd_1}{d_1 - d_2}$$

de forma que as secantes S_1 têm equação

$$S_1 : y = \left[\sqrt{\left(\frac{d}{d_1 - d_2}\right)^2 - 1}\right] x - \frac{dd_1}{d_1 - d_2}$$

Analogamente, Para o tipo S_2, representado à direita na figura inicial, é fácil ver que $G'\hat{O}_1O_2 = \theta'$, e assim, traçando uma paralela a S_2 por O_2, tem-se

$$\cos\theta' = \frac{d_1 + d_2}{d} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} = \sqrt{\left(\frac{d}{d_1+d_2}\right)^2 - 1}$$

e ainda, pela semelhança dos triângulos $\Delta IO_1G'$ e $\Delta IO_2H'$, tem-se

$$\frac{IO_1}{d_1} = \frac{IO_2}{d_2} = \frac{IO_1 + IO_2}{d_1 + d_2} \Rightarrow IO_1 = \frac{dd_1}{d_1 + d_2}$$

de forma que as secantes S_2 têm equação

$$S_2 : y = \left[\sqrt{\left(\frac{d}{d_1 + d_2}\right)^2 - 1}\right] x - \frac{dd_1}{d_1 + d_2}$$

Associando as secantes S_1 e S_2 às tangentes T da parábola P, têm-se os seguintes sistemas de equações para $a = f(b)$ ou $b = g(a)$:

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{\left(\frac{d}{d_1-d_2}\right)^2 - 1}}{4(b - \frac{dd_1}{d_1-d_2})} \\ \\ a = \dfrac{\sqrt{\left(\frac{d}{d_1+d_2}\right)^2 - 1}}{4(b - \frac{dd_1}{d_1+d_2})} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = -\frac{dd_1}{d_1-d_2} + \dfrac{\left(\frac{d}{d_1-d_2}\right)^2 - 1}{4a} \\ \\ b = -\frac{dd_1}{d_1+d_2} + \dfrac{\left(\frac{d}{d_1+d_2}\right)^2 - 1}{4a} \end{cases}$$

Resolvendo qualquer um destes sistemas, após um algebrismo muito intenso, porém simples, encontram-se

$$\begin{cases} a = \frac{d}{2(d_1^2 - d_2^2)} \\ b = -\frac{d^2 + d_1^2 - d_2^2}{2d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{d}{2(r_1^2 - r_2^2)} \\ b = -\frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d} \end{cases}$$

que são constantes no problema. Logo, existe a parábola P, tangente a todas as secantes S_1 e S_2, e suas simétricas em relação ao eixo y, independentes até mesmo do valor de k.

Analisando a parábola P, vê-se que seu foco $F \equiv (0, f)$ é tal que

$$f = \frac{1}{4a} + b = \frac{1}{4\frac{d}{2(r_1^2 - r_2^2)}} - \frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d} = -\frac{d}{2}$$

ou seja, P tem foco no ponto médio de O_1O_2.

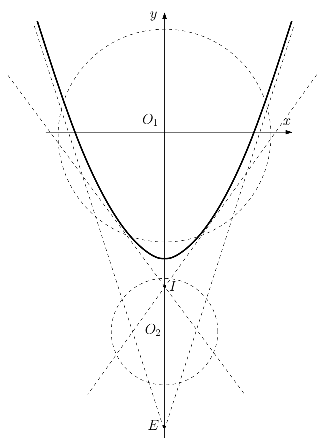
O eixo radical de C_1 e C_2 é uma reta ortogonal a O_1O_2 no ponto $p' \equiv (0, b')$, entre O_1 e O_2, tal que as potências de p' em relação a C_1 e C_2 são iguais. Logo,

$$(-r_1 - b')(r_1 - b') = (d - r_2 + b')(d + r_2 + b')$$

$$\Rightarrow -r_1^2 + b'^2 = (d + b')^2 - r_2^2 = d^2 + 2db' + b'^2 - r_2^2$$

$$\Rightarrow b' = -\frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}$$

Ou seja, $b' = b$, e assim conclui-se que o eixo radical de C_1 e C_2 é tangente à parábola P no seu vértice. Um esboço de P é mostrado a seguir.

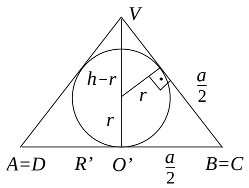


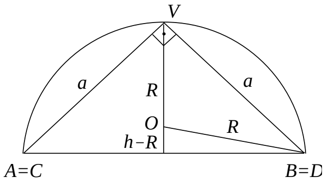
8ª Questão [Valor: 1,5]
Uma pirâmide de vértice V e base $ABCD$ constitue a metade de um octaedro regular de aresta a.

a) **[Valor: 0,8]** Determine em função de a, os raios das esferas medial (esfera que passa pelos pontos médios das arestas deste poliedro), circunscrita e inscrita.

b) **[Valor: 0,7]** Marcam-se sobre VA e VB os segmentos $VA' = VB' = x$; marcam-se sobre VC e VD os segmentos $VC' = VD' = y$; Supõe-se que x e y variam sob a condição de $x + y = a$. Determine x e y, em função de a, de forma que a área do quadrilátero $A'B'C'D'$ seja igual a $\dfrac{a^2}{4}$.

Solução:





a) A altura h da pirâmide $VABCD$ é metade da distância de dois vértices opostos, distância esta que é igual à diagonal de um quadrado de lado a. Assim, $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

A esfera medial da pirâmide $VABCD$, com raio R' e centro O', intercepta a base em pontos que pertencem a uma circunferência C_1 de raio $r_1' = \frac{a}{2}$, e intercepta as arestas que se conectam em V em pontos que pertencem a uma circunferência C_2 de raio $r_2' = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. As circunferências C_1 e C_2 distam $\frac{h}{2}$. Logo, se x é a distância de O' ao centro da base, então

$$\begin{cases} x^2+(r_1')^2 = R'^2 \\ (x+\frac{h}{2})^2+(r_2')^2 = R'^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+\frac{a^2}{4} = R'^2 \\ x^2+xh+\frac{a^2}{8}+\frac{a^2}{8} = R'^2 \end{cases}$$

e assim, $x = 0$, isto é o centro da esfera medial é o centro da base, de forma que $R' = r_1' = \frac{a}{2}$.

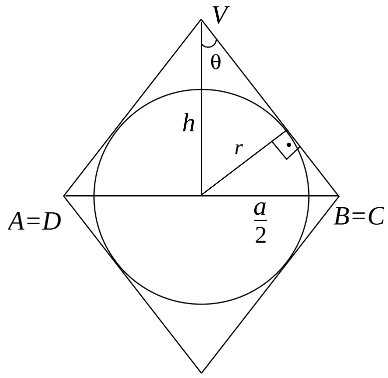
A esfera inscrita, com raio r, é tal que

$$(h-r)^2 = r^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

A esfera circunscrita, com raio R e centro O, do triângulo $\Delta OO'B$, têm-se

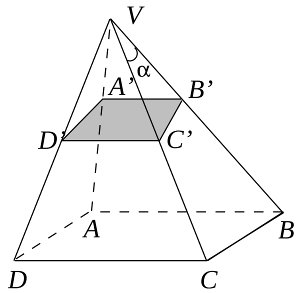
$$(h-R)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

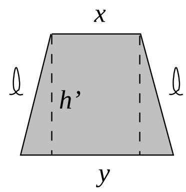
de forma que novamente o centro da esfera está no centro da base, isto é $O = O'$.



sln: O enunciado não é claro sobre o poliedro a ser considerado: a pirâmide ou o octaedro. A solução acima é para a pirâmide $VABCD$. Se considerarmos o octaedro, as esferas medial e circunscrita são as mesmas da pirâmide, pois o centro destas esferas está no centro da base da pirâmide, que é também o centro do octaedro. Já a esfera, de raio r, inscrita no octaedro é tal que, por semelhança de triângulos, tem-se

$$\frac{h}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{r}{\frac{a}{2}} \Rightarrow r = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$





b) As faces conectadas ao vértice V são triângulos equiláteros, com $\alpha = 60^{\text{o}}$. Assim, $A'B' = x$ e $C'D' = y$. Além disto, se $A'D' = B'C' = \ell$, pela lei dos cossenos no triângulo $\Delta VB'C'$, tem-se

$$\ell^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = x^2 + y^2 - xy$$

Usando Pitágoras, no trapézio-seção, obtém-se

$$\begin{aligned} h'^2 &= \ell^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3x^2+3y^2-2xy}{4} \\ &= \frac{3a^2-8xy}{4} \end{aligned}$$

de forma que a área S da seção é igual a

$$S = \frac{x+y}{2}h' = \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3a^2-8xy}}{2} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow xy = \frac{a^2}{4}$$

Como $(x+y) = a$, então têm-se $x = y = \frac{a}{2}$.

IME 1981/1982 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,5]

a) **[Valor: 1,1]** Seja a função:

$$y = mx^2 - (1+8m)x + 4(4m+1)$$

onde m é um número dado, mas variável. Mostre que todas as curvas representativas da função passam por um ponto A fixo e que são todas tangentes entre si, neste ponto. Calcule as coordenadas do ponto A e dê a equação da tangente comum.

b) **[Valor: 0,4]** Determine os dois valores de m para os quais a razão entre as raízes da equação:

$$mx^2 - (1+8m)x + 4(4m+1) = 0$$

é igual a $(-\frac{1}{4})$.

Solução:

a) A função pode ser reescrita como

$$m(x^2 - 8x + 16) = y + x - 4$$

Logo, a solução do sistema

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 16 = 0 \\ y + x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (4,0)$$

torna a função independente de m. Além disto,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2mx - (1+8m)$$

de modo que em $(4,0)$ esta derivada é constante e igual a -1.

Logo, todas as curvas passam pelo ponto $A \equiv (4,0)$ e têm uma tangente comum $y = (-x+4)$ neste ponto.

b) Resolvendo a equação para x, tem-se

$$\begin{aligned} x &= \frac{(1+8m) \mp \sqrt{(1+8m)^2 - 16m(4m+1)}}{2m} \\ &= \frac{(1+8m) \mp 1}{2m} \\ &= \begin{cases} 4 \\ \text{ou} \\ \frac{4m+1}{m} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, temos as possibilidades

$$\begin{cases} \frac{4}{\frac{4m+1}{m}} = -\frac{1}{4} \\ \text{ou} \\ \frac{\frac{4m+1}{m}}{4} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{20} \\ \text{ou} \\ m = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $M_n(R)$ o conjunto de matrizes quadradas de ordem n, de coeficientes reais. Define-se a função,

$$\begin{aligned} \Psi : M_n(R) \times M_n(R) &\to M_n(R) \\ \Psi(A,B) &= AB - BA \end{aligned}$$

Calcule:

$$\Psi(\Psi(A,B),C) + \Psi(\Psi(B,C),A) + \Psi(\Psi(C,A),B)$$

Solução:
Da definição de Ψ, têm-se

$$\begin{cases} \Psi(\Psi(A,B),C) = \Psi(AB - BA, C) \\ \qquad = ABC - BAC - CAB + CBA \\ \Psi(\Psi(B,C),A) = \Psi(BC - CB, A) \\ \qquad = BCA - CBA - ABC + ACB \\ \Psi(\Psi(C,A),B) = \Psi(CA - AC, B) \\ \qquad = CAB - ACB - BCA + BAC \end{cases}$$

e assim a expressão do enunciado é igual à matriz nula de ordem n.

3ª Questão [Valor: 1,5]
Dado o número $m = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$, determine quantos números inteiros positivos não maiores que m são primos relativos com m.

Solução:
Existem $\frac{m}{2}$ múltiplos de 2, $\frac{m}{3}$ múltiplos de 3, $\frac{m}{5}$ múltiplos de 5, $\frac{m}{6}$ múltiplos de 2 e 3 simultaneamente, $\frac{m}{10}$ múltiplos de 2 e 5 simultaneamente, $\frac{m}{15}$ múltiplos de 3 e 5 simultaneamente e $\frac{m}{30}$ múltiplos de 2, 3 e 5 simultaneamente. Logo, o número N de primos com m são

$$N = m - \left(\frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m}{5}\right) + \left(\frac{m}{6} + \frac{m}{10} + \frac{m}{15}\right) - \frac{m}{30} = \frac{8m}{30}$$

Assim, para $m = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$, tem-se $N = 2880$.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule o coeficiente do termo em x^3, no desenvolvimento de:

$$(2x-3)^4(x+2)^5.$$

Solução:
Desenvolvendo a expressão E do enunciado, tem-se

$$\begin{aligned} E = (16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81) \times \\ (x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32) \end{aligned}$$

assim, o termo a_3 em x^3 de E é igual a

$$\begin{aligned} a_3 &= (-96)(32) + (216)(80) + (-216)(80) + (81)(40) \\ &= 168 \end{aligned}$$

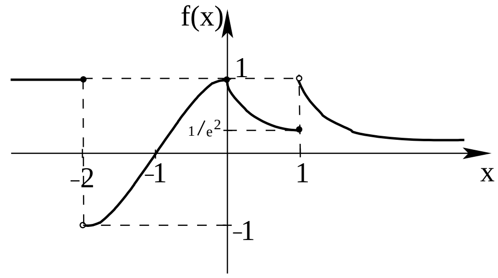
5ª Questão [Valor: 1,5]
Seja a função f definida, no conjunto dos reais, por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \leq -2 \\ \cos\frac{\pi x}{2}, & \text{para } -2 < x \leq 0 \\ e^{-2x}, & \text{para } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

a) **[Valor: 0,3]** Determine o domínio e a imagem de f.
b) **[Valor: 0,4]** Determine os pontos de descontinuidade e os pontos onde f não é derivável.
c) **[Valor: 0,4]** Determine os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente.
d) **[Valor: 0,4]** Determine os pontos e os valores de máximo e mínimo de f. Calcule o supremo e o ínfimo da imagem de f.

Solução:

a) O domínio, como dado no enunciado, é o conjunto dos reais. Da definição de f, podemos compor o seu gráfico, como mostrado a seguir, de modo que a imagem de f é tal que $-1 < f \leq 1.$,



b) Pelo gráfico, f é descontínua em $x = -2$ e $x = 1$. Além destes pontos, $f(x)$ não será diferenciável em $x = 0$, pois os limites laterais de $f'(x)$ neste ponto são tais que $L_1 \neq L_2$, onde

$$\begin{cases} L_1 = \lim\limits_{x \to 0^-} -\dfrac{\pi}{2}\text{sen}\,\dfrac{\pi x}{2} = 0 \\ L_2 = \lim\limits_{x \to 0^+} -2e^{-2x} = -2 \end{cases}$$

c) Para $x \neq -2$, $x \neq 0$ e $x \neq 1$, tem-se

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < -2 \\ -\frac{\pi}{2}\text{sen}\,\frac{\pi x}{2}, & \text{para } -2 < x < 0 \\ -2e^{-2x}, & \text{para } 0 < x < 1 \\ -\dfrac{1}{x^2}, & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

Assim, pela expressão de $f'(x)$, ou mesmo pelo gráfico de $f(x)$, podemos concluir que $f(x)$ é constante para $x < -2$, $f(x)$ é crescente para $-2 < x < 0$, e que $f(x)$ é descrescente para $(x \neq 1) < 0$.
d) Pelo gráfico de $f(x)$ é simples ver que o máximo de $f(x)$ é igual a 1, ocorrendo para todo $x < -2$ e $x = 0$, e o mínimo de $f(x)$ não existe. Já o supremo e o ínfimo de $f(x)$ são 1 e -1, respectivamente.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Determine as equações de uma circunferência com centro no ponto $(-2, 2)$ e tangente à circunferência:

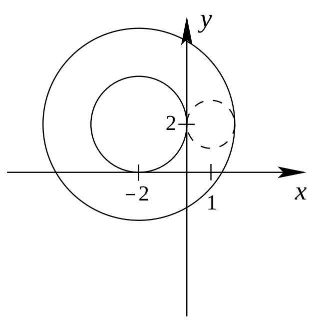
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$$

Solução:
A circunferência dada, que pode ser reescrita como

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

tem centro em $(1, 2)$ e raio unitário. Como as circunferências pedidas devem ter centro em $(-2, 2)$, é simples ver que elas deverão ter raio r igual a 2 ou 4, sendo tangentes externa ou interna, respectivamente, à circunferência dada. Logo, as equações pedidas são

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 4y = \begin{cases} 12 \\ \text{ou} \\ 24 \end{cases}$$



7ª Questão [Valor: 1,5]

a) **[Valor: 0,7]** O quadrado de qualquer número par $2n$ pode ser expresso como a soma de n termos, em progressão aritmética. Determine o primeiro termo e a razão desta progressão.

b) **[Valor: 0,8]** Três progressões geométricas têm mesma razão q e primeiros termos diferentes a, b, c. A soma dos n primeiros termos da primeira é igual à soma dos $2n$ primeiros termos da segunda e igual à soma dos $3n$ primeiros termos da terceira. Determine a relação que liga as razões $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$, em função somente de a, b e c.

Solução:

a) Como

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n = 4n^2$$

assim devemos ter que

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_n = 8n \\ a_n = a_1 + (n-1)r \end{array} \right. \Rightarrow n(8-r) = 2a_1 - r$$

Para que esta relação seja independente de n, e assim válida para todo n, devemos ter

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 8 \\ 2a_1 = r \Rightarrow a_1 = 4 \end{array} \right.$$

b) Do enunciado, podemos escrever que

$$\frac{a(q^n-1)}{q-1} = \frac{b(q^{2n}-1)}{q-1} = \frac{c(q^{3n}-1)}{q-1}$$

e então

$$\left\{ \begin{array}{l} a = b(q^n+1) \\ a = c(q^{2n}+q^n+1) \end{array} \right.$$

Logo, tem-se que

$$q^n = \frac{a}{b} - 1 = \frac{1-\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}}$$

e assim

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{\left(\frac{1-\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}}\right)^2 + \frac{1-\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}} + 1} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} + 1}$$

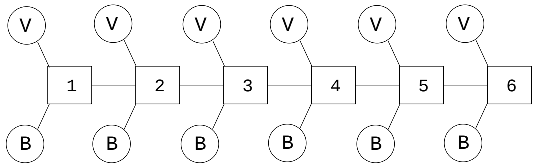
sln: Assume-se que a relação trivial

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{a} \times \frac{b}{c}$$

seja inaceitável.

8ª Questão [Valor: 1,0]

Deseja-se transmitir sinais luminosos de um farol, representado pela figura abaixo. Em cada um dos seis pontos de luz do farol existem uma lâmpada branca e uma vermelha. Sabe-se que em cada ponto de luz não pode haver mais que uma lâmpada acesa e que pelo menos três pontos de luz devem ficar iluminados. Determine o número total de configurações que podem ser obtidas.



Solução:

Com exatamente k lâmpadas acesas, têm-se $\binom{6}{k} 2^k$ possibilidades. Logo, o total T de possibilidades é

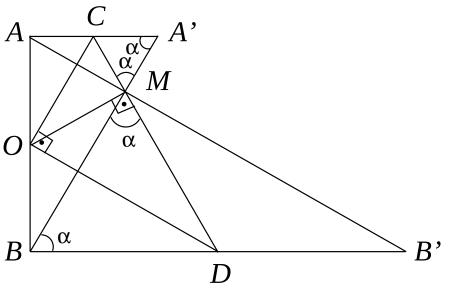
$$\begin{aligned} T &= \binom{6}{3}2^3 + \binom{6}{4}2^4 + \binom{6}{5}2^5 + \binom{6}{6}2^6 \\ &= \frac{6!}{3!3!}2^3 + \frac{6!}{4!2!}2^4 + \frac{6!}{5!1!}2^5 + \frac{6!}{6!0!}2^6 \\ &= 160 + 240 + 192 + 64 \\ &= 656 \end{aligned}$$

IME 1981/1982 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,5]
Sejam duas retas paralelas (r) e (s), e um segmento AB (A pertencente a (r) e B pertencente a (s)), perpendicular a ambas. Sobre (r) e (s), e à direita de AB, marcam-se os pontos C e D, tais que $\overline{AC}.\overline{BD} = \frac{\overline{AB}^2}{4}$.
Tomando-se C e D como centros, traçam-se os círculos (c) e (d) tangentes a AB.

a) **[Valor: 0,7]** Sendo O o meio de AB, mostre que o triângulo COD é retângulo e que (c) e (d) são tangentes entre si em um ponto M, cujo lugar geométrico é pedido.
b) **[Valor: 0,8]** Prolongando-se AM até B', pertencente a (s), e BM até A', pertencente a (r), calcule $\overline{AC}$, tal que $\overline{AA'} + \overline{BB'} = 4\overline{AB}$.

Solução:



a) Da figura,

$$\begin{cases} \overline{OC}^2 = \overline{AC}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{4} = \overline{AC}^2 + \overline{AC}.\overline{BD} \\ \overline{OD}^2 = \overline{BD}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{4} = \overline{BD}^2 + \overline{AC}.\overline{BD} \end{cases}$$

de forma que

$$\overline{CD}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = (\overline{AC} + \overline{BD})^2$$

e assim, (r) e (s) são tangentes entre si em M, com $\overline{CM} = \overline{AC}$ e $\overline{DM} = \overline{BD}$.
Seja $O\hat{M}C = \theta$. Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ΔOMC e ΔOMD (ou o teorema de Stewart no triângulo ΔCOD), com $\overline{OM} = m$, têm-se

$$\begin{cases} \overline{OC}^2 = \overline{AC}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{4} = m^2 + \overline{CM}^2 - 2m\overline{CM}\cos\theta \\ \overline{OD}^2 = \overline{BD}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{4} = m^2 + \overline{DM}^2 + 2m\overline{DM}\cos\theta \end{cases}$$

e assim, $\overline{OM} = \frac{\overline{AB}}{2}$ e ainda $\theta = 90^o$. Logo, o lugar geométrico de M é a semi-circunferência, à direita de AB, com centro em O e raio $\frac{\overline{AB}}{2}$.

b) Seja $A'\hat{B}D = C\hat{A'}B = \alpha$. Como $\overline{BD} = \overline{BM}$, então $D\hat{M}B = A'\hat{M}C = \alpha$. Logo, $\overline{CA'} = \overline{CM} = \overline{CA}$ e $\overline{AA'} = 2\overline{AC}$. Analogamente, $\overline{BB'} = 2\overline{BD}$, e então

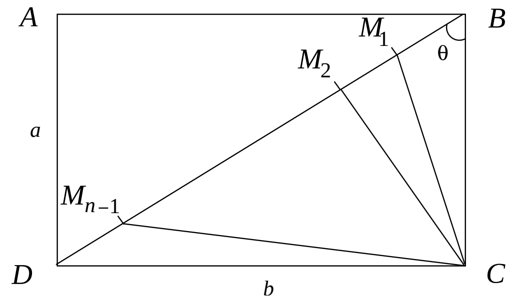
$$\begin{cases} \overline{AA'} + \overline{BB'} = 2\overline{AC} + 2\overline{BD} = 4\overline{AB} \\ \overline{AC}.\overline{BD} = \frac{\overline{AB}^2}{4} \end{cases}$$

de modo que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são soluções da equação

$$4x^2 - 8x\overline{AB} + \overline{AB}^2 = 0 \Rightarrow \overline{AC}, \overline{BD} = \frac{2 \mp \sqrt{3}}{2}\overline{AB}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Dado um retângulo $ABCD$, de lados a e b, divide-se a diagonal $\overline{BD}$ em n segmentos iguais, marcando-se os pontos $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ (na ordem $B, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, D$). Estabeleça a expressão geral dos segmentos $\overline{CM_k} = \ell_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, em função de a, b, n e k.

Solução:



Seja $C\hat{B}D = \theta$, tal que

$$\text{tg}\,\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Pelo enunciado,

$$\overline{BM_k} = \frac{k\overline{BD}}{n} = \frac{k\sqrt{a^2+b^2}}{n}$$

Logo, aplicando a lei dos cossenos no triângulo ΔCBM_k, têm-se

$$\begin{aligned} \overline{CM_k}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{BM_k}^2 - 2\overline{BC}.\overline{BM_k}\cos\theta \\ &= a^2 + \frac{k^2(a^2+b^2)}{n^2} - 2a\frac{k\sqrt{a^2+b^2}}{n}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

e assim

$$\overline{CM_k} = \frac{\sqrt{(k-n)^2a^2 + k^2b^2}}{n}$$

sln: Nos casos $k = 0$ e $k = n$, têm-se

$$\begin{cases} \overline{CM_0} = a = \overline{CB} \\ \overline{CM_n} = b = \overline{CD} \end{cases}$$

o que indica a validade do resultado encontrado.
sln: Caso $\text{tg}\,C\hat{B}D = \frac{a}{b}$, naturalmente que

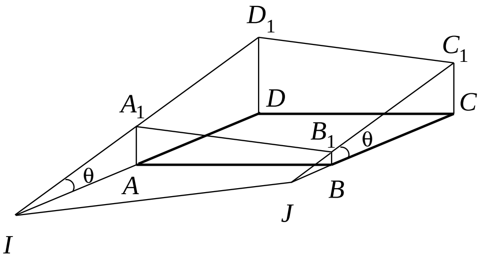
$$\overline{CM_k} = \frac{\sqrt{(k-n)^2b^2 + k^2a^2}}{n}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considera-se um quadrado $ABCD$ pertencente a um plano (π). Traçam-se pelos quatro vértices perpendiculares ao plano (π). Sobre o prolongamento de DA (no sentido de D para A), marca-se a partir de A um segmento $\overline{AI}$ igual a a e sobre o prolongamento de CB (no sentido de C para B), marca-se a partir de B um segmento $\overline{BJ}$ igual a b, tal que $a > b$. Um plano qualquer, passando por IJ, corta as perpendiculares ao plano (π), formando um quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ (A_1 correspondendo a A, B_1 a B, C_1 a C e D_1 a D).

a) **[Valor: 0,5]** Determine a natureza do quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ e estabeleça a relação existente entre as razões $\dfrac{\overline{AA_1}}{a}$ e $\dfrac{\overline{BB_1}}{b}$.

b) **[Valor: 0,5]** Supondo as razões iguais a k e $\overline{AB}$ igual a unidade, calcule os lados e as diagonais do quadrilátero em função de k, a e b.

Solução:



a) A projeção de $A_1B_1C_1D_1$ no plano π é o quadrado $ABCD$. Logo, $A_1D_1 \parallel B_1C_1$ e $A_1B_1 \parallel D_1C_1$. Assim, $AI \parallel BJ$ e então os triângulos ΔAIA_1 e ΔBJB_1 são semelhantes, com $A\hat{I}A_1 = B\hat{J}B_1 = \theta$. Desta forma, se ℓ é o lado do quadrado $ABCD$, têm-se que

$$\begin{cases} \overline{AA_1} = a\,\mathrm{tg}\,\theta \\ \overline{BB_1} = b\,\mathrm{tg}\,\theta \\ \overline{CC_1} = (b+\ell)\,\mathrm{tg}\,\theta \\ \overline{DD_1} = (a+\ell)\,\mathrm{tg}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \mathrm{tg}\,\theta = \frac{\overline{AA_1}}{a} = \frac{\overline{BB_1}}{b}$$

de modo que

$$\begin{cases} \overline{A_1B_1} = \sqrt{\ell^2+(\overline{AA_1}-\overline{BB_1})^2} = \sqrt{\ell^2+(a-b)^2\,\mathrm{tg}^2\theta} \\ \overline{B_1C_1} = \sqrt{\ell^2+(\overline{CC_1}-\overline{BB_1})^2} = \sqrt{\ell^2+\ell^2\,\mathrm{tg}^2\theta} \\ \overline{C_1D_1} = \sqrt{\ell^2+(\overline{DD_1}-\overline{CC_1})^2} = \sqrt{\ell^2+(a-b)^2\,\mathrm{tg}^2\theta} \\ \overline{D_1A_1} = \sqrt{\ell^2+(\overline{DD_1}-\overline{AA_1})^2} = \sqrt{\ell^2+\ell^2\,\mathrm{tg}^2\theta} \end{cases}$$

Logo, $\overline{A_1B_1} = \overline{C_1D_1}$ e $\overline{B_1C_1} = \overline{D_1A_1}$ e então $A_1B_1C_1D_1$ é um retângulo.

b) Se $\mathrm{tg}\,\theta = k$ e $\ell = 1$, então

$$\begin{cases} \overline{A_1B_1} = \overline{C_1D_1} = \sqrt{1+(a-b)^2k^2} \\ \overline{B_1C_1} = \overline{D_1A_1} = \sqrt{1+k^2} \end{cases}$$

e as diagonais são dadas por

$$\overline{A_1C_1} = \overline{B_1D_1} = \sqrt{2+[(a-b)^2+1]k^2}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja (T) um triângulo retângulo em A, sendo os outros vértices B e C.

a) **[Valor: 0,5]** Dá-se a razão $m = \dfrac{2p}{a}$, onde a é a hipotenusa e p o semiperímetro. Indique entre que valores m pode variar para que o problema tenha solução, e calcule $\hat{B}$ e $\hat{C}$ em função de m.

b) **[Valor: 0,5]** São dados a hipotenusa a de (T) e volume $V = \dfrac{\pi a^3}{48}$, gerado quando (T) gira em torno da hipotenusa. Calcule $\hat{B}$ e $\hat{C}$ em graus ou o valor numérico de uma de suas linhas trigonométricas.

Solução:

a) Pelo enunciado

$$m = \frac{a+b+c}{a} = 1 + \frac{b+c}{a} \Rightarrow b+c = (m-1)a$$

e assim

$$(b+c)^2 = (m-1)^2a^2 \Rightarrow 2bc = m(m-2)a^2$$

Logo, b e c são as soluções da equação

$$x^2 - (m-1)ax + \frac{m(m-2)a^2}{2} = 0$$

Para que o problema tenha solução, devemos ter que

$$\begin{cases} m-1>0 \\ m-2>0 \\ (m-1)^2-2m(m-2)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow 2 < m \leq (1+\sqrt{2})$$

quando então,

$$\mathrm{sen}\,\hat{B},\hat{C} = \frac{b,c}{a} = \frac{(m-1)\mp\sqrt{2-(m-1)^2}}{2}$$

b) Quando (T) gira em torno da hipotenusa, formam-se dois cones com raios da base iguais à altura h de A em relação à hipotenusa e com alturas iguais às projeções a_1 e a_2 dos catetos sobre a hipotenusa. Logo,

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi h^2 a_1}{3} + \frac{\pi h^2 a_2}{3} = \frac{\pi h^2 a}{3} = \frac{\pi a^3}{48}$$

e então $a = 4h$. Além disto, têm-se que

$$\begin{cases} bc = ah = \frac{a^2}{4} \\ (b+c)^2 = a^2 + 2bc = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \end{cases}$$

e então, b e c são soluções da equação

$$x^2 - \frac{a\sqrt{6}}{2}x + \frac{a^2}{4} = 0$$

de modo que

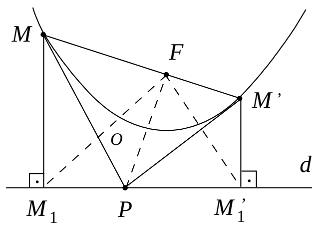
$$\mathrm{sen}\,\hat{B},\hat{C} = \frac{b,c}{a} = \frac{a(\sqrt{6}\mp\sqrt{2})}{4}$$

5ª Questão [Valor: 1,5]

a) **[Valor: 0,8]** Seja (d) a diretriz e F o foco de uma parábola. Seja $\overline{MM'}$ uma corda focal qualquer. Mostre que as tangentes em M e M' encontram-se em P, pertencente a (d) e que a reta PF é perpendicular a $\overline{MM'}$.

b) **[Valor: 0,7]** Sejam uma elipse (e) e uma hipérbole (h) tendo os mesmos focos e o mesmo eixo não focal. Estabeleça a relação na forma $f(\varepsilon, \varepsilon') = 0$, sendo ε e ε' as excentricidades de (e) e (h), respectivamente.

Solução:



a) **Lema:** A mediatriz m do segmento M_1F, onde M_1 pertence à diretriz de uma parábola (P) com foco F, é a tangente a (P) no ponto M, tal que $MM_1 \perp d$.

sln: Ver a prova deste resultado na 10ª questão de 1985/1986 (geometria).

■

Seja O a interseção de m com M_1F. Como M pertence à parábola (P), então $MM_1 = MF$, e os triângulos ΔMM_1O e ΔMFO são congruentes, de forma que $M_1\hat{M}O = F\hat{M}O$. Seja P a interseção de m com d. Assim, os triângulos ΔMM_1P e ΔMFP são congruentes (caso LAL), de forma que $M\hat{M}_1P = M\hat{F}P = 90^o$. Além disto, como M, F e M' são colineares, então $M'\hat{F}P = 90^o$.

Analogamente, tem-se que a tangente por M' é a mediatriz m' de M'_1F, onde M'_1 é a projeção de M' sobre a diretriz d. Assim, se P' é a interseção de m' com d, tem-se $M'\hat{M}'_1P' = M'\hat{F}P' = 90^o$.

Assim, têm-se $M'\hat{F}P = M'\hat{F}P' = 90^o$, com $P, P' \in d$. Logo, $P \equiv P'$, e as tangentes m e m' se encontram em $P \in d$ tal que $PF \perp MM'$.

b) Dados o comprimento $2b$ do eixo não-focal e a distância focal, $2c$, os comprimentos dos eixos focais para a elipse e para hipérbole são tais que

$$\begin{cases} 2a_e = \sqrt{4b^2 + 4c^2} \\ 2a_h = \sqrt{4c^2 - 4b^2} \end{cases}$$

e as respectivas excentricidades são

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{c}{a_e} = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} \\ \varepsilon' = \frac{c}{a_h} = \frac{c}{\sqrt{c^2-b^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b^2}{c^2} = \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \\ \frac{b^2}{c^2} = \frac{\varepsilon'^2-1}{\varepsilon'^2} \end{cases}$$

de forma que

$$f(\varepsilon, \varepsilon') = \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon'^2 - 1}{\varepsilon'^2} = \frac{\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2\varepsilon'^2 + \varepsilon'^2}{\varepsilon^2\varepsilon'^2} = 0$$

6ª Questão [Valor: 1,5]

Em um plano (π) dá-se uma circunferência (c) de centro O e raio r. Por um ponto A pertencente a (c), tira-se a perpendicular a (π) e marca-se $\overline{AV} = x$, V acima de (π).

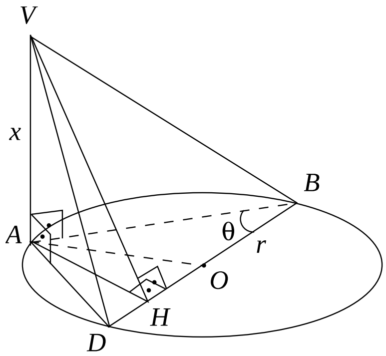
a) **[Valor: 0,4]** Seja $\overline{BD}$ um diâmetro de (c): mostre que no tetraedro $VABD$ os três pares de retas que ligam os meios das arestas opostas concorrem em um ponto, ponto esse que parmanece fixo quando BD gira em torno de O.

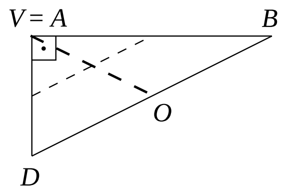
b) **[Valor: 0,3]** Mostre que as arestas opostas de $VABD$ são perpendiculares duas a duas.

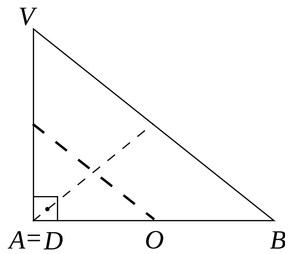
c) **[Valor: 0,4]** Ache o lugar geométrico do pé da altura tirada de V no triângulo VBD, quando $\overline{BD}$ gira em torno de O.

d) **[Valor: 0,4]** Determine o centro e o raio da esfera circunscrita ao tetraedro $VABD$ em função de r e x.

Solução:



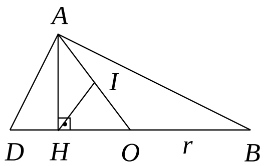




a) Sejam r_1, r_2 e r_3 as três retas que ligam os meios das arestas opostas. Na projeção do tetraedro no plano da face ABD, as projeções das arestas VB e AB coincidem, e assim as projeções de duas das três retas r_1, r_2 e r_3 coincidem. Logo, as projeções das três retas nesta vista superior são concorrentes. Na projeção no plano da face VAB, as projeções das arestas VA e VD são coincidentes, e assim novamente tem-se que as projeções das três retas são concorrentes.

Como as projeções de r_1, r_2 e r_3 são concorrentes em duas vistas ortogonais, as três retas são concorrentes no espaço. Tomando o triângulo ΔVAO, que é fixo, o ponto de interseção deve estar sobre a mediana por O neste triângulo, já que ela é uma das três retas r_1, r_2 ou r_3. Na vista superior do tetraedro, observa-se que a interseção estará no ponto médio desta mediana, ponto médio este que independe completamente da posição da aresta BD.

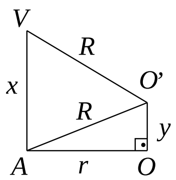
b) Como $VA \perp (\pi)$ e $BD \in (\pi)$, então $VA \perp BD$. Sejam (σ) e (σ') os planos das faces BVA e DVA, respectivamente. Como $BA \perp DA$ e $BA \perp VA$, então $BA \perp (\sigma')$, e assim $BA \perp DV$. Como $DA \perp BA$ e $DA \perp VA$, então $DA \perp (\sigma)$, e assim $DA \perp BV$. Logo, as arestas opostas são perpendiculares duas a duas.



c) A projeção de V no plano da face ABD é o ponto A. Logo a projeção do pé H da altura de V em relação a BD é a projeção do pé H' da altura de A e em relação a BD. Logo, $H = H'$. Assim, no triângulo ΔAHO, tem-se que $A\hat{H}O = 90^o$, de onde se tem que, se I é ponto médio de AO, então

$$HI = \frac{AO}{2} = \frac{r}{2}$$

que é constante. Logo, o lugar geométrico de H é a circunferência de centro I, médio de AO, e raio $\frac{r}{2}$.



d) O centro O' da esfera de raio R deve estar na perpendicular ao plano (π) por O, a uma altura y de O, pois assim

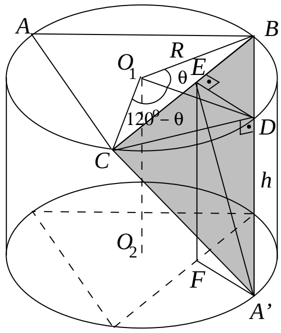
$$O'A = O'B = O'D = \sqrt{y^2 + r^2}$$

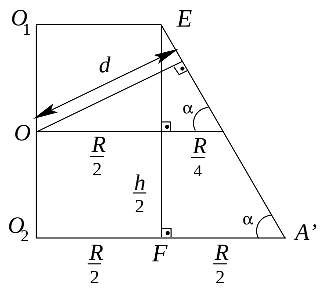
Além disto, devemos ter que

$$\left\{ \begin{array}{l} R^2 = y^2 + r^2 \\ R^2 = (x-y)^2 + r^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x}{2} \\ R = \sqrt{\frac{x^2}{4} + r^2} \end{array} \right.$$

7ª Questão [Valor: 1,5]
Sejam (k) e (k') os círculos das bases e O o centro do cilindro de raio R e altura h. No círculo (k), inscreve-se um triângulo equilátero ABC. Um ponto A', pertencente ao círculo (k'), projeta-se paralelamente ao eixo do cilindro, em um ponto D do arco de (k) que subentende BC. Determine a posição de A' para que área do triângulo $A'BC$ seja máxima, e nessa posição de A' calcule a distância de O (centro do cilindro) ao plano de $A'BC$.

Solução:





Sejam O_1 e O_2 os centros dos círculos (k) e (k'), respectivamente, e $B\hat{O}_1D = \theta$. Sejam, ainda, E o pé da altura de D no triângulo ΔBDC e F a projeção de E em (k'). Da definição, $A'DEF$ é um retângulo, cuja diagonal $A'E$ é tal que

$$A'E^2 = DE^2 + DA'^2 = DE^2 + h^2$$

A área S do triângulo $\Delta BCA'$ é máxima quando $A'E$ for máxima (já que BC é fixo). Assim, S é máxima quando DE for máxima, o que ocorre quando $BD = CD = R$ e assim

$$120^o - \theta = \theta \Rightarrow \theta = 60^o \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} DE = \frac{R}{2} \\ A'E = \frac{\sqrt{R^2+4h^2}}{2} \end{array} \right.$$

Quando S é máxima, tem-se a configuração mostrada na figura acima, à direita. Nela, têm-se

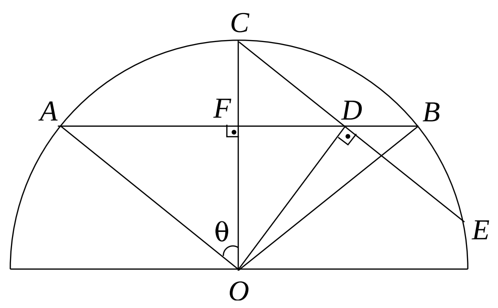
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{A'E} = \frac{d}{\frac{3R}{4}} \Rightarrow d = \frac{3Rh}{2\sqrt{R^2 + 4h^2}}$$

onde d é a distância desejada.

8ª Questão [Valor: 1,0]

Por um ponto C, ponto médio de um arco $\widehat{AB}$ qualquer, de uma circunferência (k) de centro O ($\widehat{AB} < 180^o$), traça-se a corda CDE, paralela ao raio AO (D interseção de CDE com AB e E pertence a (k)). Determine o valor do ângulo $A\hat{O}B$ (definido pelo valor numérico de alguma de suas linhas trigonométricas), para que o ponto D seja o ponto médio de CE.

Solução:



Se D é médio de CE, então $DC = DE$ e $OD \perp CE$. Além disto, como $CE \parallel AO$, então $O\hat{C}D = A\hat{O}C = \theta$. Com isto, $C\hat{O}D = (90^o - \theta)$, de modo que o triângulo ΔAOD é retângulo em O, e ainda $O\hat{D}A = \theta$.

Assim, do triângulo retângulo ΔCOD, $CD = R\cos\theta$. Do triângulo retângulo ΔAOD, $AD = \frac{R}{\operatorname{sen}\theta}$, e como $AB = 2R\operatorname{sen}\theta$, então $BD = (AB - AD)$.

Do conceito de potência do ponto D, têm-se que

$$\operatorname{Pot} D = \begin{cases} DC \times DE = DC^2 = R^2\cos^2\theta \\ DA \times DB = \frac{R}{\operatorname{sen}\theta} \times R\left(2\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right) \end{cases}$$

Logo,

$$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta = 2 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \Rightarrow \operatorname{sen}^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta - 1 = 0$$

e assim

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \\ \cos\theta = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen} 2\theta = \operatorname{sen} A\hat{O}B = \sqrt{4\sqrt{5}-8}$$

IME 1980/1981 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x},\ x \neq 0$$
$$f(x) = 1,\ x = 0$$

determine os valores de m para os quais o gráfico de f admite tangente paralela à reta $y = mx$.
Obs: $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

Solução:
A pergunta é equivalente a se determinar a imagem de f', onde

$$f'(x) = -\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-3}{x^4}$$
$$f''(x) = \frac{x^4(2x) - 4x^3(x^2-3)}{x^8} = \frac{2(6-x^2)}{x^5}$$
$$f'''(x) = \frac{x^5(-4x) - 5x^4(12-2x^2)}{x^{10}} = \frac{6(x^2-10)}{x^6}$$

Assim, podemos determinar que

$$\lim_{x\to\mp\infty} f'(x) = 0;\quad \lim_{x\to\mp 0^{\mp}} f'(x) = -\infty$$

$$f'''(\mp\sqrt{6}) = -\frac{1}{9} < 0;\quad f''(\mp\sqrt{6}) = 0;\quad f'(\mp\sqrt{6}) = \frac{1}{12}$$

Logo, $x = \mp\sqrt{6}$ são máximos de $f'(x)$. Assim, para todo $-\infty < m \leq \frac{1}{12}$, o gráfico de f admite tangente paralela à reta $y = mx$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Determine os valores de h, de modo que a desigualdade

$$-3 < \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$$

seja válida para qualquer x real.

Solução:
Completando o quadrado, o denominador pode ser escrito como

$$x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

que é sempre positivo para todo valor real de x. Assim, temos duas inequações que devem ser satisfeitas simultaneamente:

$$\begin{cases} x^2-hx+1>-3(x^2+x+1) \\ x^2-hx+1<3(x^2+x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2+(3-h)x+4>0 \\ 2x^2+(3+h)x+2>0 \end{cases}$$

Completando os quadrados, têm-se

$$\begin{cases} \left(2x+\frac{3-h}{4}\right)^2-\left(\frac{3-h}{4}\right)^2+4>0 \\ \left(\sqrt{2}x+\frac{3+h}{2\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{3+h}{2\sqrt{2}}\right)^2+2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{3-h}{4}\right)^2<4 \\ \left(\frac{3+h}{2\sqrt{2}}\right)^2<2 \end{cases}$$

Assim, devemos ter que

$$\begin{cases} -8<(3-h)<8 \\ -4<(3+h)<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5<h<11 \\ -7<h<1 \end{cases} \Rightarrow -5<h<1$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dados dois triângulos equiláteros ABC e $A'BC$, traça-se por A' uma reta qualquer que encontra os lados AC e AB, ou os seus prolongamentos, nos pontos D e E, respectivamente. Determine o lugar geométrico dos pontos de encontro das retas BD e CE.

Solução:
Sejam os vértices $A \equiv (0, \frac{l\sqrt{3}}{2})$, $A' \equiv (0, -\frac{l\sqrt{3}}{2})$, $B \equiv (-\frac{l}{2}, 0)$ e $C \equiv (\frac{l}{2}, 0)$, onde l é o lado dos triângulos equiláteros. Logo as retas AB e AC são descritas por

$$\begin{cases} AB: y = \sqrt{3}x + \frac{l\sqrt{3}}{2}; \\ AC: y = -\sqrt{3}x + \frac{l\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Seja uma reta r passando por A' e com coeficiente angular m, descrita por

$$r: y = mx - \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

de modo que suas interseções D e E, respectivamente com as retas AC e AB, sejam

$$\begin{cases} D \equiv \left(\frac{l\sqrt{3}}{m+\sqrt{3}}, \frac{l(m\sqrt{3}-3)}{2(m+\sqrt{3})}\right) \\ E \equiv \left(\frac{l\sqrt{3}}{m-\sqrt{3}}, \frac{l(m\sqrt{3}+3)}{2(m-\sqrt{3})}\right) \end{cases}$$

Assim, podemos determinar as retas BD e CE que são respectivamente descritas por

$$\begin{cases} BD: y = \frac{m\sqrt{3}-3}{m+3\sqrt{3}}x + \frac{l(m\sqrt{3}-3)}{2(m+3\sqrt{3})} \\ CE: y = \frac{m\sqrt{3}+3}{-m+3\sqrt{3}}x - \frac{l(m\sqrt{3}+3)}{2(-m+3\sqrt{3})} \end{cases}$$

Isolando m em cada uma das reta acima, tem-se que a interseção de BD e CE é tal que

$$m = \frac{3\sqrt{3}y + 3x + \frac{3l}{2}}{-y + \sqrt{3}x + \frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}y - 3x + \frac{3l}{2}}{y + \sqrt{3}x - \frac{l\sqrt{3}}{2}}$$

e assim

$$6\sqrt{3}y^2 - 6ly + 6\sqrt{3}x^2 - \frac{3l\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow$$
$$\left(y - \frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^2 + x^2 = \frac{l^2}{3}$$

que corresponde a uma circunferência de centro $(0, \frac{l\sqrt{3}}{6})$ e raio $\frac{l\sqrt{3}}{3}$.
sln: O lugar geométrico é a circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que não existem matrizes quadradas A e B, que verifiquem $AB - BA = I$, onde I é a matriz identidade de uma ordem n qualquer.

Solução:
Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, para $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Assim

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & * & \cdots & * \\ * & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{in} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} b_{1j}a_{j1} & * & \cdots & * \\ * & \sum_{j=1}^{n} b_{2j}a_{j2} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \sum_{j=1}^{n} b_{nj}a_{jn} \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tr}[AB] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \\ \text{Tr}[BA] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ij} \end{array} \right. \Rightarrow \text{Tr}[AB] = \text{Tr}[BA]$$

ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tr}[AB - BA] = 0 \\ \text{Tr}[I] = n \end{array} \right. \Rightarrow AB - BA \neq I$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que o número $\underbrace{4444\ldots4}_{n \text{ vezes}}\underbrace{8888\ldots8}_{(n-1) \text{ vezes}}9$ é um quadrado perfeito.

Solução:
Seja x o número acima, de modo que

$$10x = \underbrace{4444\ldots4}_{n \text{ vezes}}\underbrace{8888\ldots8}_{(n-1) \text{ vezes}}90$$

e então

$$\begin{aligned} 9x &= (10x - x) \\ &= 4\ \underbrace{00\ldots0}_{(n-1) \text{ vezes}}\ 4\ \underbrace{00\ldots0}_{(n-1) \text{ vezes}}\ 1 \\ &= 4 \times 10^{2n} + 4 \times 10^{n} + 1 \\ &= (2 \times 10^{n} + 1)^2 \end{aligned}$$

Pela soma dos algarismos é simples ver que a expressão final é múltipla de 9, logo

$$x = \left[\frac{(2 \times 10^{n} + 1)}{3}\right]^2$$

é um número inteiro e quadrado perfeito.

6ª Questão [Valor: 1,0]
O professor Sah Bido quer oferecer jantares para 3 alunos de cada vez. O professor tem 7 alunos e quer oferecer 7 jantares, com a restrição de que um mesmo par de alunos não pode ser convidado para mais de um jantar, isto é, se os alunos A, B e C comparecerem a um jantar, então a presença do aluno A, por exemplo, em outro jantar, impedirá a presença de C ou de B neste jantar. Chamando-se de programa a um conjunto de 7 jantares nas condições especificadas, pergunta-se: quantos programas diferentes poderão ser formados?

Solução:
O professor deverá oferecer um total de 21 refeições. Cada aluno não pode ir a mais de 3 jantares, pois acima deste número começará a ter repetições de pares. Um aluno não poderá a ir a menos de 3 jantares, pois isto obrigará outro aluno a ir a mais de 3 jantares, o que é inviável. Logo, todos os alunos deverão ir a exatamente 3 jantares cada um.

Com um dado aluno, podemos formar $(5+4+3+2+1) = 15$ triplas de alunos. Por exemplo, com o aluno A teríamos as triplas

$$\begin{array}{ccccc} (A,B,C) & (A,B,D) & (A,B,E) & (A,B,F) & (A,B,G) \\ (A,C,D) & (A,C,E) & (A,C,F) & (A,C,G) & (A,D,E) \\ (A,D,F) & (A,D,G) & (A,E,F) & (A,E,G) & (A,F,G) \end{array}$$

Com um dado aluno, para uma dada tripla, existem 6 opções para a segunda tripla evitando repetição de par de alunos. Assim, com o aluno A, para a tripla (A,B,C), podemos escolher a segunda tripla dentre as opções (A,D,E), (A,D,F), (A,D,G), (A,E,F), (A,E,G) e (A,F,G). Porém, dadas 2 triplas, a terceira tripla fica automaticamente definida para um dado aluno. Assim, dadas as triplas (A,B,C) e (A,E,G), a terceira tripla contendo o aluno A necessariamente deverá ser (A,D,F). Assim, para cada aluno há $\frac{15\times6}{3!} = 15$ formas de escolher suas três triplas, onde o termo 3! surge para eliminar as permutações das 3 triplas.

Dadas as 3 triplas de um dado aluno, só existem 2 opções para as outras 4 triplas dos demais alunos. Por exemplo, para as triplas (A,B,C), (A,E,G) e (A,D,F) do aluno A, as outras triplas só poderão ser

$$\begin{array}{cccc} (B,D,E) & (B,F,G) & (C,D,G) & (C,E,F) \\ \text{ou} & & & \\ (B,D,G) & (B,E,F) & (C,D,E) & (C,F,G) \end{array}$$

Logo, se a ordem dos jantares não for importante, temos um total de 30 possibilidades. Se, porém, a ordem dos jantares for importante, o total sobe para $7! \times 30$ possibilidades.

7ª Questão [Valor: 1,0]
A população de um país, no ano t, $t \geq 1860$, é dada, aproximadamente, por:

$$N(t') = \frac{L}{1+e^{\frac{\lambda - t'}{\alpha}}};\quad \text{onde}\quad t' = t - 1860$$

L, λ, α são constantes reais e $10^6 \times N(t')$ é o número de habitantes.

a) **[Valor: 0,7]** Calcule a população do país no ano 2000, sabendo-se que em 1860, ele tinha 15 milhões de habitantes, em 1895, 18 milhões de habitantes e em 1930, 20 milhões de habitantes.
Obs: e é a base do sistema de logaritmos neperianos.

b) **[Valor: 0,3]** Ao longo do tempo, a população tenderá a um número finito de habitantes? Justifique sua resposta.

Solução:
Definindo

$$\begin{cases} e^{\frac{\lambda}{\alpha}} = k_1 \\ e^{\frac{-35}{\alpha}} = k_2 \end{cases}$$

do enunciado, têm-se que

$$\begin{cases} \frac{L}{1+k_1} = 15 \\ \frac{L}{1+k_1k_2} = 18 \\ \frac{L}{1+k_1k_2^2} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{L-15}{15} \\ k_1k_2 = \frac{L-18}{18} \\ k_1k_2^2 = \frac{L-20}{20} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} k_2 = \frac{\frac{L-18}{18}}{\frac{L-15}{15}} &= \frac{\frac{L-20}{20}}{\frac{L-18}{18}} \Rightarrow \\ 18^2(L-20)(L-15) &= 15\times 20(L-18)^2 \Rightarrow \\ 324(L-35) &= 300(L-36) \Rightarrow \\ L = \frac{45}{2};\ k_1 &= \frac{1}{2};\ k_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

a) A população do ano 2000 é dada por

$$\frac{L}{1+k_1k_2^4} = \frac{\frac{45}{2}}{1+\frac{1}{2}\frac{1}{2^4}} = \frac{720}{33} = 21{,}8 \text{ milhões}$$

b) A população limite é

$$\lim_{t'\to\infty} \frac{L}{1+e^{\frac{\lambda-t'}{\alpha}}} = L = 22{,}5 \text{ milhões}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e seja $h \in \mathbb{C}$. Diz-se que um ponto h é um ponto de Hurwitz se $|h| = 1$ e, para todo número natural n, $h^{n+1} \neq 1$. Prove que o ponto $z = \dfrac{2-i}{2+i}$ é um ponto de Hurwitz.
Obs: $i^2 = -1$.

Solução (Baseada em solução do Colégio Impacto):
É simples ver que

$$z = \frac{(2-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i = |z|e^{2i\theta}$$

onde $|z| = 1$ e

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{4}{3};\quad \operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{2}$$

Deduzindo a fórmula de recursão da tangente, têm-se

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(n+1)\theta &= \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\cos(n+1)\theta} \\ &= \frac{\operatorname{sen} n\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos n\theta}{\cos n\theta\cos\theta - \operatorname{sen} n\theta\operatorname{sen}\theta} \\ &= \frac{\operatorname{tg} n\theta + \operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg} n\theta\operatorname{tg}\theta} \end{aligned}$$

Logo, com $\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{2}$ e definindo

$$\operatorname{tg} n\theta = \frac{P_n}{Q_n},\ \begin{cases} P_1 = -1;\ Q_1 = 2 \\ P_2 = -4;\ Q_2 = 3 \end{cases}$$

com todos os P_n e Q_n inteiros, tem-se

$$\operatorname{tg}(n+1)\theta = \frac{2\operatorname{tg} n\theta - 1}{2+\operatorname{tg} n\theta} \Rightarrow \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{2P_n - Q_n}{2Q_n + P_n}$$

Assim,

$$\begin{cases} P_{n+2} = 2P_{n+1} - Q_{n+1} \\ 2P_{n+1} + Q_{n+1} = 5P_n \end{cases} \Rightarrow P_{n+2} = 4P_{n+1} - 5P_n$$

Aplicando-se congruência módulo 10, têm-se

$$P_{n+2} \equiv 4P_{n+1} - 5P_n \pmod{10}\ \begin{cases} P_1 \equiv -1 \pmod{10} \\ P_2 \equiv -4 \pmod{10} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} n=1: P_3 \equiv 4P_2 - 5P_1 = -16+5 = -11 \equiv -1 \pmod{10} \\ n=2: P_4 \equiv 4P_3 - 5P_2 = -4+20 = -16 \equiv -4 \pmod{10} \end{cases}$$

Continuando o processo, nota-se que P_n é sempre congruente com -1 ou -4 em módulo 10, ou seja, P_n nunca é congruente com 0 em módulo 10. Assim, $\operatorname{tg} n\theta \neq 0$, e então $\operatorname{sen} n\theta \neq 0$, ou seja, $z^n \neq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, z é um ponto de Hurwitz.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Prove a seguinte identidade:

$$\left(\begin{array}{c} n+1 \\ 2m+1 \end{array} \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n-k \\ m \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} k \\ m \end{array} \right),$$

onde n e m são inteiros positivos e

$$\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) = \frac{n!}{(n-m)!m!}, \quad \text{para } n \geq m$$

$$\text{e} \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) = 0, \quad \text{para } n < m$$

Solução **(Baseada em solução do Prof. Nicolau C. Saldanha):**
Lema: Para $|x| < 1$, tem-se

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} k \\ m \end{array} \right) x^k = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$$

Prova **(Baseada em prova de Claudio Buffara):** Para $|x| < 1$, tem-se que

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Derivando esta equação $m \geq 1$ vezes, têm-se

$$m = 1 \quad : \quad \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$m = 2 \quad : \quad \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$m = 3 \quad : \quad \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)x^{k-3} = \frac{6}{(1-x)^4}$$

$$\vdots$$

$$m \quad : \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-m)!} x^{k-m} = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}$$

Note que o valor inicial do contador foi mantido em $k = 0$ sem alterar o resultado. Multiplicando ambos os termos por $\frac{x^m}{m!}$, conclui-se a prova do lema.

■

Analisando a expressão de $f_m^2(x)$,

$$\begin{aligned} f_m^2(x) &= \left[\sum_{l=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} l \\ m \end{array} \right) x^l \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} k \\ m \end{array} \right) x^k \right] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} l \\ m \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} k \\ m \end{array} \right) \right] x^{l+k} \end{aligned}$$

nota-se que o lado direito D da expressão do enunciado corresponde ao coeficiente do termo em x^{l+k} para $l = (n-k)$, ou seja, D é o coeficiente do termo em x^n de $f_m^2(x)$. Porém, pelo lema,

$$f_m^2(x) = \frac{x^{2m}}{(1-x)^{2m+2}} = x^{-1} \frac{x^{2m+1}}{(1-x)^{2m+2}} = x^{-1} f_{2m+1}(x)$$

Logo, D é o coeficiente do termo em x^{n+1} de $f_{2m+1}(x)$, que é o lado esquerdo da expressão do enunciado.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $M = (m_{ij})$ uma matriz quadrada real $n \times n$ de termos positivos. Define-se o "permanente de M" como

$$\text{perm } M = \sum_{S} m_{1t(1)} m_{2t(2)} \ldots m_{nt(n)}$$

onde S é o conjunto das permutações $(t(1), t(2), \ldots, t(n))$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$. A matriz $\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right]$ tem, por exemplo, como permanente

$1 \times 5 \times 9 + 4 \times 8 \times 3 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 5 \times 7 + 2 \times 4 \times 9 + 1 \times 6 \times 8$.

Seja a matriz $n \times n$, $H = (h_{ij})$ onde $h_{ij} = i(j+1)$. Calcule o permanente de H.

Solução:
Do enunciado

$$M = \left[\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & \ldots & (n+1) \\ 4 & 6 & 8 & \ldots & 2(n+1) \\ 6 & 9 & 12 & \ldots & 3(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2n & 3n & 4n & \ldots & n(n+1) \end{array} \right]$$

Note que a linha i é sempre múltipla de i. Pela definição de permanente, cada parcela sua terá um fator de cada linha da matriz. Assim, cada parcela terá os fatores $1, 2, \ldots, n$ exatamente uma vez. Logo, podemos colocar estes fatores em evidência na matriz e escrever que

$$\text{perm } M = (1 \times 2 \times \ldots \times n) \times \text{perm } P = n! \times \text{perm } P$$

onde

$$P = \left[\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & \ldots & (n+1) \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & (n+1) \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & (n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & (n+1) \end{array} \right]$$

Note ainda que a coluna j é sempre múltipla de $(j+1)$. Pela definição de permanente, cada parcela sua terá um fator de cada coluna da matriz. Assim, cada parcela terá os fatores $2, 3, \ldots, (n+1)$ exatamente uma vez. Logo, seguindo o mesmo raciocínio anterior, podemos colocar estes fatores em evidência na matriz e escrever que

$$\begin{aligned} \text{perm } M &= n! \times (2 \times 3 \times \ldots \times (n+1)) \times \text{perm } Q \\ &= n! \times (n+1)! \times \text{perm } Q \end{aligned}$$

onde

$$Q = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{array} \right]$$

É simples, porém, perceber que o permanente de Q terá todas as parcelas iguais a 1, e o número total de parcelas é igual a $n!$, de modo que o permanente de Q é $n!$ e o permanente de M é igual a

$$\text{perm } M = (n!)^2 (n+1)!$$

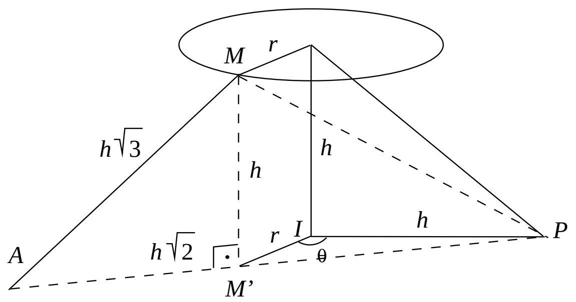
IME 1980/1981 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam (c) um círculo de raio r, distante h de um plano (π), I o traço nesse plano do eixo (Δ) do círculo (isto é, a perpendicular ao plano de (c) pelo centro de (c)), e P um ponto fixo de (π) distante h de I. Liga-se P a um ponto M, móvel, que percorre toda a circunferência de (c), e define-se um plano (σ) variável, normal a (π), que conterá sempre PM. Na interseção de (σ) com (π) existem dois pontos distantes $h\sqrt{3}$ de M. Seja A aquele cuja distância a P é a maior. Determine:

a) O lugar geométrico de A quando M percorre toda a circunferência de (c).

b) O máximo valor de IA.

Solução:

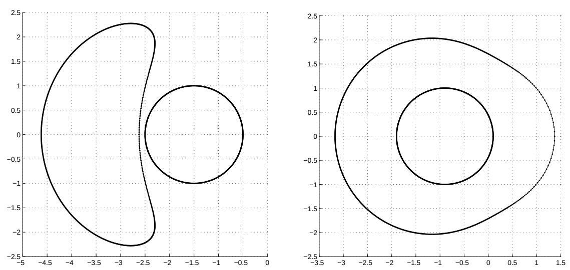


a) Seja M' a projeção de M no plano (π) e seja $\theta = P\hat{I}M'$. Assim, aplicando a lei dos cossenos no triângulo $\Delta PIM'$, obtém-se

$$PA = PM' + M'A = \sqrt{r^2 + h^2 - 2rh\cos\theta} + h\sqrt{2}$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$.

sln: As figuras abaixo representam os casos de $r = 1$ e $h = 1{,}5$ (figura da esquerda) e $h = 0{,}9$ (figura da direita). Em cada figura, a posição de M é indicada pela circunferência e o lugar geométrico pedido é representado pela outra curva.

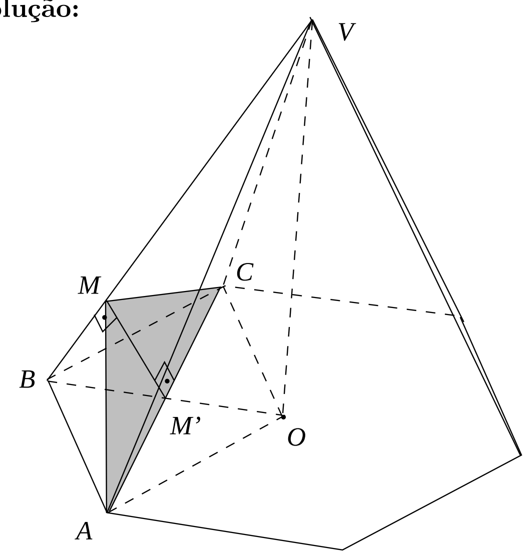


b) Por inspeção da figura inicial, o valor máximo de IA é obtido quando $\theta = 180^o$, quando então

$$IA_{\text{máx}} = r + h\sqrt{2}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice V e base $ABCDEF$, de lado da base igual a b e altura igual a $\frac{3b}{2}$, traça-se o plano perpendicular à aresta VB no ponto M, tal que este plano contenha os vértices A e C. Determine, para a pirâmide de vértice M e base ABC assim formada:
a) O comprimento da aresta AM.
b) O volume.

Solução:



Sejam M' o pé da altura de M no triângulo ΔAMC e O o centro da base da pirâmide. Pela semelhança entre os triângulos ΔVOB e $\Delta M'MB$, tem-se

$$\frac{MM'}{BM'} = \frac{OV}{BV} \Rightarrow \frac{MM'}{\frac{b}{2}} = \frac{\frac{3b}{2}}{\sqrt{b^2 + \frac{9b^2}{4}}} \Rightarrow MM' = \frac{3b}{2\sqrt{13}}$$

a) Do triângulo ΔAMC, tem-se

$$AM^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + MM'^2 \Rightarrow$$

$$AM = \sqrt{\frac{3b^2}{4} + \frac{9b^2}{52}} = \frac{2b\sqrt{39}}{13}$$

b) Seja h_M a altura de M no triângulo $\Delta BMM'$. O volume V desejado é dado por

$$\begin{aligned} V &= \frac{S_{ABC}h_M}{3} \\ &= \frac{\frac{b^2\sqrt{3}}{4}\frac{BM \times MM'}{BM'}}{3} \\ &= \frac{b^2\sqrt{3}}{12}\frac{\sqrt{(BM'^2 - MM'^2)} \times \frac{3b}{2\sqrt{13}}}{\frac{b}{2}} \\ &= \frac{b^2\sqrt{3}}{4\sqrt{13}}\sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{9b^2}{52}} \\ &= \frac{b^3\sqrt{3}}{52} \end{aligned}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam ℓ_9 o lado do eneágono regular convexo, ℓ_9^* e ℓ_9^{**} os lados dos eneágonos estrelados ($\ell_9^* < \ell_9^{**}$), todos inscritos em um círculo de raio r. Mostre que:

$$\ell_9 = \ell_9^{**} - \ell_9^*$$

Solução:
Os lados ℓ_9, ℓ_9^* e ℓ_9^{**} são bases de triângulos isósceles com lados iguais R e ângulos de vértice iguais a 40º, 80º e 160º, respectivamente. Logo,

$$\begin{cases} \ell_9 = 2R \operatorname{sen} 20^o \\ \ell_9^* = 2R \operatorname{sen} 40^o \\ \ell_9^{**} = 2R \operatorname{sen} 80^o \end{cases}$$

e assim, usando a transformação em produto da diferença de senos, têm-se que

$$\ell_9^{**} - \ell_9^* = 2R(\operatorname{sen} 80^o - \operatorname{sen} 40^o) = 2R(2 \operatorname{sen} 20^o \cos 60^o)$$

Logo,

$$\ell_9^{**} - \ell_9^* = 2R \operatorname{sen} 20^o = \ell_9$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Determine todos os valores de x, y e z, situados no intervalo fechado $[0, \pi]$, satisfazendo o sistema:

$$\cos x + \cos 2y = 0$$
$$\cos y + \cos 2z = 0$$
$$\cos z + \cos 2x = 0$$

Solução:
Das relações de transformação em produto, têm-se

$$\begin{cases} 2\cos\left(\frac{x+2y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-2y}{2}\right) = 0 \\ 2\cos\left(\frac{y+2z}{2}\right)\cos\left(\frac{y-2z}{2}\right) = 0 \\ 2\cos\left(\frac{z+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{z-2x}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

e assim

$$\begin{cases} \frac{x\mp 2y}{2} = k_1\pi + \frac{\pi}{2} \\ \frac{y\mp 2z}{2} = k_2\pi + \frac{\pi}{2} \\ \frac{z\mp 2x}{2} = k_3\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (2k_1+1)\pi \pm 2y \\ y = (2k_2+1)\pi \pm 2z \\ z = (2k_3+1)\pi \pm 2x \end{cases}$$

com $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\begin{aligned} x &= (2k_1+1)\pi \pm 2[(2k_2+1)\pi \pm 2[(2k_3+1)\pi \pm 2x]] \\ &= [(2k_1+1) \pm 2(2k_2+1) \pm 4(2k_3+1)]\pi \pm 8x \\ &= (2k_1'+1)\pi \pm 8x \end{aligned}$$

com $k_1' \in \mathbb{Z}$, e assim

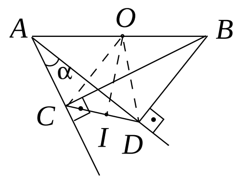
$$x\frac{(2k_1'+1)\pi}{1\mp 8}$$

Como $x, y, z \in [0, \pi]$, têm-se as possibilidades

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{9} \Rightarrow \pm 2x=\pm\frac{2\pi}{9} \Rightarrow z=\frac{7\pi}{9} \Rightarrow \pm 2z=\pm\frac{14\pi}{9} \Rightarrow y=\frac{5\pi}{9} \\ x=\frac{3\pi}{9} \Rightarrow \pm 2x=\pm\frac{6\pi}{9} \Rightarrow z=\frac{3\pi}{9} \Rightarrow \pm 2z=\pm\frac{6\pi}{9} \Rightarrow y=\frac{3\pi}{9} \\ x=\frac{5\pi}{9} \Rightarrow \pm 2x=\pm\frac{10\pi}{9} \Rightarrow z=\frac{\pi}{9} \Rightarrow \pm 2z=\pm\frac{2\pi}{9} \Rightarrow y=\frac{7\pi}{9} \\ x=\frac{7\pi}{9} \Rightarrow \pm 2x=\pm\frac{14\pi}{9} \Rightarrow z=\frac{5\pi}{9} \Rightarrow \pm 2z=\pm\frac{10\pi}{9} \Rightarrow y=\frac{\pi}{9} \\ x=\frac{9\pi}{9} \Rightarrow \pm 2x=\pm\frac{18\pi}{9} \Rightarrow z=\frac{9\pi}{9} \Rightarrow \pm 2z=\pm\frac{18\pi}{9} \Rightarrow y=\frac{9\pi}{9} \\ x=\frac{\pi}{7} \Rightarrow \pm 2x=\pm\frac{2\pi}{7} \Rightarrow z=\frac{5\pi}{7} \Rightarrow \pm 2z=\pm\frac{10\pi}{7} \Rightarrow y=\frac{3\pi}{7} \\ x=\frac{3\pi}{7} \Rightarrow \pm 2x=\pm\frac{6\pi}{7} \Rightarrow z=\frac{\pi}{7} \Rightarrow \pm 2z=\pm\frac{2\pi}{7} \Rightarrow y=\frac{5\pi}{7} \\ x=\frac{5\pi}{7} \Rightarrow \pm 2x=\pm\frac{10\pi}{7} \Rightarrow z=\frac{3\pi}{7} \Rightarrow \pm 2z=\pm\frac{6\pi}{7} \Rightarrow y=\frac{\pi}{7} \end{cases}$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Um ângulo α de grandeza constante, situado em um plano (π), gira em torno de seu vértice A, que é fixo, permanecendo no plano (π). De um ponto B, fixo, no plano (π), tiram-se perpendiculares BC e BD aos lados do ângulo α. Determine o lugar geométrico dos pontos C e D. Mostre que CD tem comprimento constante e determine o lugar geométrico do ponto médio de CD.

Solução:



Na figura acima, sejam O e I os pontos médios de AB e CD, respectivamente. Nos triângulos retângulos ΔACB e ΔADB, CO e DO são medianas relativas às respectivas hipotenusas, e assim

$$CO = DO = \frac{AB}{2}$$

Logo, A, B, C e D estão inscritos em uma mesma circunferência de centro O e raio $\frac{AB}{2}$, que é o lugar geométrico de C e D.

Da análise anterior, $C\hat{O}D = 2\alpha$ e assim

$$CD = 2\frac{AB}{2}\operatorname{sen}\alpha = AB \operatorname{sen}\alpha$$

que é constante. Além disto,

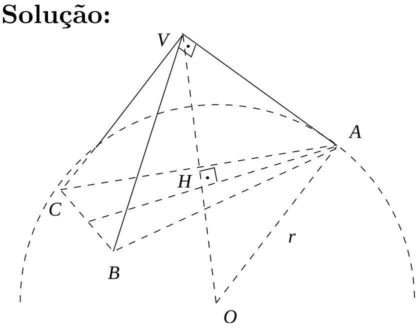
$$OI = \frac{AB}{2}\cos\alpha$$

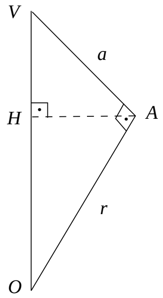
Logo, o lugar geométrico de I é a circunferência de centro O e raio $\frac{AB}{2}\cos\alpha$.

6ª Questão [Valor: 1,0]

Uma esfera (ε) de raio r e centro O tangencia um plano (π) em M. Sobre a reta OM, no mesmo semi-espaço determinado pelo plano (π) em que se acha a esfera (ε), marca-se um ponto V tal que $VO = x > r$, e traçam-se 3 retas, partindo de V, que tangenciam a esfera em A, B e C, sendo $A\hat{V}B = B\hat{V}C = C\hat{V}A = \frac{\pi}{2}$. Calcule x em função de r e determine, também em função de r, as dimensões da calota seccionada na esfera pelo plano VAB (isto é: o raio da base da calota e sua altura).

Solução:





Sejam $VA = VB = VC = a$. Assim, a base ΔABC do tetraedro é equilátera com lados $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$. Esta base está inscrita num círculo, de raio R, que é a base da calota do enunciado. Assim,

$$2R\,\mathrm{sen}\,60^{\circ} = a\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Seja H o pé da altura de V em relação à base ΔABC, de forma que

$$HA = \frac{2}{3} \times (a\sqrt{2})\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Da semelhança entre os triângulos ΔVOA, ΔVAH e ΔAOH, têm-se

$$\begin{cases} \frac{AH}{AV} = \frac{OA}{OV} \Rightarrow \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a} = \frac{r}{x} \Rightarrow OV = x = \frac{r\sqrt{6}}{2} \\ \frac{VH}{AV} = \frac{AV}{OV} \Rightarrow \frac{VH}{a} = \frac{a}{x} \Rightarrow VH = \frac{a^2\sqrt{6}}{3r} \\ VH = \sqrt{AV^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{6a^2}{9}} \Rightarrow VH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ \frac{OH}{OA} = \frac{AH}{AV} \Rightarrow \frac{OH}{r} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a} \Rightarrow OH = \frac{r\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

Igualando os dois valores de VH obtidos acima, têm-se

$$\frac{a^2\sqrt{6}}{3r} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

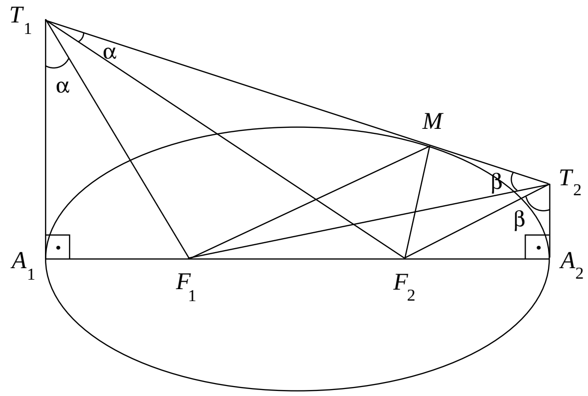
e assim, o raio R e a altura h da calota são respectivamente iguais a

$$\begin{cases} R = \frac{r\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{r\sqrt{3}}{3} \\ h = r - OH = \frac{(3-\sqrt{6})}{3} \end{cases}$$

7ª Questão [Valor: 1,0]

Dá-se uma elipse de vértices A_1 e A_2, definida por: $A_1A_2 = 2a$ (eixo focal), $B_1B_2 = 2b$ (eixo não focal). Sejam F_1 e F_2 os focos da elipse, e uma tangente à elipse em um ponto M qualquer ($M \neq A_1$ e $M \neq A_2$). Esta tangente é cortada nos pontos T_1 e T_2 respectivamente pelas tangentes à elipse nos vértices A_1 e A_2. Mostre que o quadrilátero $T_1F_1F_2T_2$ é inscritível e que o produto $A_1T_1.A_2T_2$ é constante.

Solução:



As retas T_1A_1 e T_1M são tangentes à elipse por T_1. Assim, pelo teorema de Poncelet, têm-se que

$$\begin{cases} A_1\hat{T}_1F_1 = M\hat{T}_1F_2 = \alpha \\ A_1\hat{F}_1T_1 = M\hat{F}_1T_1 = (90^{\circ} - \alpha) \\ A_1\hat{F}_2T_1 = M\hat{F}_2T_1 = \gamma \end{cases}$$

Analogamente, as retas T_2A_2 e T_2M são tangentes à elipse por T_2. Assim,

$$\begin{cases} A_2\hat{T}_2F_2 = M\hat{T}_2F_1 = \beta \\ A_2\hat{F}_2T_2 = M\hat{F}_2T_2 = (90^{\circ} - \beta) \\ A_2\hat{F}_1T_2 = M\hat{F}_1T_2 = \delta \end{cases}$$

Por uma análise angular, é possível constatar que $\gamma = \beta$ e $\delta = \alpha$, e assim,

$$\begin{cases} T_1\hat{F}_1F_2 = 90^{\circ} + \alpha \\ T_2\hat{F}_2F_1 = 90^{\circ} + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1\hat{T}_1F_2 = 90^{\circ} - \alpha - \beta \\ F_1\hat{F}_2T_2 = 90^{\circ} - \alpha - \beta \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} T_1\hat{F}_1F_2 + F_2\hat{T}_2T_1 = (90^{\circ} + \alpha) + (90^{\circ} - \alpha) = 180^{\circ} \\ T_2\hat{F}_2F_1 + F_1\hat{T}_1T_2 = (90^{\circ} + \beta) + (90^{\circ} - \beta) = 180^{\circ} \end{cases}$$

de forma que o quadrilátero $T_1F_1F_2T_2$ é inscritível.

Além disto, da análise angular acima, $T_1\hat{F}_1T_2 = 90^{\circ}$. Assim, da semelhança dos triângulos $\Delta T_1A_1F_1$ e $\Delta F_1A_2T_2$, têm-se

$$\frac{A_1T_1}{A_1F_1} = \frac{A_2F_1}{A_2T_2} \Rightarrow$$
$$A_1T_1.A_2T_2 = A_1F_1.A_2F_1 = (a-c)(a+c) = b^2$$

onde $2a$, $2b$ e $2c$ são os comprimentos do eixo focal, do eixo não-focal e da distância focal, respectivamente. Logo, $A_1T_1.A_2T_2$ é constante para a elipse em questão.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Dado o triângulo escaleno ABC, sejam respectivamente D, E, F os pontos de contato do círculo inscrito ao triângulo ABC, com os lados BC, AC e AB. Mostre que os triângulos ABC e DEF não são semelhantes, e estabeleça a relação $\dfrac{EF}{BC}$ em função de sen $\frac{b}{2}$ e sen $\frac{c}{2}$.

Solução:
O centro O do círculo inscrito é o encontro das bissetrizes internas do triângulo ΔABC. Logo, $F\hat{A}O = E\hat{A}O = \frac{\hat{A}}{2}$, e como $FO \perp AF$ e $EO \perp AE$, então $F\hat{O}A = E\hat{O}A = (90^o - \frac{\hat{A}}{2})$, e assim,

$$\begin{cases} \hat{D} = F\hat{D}E = \frac{F\hat{O}E}{2} = (90^o - \frac{\hat{A}}{2}) \\ \hat{E} = D\hat{E}F = \frac{D\hat{O}F}{2} = (90^o - \frac{\hat{B}}{2}) \\ \hat{F} = E\hat{F}D = \frac{E\hat{O}D}{2} = (90^o - \frac{\hat{C}}{2}) \end{cases}$$

onde $\hat{E}$ e $\hat{F}$ são determinados de forma análoga à de $\hat{D}$. Como o triângulo ΔABC é escaleno, então

$$\hat{A} \neq \hat{B} \neq \hat{C} \neq \hat{A} \Rightarrow \hat{D} \neq \hat{E} \neq \hat{F} \neq \hat{D}$$

e o triângulo ΔDEF também deve ser escaleno. Existem seis formas de os triângulos ΔABC e ΔDEF serem semelhantes:

$$(\hat{D}, \hat{E}, \hat{F}) = \begin{cases} (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) \text{ ou } (\hat{A}, \hat{C}, \hat{B}) \text{ ou } (\hat{B}, \hat{A}, \hat{C}) \\ (\hat{B}, \hat{C}, \hat{A}) \text{ ou } (\hat{C}, \hat{A}, \hat{B}) \text{ ou } (\hat{C}, \hat{B}, \hat{A}) \end{cases}$$

Em cada um dos seis casos, usando as expressões obtidas acima para $\hat{D}$, $\hat{E}$ e $\hat{F}$, obtém-se um triângulo ΔABC equilátero, o que é absurdo. Logo, os triângulos ΔABC e ΔDEF são efetivamente não semelhantes.

Seja r o raio do círculo inscrito ao triângulo ΔABC. Logo, do triângulo ΔFOE, tem-se que $O\hat{F}E = O\hat{E}F = \frac{\hat{A}}{2}$, e assim

$$EF = 2r \cos \frac{\hat{A}}{2} = 2r \cos[90^o - \frac{(\hat{B}+\hat{C})}{2}] = 2r \operatorname{sen} \frac{(\hat{B}+\hat{C})}{2}$$

Dos triângulos ΔODB e ΔODC, têm-se

$$\begin{cases} \operatorname{tg} O\hat{B}D = \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = \frac{r}{BD} \\ \operatorname{tg} O\hat{C}D = \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = \frac{r}{DC} \end{cases}$$

e então

$$\begin{aligned} BC &= BD + DC \\ &= \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2}} + \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2}} \\ &= \frac{r \left(\operatorname{sen} \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2} + \operatorname{sen} \frac{\hat{C}}{2} \cos \frac{\hat{B}}{2} \right)}{\operatorname{sen} \frac{\hat{B}}{2} \operatorname{sen} \frac{\hat{C}}{2}} \\ &= \frac{r \operatorname{sen} \frac{(\hat{B}+\hat{C})}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\hat{B}}{2} \operatorname{sen} \frac{\hat{C}}{2}} \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{EF}{BC} = 2 \operatorname{sen} \frac{\hat{B}}{2} \operatorname{sen} \frac{\hat{C}}{2}$$

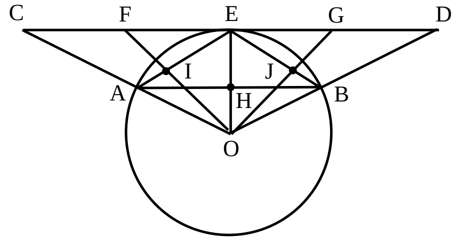
9ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a sucessão

$$\mathbb{P}_n \ , \ p_n \ , \ \mathbb{P}_{2n} \ , \ p_{2n} \ , \ \mathbb{P}_{4n} \ , \ p_{4n} \ , \ \mathbb{P}_{8n} \ , \ p_{8n} \ldots \quad (1)$$

na qual $\mathbb{P}_k$ é o semi-perímetro do polígono regular de k lados circunscrito ao círculo unitário, e p_k é o semi-perímetro do polígono regular de k lados inscrito no mesmo círculo.

a) Usando a figura abaixo, estabeleça a fórmula

$$\mathbb{P}_{2n} = \frac{2\mathbb{P}_n p_n}{\mathbb{P}_n + p_n}$$



b) Calcule o limite da sucessão (1).

Solução:

a) Sejam L_n e ℓ_n os lados dos polígonos regulares de n lados circunscrito e inscrito, respectivamente, no círculo unitário. Logo,

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{2n} = \frac{2nL_{2n}}{2} \\ \mathbb{P}_n = \frac{nL_n}{2} \\ p_n = \frac{n\ell_n}{2} \end{cases}$$

e a expressão do enunciado se torna

$$L_{2n} = \frac{L_n \ell_n}{L_n + \ell_n} \Rightarrow \frac{L_{2n}}{L_n - L_{2n}} = \frac{\ell_n}{L_n}$$

Usando o teorema das bissetrizes no triângulo ΔOCE, têm-se

$$\frac{CF}{OC} = \frac{EF}{OE} \Rightarrow \frac{\frac{L_n - L_{2n}}{2}}{R} = \frac{\frac{L_{2n}}{2}}{r} \Rightarrow \frac{L_{2n}}{L_n - L_{2n}} = \frac{r}{R}$$

onde $r = 1$ e R são os raios dos círculos circunscritos aos polígonos regulares de lados ℓ_n e L_n, respectivamente, e então

$$\frac{\ell_n}{L_n} = \frac{r}{R}$$

e a expressão do enunciado fica demonstrada.

b) A sucessão (1) pode ser decomposta em duas sucessões

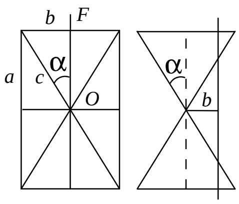
$$(1) \equiv \begin{cases} \mathbb{P}_n, \mathbb{P}_{2n}, \mathbb{P}_{4n} \ldots \\ p_n, p_{2n}, p_{4n} \ldots \end{cases}$$

Ambas as sucessões convergem para o mesmo valor L, que é a semi-circunferência do círculo unitário. Assim, o limite da sucessão (1) é $L = \pi$.

10^{a} Questão [Valor: 1,0]
Calcule os eixos e a excentricidade da cônica, seção por um plano (π) em um cone de revolução (Γ), de vértice V, sabendo-se:

1) A excentricidade da seção por (π) é a maior possível para o cone (Γ).
2) V dista de (π) 6 unidades de comprimento.
3) (Γ) é tal que a seção por um plano perpendicular a uma geratriz é uma hipérbole equilátera.

Solução:



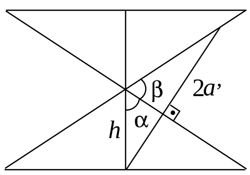
Para ter excentricidade máxima, a seção deve ser uma hipérbole. Se α é o ângulo entre a assíntota e o eixo focal, a excentricidade e da hipérbole é tal que

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Assim, devemos ter o maior α possível. No cone, o ângulo máximo entre planos tangentes é o próprio ângulo da geratriz com o eixo. Esta configuração de tangentes é obtida para qualquer plano-seção paralelo ao eixo do cone. Logo, do enunciado,

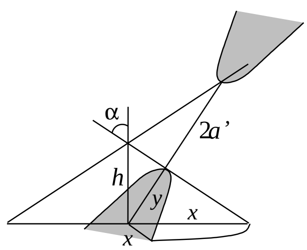
$$2b = 12 \Rightarrow \begin{cases} 2a = \frac{12}{\operatorname{tg}\alpha} \\ 2c = \frac{12}{\operatorname{sen}\alpha} \end{cases}$$

Precisamos, então, do ângulo α para caracterizar a hipérbole. Isto será feito usando a informação (3).



Para um plano ortogonal a uma geratriz do cone, tem-se

$$h\cos\alpha = \frac{2a'}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{2a'}{\operatorname{tg}(180^{\text{o}} - 2\alpha)} = -\frac{2a'}{\operatorname{tg}2\alpha}$$

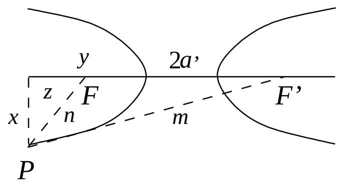


O ponto P pertencente à hipérbole é tal que

$$\begin{cases} x = h\operatorname{tg}\alpha \\ y = h\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

e, sendo a hipérbole equilátera, $b' = a'$ e então

$$FF' = 2c' = 2a'\sqrt{2}$$



Da definição de hipérbole, a diferença das distâncias de P aos focos F e F' é igual a $2a'$. Assim,

$$\begin{aligned} m - n = 2a' &\Rightarrow \\ m^2 - 2mn + n^2 = 4a'^2 &\Rightarrow \\ m^2 + n^2 - 4a'^2 = 2mn &\Rightarrow \\ (m^2 + n^2 - 4a'^2)^2 = 4m^2n^2 &\Rightarrow \\ m^4 + n^4 + 16a'^4 + 2m^2n^2 - 8a'^2(m^2 + n^2) = 4m^2n^2 &\Rightarrow \\ (m^2 - n^2)^2 = 8a'^2(m^2 + n^2 - 2a'^2)& \end{aligned}$$

Com isto,

$$\begin{aligned} \left[(x^2+(z+2a'\sqrt{2})^2)-(x^2+z^2)\right]^2 = 8a'^2(m^2+n^2-2a'^2) &\Rightarrow \\ (4a'z\sqrt{2} + 8a'^2)^2 = 8a'^2(m^2 + n^2 - 2a'^2) &\Rightarrow \\ 2(z\sqrt{2} + 2a')^2 = m^2 + n^2 - 2a'^2 &\Rightarrow \\ 4z^2 + 8a'z\sqrt{2} + 10a'^2 = m^2 + n^2 &\Rightarrow \\ 4z^2+8a'z\sqrt{2}+10a'^2 = (x^2+(z+2a'\sqrt{2})^2)+(x^2+z^2) &\Rightarrow \\ 2z^2 + 4a'z\sqrt{2} + 2a'^2 = 2x^2 &\Rightarrow \\ (z + a'\sqrt{2})^2 = x^2 + a'^2& \end{aligned}$$

Mas,

$$z = y-(c'-a') = y+a'(1-\sqrt{2}) \Rightarrow (z+a'\sqrt{2}) = y+a'$$

Logo,

$$\begin{aligned} y^2 + 2ya' = x^2 &\Rightarrow \\ h^2\operatorname{sen}^2\alpha - h^2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}2\alpha = h^2\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} &\Rightarrow \\ \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}2\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha} &\Rightarrow \\ 1 - \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} &\Rightarrow \\ \operatorname{tg}^4\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha - 2 = 0 &\Rightarrow \\ \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}& \end{aligned}$$

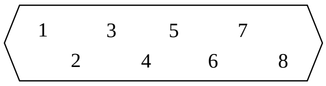
Por fim,

$$\begin{cases} 2b = 12 \\ 2a = \frac{12}{\operatorname{tg}\alpha} = 6\sqrt{2} \\ 2c = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 6\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$$

sln: Algo me diz que $\operatorname{tg}\alpha$ poderia ser obtida diretamente do fato da hipérbole gerada pelo plano ortogonal a uma geratriz ser equilátera, ou seja, ter excentricidade $e' = \sqrt{2}$.

IME 1979/1980 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um barco com 8 lugares, numerados como no diagrama seguinte:



Há 8 remadores disponíveis para guarnecê-lo, com as seguintes restrições: Os remadores A e B só podem sentar no lado ímpar e o remador C, no lado par. Os remadores D, E, F, G, H podem ocupar quaisquer posições. Quantas configurações podem ser obtidas com o barco totalmente guarnecido?

Solução:
Do lado par, temos 4 posições para o remador C. Do lado ímpar, temos $4 \times 3 = 12$ posições para os dois remadores A e B. Para os demais cinco remadores, temos $5! = 120$ posições. Sendo assim, o total de posições distintas é $4 \times 12 \times 120 = 5760$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $I = [-1, 2] \in \mathbb{R}$. Dê exemplo de uma função contínua em I tal que não exista um ponto $a \in]-1, 2[$ que satisfaça a condição:

$$f(2) - f(-1) = 3f'(a)$$

Solução:
Para que a propriedade desejada ocorra, f não deve satisfazer as condições do Teorema do Valor Médio. Assim, f deve necessariamente não ser continuamente diferenciável. Um exemplo simples é $f(x) = |x|$, onde

$$f'(x) = \begin{cases} -1, \text{para } x < 0 \\ \nexists, \text{para } x = 0 \\ 1, \text{para } x > 0 \end{cases}$$

assim, é simples ver que não existe $x = a$ no intervalo I tal que

$$f'(a) = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Determine o polinômio $f(x)$ de coeficientes racionais e do 7º grau, sabendo-se que: $f(x) + 1$ é divisível por $(x-1)^4$ e que $f(x) - 1$ é divisível por $(x+1)^4$.

Solução:
Seja

$$f(x) = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h$$

Pelas propriedades do enunciado, têm-se

$$\begin{cases} f(1)+1 = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f''(1) = 0 \\ f'''(1) = 0 \\ f(-1)-1 = 0 \\ f'(-1) = 0 \\ f''(-1) = 0 \\ f'''(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d+e+f+g+h+1 = 0 \\ 7a+6b+5c+4d+3e+2f+g = 0 \\ 42a+30b+20c+12d+6e+2f = 0 \\ 210a+120b+60c+24d+6e = 0 \\ -a+b-c+d-e+f-g+h-1 = 0 \\ 7a-6b+5c-4d+3e-2f+g = 0 \\ -42a+30b-20c+12d-6e+2f = 0 \\ 210a-120b+60c-24d+6e = 0 \end{cases}$$

Somando-se as equações correspondentes, podemos eliminar as incógnitas a, c, e e g, compondo o sistema

$$\begin{cases} 2b + 2d + 2f + 2h = 0 \\ 12b + 8d + 4f = 0 \\ 60b + 24d + 4f = 0 \\ 240b + 48d = 0 \end{cases}$$

cuja solução claramente é $b = d = f = h = 0$. Com isto, o sistema original se reduz a

$$\begin{cases} a + c + e + g = -1 \\ 7a + 5c + 3e + g = 0 \\ 42a + 20c + 6e = 0 \\ 210a + 60c + 6e = 0 \end{cases}$$

cuja solução é tal que

$$f(x) = \frac{5}{16}x^7 - \frac{21}{16}x^5 + \frac{35}{16}x^3 - \frac{35}{16}x$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Seja a seqüência, real (x_n), $n = 0, 1, \ldots$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0, \; n = 2, 3, \ldots$$

Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{n} \right) = 0$$

Solução:
Assumindo que o enunciado está correto,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-2}) &= \lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &= \lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-1}) + \lim_{n\to\infty} (x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &= 2 \lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{n} \right) = 0$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Resolva as equações:

$$x^3-7x^2-204x+1260=0 \qquad x^3-15x^2-394x+840=0$$

sabendo-se que a primeira tem uma raiz cujo valor é o triplo do valor de uma raiz da segunda.

Solução:
Seja r a raiz da segunda, logo $3r$ é raiz da primeira. Assim,

$$\begin{cases} 27r^3-63r^2-612r+1260=0\ (\div 9) \\ r^3-15r^2-394r+840=0\ (\times 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3r^3-7r^2-68r+140=0 \\ 3r^3-45r^2-1182r+2520=0 \end{cases}$$

Logo,

$$38r^2+1114r-2380=0 \Rightarrow 19r^2+557r-1190=0$$

e assim

$$r=\frac{-557\mp\sqrt{310249-90244}}{38}=\frac{-557\mp 633}{38}=\begin{cases} -\frac{595}{19} \\ \text{ou} \\ 2 \end{cases}$$

Testando, verifica-se que $r=2$ é a raiz desejada. A partir desta raiz, é simples reescrever as equações originais nas formas

$$\begin{cases} (x-6)(x+14)(x-15)=0 \\ (x-2)(x+15)(x-28)=0 \end{cases} \Rightarrow x=\begin{cases} \{6,-14,15\} \\ \{2,-15,28\} \end{cases}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Seja, para $n=1,2,3,\ldots$ a coleção $B(n)=\{M|M=[m_{ij}]$ é matriz quadrada de ordem n e $|m_{ij}|=1\}$. (Note que $B(2)$ tem $2^4=16$ elementos). Prove que, se $M\in B(n)$ então o determinante de M é múltiplo de 2^{n-1}, para $n=1,2,3,\ldots$

Solução:
Somando a segunda coluna à primeira coluna de M, e aplicando Laplace na nova primeira coluna, tem-se

$$|M|=\sum_{i=1}^{n}k_i|M_i|$$

onde cada k_i é igual a -2, 0 ou 2, e ainda $M_i\in B(n-1)$. Desta forma, podemos colocar um fator 2 em evidência e escrever que

$$|M|=2\sum_{\substack{i=1\\k_i\neq 0}}^{n}|M_i'|$$

onde M_i' incorpora o sinal de $k_i\neq 0$ em M_i, de modo que $M_i'\in B(n-1)$.

Como cada M_i' pertence a $B(n-1)$, podemos repetir o raciocínio anterior, colocando novamente o fator 2 em evidência e reduzindo a ordem da matriz. De fato, este processo pode ser realizado $(n-1)$ vezes, quando então o determinante de M pode ser escrito como

$$|M|=2^{n-1}\sum_{\substack{i=1\\k_i\neq 0}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\k_j\neq 0}}^{n-1}\ldots\sum_{\substack{z=1\\k_z\neq 0}}^{2}|M_{ij\ldots z}'|$$

onde $|M_{ij\ldots z}'|=\mp 1$. Logo, tem-se que o determinante de M é múltiplo de 2^{n-1}.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja f uma função real de variável real, não constante, contínua, tal que existe uma função ϕ, $\phi:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x+y)=\phi(f(x),y)$, para todos x e y reais. Prove que f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Solução:
Assuma uma primeira hipótese de que existem dois pontos $x_1\neq x_2$, com $\Delta=(x_2-x_1)>0$, tais que $f(x_1)=f(x_2)=K$. Desta forma, podemos escrever que

$$\begin{cases} \phi(f(x_1),y)=f(x_1+y) \\ \phi(f(x_2),y)=f(x_2+y) \end{cases} \Rightarrow f(x_1+y)=f(x_2+y)$$

para todo y real. Logo,

$$y=x-x_1\Rightarrow f(x)=f(x+x_2-x_1)=f(x+\Delta)$$

para todo x real, de modo que $f(x)$ deve ser periódica de período Δ.

Vamos analisar agora um período de $f(x)$ em detalhe. Assuma, em uma segunda hipótese, que $f(x)$ varie neste intervalo. Como $f(x)=K$ nos extremos do intervalo, qualquer variação no valor de $f(x)$ forçará com que $f(x)$ assuma valores iguais para diferentes valores de x no interior do intervalo. Logo, pelo desenvolvimento inicial, $f(x)$ deverá ter período igual a um sub-múltiplo comum a todos os Δ_x em que $f(x)$ repete de valor. Porém, por continuidade, se $f(x)$ variar, estas repetições deverão ocorrer infinitas vezes. Logo, o período comum será nulo, o que corresponde a uma $f(x)$ constante, tornando a segunda hipótese absurda.

Isto, porém, contradiz o enunciado, e assim mostra-se que a primeira hipótese é falsa, e então não pode haver dois valores distintos de x para os quais $f(x)$ assuma o mesmo valor. Desta forma, $f(x)$ deve ser uma função estritamente descrescente ou estritamente crescente em todo o seu domínio.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Prove que: $n^3=\sum_{i=1}^{n}a_i$, onde $a_i=(n-1)n+2i-1$.

Solução:
Seja S a soma do enunciado. Logo,

$$\begin{aligned} S&=\sum_{i=1}^{n}[(n-1)n+2i-1] \\ &=[(n-1)n-1]\left(\sum_{i=1}^{n}1\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}2i\right) \\ &=(n^2-n-1)n+\frac{2+2n}{2}n \\ &=n^3-n^2-n+n+n^2 \\ &=n^3 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Um velho manuscrito descrevia a localização de um tesouro enterrado: Há somente duas árvores, A e B, em um terreno plano, e um canteiro de tomates. A é uma mangueira, e B uma jaboticabeira. A partir do centro K do canteiro, meça a distância em linha reta até a mangueira. Vire 90º à esquerda e percorra a mesma distância até o ponto C. Volte ao canteiro. Meça a distância em linha reta até a jaboticabeira. Vire 90º à direita e percorra a mesma distância até o ponto D. O tesouro está no ponto médio T do segmento CD. Um aventureiro achou o manuscrito, identificou as árvores mas, como o canteiro desaparecera com o passar do tempo, não conseguiu localizá-lo, e desistiu da busca. O aluno Sá Bido, do IME, nas mesmas condições, diz que seria capaz de localizar o tesouro. Mostre como você resolveria o problema, isto é, dê as coordenadas de T em função das coordenadas de $A = (5, 3)$ e $B = (8, 2)$.

Solução:

Seja $K \equiv (k_x, k_y)$ a posição do canteiro, de modo que os vetores KA e KB sejam

$$\begin{cases} KA \equiv (5 - k_x, 3 - k_y) \\ KB \equiv (8 - k_x, 2 - k_y) \end{cases}$$

As rotações de 90º à esquerda e à direita de um vetor (a, b) são respectivamente dadas pelos vetores $(-b, a)$ e $(b, -a)$. Logo, a rotação de 90º à esquerda do vetor KA é descrita por $(k_y - 3, 5 - k_x)$ e a rotação de 90º à direita do vetor KB é descrita por $(2 - k_y, k_x - 8)$. Assim, os pontos C e D são descritos por

$$\begin{cases} C \equiv A + (k_y - 3, 5 - k_x) = (k_y + 2, 8 - k_x) \\ D \equiv B + (2 - k_y, k_x - 8) = (10 - k_y, k_x - 6) \end{cases}$$

de modo que o ponto médio de CD está em

$$T \equiv \frac{C + D}{2} = (6, 1)$$

sln: Olhando de B para A, o tesouro está a uma distância $\frac{AB}{2}$ á esquerda do centro de AB.

10ª Questão [Valor: 1,0]
Por um ponto M qualquer de uma hipérbole (h), traça-se uma paralela a uma assíntota (a) de (h): esta paralela encontra uma diretriz (d) de (h) em D. Sendo F o foco de (h) correspondente à diretriz (d), mostre que:

$$MD = MF$$

Solução:
Seja a hipérbole (h) descrita por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com focos em $(\mp c, 0)$ e com excentricidade $e = \frac{c}{a} > 1$, onde $(a^2 + b^2) = c^2$.

A inclinação da reta tangente a (h) é tal que

$$\frac{2x}{a^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2y}{b^2}\,\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

de modo que as assíntotas têm coeficiente angular

$$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{b^2 x}{\mp ab\sqrt{x^2 - a^2}} = \mp\frac{b}{a}$$

Por simetria, as assíntotas (a) passam pela origem, assim elas têm coeficiente linear nulo. Logo, as retas (p) paralelas às assíntotas (a) e que passam por $M \equiv (x_m, y_m)$ são descritas por

$$(p) : y = \mp\frac{b}{a}(x - x_m) + y_m$$

As distâncias (raios vetores) de um ponto M do ramo direito de (h) aos focos $(\mp c, 0)$ são iguais a

$$\overline{MF} = \frac{c}{a}x_m \pm a$$

A diretriz (d) é a reta cuja distância $\overline{Md}$ a um ponto M de (h) vezes a excentricidade e da hipérbole é igual ao raio vetor ao foco correspondente. Logo,

$$e\overline{Md} = \overline{MF} \Rightarrow \frac{c}{a}\overline{Md} = \frac{c}{a}x_m \pm a \Rightarrow \overline{Md} = x_m \pm \frac{a^2}{c}$$

e assim as diretrizes (d) são retas verticais descritas por

$$(d) : x = \mp\frac{a^2}{c}$$

Determinando a interseção $D \equiv (x_d, y_d)$ das diretrizes (d) com as retas (p), tem-se

$$\begin{cases} x_d = \mp\frac{a^2}{c} \\ y_d = \mp\frac{b}{a}(x_d - x_m) + y_m \end{cases} \Rightarrow D \equiv \left(\mp\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c} \pm \frac{b}{a}x_m + y_m\right)$$

Com isto,

$$\begin{aligned} \overline{MD} &= \sqrt{\left(x_m \pm \frac{a^2}{c}\right)^2 + \left(-\frac{ab}{c} \mp \frac{b}{a}x_m\right)^2} \\ &= \sqrt{x_m^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \pm 2\frac{1}{c}x_m(a^2 + b^2) + \frac{a^2}{c^2}(a^2 + b^2)} \\ &= \sqrt{x_m^2\frac{c^2}{a^2} \pm 2cx_m + a^2} \\ &= \frac{c}{a}x_m \pm a \end{aligned}$$

e então $\overline{MD} = \overline{MF}$. A demonstração para o ramo esquerdo de (h) é inteiramente análoga.

IME 1979/1980 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Seja ABC um triângulo no qual se supõe que a mediana AM é tal que o triângulo ABM é semelhante ao triângulo ABC.

a) **[Valor: 0,5]** Calcule a razão de semelhança, e determine o lugar geométrico do vértice B supondo A e C fixos.

b) **[Valor: 0,5]** Mostre que o círculo que passa pelos pontos A, C e M tangencia a reta AB.

Solução:

a) Seja m o comprimento da mediana. Da semelhança, tem-se a proporcialidade

$$a : b : c \equiv c : m : a/2 \Rightarrow c^2 = \frac{a^2}{2}$$

e a razão r de semelhança é

$$r = \frac{a}{c} = \sqrt{2}$$

Da análise anterior, tem-se que

$$m = \frac{bc}{a} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

Seja C' tal que A seja médio de CC', ou seja, $C'A = AC$. Desta forma, a mediana por A é base média do triângulo $\Delta BCC'$ relativa ao lado BC'. Logo, dado $AC = b$ fixo, tem-se que $BC' = 2m = b\sqrt{2}$, que é constante. Logo, o lugar geométrico de B é a cirfcunferência de centro C' e raio $b\sqrt{2}$.

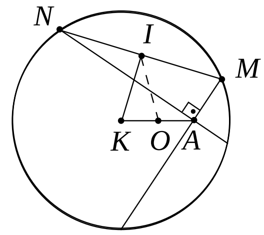
b) A potência de B em relação ao círculo que passa por A, C e M é dada por

$$\text{Pot}\, B = BM \times BC = \frac{a^2}{2} = c^2 = BA^2$$

logo, BA tangencia o círculo em questão.

2ª Questão [Valor: 1,0]
São dados um círculo (c) de centro K, raio R e um ponto fixo A, tal que $0 < AK < R$. Por A traçam-se duas semi-retas (d) e (d'): (d) corta a circunferência de (c) em M e (d') em N. M e N se deslocam ao longo da circunferência de (c) de modo que AM e AN são sempre perpendiculares. Ache o lugar geométrico do ponto médio I do segmento MN.

Solução:



Do triângulo retângulo ΔAMN,

$$AI = MI = NI = \frac{MN}{2}$$

e do triângulo retângulo ΔKIM,

$$KI^2 + IM^2 = R^2 \Rightarrow KI^2 + AI^2 = R^2$$

Seja O o ponto médio de KA, de modo que IO é mediana por I do triângulo ΔKAI, e seja $I\hat{O}A = \theta$, logo

$$\begin{cases} AI^2 = IO^2 + OA^2 - 2IO.OA\cos\theta \\ KI^2 = IO^2 + OK^2 - 2IO.KA\cos(\pi - \theta) \\ \qquad = IO^2 + OA^2 + 2IO.OA\cos\theta \end{cases}$$

Assim, devemos ter que

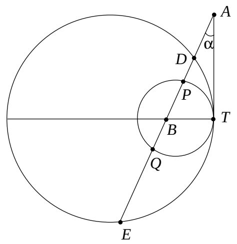
$$AI^2 + KI^2 = 2(IO^2 + OA^2) = R^2 \Rightarrow$$

$$IO^2 = \frac{R^2}{2} - OA^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{KA^2}{4}$$

ou seja, IO deve ser constante. Logo, o lugar geométrico de I é a circunferência de centro O (ponto médio de KA) e raio $\frac{\sqrt{2R^2 - KA^2}}{2}$.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Dão-se duas circunferências de raios 8 e 3, tangentes internas. Pelo ponto T de contato se traça a tangente comum e sobre ela se toma uma distância $TA = 6$. Seja (s) uma secante aos círculos que passa por A. (s) faz com TA um ângulo α ($\alpha \neq 0$), e corta a circunferência maior nos pontos D e E e a menor nos pontos P e Q. Calcule α de modo que $DE = 2PQ$.

Solução:



Seja B a interseção da secante (s) com o diâmetro comum às duas circunferências. Definindo,

$$\begin{cases} AD = u; \quad AP = v; \quad PQ = w \\ AB = x; \quad DE = y; \quad BT = z \end{cases}$$

têm-se, do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ΔATB e do conceito de potência de um ponto em relação a um círculo, que

$$\begin{cases} AT^2+BT^2=AB^2 \\ AD.AE=AT^2 \\ AP.AQ=AT^2 \\ BD.BE=BT(16-BT) \\ BP.BQ=BT(6-BT) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36+z^2=x^2 \\ u(u+y)=36 \\ v(v+w)=36 \\ (x-u)(u+y-x)=z(16-z) \\ (x-v)(v+w-x)=z(6-z) \end{cases}$$

Da segunda equação, têm-se

$$u^2 + uy - 36 = 0 \Rightarrow u = \frac{-y \mp \sqrt{y^2+144}}{2}$$

e assim, com raciocínio análogo para a terceira equação, têm-se

$$(2u+y) = \mp\sqrt{y^2+144}; \quad (2v+w) = \mp\sqrt{w^2+144}$$

Desenvolvendo as duas últimas equações, têm-se

$$\begin{cases} 2xu-(u^2+uy)-x^2+xy = x(2u+y)-36-(z^2+36) \\ 2xv-(v^2+vw)-x^2+xw = x(2v+w)-36-(z^2+36) \end{cases}$$

ou seja

$$(2u+y) = \frac{8(2z+9)}{\sqrt{z^2+36}}; \quad (2v+w) = \frac{6(z+12)}{\sqrt{z^2+36}}$$

Usando os resultados anteriores para $(2u+y)$ e $(2v+w)$, e a condição do enunciado $DE = 2PQ$, isto é, $y = 2w$, têm-se

$$\begin{cases} y^2 + 144 = 4(w^2+36) = \frac{64(2z+9)^2}{(z^2+36)} \\ w^2 + 144 = \frac{36(z+12)^2}{(z^2+36)} \end{cases}$$

ou seja,

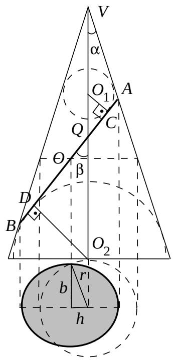
$$w^2 = \frac{16(2z+9)^2}{(z^2+36)} - 36 = \frac{36(z+12)^2}{(z^2+36)} - 144$$

Logo, após um algebrismo intenso mas básico, tem-se

$$136z^2-288z=0 \Rightarrow z=\frac{36}{17} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{z}{6} \Rightarrow \alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{6}{17}$$

4ª Questão [Valor: 1,5]
São dadas duas esferas (e_1) de centro O_1 e raio 3, e (e_2) de centro O_2 e raio 9. O_1 dista de O_2 de 20. Essas esferas são focais de uma seção elítica (E) de um cone de revolução. Determine a excentricidade e a distância focal de (E).
Obs: Esferas focais de uma seção são esferas inscritas num cone que tangenciam o plano seção.

Solução:



Sejam A e B os extremos do eixo principal da elipse (E), Q a interseção de AB com o eixo do cone, e C e D os pontos de tangência das esferas com (E). Da semelhança dos triângulos ΔO_1CQ e ΔO_2DQ, têm-se

$$\begin{cases} \frac{O_1C}{O_1Q} = \frac{O_2D}{O_2Q} \Rightarrow O_2Q = 3O_1Q \\ O_1Q + O_2Q = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O_1Q = 5 \\ O_2Q = 15 \end{cases}$$

Além disto,

$$\frac{VO_1}{O_1C} = \frac{VO_2}{O_2D} \Rightarrow \frac{VO_1}{3} = \frac{VO_1+20}{9} \Rightarrow VO_1 = 10$$

Assim,

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\beta = \frac{O_1C}{O_1Q} = \frac{3}{5}; \ \cos\beta = \frac{4}{5}; \ \operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4} \\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{O_1C}{VO_1} = \frac{3}{10}; \ \cos\alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}; \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{\sqrt{91}} \end{cases}$$

Da lei dos senos nos triângulos ΔVAQ e ΔVBQ, têm-se

$$\begin{cases} \frac{VQ}{\operatorname{sen}(180^o-\alpha-\beta)} = \frac{AQ}{\operatorname{sen}\alpha} \\ \frac{VQ}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)} = \frac{BQ}{\operatorname{sen}\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AQ = \frac{15\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\frac{\sqrt{91}}{10}} = \sqrt{91}-4 \\ BQ = \frac{15\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}\frac{\sqrt{91}}{10}-\frac{3}{10}\frac{4}{5}} = \sqrt{91}+4 \end{cases}$$

Assim, o eixo principal AB é $2a = 2\sqrt{91}$, e $OQ = 4$, onde O é o centro de (E). As distâncias vertical, v, e horizontal, h, de O a V são

$$v = VQ + 4\cos\beta = \frac{91}{5}; \quad h = 4\operatorname{sen}\beta = \frac{12}{5}$$

Na altura de O, um plano paralelo à base do cone gera uma seção circular de raio $r = v\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{91}}{5}$. Assim, o eixo secundário, $2b$, a distância focal, $2c$, e a excentricidade, e, de (E) são dados por

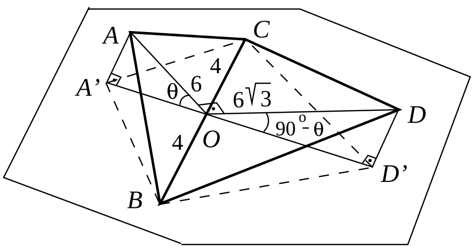
$$\begin{cases} 2b = 2\sqrt{r^2-h^2} = 6\sqrt{3} \\ 2c = \sqrt{4a^2-4b^2} = 2\sqrt{91-27} = 16 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{8\sqrt{91}}{91} \end{cases}$$

sln: Os pontos de tangência C e D são os focos de (E), justificando o nome de "esferas focais", pois

$$\begin{cases} AC = AQ - \frac{O_1C}{\operatorname{tg}\beta} = \sqrt{91} - 8 = BQ - \frac{O_2D}{\operatorname{tg}\beta} = BD \\ CD = \frac{O_1C}{\operatorname{tg}\beta} + \frac{O_2D}{\operatorname{tg}\beta} = 16 \end{cases}$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Um quadrilátero reverso $ABCD$ é constituído pela justaposição de dois triângulos isósceles ABC e BCD ($AB = AC$ e $DB = DC$) cujos planos são perpendiculares e cujas alturas medem respectivamente 6 e $6\sqrt{3}$. A base comum dos dois triângulos é $BC = 8$. Projeta-se ortogonalmente o quadrilátero $ABCD$ sobre um plano de modo que a projeção seja um paralelogramo (P). Como deve ser feita a projeção e qual é a área do paralelogramo (P)?

Solução:



Para que a projeção seja um paralelogramo, as diagonais devem se interceptar nos respectivos pontos médios. Assim, sejam A' e D' as respectivas projeções de A e D, e seja O o ponto médio de BC. Na figura acima, devemos ter então que

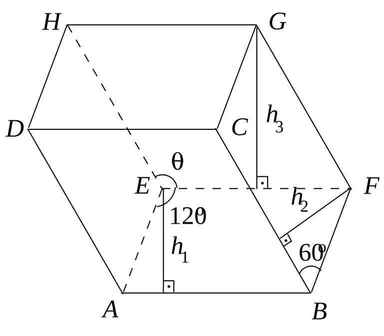
$$A'O = D'O \Rightarrow 6\cos\theta = 6\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \theta = 30^\text{o}$$

ou seja, o plano de projeção faz um ângulo de 30^o com o plano do triângulo ΔABC. Assim,$A'O = D'O = 3\sqrt{3}$, e a área S de (P) é dada por

$$S = \frac{8 \times 6\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

6ª Questão [Valor: 1,0]
Dão-se um paralelogramo $ABCD$ num plano π e um outro $EFGH$ num plano π' de modo que se obtém um paralelepípedo (P) de vértices A, B, C, D, E, F, G e H, oblíquo, com todas arestas de comprimento a. O plano que contém os pontos A, E e F forma com π um ângulo de 60^o e $AEF = 120^\text{o}$. Calcular em função de a e do ângulo $FEH = \theta$ o volume de (P).

Solução:

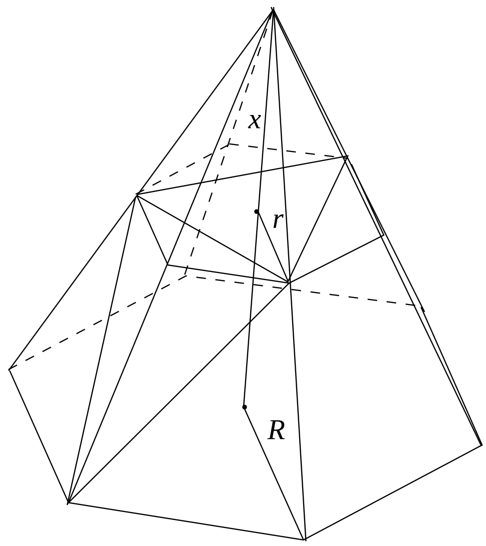


O volume V pode ser calculado por

$$V = h_1 h_2 h_3 = a^3 \cos 30^\text{o}\,\text{sen}\,60^\text{o}\cos(\theta - 90^\text{o}) = \frac{3a^3}{4}\,\text{sen}\,\theta$$

7ª Questão [Valor: 1,5]
Dão-se um hexágono de lado ℓ num plano π e, num plano π' paralelo a π, um triângulo equilátero de lado ℓ, numa posição tal que cada altura do triângulo é paralela à uma diagonal maior do hexágono. Os baricentros do hexágono e do triângulo estão na mesma perpendicular comum aos seus planos. A distância entre π e π' é ℓ. Dê, em função de ℓ, o volume do sólido que se obtém, quando se liga cada vértice do triângulo aos três vértices mais próximos do hexágono.

Solução:



Os raios, R e r, dos círculos circunscritos ao hexágono e ao triângulo são respectivamente tais que

$$\begin{cases} R = \ell \\ 2r\cos 30^\text{o} = \ell \Rightarrow r = \ell\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Sendo assim, a distância x do baricentro do triângulo ao vértice da pirâmide é igual a

$$\frac{x}{r} = \frac{x+\ell}{R} \Rightarrow x = \frac{r\ell}{R-r} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\ell$$

de modo que o volume V_1 do tronco da pirâmide, de base hexagonal, situado entre os planos do hexágono e do triângulo é

$$V_1 = \frac{6\ell^2\frac{\sqrt{3}}{4}(x+\ell)}{3} - \frac{6r^2\frac{\sqrt{3}}{4}x}{3} = \frac{6+8\sqrt{3}}{12}\ell^3$$

Para obtermos o volume desejado V, devemos subtrair de V_1 os volumes de três pirâmides de base triangular (um terço da diferença entre o hexágono do plano do triângulo e o próprio triângulo) e altura ℓ. Assim,

$$V = V_1 - 3\frac{\frac{\ell^3\sqrt{3}}{12}}{3} = V_1 - \frac{\ell^3\sqrt{3}}{12} = \frac{6+7\sqrt{3}}{12}\ell^3$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Determine x na equação

$$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

Solução:
Seja

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

Logo, do enunciado,

$$\operatorname{arc\,tg} x = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x} = 2\theta$$

e então

$$x = \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} = \frac{1-x^2}{2x}$$

Assim,

$$x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \mp\frac{\sqrt{3}}{3}$$

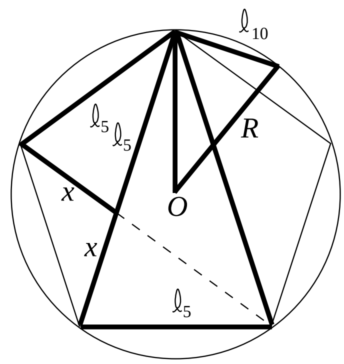
Substituindo estas soluções na equação original, verifica-se que a solução negativa é espúria, pois

$$\begin{cases} \operatorname{arc\,tg} -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 \\ \operatorname{arc\,tg}\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} > 0 \end{cases}$$

e assim, tem-se que $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam ℓ_4 , ℓ_6 e ℓ_{10} os lados do quadrado, do hexágono e do decágono regulares, inscritos todos no mesmo círculo (C). Com esses três lados, constrói-se um triângulo ABC, não inscrito em (C), tal que $BC = \ell_4$, $AC = \ell_6$ e $AB = \ell_{10}$. Pede-se calcular o ângulo A do triângulo ABC.

Solução:
Os quadrado e hexágono inscritos em um círculo de raio R têm lados $R\sqrt{2}$ e R, respectivamente.



Para o pentágono inscrito, por uma análise angular, é possível constatar que os três triângulos marcados na figura acima são isósceles com ângulo do vértice igual a 36º, de modo que eles são semelhantes. Sendo assim, têm-se que

$$\frac{\ell_5 + x}{\ell_5} = \frac{\ell_5}{x} \Rightarrow x^2 + \ell_5 x - \ell_5^2 = 0$$

e assim

$$x = \frac{-\ell_5 \mp \sqrt{\ell_5^2 + 4\ell_5^2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ell_5$$

pois a outra raiz é negativa. Ainda da semelhança dos triângulos da figura acima, têm-se

$$\frac{x}{\ell_5} = \frac{\ell_{10}}{R} \Rightarrow \ell_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$$

Assim, usando a lei dos cossenos no triângulo ΔABC, têm-se

$$\ell_4^2 = \ell_6^2 + \ell_{10}^2 - 2\ell_6\ell_{10}\cos A \Rightarrow$$

$$2R^2 = R^2 + \frac{6-2\sqrt{5}}{4}R^2 - 2\frac{\sqrt{5}-1}{2}R^2\cos A \Rightarrow$$

$$\cos A = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^{\text{o}}$$

IME 1978/1979 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
Admita $Y = (a, b, c)$ e seja a função h: $Y \times Y \to Y$ definida por:

$$\begin{array}{lll} h(a,a)=a & h(b,a)=b & h(c,a)=c \\ h(a,b)=b & h(b,b)=c & h(c,b)=a \\ h(a,c)=c & h(b,c)=a & h(c,c)=b \end{array}$$

Considere uma função $f : \mathbb{Z} \to Y$ tal que:

$$\begin{array}{l} f(0)=a \\ f(1)=b \\ \text{ e } \forall n,m \in \mathbb{Z}, f(n+m)=h(f(n),f(m)). \end{array}$$

Sabe-se que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(3n) = a$.

a) Determine $y \in Y$, tal que $h(y, f(52)) = f(45)$.

b) Encontre um $H \subset \mathbb{Z}$, tal que $f(H) = \{c\}$.

Solução:

a) Usando as propriedades dados no enunciado, têm-se que

$$\left\{\begin{array}{l} h(f(-7),f(52))=f(45)=a \\ h(f(-7),f(1))=h(f(-7),b)=f(-6)=a \end{array}\right. \Rightarrow$$
$$h(f(-7),b)=a \Rightarrow y=f(-7)=c$$

b) Novamente, das propriedades dadas

$$\left\{\begin{array}{l} f(3n)=a \\ f(3n+1)=h(f(3n),f(1))=h(a,b)=b \\ f(3n+2)=h(f(3n+1),f(1))=h(b,b)=c \end{array}\right.$$

Logo, $H = \{h \,|\, h = 3n+2,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+x \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

determine x, sabendo-se que existe uma matriz inversível P, tal que $A = P^{-1}.B.P$.

Solução:
Como $\det[B] = 0$, devemos ter $\det[A] = 0$, e assim $x = 2$ ou $x = -1$. Experimentando estes valores, não se encontra P inversível tal que $P.A = B.P$. Assim, o conjunto solução para x é vazio.

sln: Deve ter havido algum erro no enunciado.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Seja a equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ cujas raízes são: a, b, c. Determine s, t e u, em função de p, q e r, para que a equação $x^3 + sx^2 + tx + u = 0$ tenha raízes bc, ca e ab.

Solução:
Das relações de Girard, têm-se que

$$\left\{\begin{array}{l} p=-(a+b+c) \\ q=ab+bc+ac \\ r=-abc \end{array}\right.$$

Logo, devemos ter que

$$\left\{\begin{array}{l} s=-(bc+ca+ab) \\ t=bc^2a+ca^2b+ab^2c=abc(c+a+b) \\ u=-a^2b^2c^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} s=-q \\ t=rp \\ u=-r^2 \end{array}\right.$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a família de curvas:

$$y(m) = mx^2 - (1+8m)x + 4(4m+1).$$

Determine:

a) As coordenadas do ponto P, comum a todas essas curvas.

b) A curva da família, tal que a tangente no ponto de abscissa $x = 1$ tenha coeficiente angular igual a 1.

Solução:

a) Reescrevendo $y(m)$, tem-se

$$y(m) = [m(4-x)+1](4-x)$$

Logo, quando $x = 4$, y se torna independente de m e igual a $y(m) \equiv y = 0$.

b) Calculando o coeficiente angular da tangente, tem-se

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2mx - (1+8m)$$

Logo, quando $x = 1$, tem-se

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -6m - 1 = 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

e então

$$y = \frac{1}{3}(-x^2 + 5x - 4)$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$.

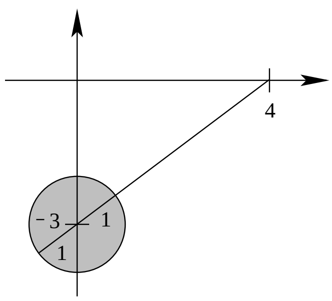
Solução:
Chamando o limite de L, tem-se, usando L'Hôpital, que

$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x-1)-\ln(x+1)}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{x^2-1}\\ &= -2\end{aligned}$$

Logo, $L = e^{-2}$.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Determine os valores máximo e mínimo de $|z-4|$, sabendo-se que $|z+3i|\leq 1$, onde $z\in\mathbb{C}$.

Solução:
O domínio $D \equiv |z+3i| \leq 1$ equivale ao círculo de centro em $z=-3i$ e raio unitário. Assim, devemos determinar os comprimentos máximo $c_{\text{máx}}$ e mínimo $c_{\text{mín}}$ dos vetores com origem em $z=4$ e término em D.



Da figura, é simples ver que estes comprimentos são tais que

$$\begin{cases} c_{\text{máx}} = \sqrt{3^2+4^2}+1 = 6\\ c_{\text{mín}} = \sqrt{3^2+4^2}-1 = 4\end{cases}$$

7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja uma progressão aritmética de 1º termo $a_1 \neq 0$ e último termo a_{10} tal que $a_1 \neq a_{10} \neq 0$. Seja a progressão aritmética de 1º termo $b_1 = \dfrac{1}{a_1}$ e último termo $b_{10} = \dfrac{1}{a_{10}}$. Calcule $\dfrac{a_5}{b_6}$ em função de a_1 e a_{10}.

Solução:
Sejam r e q as razões das progressões a e b. Assim,

$$\begin{cases} a_{10} = a_1 + 9r\\ b_{10} = b_1 + 9q \Rightarrow \frac{1}{a_{10}} = \frac{1}{a_1} + 9q\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{a_{10}-a_1}{9}\\ q = \frac{a_1-a_{10}}{9a_1a_{10}}\end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{a_5}{b_6} &= \frac{a_1+4r}{b_1+5q}\\ &= \frac{a_1+\frac{4(a_{10}-a_1)}{9}}{\frac{1}{a_1}+\frac{5(a_1-a_{10})}{9a_1a_{10}}}\\ &= \frac{\frac{5a_1+4a_{10}}{9}}{\frac{5a_1+4a_{10}}{9a_1a_{10}}}\\ &= a_1a_{10}\end{aligned}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Um elevador com 7 pessoas parte do andar térreo de um prédio e faz 4 paradas em andares diferentes. Determinar de quantas maneiras diferentes, todas aquelas 7 pessoas podem desembarcar até a 4ª parada, inclusive.
Obs: Seja n_i o número de pessoas que desembarcam na i-ésima parada $\{i=1,2,3,4\}: \sum\limits_{i=1}^{4} n_i = 7, n_i \geq 0$.

Solução:
Descendo todas as 7 pessoas em uma única parada, têm-se 4 maneiras. Descendo 6 e 1 pessoas separadamente, têm-se $4\times 3 = 12$ maneiras. Descendo 5, 1 e 1 pessoas separadamente, têm-se $4\times 3 = 12$ maneiras. Descendo 5 e 2 pessoas separadamente, têm-se $4\times 3 = 12$ maneiras. Descendo 4, 1, 1 e 1 pessoas separadamente, têm-se 4 maneiras. Descendo 4, 2 e 1 pessoas separadamente, têm-se $4\times 3\times 2 = 24$ maneiras. Descendo 4 e 3 pessoas separadamente, têm-se $4\times 3 = 12$ maneiras. Descendo 3, 2, 1 e 1 pessoas separadamente, têm-se $4\times 3 = 12$ maneiras. Descendo 3, 2 e 2 pessoas separadamente, têm-se $4\times 3 = 12$ maneiras. Descendo 3, 3 e 1 pessoas separadamente, têm-se $4\times 3 = 12$ maneiras. Descendo 2, 2, 2 e 1 pessoas separadamente, têm-se 4 maneiras. Assim, têm-se um total de 120 maneiras distintas.

sln: Assume-se que interessa apenas o número de pessoas desembarcando em cada parada, e não qual(is) pessoa(s) irá(ão) desembarcar em cada parada. Se considerarmos apenas as pessoas, cada uma tem 4 possibilidades de desembarcar. Assim, neste caso, o número total de maneiras é $4^7 = 16384$.

9ª Questão [Valor: 1,0]

É dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+k}{\sqrt[3]{x^2-1}}, & \text{se } x \neq \pm 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \\ -1, & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

a) Se $k = -1$, determine os pontos de descontinuidade de f.

b) Se $k = 0$:

i) Determine as raízes de $f'(x) = 0$.

ii) Determine as raízes de $f''(x) = 0$.

iii) Faça o esboço do gráfico da função em coordenadas ortonormais.

Solução:

a) Para $k = -1$, têm-se

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^{\mp}} f(x) = \mp\infty \\ \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{x+1}} = 0 \end{cases}$$

Logo, $f(x)$ é descontínua apenas em $x = -1$.

b) Para $k = 0$, têm-se

$$f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{3}}(1) - \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}2x(x)}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{x^2-3}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}$$

$$f''(x) = \frac{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}(2x) - 3\frac{4}{3}(x^2-1)^{\frac{1}{3}}2x(x^2-3)}{9(x^2-1)^{\frac{8}{3}}}$$

$$= \frac{-2x(x^2-9)}{9(x^2-1)^{\frac{7}{3}}}$$

i) As raízes de $f'(x)$ são $x = \mp\sqrt{3}$.

ii) As raízes de $f''(x)$ são $x = 0$ e $x = \mp 3$.

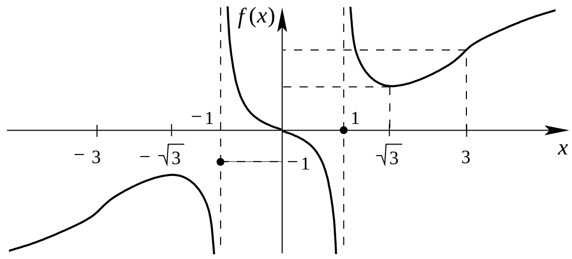
iii) Para o esboço do gráfico, têm-se ainda que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^{\mp}} f(x) = \mp\infty; \ \lim\limits_{x \to 1^{\mp}} f(x) = \mp\infty \\ \lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = \mp\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \mp 1} f'(x) = -\infty; \ \lim\limits_{x \to \mp\infty} f'(x) = \infty \\ \begin{cases} f'(x) > 0, \text{ se } |x| > \sqrt{3} \\ f'(x) < 0, \text{ se } (|x| \neq 1) < \sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^{\mp}} f''(x) = \mp\infty; \ \lim\limits_{x \to 1^{\mp}} f''(x) = \mp\infty \\ \lim\limits_{x \to \mp\infty} f''(x) = \pm\infty \\ \begin{cases} f''(x) > 0, \text{ se } x < -3; \ -1 < x < 0; \ 1 < x < 3 \\ f''(x) < 0, \text{ se } -3 < x < -1; \ 0 < x < 1; \ 3 < x \end{cases} \end{cases}$$

O que determina os seguintes pontos de interesse: $(0,0)$ é raiz e ponto de inflexão, $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})$ é máximo local, $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})$ é mínimo local, $(\mp 3, \mp\frac{3}{2})$ são pontos de inflexão e $x = \mp 1$ são assíntotas verticais. O gráfico de $f(x)$, que apresenta simetria ímpar, é mostrado a seguir.



10ª Questão [Valor: 1,0]

Determine a área da superfície finita entre as curvas de equações: $y = 16 - x^4$ e $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

Solução:

As interseções das curvas são tais que

$$-2x^4 + 5x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x = \mp 2$$

Seja S a área desejada. Logo,

$$S = \int_{-2}^{2} [-2x^4 + 5x^2 + 12]\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(-\frac{2}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^3 + 12x \right) \Bigg|_{x=-2}^{x=2}$$

$$= -\frac{2}{5}[2^5 - (-2)^5] + \frac{5}{3}[2^3 - (-2)^3] + 12[2 - (-2)]$$

$$= -\frac{128}{5} + \frac{80}{3} + 48$$

$$= \frac{736}{15}$$

IME 1978/1979 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Achar os valores de x que satisfazem a equação:

$$\sqrt{\pi^2 - 4x^2} = \operatorname{arc\,sen}(\cos x)$$

Solução:
Tomando o seno da equação, tem-se

$$\operatorname{sen}\sqrt{\pi^2 - 4x^2} = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\sqrt{\pi^2 - 4x^2} = x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \pi^2 - 4x^2 = x^2 + \frac{\pi^2}{4} + 4k^2\pi^2 + x\pi + 2k\pi^2 + 4\pi k x$$

$$\Rightarrow 5x^2 + (1+4k)\pi x + \left(4k^2 + 2k - \frac{3}{4}\right)\pi^2 = 0$$

e assim

$$x = \frac{-(1+4k)\pi \mp \sqrt{(1+4k)\pi^2 - 20\left(4k^2+2k-\frac{3}{4}\right)\pi^2}}{10}$$

$$= \frac{-(1+4k)\pi \mp 4\pi\sqrt{1-4k^2-2k}}{10}$$

Para evitar um discriminante negativo, tem-se $k = 0$ e assim

$$x = \frac{-\pi \mp 4\pi}{10} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{10} \end{cases}$$

A alternativa $x = \frac{3\pi}{10}$, porém, é uma raiz espúria, pois quando substituída na equação original, resulta em

$$\frac{8\pi}{10} = \operatorname{arc\,sen}(\cos\frac{3\pi}{10})$$

o que não se aplica, já que a função arco-seno tem conjunto imagem dado por $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2ª Questão [Valor: 1,5]
Seja uma circunferência (C) na qual está inscrito um pentágono regular convexo $ABCDE$ (nesta ordem sobre (C) e no sentido trigonométrico). Considere M o ponto médio do arco $AE < 180°$ e P um ponto qualquer do mesmo arco:

a) Sendo $P \neq M$, $P \neq A$ e $P \neq E$, prove que

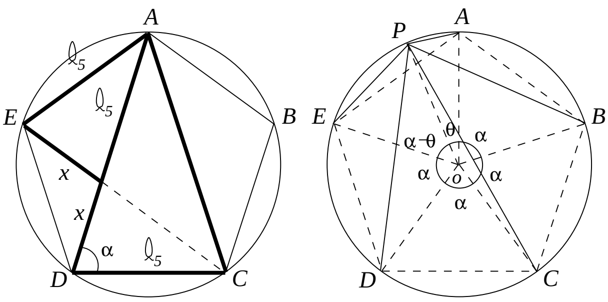
$$PA + PE + PC = PB + PD \qquad (1)$$

b) Se P coincidir com A, mostre o que acontece com a relação (1).

c) Se P coincidir com M, mostre que de (1) pode-se obter uma relação entre o raio da circunferência (C) e os lados dos decágonos regulares inscritos convexo e estrelado.

Obs: As soluções dos três sub-itens acima são independentes.

Solução:



a) Na figura à esquerda, a partir de uma análise angular, constata-se que os dois triângulos em destaque são isósceles com ângulo do vértice igual a 36º, de modo que eles são semelhantes. Assim,

$$\frac{\ell_5}{\ell_5+x} = \frac{x}{\ell_5} \Rightarrow x^2+\ell_5 x-\ell_5^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ell_5$$

pois a outra raiz é negativa. Da mesma figura,

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\frac{\ell_5}{2}}{\ell_5+x} = \frac{1}{2}\frac{x}{\ell_5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

Da figura à direita, seja $P\hat{O}A = \theta < \frac{\alpha}{2}$, onde $\alpha = 72°$. Logo,

$$\begin{cases} PA = 2R\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \\ PB = 2R\operatorname{sen}\frac{\alpha+\theta}{2} = 2R\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) \\ PC = 2R\operatorname{sen}\frac{2\alpha+\theta}{2} = 2R\left(\operatorname{sen}\alpha\cos\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\alpha\right) \\ PD = 2R\operatorname{sen}\frac{2\alpha-\theta}{2} = 2R\left(\operatorname{sen}\alpha\cos\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\alpha\right) \\ PE = 2R\operatorname{sen}\frac{\alpha-\theta}{2} = 2R\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$$

de forma que (1) se aplica pois

$$\begin{aligned} S &= (PA + PC + PE) - (PB + PD) \\ &= 2R\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\left(1 + 2\cos\alpha - 2\cos\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2R\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\left(1 + 2\frac{\sqrt{5}-1}{4} - 2\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

O caso $P\hat{O}E = \theta < \frac{\alpha}{2}$ é análogo ao caso acima.

b) Com $P = A$, têm-se $PA = 0$, $PB = PE = \ell_5$ e $PC = PD = d_5$, de forma que (1) se reduz a

$$\ell_5 + d_5 = \ell_5 + d_5$$

c) Com $P = M$, têm-se $PA = PE = \ell_{10}$, $PB = PD = \ell_{10}^*$ e $PC = 2R$, de forma que (1) se reduz a

$$\ell_{10} + R = \ell_{10}^*$$

3ª Questão [Valor: 1,0]

Seja (T) um triângulo ABC tal que $\hat{C} = 2\hat{A}$:

a) Calcule, em função do $\cos\hat{A}$, as excentricidades da elipse e da hipérbole de focos A e B e que passam por C.

b) Supondo-se existir (T), qual a relação de igualdade que devem satisfazer os lados AB, BC e CA.

Solução:

Sejam $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$.

a) Da lei dos senos, têm-se

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}[180^\text{o} - (\hat{A} + 2\hat{A})]} = \frac{b}{\operatorname{sen} 3\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} 2\hat{A}}$$

A excentridade e_e da elipse, de distância focal $2c_e$ e eixo principal $2a_e$, é dada por

$$e_e = \frac{c_e}{a_e} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{(a+b)}{2}} = \frac{c}{a+b}$$

Com isto,

$$e_e = \frac{\operatorname{sen} 2\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{A} + \operatorname{sen} 3\hat{A}} = \frac{\operatorname{sen} 2\hat{A}}{2\operatorname{sen} 2\hat{A}\cos\hat{A}} = \frac{1}{2\cos\hat{A}}$$

A excentridade e_h da hipérbole, de distância focal $2c_h$ e eixo principal $2a_h$, é dada por

$$e_h = \frac{c_h}{a_h} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{|a-b|}{2}} = \frac{c}{|a-b|}$$

Com isto,

$$\begin{aligned} e_h &= \frac{\operatorname{sen} 2\hat{A}}{|\operatorname{sen}\hat{A} - \operatorname{sen} 3\hat{A}|} \\ &= \frac{\operatorname{sen} 2\hat{A}}{2|\operatorname{sen}(-\hat{A})\cos 2\hat{A}|} \\ &= \frac{2\operatorname{sen}\hat{A}\cos\hat{A}}{2\operatorname{sen}\hat{A}|2\cos^2\hat{A} - 1|} \\ &= \frac{\cos\hat{A}}{|2\cos^2\hat{A} - 1|} \end{aligned}$$

b) Do item anterior, têm-se

$$\begin{cases} 2\cos\hat{A} = \frac{a+b}{c} \\ c = \frac{a\operatorname{sen} 2\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2a\cos\hat{A} \end{cases}$$

de forma que

$$\frac{a+b}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 = a(a+b)$$

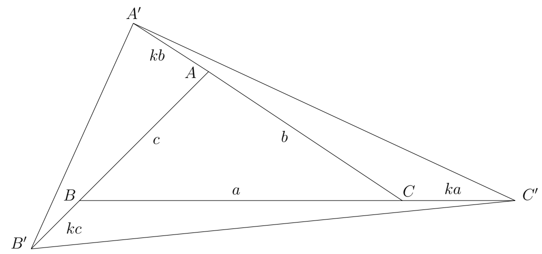
4ª Questão [Valor: 1,0]

Dado um triângulo ABC de área S, prolongam-se seus lados CA, AB e BC:

CA, no sentido de C para A, até A', tal que $AA' = k.CA$;
AB, no sentido de A para B, até B', tal que $BB' = k.AB$;
BC, no sentido de B para C, até C', tal que $CC' = k.BC$.

Onde k é uma constante positiva. Sendo o triângulo $A'B'C'$ de área S', determine k para que $S' = 19S$.

Solução:



Pela figura acima, a área S' pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S' &= S + S_{AA'B'} + S_{BB'C'} + S_{CC'A'} \\ &= S + \frac{kb.c.\operatorname{sen}(180^\text{o} - \hat{A})}{2} \\ &+ \frac{kc.a.\operatorname{sen}(180^\text{o} - \hat{B})}{2} + \frac{ka.b.\operatorname{sen}(180^\text{o} - \hat{C})}{2} \\ &= S + \frac{k}{2}\left(bc\operatorname{sen}\hat{A} + ca\operatorname{sen}\hat{B} + ab\operatorname{sen}\hat{C}\right) \\ &= S + k(S + S + S) \end{aligned}$$

de forma que, se $S' = 19S$, então

$$19S = S + 3kS \Rightarrow k = 6$$

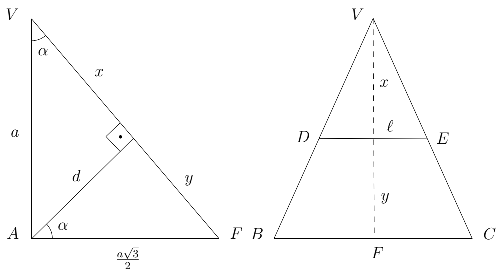
5ª Questão [Valor: 1,5]

Dá-se num plano π um triângulo equilátero ABC de lado a, $a > 0$, e tira-se por A uma semi-reta AX perpendicular ao plano π. Seja V a extremidade do segmento AV de comprimento a, situado nessa semi-reta:

a) Calcule o volume da pirâmide $VABC$ e, caso a mesma admita um plano de simetria, identifique-o.

b) Considere uma reta r do plano VBC paralela à reta BC, tal que o plano VBC e o plano determinado por r e pelo ponto A sejam perpendiculares. Sejam D a interseção de r com VB e E a interseção de r com VC. Calcule o volume da porção da pirâmide $VABC$ que está compreendida entre os planos ABC e ADE.

Solução:



a) Existe um plano de simetria definido pelos pontos V, A e o ponto médio F de BC. O volume V desejado é dado por

$$V = \frac{S_{ABC}.VA}{3} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

b) O volume V' desejado é um terço da área do trapézio $BDEC$ vezes a altura d do ponto A em relação a este trapézio. Usando a notação indicada na figura acima, tem-se

$$V' = \frac{S_{BDEC}.d}{3} = \frac{\frac{(\ell+a)}{2}y.d}{3} = \frac{(\ell+a)yd}{6}$$

Ainda da figura acima, têm-se

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \frac{d}{a} = \frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \\ y^2 + d^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{a\sqrt{21}}{7} \\ y = \frac{3a\sqrt{7}}{14} \end{cases}$$

Com isto,

$$x = \sqrt{a^2 - d^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{7}$$

e então podemos determinar ℓ da forma

$$\frac{\ell}{x} = \frac{a}{x+y} \Rightarrow \ell = \frac{\frac{2a\sqrt{7}}{7}.a}{\frac{3a\sqrt{7}}{14} + \frac{4a\sqrt{7}}{14}} = \frac{4a}{7}$$

Logo,

$$V' = \frac{\left(\frac{4a}{7} + a\right)\frac{3a\sqrt{7}}{14}.\frac{a\sqrt{21}}{7}}{6} = \frac{11a^3\sqrt{3}}{196}$$

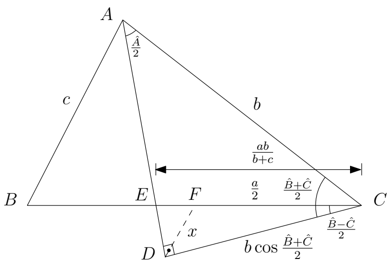
6ª Questão [Valor: 1,0]

Considere a família de triângulos ABC onde $BC = a$, $AB = c$ e $AC = b$. Os pontos B e C são fixos e A varia de tal maneira que $b - c = k$ (constante).

a) Pede-se o lugar geométrico do ponto D, encontro da bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ com a perpendicular baixada do vértice C àquela bissetriz.

b) Supondo o caso particular $\hat{A} = 60^o$, $a = 4\sqrt{3}$ e $b-c = 4$, calcule os valores em radianos dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

Solução:



a) Usando a lei dos cossenos no triângulo ΔCDF para calcular a distância $DF = x$, têm-se

$$\begin{aligned} x^2 &= b^2\cos^2\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} + \frac{a^2}{4} - 2b\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}.\frac{a}{2}.\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} \\ &= b\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\left(b\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} - a\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right) + \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

Do triângulo retângulo ΔEDC, porém, tem-se que

$$\frac{ab}{b+c}\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} = b\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}$$

e assim

$$\begin{aligned} x^2 &= b\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\left(\frac{ab}{b+c} - a\right) + \frac{a^2}{4} \\ &= -\frac{abc}{2(b+c)}\left(\cos\hat{B} + \cos\hat{C}\right) + \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

Usando a lei dos cossenos, tem-se então que

$$x^2 = \frac{abc}{2(b+c)}\left(\frac{b^2-a^2-c^2}{2ac} + \frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}\right) + \frac{a^2}{4} = \frac{k^2}{4}$$

que é constante. Logo, o lugar geométrico de D é a circunferência de centro F, médio de BC, e raio $\frac{k}{2}$.

b) Da lei dos cossenos,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^o = (b-c)^2 + bc$$

de forma que

$$\begin{cases} b - c = 4 \\ bc = a^2 - (b-c)^2 = (4\sqrt{3})^2 - 4^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 8 \\ c = 4 \end{cases}$$

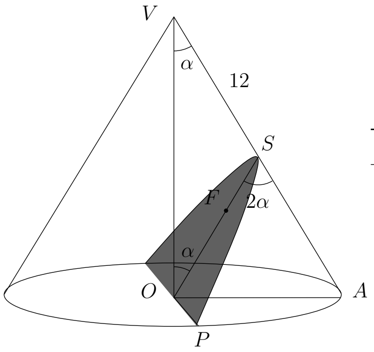
Assim, pela lei dos senos, têm-se

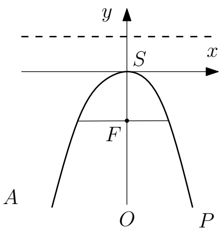
$$\begin{cases} \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b\operatorname{sen}60^o}{a} = 1 \\ \operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c\operatorname{sen}60^o}{a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = \frac{\pi}{2} \\ \hat{C} = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

7ª Questão [Valor: 1,5]
Um cone de revolução de vértice V é seccionado por um plano que determina uma seção parabólica (P). Sejam respectivamente S e F o vértice e o foco de (P). São dados: $VS = 12$ e $SF = 3$:

a) Determine α (ângulo do eixo do cone com sua geratriz).
b) Determine a área do segmento parabólico compreendido entre a parábola e a corda focal perpendicular ao seu eixo.

Solução:





a) A parábola é formada por um plano-seção paralelo à geratriz oposta ao ponto de contato S. Assim, na figura acima, têm-se

$$O\hat{V}S = S\hat{O}V = \frac{1}{2}O\hat{S}A$$

de forma que

$$VS = OS = SA = 12 \Rightarrow OP = OA = 24\,\text{sen}\,\alpha$$

Desta forma, no conjunto de eixos cartresianos indicado à direita, o ponto $P \in (P)$ tem coordenadas

$$P \equiv (OP, OS) = (24\,\text{sen}\,\alpha, -12)$$

e assim a parábola (P) é descrita por

$$y = -\frac{x^2}{48\,\text{sen}^2\alpha}$$

Pela definição de parábola, a distância d_1 de P ao foco F é igual à distância d_2 de P à geratriz $y = 3$, de forma que

$$\begin{cases} d_1^2 = 24^2\,\text{sen}^2\alpha + (-12+3)^2 \\ d_2^2 = (-12-3)^2 \end{cases} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\text{o}$$

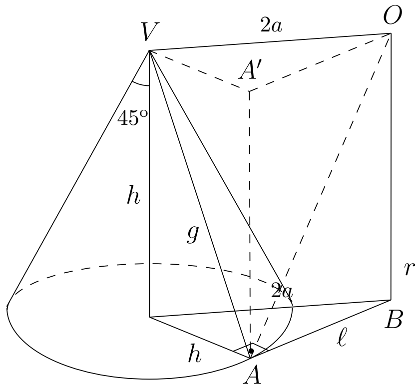
b) Com $\alpha = 30^\text{o}$, a equação de (P) torna-se $y = -\frac{x^2}{12}$. Com $y = -3$ nesta equação, tem-se $x = \mp 6$. Assim, a área S_P desejada é dada por

$$\begin{aligned} S_P &= [6-(-6)] \times 3 - \left| \int_{-6}^{6} \frac{x^2}{12}\,\text{d}x \right| \\ &= 36 - \left.\frac{x^3}{36}\right|_{x=-6}^{x=6} \\ &= 24 \end{aligned}$$

8ª Questão [Valor: 1,5]
Sejam (C) uma superfície cônica de revolução, de vértice V, cujo semi-ângulo no vértice é 45^o, r uma reta paralela ao eixo de revolução de (C) e π o plano passando por V e perpendicular a r. A reta r atravessa o plano π em O. VO tem comprimento $2a$, $a > 0$. Seja ℓ a perpendicular comum a r e à geratriz g de (C); ℓ corta g em A e r em B.

a) A' sendo a projeção ortogonal de A sobre π, ache o lugar do ponto A' quando g varia.
b) Identifique as retas ℓ situadas em um plano ρ paralelo a π. Examine o que ocorre quando varia a distância entre os planos π e ρ.
c) Mostre que os pontos A (quando g varia) pertencem a uma esfera (e) de centro (O).

Solução:



a) O ponto A' é tal que $VA' \perp A'O$, de forma que

$$VA'^2 + A'O^2 = VO^2 = 4a^2$$

Logo, o lugar geométrico de A' é a circunferência de diâmetro $VO = 2a$.

b) Seja h a distância entre os planos π e ρ. Com isto, determina-se o ponto B sobre r tal que $OB = h$. A partir de B, marca-se o círculo de raio $\ell = \sqrt{4a^2 - h^2}$, que determina o ponto A sobre o círculo-base da superfície cônica (C).

Assim, a reta ℓ é uma tangente, que passa por B, ao círculo de raio h, tendo um comprimento igual a $\sqrt{4a^2 - h^2}$.

c) Da figura acima, tem-se que

$$OA^2 = h^2 + \ell^2 = h^2 + (4a^2 - h^2) = 4a^2$$

que é constante. Logo, os pontos A estão sobre a esfera de centro O e raio $2a$.

IME 1977/1978 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 0,5]
Determine as soluções da equação

$$36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$$

dado que uma de suas raízes é a soma das outras duas.

Solução:
Sejam as raízes a, b e c com $(a+c) = b$. Pelas relações de Girard, têm-se

$$\begin{cases} abc = -\frac{1}{36} \\ ab + bc + ac = -\frac{5}{36} \\ a + b + c = 2b = -\frac{-12}{36} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Logo, da terceira equação, tem-se $b = \frac{1}{6}$, e então

$$\begin{cases} ac = -\frac{1}{6} \\ a + c = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Assim, a e c são raízes de $6x^2 - x - 1 = 0$, ou seja

$$a, c = \frac{1 \mp \sqrt{1+24}}{12} = -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$$

Logo, as soluções desejadas são $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right\}$.

2ª Questão [Valor: 0,5]
Seja um polinômio

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

com coeficientes reais. Sabe-se que $p(0) = 0$, $p(2) = 4$, que a reta tangente a $p(x)$ no ponto (1,1) é paralela à reta $y = 2x + 2$ e que a reta tangente a $p(x)$ no ponto (2,4) é perpendicular à reta $y = -\frac{1}{3}x - 4$. Determine os coeficientes a_3, a_2, a_1, a_0.

Solução:
Do enunciado, têm-se as relações

$$\begin{cases} p(0) = 0 \\ p(2) = 4 \\ p(1) = 1 \\ p'(1) = 2 \\ p'(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_3 + a_2 + a_1 = 1 \\ 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 1 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 4 \\ 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 3 \end{cases}$$

Este sistema não possui solução, o que torna a questão impossível.

3ª Questão [Valor: 1,0]
Mostre que, em toda reunião constituída de seis pessoas, uma das hipóteses necessariamente ocorre (podendo ocorrer ambas):

I) Existem três pessoas que se conhecem mutuamente (isto é, das três cada duas se conhecem).

II) Existem três pessoas que se desconhecem mutuamente (isto é, das três cada duas se desconhecem).

Solução:
Sejam as pessoas identificadas por A, B, C, D, E e F.
(i) Se A conhece todos B, C, D, E e F:
(i).1 Se qualquer outro par se conhece, por exemplo D e F, então A e o par, (A, D, F), formam uma trinca que se conhece mutuamente.
(i).2 Se ninguém mais se conhece, então quaisquer três pessoas diferentes de A, por exemplo (B, C, D), formam uma trinca que não se conhece mutuamente.
(ii) Se A conhece apenas quatro pessoas, por exemplo B, C, D e E:
(ii).1 Se algum par, dentre as quatro pessoas que A conhece, se conhece, por exemplo C e E, então A e o par, (A, C, E), formam uma trinca que se conhece mutuamente.
(ii).2 Se ninguém mais, das quatro pessoas que A conhece, se conhece, então quaisquer três destas quatro pessoas conhecidas por A, por exemplo (B, C, E), formam uma trinca que não se conhece mutuamente.
(iii) Se A conhece apenas três pessoas, por exemplo B, C e E:
(iii).1 Se algum par, dentre as três pessoas que A conhece, se conhece, por exemplo B e E, então A e o par, (A, B, E), formam uma trinca que se conhece mutuamente.
(iii).2 Se ninguém mais, das três pessoas que A conhece, se conhece, então estas três pessoas, (B, C, E), formam uma trinca que não se conhece mutuamente.
Por simetria, os casos em que A conhece duas, uma ou nenhuma pessoa(s), caem em casos duais aos vistos acima. Assim, as trincas de pessoas que se conhecem tornam-se trincas de pessoas que não se conhecem e vice-versa. Logo, para todas as possibilidades do númeo de pessoas conhecidas por A, pelo menos um dos dois casos do enunciado necessariamente ocorre.

4ª Questão [Valor: 0,5]
Seja h uma função contínua, real de variável real. Sabe-se que $h(-1) = 4$; $h(0) = 0$; $h(1) = 8$. Defino uma função g como $g(x) = h(x) - 2$. Prove que a equação $g(x) = 0$ admite, pelo menos, duas soluções distintas.

Solução:
Por sua definição, $g(x)$ é contínua e tal que

$$\begin{cases} g(-1) = 2 \\ g(0) = -2 \\ g(1) = 6 \end{cases}$$

Assim, há um número ímpar de raízes de $g(x)$ em cada um dos intervalos $(-1, 0)$ e $(0, 1)$. Ou seja, $g(x) = 0$ possui pelo menos duas soluções distintas, como era desejado demonstrar.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Seja o conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$$

Determine a imagem de A pela função g, complexa de variável complexa, tal que $g(z) = (4 + 3i)z + 5 - i$.
Obs: $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos. $|z|$ é o valor absoluto de z.

Solução:
O conjunto A equivale à circunferência de raio unitário no plano complexo, e seus elementos ser podem escritos como $z = e^{\alpha i}$, com $\alpha \in [0, 2\pi)$. Para este domínio, $g(z)$ pode ser escrita como

$$g(z) = 5\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)e^{\alpha i} + 5 - i = 5e^{(\theta+\alpha)i} + 5 - i$$

com $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4}$. Assim, a imagem de $g(z)$ para o conjunto A é a circunferência de centro $(5 - i)$ e raio 5.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Para $t > 0$ e $x \geq 1$, defino a função f_t, real de variável real, como:

$$f_t(x) = x\left[\frac{x^t - (t+1)}{t}\right]$$

Supondo-se que o limite indicado exista, define-se

$$f(x) = \lim_{t\to 0} f_t(x), \quad x \geq 1$$

Determine $f(e^2)$, onde e é a base dos logaritmos neperianos.

Solução:
Da definição de $f(x)$ e por L'Hôpital, têm-se

$$\begin{aligned} f(e^2) &= \lim_{t\to 0} f_t(e^2) \\ &= \lim_{t\to 0} e^2\left[\frac{e^{2t} - (t+1)}{t}\right] \\ &= \lim_{t\to 0} e^2\left[\frac{2e^{2t} - 1}{1}\right] \end{aligned}$$

e assim $f(e^2) = e^2$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam A, B, C, D matrizes reais 2×2.

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}); \quad A^{-1} = B = (b_{ij}) \\ C &= (c_{ij}); \quad c_{ij} = a_{ij}^{-1} \\ D &= (d_{ij}); \quad d_{ij} = b_{ij}^{-1} \end{aligned}$$

Sabe-se que $a_{ij}.b_{ij} \neq 0$, $1 \leq i \leq 2$; $1 \leq j \leq 2$, e que C é matriz singular (não admite inversa). Calcule o determinante de D.

Solução:
Pelo enunciado, têm-se as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \frac{1}{a_{12}} \\ \frac{1}{a_{21}} & \frac{1}{a_{22}} \end{bmatrix} \\ D = \Delta\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{22}} & -\frac{1}{a_{12}} \\ -\frac{1}{a_{21}} & \frac{1}{a_{11}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

onde $\Delta = (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) \neq 0$ é o determinante de A. Como C é singular, devemos ter

$$\frac{1}{a_{11}}\frac{1}{a_{22}} - \frac{1}{a_{12}}\frac{1}{a_{21}} = 0 \Rightarrow \frac{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{12}a_{21}} = 0$$

Assim, o determinante Δ de A é nulo. Logo, B não existe e a questão se torna impossível.

8ª Questão [Valor: 0.5]
Seja m uma função real de variável real definida como: $m(x) = |7 - x|$. Diz-se que uma função u, real de variável real, é contínua no ponto a de seu conjunto de definição se, para todo número real $\epsilon > 0$, existe um número real $\delta > 0$ tal que, se y é ponto do conjunto de definição de u e se $|y - a| < \delta$, então $|u(y) - u(a)| < \epsilon$. Quer-se testar a continuidade de m no ponto $x = -2$. Escolhe-se um $\epsilon = 0{,}01$. Determine um δ conveniente, para este valor de ϵ. Justifique sua resposta.
Obs: $|h|$ é o valor absoluto de h.

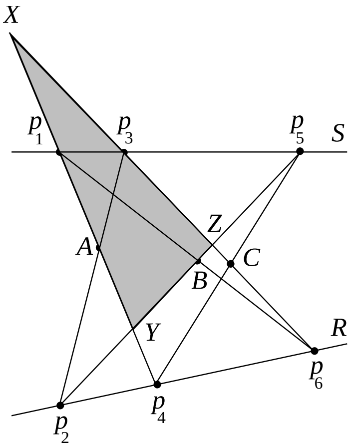
Solução:
Com $|y+2| < \delta$, ou seja, $y \approx -2$, de modo que $|7-y| = (7-y)$, devemos ter que

$$\begin{aligned} &|m(y) - m(-2)| < \epsilon \\ \Rightarrow\ &||7 - y| - |7 + 2|| < \epsilon \\ \Rightarrow\ &|7 - y - 9| < \epsilon \\ \Rightarrow\ &|-y - 2| < \epsilon \\ \Rightarrow\ &|y + 2| < \epsilon \end{aligned}$$

Assim, para atestar a continuidade de $m(x)$ em torno de $x = -2$, podemos ter qualquer valor de $\delta \leq \epsilon$. Por exemplo, podemos escolher o próprio valor limite $\delta = \epsilon = 0{,}01$.

9ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam R e S duas retas quaisquer. Sejam $p_2 = (x_2, y_2)$; $p_4 = (x_4, y_4)$; $p_6 = (x_6, y_6)$ três pontos distintos sobre R e $p_1 = (x_1, y_1)$; $p_3 = (x_3, y_3)$; $p_5 = (x_5, y_5)$ três pontos distintos sobre S. O segmento p_2p_3 não é paralelo ao segmento p_1p_4; o segmento p_1p_6 não é paralelo ao segmento p_2p_5 e o segmento p_3p_6 não é paralelo ao segmento p_4p_5. Sejam: A, a interseção dos segmentos p_2p_3 e p_1p_4; B, interseção de p_1p_6 com p_2p_5 e C, interseção de p_3p_6 com p_4p_5. Prove que os pontos A, B e C estão em linha reta.

Solução (Baseada em solução do Colégio Impacto):



Definindo X a interseção de p_1p_4 com p_3p_6, Y a interseção de p_1p_4 com p_2p_5, Z a interseção de p_3p_6 com p_2p_5, podemos aplicar o teorema de Menelaus no triângulo ΔXYZ com diferentes secantes para obter:

$$\text{secante } p_2Ap_3 : \frac{AX.p_2Y.p_3Z}{AY.p_2Z.p_3X} = 1$$

$$\text{secante } p_1Bp_6 : \frac{p_1X.BY.p_6Z}{p_1Y.BZ.p_6X} = 1$$

$$\text{secante } p_4Cp_5 : \frac{p_4X.p_5Y.CZ}{p_4Y.p_5Z.CX} = 1$$

$$\text{secante } p_1p_3p_5 \ (S) : \frac{p_3X.p_1Y.p_5Z}{p_3Z.p_1X.p_5Y} = 1$$

$$\text{secante } p_1p_3p_5 \ (R) : \frac{p_6X.p_4Y.p_2Z}{p_6Z.p_4X.p_2Y} = 1$$

Multiplicando todas estas relações, tem-se

$$\frac{AX.BY.CZ}{AY.BZ.CX} = 1$$

que, ainda pelo teorema de Menelaus com o triângulo ΔXYZ, comprova que os pontos A, B e C são colineares.

sln: O que uma questão fundamentalmente de geometria está fazendo nesta prova de álgebra?

10ª Questão [Valor: 1,0]
Dadas as parábolas y_1 e y_2, $y_1(x) = 51 - x^2$ e $y_2(x) = x^2 + 1$, sabe-se que a área entre y_1 e y_2, medida entre $x = 0$ e $x = 5$ é igual a 3 vezes a área entre y_1 e y_2, medida entre $x = 5$ e $x = a$. Determine a.

Solução:
As duas parábolas se cruzam no ponto $(5, 26)$. A área S_1 entre $x = 0$ e $x = 5$ é igual a

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^5 y_1 \, \mathrm{d}x - \int_0^5 y_2 \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^5 [(51 - x^2) - (x^2 + 1)] \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^5 (50 - 2x^2) \, \mathrm{d}x \\ &= 50x - \frac{2x^3}{3} \Big|_0^5 \\ &= \frac{500}{3} \end{aligned}$$

Já a área S_2 entre $x = 5$ e $x = a$ é igual a

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_5^a y_2 \, \mathrm{d}x - \int_5^a y_1 \, \mathrm{d}x \\ &= \int_5^a (2x^2 - 50) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2x^3}{3} - 50x \Big|_5^a \\ &= \frac{2a^3}{3} - 50a + \frac{500}{3} \end{aligned}$$

Assim, para $S_1 = 3S_2$, então $a > 5$ é solução de

$$3a^3 - 225a + 500 = 0$$

sln: $a \approx 7{,}2$

11ª Questão [Valor: 1,0]
Se $x(t)$ é o número de parasitas existentes no tempo t, em uma população hospedeira $y(t)$, a relação entre as duas populações pode ser descrita por

$$y^A e^{By} = kx^R e^{Sx}$$

onde A, B, R e S são constantes apropriadas. Pede-se determinar $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Solução:
Usando o conceito de diferencial, têm-se

$$\left(Ay^{A-1} + y^A B\right) e^{By} \mathrm{d}y = \left(kRx^{R-1} + kx^R S\right) e^{Sx} \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{A}{y} + B\right) y^A e^{By} \, \mathrm{d}y = \left(\frac{R}{x} + S\right) kx^R e^{Sx} \, \mathrm{d}x$$

Como $y^A e^{By} = kx^R e^{Sx}$, então

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\left(\frac{R}{x} + S\right)}{\left(\frac{A}{y} + B\right)} = \frac{(R + Sx)\, y}{(A + By)\, x}$$

12ª Questão [Valor: 1,0]
Uma seqüência $(x_n)_{n\in n^*}$ de números racionais diz-se regular se $|x_m - x_n| \leq m^{-1} + n^{-1}, m, n \in n^*$. Dada uma seqüência regular $t = (t_n)_{n\in n^*}$, defino K_t = menor inteiro maior que $|t_1| + 2$. Sejam x e y seqüências regulares e K = máximo $\{K_x, K_y\}$. Defino a seqüência $z = (z_n)_{n\in n^*}$ como $z_n = x_{2Kn}.y_{2Kn}, n \in n^*$. Prove que $(z_n)_{n\in n^*}$ é uma seqüência regular.
Obs: n^* é o conjunto dos naturais sem o número zero, isto é, $n^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Solução:
Definindo

$$D = z_m - z_n = x_{2Km}y_{2Km} - x_{2Kn}y_{2Kn}$$

vale a pena verificar a relação

$$\begin{aligned}
D &= x_{2Km}y_{2Km} - x_{2Km}y_{2Kn} + x_{2Km}y_{2Kn} - x_{2Kn}y_{2Kn}\\
&= x_{2Km}(y_{2Km} - y_{2Kn}) + y_{2Kn}(x_{2Km} - x_{2Kn})\\
&= (x_{2Km} - x_{2Kn})(y_{2Km} - y_{2Kn})\\
&\quad + x_{2Kn}(y_{2Km} - y_{2Kn}) + y_{2Kn}(x_{2Km} - x_{2Kn})
\end{aligned}$$

de modo que, pela desigualdade triangular, tem-se

$$\begin{aligned}
|D| &\leq |(x_{2Km} - x_{2Kn})|.|(y_{2Km} - y_{2Kn})|\\
&\quad + |x_{2Kn}|.|(y_{2Km} - y_{2Kn})|\\
&\quad + |y_{2Kn}|.|(x_{2Km} - x_{2Kn})|
\end{aligned}$$

Como $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são seqüências regulares, então

$$\begin{aligned}
|D| &\leq \left(\frac{m^{-1} + n^{-1}}{2K}\right)^2\\
&\quad + |x_{2Kn}|\left(\frac{m^{-1} + n^{-1}}{2K}\right)\\
&\quad + |y_{2Kn}|\left(\frac{m^{-1} + n^{-1}}{2K}\right)
\end{aligned}$$

Definindo

$$S_1 = \left(\frac{m^{-1}+n^{-1}}{2K}\right)\left[\left(\frac{m^{-1}+n^{-1}}{2K}\right) + |x_{2Kn}| + |y_{2Kn}|\right]$$

devemos mostrar que $S_1 \leq (m^{-1} + n^{-1})$, de forma a termos $|D| \leq (m^{-1} + n^{-1})$, comprovando que $\{z_n\}$ é regular. Assim, devemos mostrar que,

$$S_2 = \frac{m^{-1} + n^{-1}}{4K^2} + \frac{|x_{2Kn}| + |y_{2Kn}|}{2K} \leq 1$$

Analisando S_2, e usando o fato de que $m, n \geq 1$, têm-se

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq \frac{1}{2K^2} + \frac{|x_{2Kn}| + |y_{2Kn}|}{2K}\\
&= \frac{K(|x_{2Kn}| + |y_{2Kn}|) + 1}{2K^2}\\
&\leq \frac{K(|x_1| + 1 + \frac{1}{2Kn} + |y_1| + 1 + \frac{1}{2Kn}) + 1}{2K^2}
\end{aligned}$$

Este último passo se verifica já que as seqüências $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ são regulares e então

$$\begin{cases} |x_1 - x_{2Kn}| \leq 1 + \frac{1}{2Kn} \\ |y_1 - y_{2Kn}| \leq 1 + \frac{1}{2Kn} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x_{2Kn}| \leq |x_1| + 1 + \frac{1}{2Kn} \\ |y_{2Kn}| \leq |y_1| + 1 + \frac{1}{2Kn} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq \frac{K(|x_1| + |y_1| + 2) + \frac{1}{n} + 1}{2K^2}\\
&\leq \frac{K(|x_1| + |y_1| + 2) + 2}{2K^2}
\end{aligned}$$

pois $n \geq 1$, e assim

$$S_2 \leq \frac{K(|t_1| + 1) + 1}{K^2}$$

onde $|t_1| = \text{máx}\{|x_1|, |y_1|\}$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq \frac{|t_1| + 1}{K} + \frac{1}{K^2}\\
&\leq \frac{|t_1| + 1}{K} + \frac{1}{K(|t_1| + 3)}\\
&= \frac{(|t_1| + 1)(|t_1| + 3) + 1}{K(|t_1| + 3)}\\
&= \frac{|t_1|^2 + 4|t_1| + 4}{K(|t_1| + 3)}\\
&\leq \frac{(|t_1| + 2)^2}{(|t_1| + 3)^3}\\
&\leq 1
\end{aligned}$$

Logo, $S_2 \leq 1$, e então $|D| \leq (m^{-1}+n^{-1})$, de forma que, como explicado anteriomente, $\{z_n\}$ é uma seqüência regular.

IME 1977/1978 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Dados os arcos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$, todos do primeiro quadrante, e tais que $\text{tg}\,\hat{A} = 1/3$, $\text{tg}\,\hat{B} = 1/5$, $\text{tg}\,\hat{C} = 1/7$ e $\text{tg}\,\hat{D} = 1/8$, verificar se $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \pi/4$.

Solução:
Usando a expressão da tangente do arco-soma, têm-se

$$\text{tg}\,(\hat{A}+\hat{B}) = \frac{\text{tg}\,\hat{A} + \text{tg}\,\hat{B}}{1 - \text{tg}\,\hat{A}\,\text{tg}\,\hat{B}} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}.\frac{1}{5}} = \frac{4}{7}$$

$$\text{tg}\,(\hat{C}+\hat{D}) = \frac{\text{tg}\,\hat{C} + \text{tg}\,\hat{D}}{1 - \text{tg}\,\hat{C}\,\text{tg}\,\hat{D}} = \frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}.\frac{1}{8}} = \frac{3}{11}$$

e assim

$$\text{tg}\,(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}) = \frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}.\frac{3}{11}} = 1$$

Como a tangente de cada ângulo é menor que 1, então os ângulos, que pelo enunciado estão no primeiro quadrante, são menores que $\frac{\pi}{4}$, e assim sua soma é menor que π. Logo,

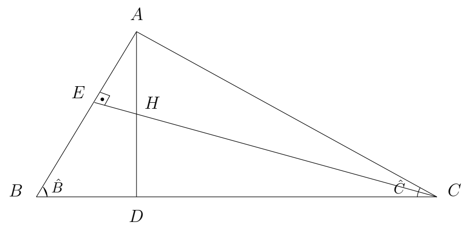
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = \frac{\pi}{4}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Designa-se por (T) um triângulo ABC no qual sua altura AD é cortada ao meio no ponto H, pela altura CE.

a) Demonstrar que as tangentes dos ângulos internos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo (T) verificam a relação $\text{tg}\,\hat{B}.\,\text{tg}\,\hat{C} = 2$ (*)

b) Suponha satisfeita a relação (*), dá-se o ângulo $\hat{A}$ do triângulo (T). Calcular os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Qual a condição que deve ser satisfeita pelo ângulo $\hat{A}$ para que o triângulo (T) exista?

Solução:



a) Da figura, tem-se

$$\text{tg}\,\hat{B}\,\text{tg}\,\hat{C} = \frac{CE}{BE}.\frac{AD}{CD} = \frac{CE}{BE}.\frac{2HD}{CD}$$

Da semelhança dos triângulos ΔHDC e ΔBEC, tem-se

$$\frac{HD}{CD} = \frac{BE}{CE}$$

e assim

$$\text{tg}\,\hat{B}\,\text{tg}\,\hat{C} = 2$$

b)

$$\begin{aligned}\text{tg}\,\hat{A} &= \text{tg}\,[180^{\text{o}} - (\hat{B}+\hat{C})]\\ &= -\,\text{tg}\,(\hat{B}+\hat{C})\\ &= -\frac{\text{tg}\,\hat{B} + \text{tg}\,\hat{C}}{1 - \text{tg}\,\hat{B}\,\text{tg}\,\hat{C}}\\ &= \text{tg}\,\hat{B} + \text{tg}\,\hat{C}\end{aligned}$$

pois $\text{tg}\,\hat{B}\,\text{tg}\,\hat{C} = 2$. Logo, têm-se que

$$\begin{cases}\text{tg}\,\hat{B}\,\text{tg}\,\hat{C} = 2\\ \text{tg}\,\hat{B} + \text{tg}\,\hat{C} = \text{tg}\,\hat{A}\end{cases}$$

de forma que $\text{tg}\,\hat{B}$ e $\text{tg}\,\hat{C}$ são as raízes da equação

$$x^2 - x\,\text{tg}\,\hat{A} + 2 = 0$$

ou seja

$$\text{tg}\,\hat{B},\,\text{tg}\,\hat{C} = \frac{\text{tg}\,\hat{A} \mp \sqrt{\text{tg}^2\hat{A} - 8}}{2}$$

Logo, deve-se ter $\text{tg}\,\hat{A} \geq 8$. A opção $\text{tg}\,\hat{A} \leq -2\sqrt{2}$, porém, é inviável pois corresponde a três ângulos obtusos, já que as três tangentes dos ângulos seriam negativas. Assim, deve-se ter

$$\text{tg}\,\hat{A} \geq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \text{arc tg}\,2\sqrt{2} \leq \hat{A} < \frac{\pi}{2}$$

3ª Questão [Valor: 1,5]

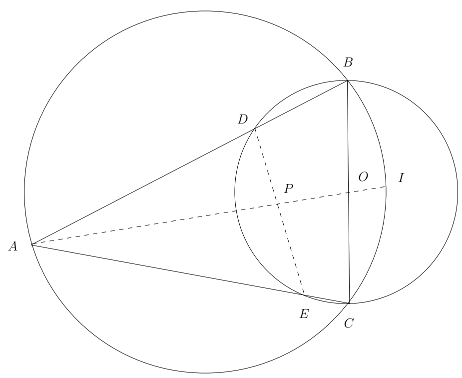
Sejam um círculo (O) de centro O, um ponto A fixo exterior a (O), e um diâmetro BC móvel.

a) Mostrar que o círculo circunscrito ao triângulo ABC passa por um ponto fixo I (I distinto de A).

b) As retas AB e AC cortam o círculo (O) nos pontos D e E respectivamente, e DE corta OA em P. Comparar os ângulos $B\hat{I}A$, $B\hat{C}A$ e $B\hat{D}E$ e mostrar que o quadrilátero $IBDP$ é inscritível, sendo o ponto P fixo.

Obs: Sugere-se que entre as propriedades a serem aplicadas na solução deste problema, estejam as da potência de um ponto em relação a um círculo.

Solução:



a) Sejam r o raio de (O) e I a outra interseção da corda AO, com O entre A e I, com o círculo circunscrito ao triângulo ΔABC. Do conceito de potência do ponto O em relação a este círculo, tem-se

$$OA.OI = OB.OC = r^2 \Rightarrow OI = \frac{r^2}{OA}$$

que é constante, pois A e O são fixos. Logo, o ponto I é fixo.

b) Como A, B, C e I estão sobre o mesmo círculo, então $B\hat{C}A = B\hat{I}A$. Como $B\hat{C}E$ e $B\hat{D}E$ são ângulos opostos do quadrilátero inscritível $BDEC$, então $(B\hat{C}E + B\hat{D}E) = 180^{\circ}$. Como $B\hat{C}E = B\hat{C}A$, $B\hat{I}A = B\hat{I}P$ e $B\hat{D}E = B\hat{D}P$, então tem-se que

$$B\hat{I}P + B\hat{D}P = 180^{\circ}$$

de forma que o quadrilátero $BIPD$ é inscritível.

Para verificar que P é fixo, sejam as potências P_1, de A em relação a (O), e P_2, de A em relação ao círculo circunscrito ao quadrilátero $BIPD$, dadas por

$$\begin{cases} P_1 = AD.AB = (AO-r)(AO+r) \\ P_2 = AD.AB = AP.AI \end{cases}$$

e assim

$$AP = \frac{AO^2-r^2}{AI}$$

Logo, como I é fixo, AP é constante, com P sobre AO, e então P é fixo.

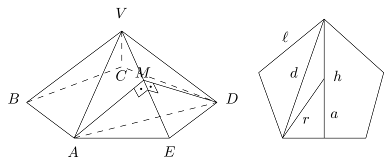
4ª Questão [Valor: 1,5]

Dá-se um icosaedro (I) regular convexo de aresta ℓ.

a) Calcular o ângulo diedro $\hat{d}$ de (I). (Apresentar uma expressão trigonométrica, numérica, que permita calcular o valor do ângulo diedro $\hat{d}$).

b) Seja V um vértice de (I): V e os vértices de (I) adjacentes (isto é, os que são ligados a V por arestas de (I)), determinam um poliedro (P) cujas arestas são arestas do icosaedro. Calcular o volume de (P) em função de ℓ.

Solução:



a) O poliedro (P) é uma pirâmide de altura H e base pentagonal $ABCDE$. Esta base tem lado ℓ e diagonal $AD = d$, que é a raiz positiva da equação

$$\frac{d}{\ell} = \frac{\ell}{d-\ell} \Rightarrow d^2 - \ell d - \ell^2 = 0 \Rightarrow d = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\ell$$

Pela lei dos cossenos no triângulo ΔAMD, onde $\hat{d} = A\hat{M}D$, tem-se

$$d^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)\cos\hat{d}$$

de forma que

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}\ell^2 = \frac{3}{2}\ell^2(1-\cos\hat{d}) \Rightarrow \cos\hat{d} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

b) Da figura acima à direita,

$$h^2 + \frac{\ell^2}{4} = d^2 = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{4}\ell^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\ell$$

e assim o apótema a da base $ABCDE$ é

$$a^2 + \frac{\ell^2}{4} = (h-a)^2 \Rightarrow a = \frac{h^2 - \frac{\ell^2}{4}}{2h} = \left(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right)\frac{\ell}{2}$$

Com isto, a área da base S_b pentagonal é

$$S_b = \frac{5\ell}{2}a = \left(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right)\frac{5\ell}{4}$$

A altura H de (P) pode ser determinada como

$$H^2 + a^2 = \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow H = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ell$$

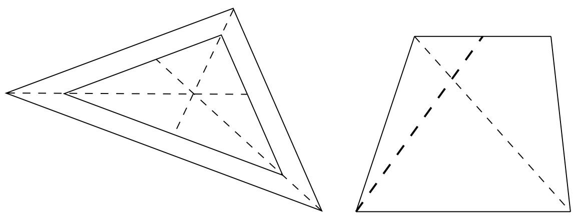
e o volume V desejado é dado por

$$V = \frac{S_b H}{3} = \frac{\sqrt{10(3+\sqrt{5})}}{24}\ell^3 = \frac{5+\sqrt{5}}{24}\ell^3$$

5ª Questão [Valor: 1,0]

Dado um triedro de vértice S, consideram-se duas seções paralelas: uma fixa ABC, com o triângulo $A_1B_1C_1$ traçado pelo meio dos lados BC, AC e AB, e outra seção móvel $A_2B_2C_2$. (A_1 é meio de BC, C_1 de AB e B_1 de AC, e AA_2, BB_2 e CC_2 estão respectivamente nas arestas SA, SB e SC). Mostrar que as retas A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 passam por um mesmo ponto e determinar o lugar geométrico desse ponto.

Solução:



Podemos transformar o triedro, tornando equiláteras as seções triangulares ΔABC (e conseqüentemente também o triângulo $\Delta A_1B_1C_1$) e $\Delta A_2B_2C_2$. Observe que esta transformação é biunívoca, e, por isto mesmo, preserva a propriedade de concorrência.

Vistas de cima, as projeções das retas A_1A_2, B_1B_2 e C_1C_2 se confundem com as medianas do triângulo $\Delta A_1B_1C_1$, que são concorrentes no baricentro deste triângulo, que coincide com o baricentro do triângulo ΔABC.

Dois pontos médios da seção $\Delta A_2B_2C_2$ são ligados pela base média que é paralela ao lado correspondente do triângulo. Tomando a vista lateral em relação a este lado, a base média e este lado são vistos como um ponto. Assim duas das retas A_1A_2, B_1B_2 e C_1C_2 se confundem nesta vista lateral, pois estas duas retas ligam os vértices do lado em questão aos vértices da base média. Com isto, a concorrência das projeções de A_1A_2, B_1B_2 e C_1C_2 se verifica também nesta vista.

Como as projeções das retas são concorrentes em duas vistas ortogonais, então as retas são concorrentes no espaço.

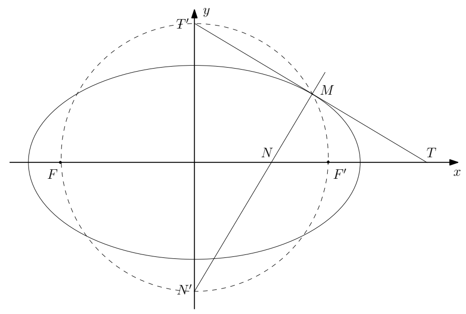
Analisando as duas vistas, tem-se que o lugar geométrico do ponto de concorrência das três retas, a medida que o plano móvel varia, é o segmento que une o vértice S ao baricentro do triângulo ΔABC.

6ª Questão [Valor: 1,0]

A tangente e a normal em um ponto M de uma elipse cortam o eixo focal respectivamente em T e N, sendo os focos F e F'.

a) Mostre que o segmento FF' é dividido harmonicamente por T e N, bem como a razão das distâncias de F aos pontos N e M é igual à excentricidade da elipse.

b) Se a tangente e a normal citadas cortam o eixo não focal em T' e N' respectivamente, mostre que o círculo $MT'N'$ passa pelos focos F e F'.



Solução:

a) Seja a elipse descrita por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cuja reta tangente tem coeficiente angular tal que

$$\frac{2x\,\mathrm{d}x}{a^2} + \frac{2y\,\mathrm{d}y}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Assim, a reta tangente por M à elipse é descrita por

$$y = -\frac{b^2x_M}{a^2y_M}x + \frac{b^2}{y_M}$$

e os pontos T e T' ficam determinados por

$$\begin{cases} T \equiv (\frac{a^2}{x_M}, 0) \\ T' \equiv (0, \frac{b^2}{y_M}) \end{cases}$$

Com isto as distâncias TF e TF' são tais que

$$\frac{TF'}{TF} = \left|\frac{\frac{a^2}{x_M} - c}{\frac{a^2}{x_M} + c}\right| = \left|\frac{a^2 - cx_M}{a^2 + cx_M}\right|$$

Dada a reta tangente, a reta normal por M à elipse é descrita por

$$y = -\frac{a^2y_M}{b^2x_M}x - \frac{c^2y_M}{b^2}$$

e os pontos N e N' ficam determinados por

$$\begin{cases} N \equiv (\frac{c^2 x_M}{a^2}, 0) \\ N' \equiv (0, \frac{c^2 y_M}{b^2}) \end{cases}$$

Com isto as distâncias NF e NF' são tais que

$$\frac{NF'}{NF} = \left| \frac{\frac{c^2 x_M}{a^2} - c}{\frac{c^2 x_M}{a^2} + c} \right| = \left| \frac{c x_M - a^2}{c x_M + a^2} \right|$$

de modo que

$$\frac{TF'}{TF} = \frac{NF'}{NF}$$

b) Vamos mostrar inicialmente que existe uma circunferência C, de centro O e raio r, que passa pelos pontos F, F', T' e N'. Seja $O \equiv (0, y_o)$ o ponto médio de T' e N', de forma que

$$y_o = \frac{\frac{b^2}{y_M} - \frac{c^2 y_M}{b^2}}{2} = \frac{b^4 - c^2 y_M^2}{2b^2 y_M}$$

$$r = \frac{\frac{b^2}{y_M} + \frac{c^2 y_M}{b^2}}{2} = \frac{b^4 + c^2 y_M^2}{2b^2 y_M}$$

Com isto, C passa por T' e N' e é descrita por

$$x^2 + \left(y - \frac{b^4 - c^2 y_M^2}{2b^2 y_M} \right)^2 = \left(\frac{b^4 + c^2 y_M^2}{2b^2 y_M} \right)^2$$

de modo que quando $y = 0$, têm-se

$$x^2 = \frac{4b^4 c^2 y_M^2}{4b^4 y_M^2} \Rightarrow x = \mp c$$

e assim C contém os pontos F e F'.

Para verificar que M pertence a C, seja $y = y_M$ na equação de C. Assim, tem-se

$$x^2 + \left(y_M - \frac{b^4 - c^2 y_M^2}{2b^2 y_M} \right)^2 = \left(\frac{b^4 + c^2 y_M^2}{2b^2 y_M} \right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y_M^2 - \frac{b^4 - c^2 y_M^2}{b^2} = c^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{(b^2 + c^2)}{b^2} y_M^2 = (b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1$$

que é a equação da elipse, com $a^2 = (b^2 + c^2)$. Logo, $x = x_M$ e então M pertence a C.

Logo, a circunferência C definida por M, T' e N' passa por F e F', como era desejado demonstrar.

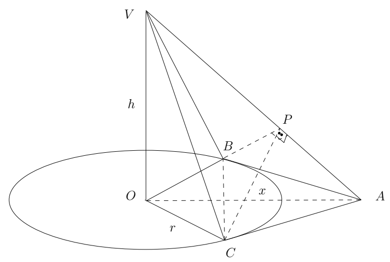
7ª Questão [Valor: 1,5]

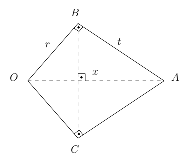
Considere um cone de revolução de vértice V, altura h, tendo por base um círculo de centro O e raio r. No plano da base desse cone toma-se um ponto A, a uma distância x do ponto O ($x > r$). Pelo segmento VA traçam-se dois planos tangentes contendo as geratrizes do cone VB e VC (B e C são pontos das geratrizes, e pertencem ao plano da base).

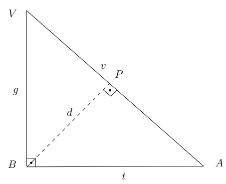
a) Calcule em função de x, de h e de r o comprimento BC, e as distâncias dos pontos B e C ao segmento VA.

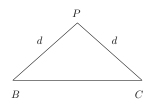
b) Determine x de modo que o ângulo dos dois planos VAB e VAC seja reto. Qual a condição para que este problema tenha solução?

Solução:









a) Seja P o ponto de VA tal que $BP \perp VA$ e $CP \perp VA$. Das figuras acima, definem-se o comprimento da geratriz do cone $g = VB = VC$, o comprimento das tangentes $t = AB = AC$, o comprimento $v = VA$ e a distância $d = BP = CP$. Assim, têm-se

$$g = \sqrt{h^2 + r^2};\ t = \sqrt{x^2 - r^2};\ v = \sqrt{h^2 + x^2}$$

Dos triângulos retângulos ΔOBA e ΔVCA, têm-se

$$\frac{BC}{2}.x = rt \Rightarrow BC = \frac{2r\sqrt{x^2 - r^2}}{x}$$

$$dv = gt \Rightarrow d = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}.\sqrt{x^2 - r^2}}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

b) Com $BP \perp CP$, do triângulo ΔBPC, tem-se

$$BC^2 = BP^2 + CP^2 = 2d^2$$

Logo, do item anterior, tem-se

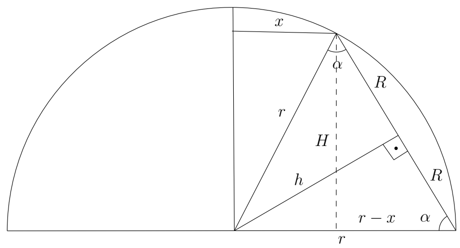
$$\frac{4r^2(x^2 - r^2)}{x^2} = 2\frac{(h^2 + r^2)(x^2 - r^2)}{(h^2 + x^2)}$$

de forma que, dado que $x > r\sqrt{2}$, então

$$h = \frac{rx}{\sqrt{x^2 - 2r^2}}$$

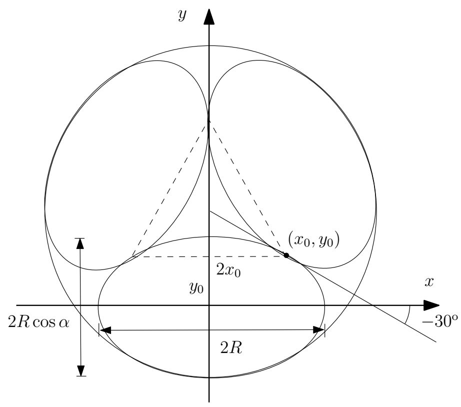
8ª Questão [Valor: 1,5]
Dá-se uma semi-esfera cuja base é um círculo (C) de raio r. Corta-se a semi-esfera por um plano π paralelo à base, o qual determina sobre a semi-esfera um círculo (C_1) de raio x. Estabeleça a relação entre x e r para tornar possível traçar sobre a semi-esfera três círculos tangentes aos círculos (C) e (C_1) e também tangentes entre si dois a dois.

Solução:



Sejam R, o raio dos três círculos tangentes dois a dois, e α, o ângulo do plano de um destes círculos com o plano da base da semi-esfera. Da figura acima, tem-se

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{r-x}{2R} \Rightarrow 2R^2 = r(r-x)$$



Os três círculos quando projetados na base da semi-esfera geram três elipses, também tangentes entre si duas a duas, e de eixos principal $2R$ e secundário $2R\cos\alpha$. Logo, uma destas elipses pode ser descrita por

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2\cos^2\alpha} = 1$$

cuja reta tangente tem coeficiente angular tal que

$$\frac{2x\,\mathrm{d}x}{R^2} + \frac{2y\,\mathrm{d}y}{R^2\cos^2\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x\cos^2\alpha}{y}$$

Determinando o ponto (x_0, y_0) da elipse para o qual a tangente faz um ângulo de -30^o com o eixo x, tem-se

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{tg}(-30^o) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y_0 = \sqrt{3}x_0\cos^2\alpha$$

que, na equação da elipse, dá que

$$\frac{x_0^2}{R^2} + \frac{3x_0^2\cos^2\alpha}{R^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \mp\frac{R}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}} \\ y_0 = \mp\frac{R\sqrt{3}\cos^2\alpha}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}} \end{cases}$$

Analisando a figura da projeção, tem-se que o raio r da semi-esfera é dado por $R\cos\alpha$, y_0 e $1/3$ da altura do triângulo equilátero de lado $2x_0$. Assim,

$$\begin{aligned} r &= R\cos\alpha + y_0 + \frac{1}{3}.\frac{2x_0\sqrt{3}}{2} \\ &= R\cos\alpha + \frac{R\sqrt{3}\cos^2\alpha}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}} + \frac{R\sqrt{3}}{3\sqrt{1+3\cos^2\alpha}} \\ &= R\cos\alpha + \frac{R\sqrt{3}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{3} \end{aligned}$$

Usando o fato de que $2R\cos\alpha = (r-x)$, tem-se

$$\begin{aligned} r &= \frac{r-x}{2} + \frac{R\sqrt{3}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{3} \\ &\Rightarrow 3(r+x) = 2R\sqrt{3}\sqrt{1+3\cos^2\alpha} \end{aligned}$$

que elevada ao quadrado, nos diz que

$$\begin{aligned} 3(r+x)^2 &= 4R^2(1+3\cos^2\alpha) \\ &= 2r(r-x) + 12\left(\frac{r-x}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Desenvolvendo esta equação, encontra-se

$$12(r^2+2rx+x^2) = 8r^2-8rx+12(r^2-2rx+x^2)$$

e assim

$$r = 7x$$

IME 1976/1977 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]

a) **[Valor: 0,5]** Seja $x \in \mathbb{R}$. Determine o conjunto A, onde $A \subset \mathbb{R}$, domínio de definição da função f, onde

$$f : x \longrightarrow \log_2(x^2 - x - 1)$$

b) **[Valor: 0,5]** Seja

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \det \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ e^x & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Desenvolva a função f dada, em torno da origem, com uso da fórmula de Taylor até o termo de segundo grau em x.

Solução:

a) Devemos ter

$$\begin{aligned} & x^2 - x - 1 > 0 \\ \Rightarrow & \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) > 0 \\ \Rightarrow & \left\{x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\} \cup \left\{x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\} \end{aligned}$$

b) Da definição de f, têm-se

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \operatorname{sen} x - e^x \cos x \\ f'(x) = (1 + e^x) \operatorname{sen} x + (x - e^x) \cos x \\ f''(x) = 2 \cos x + (2e^x - x) \operatorname{sen} x \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f'(0) = -1 \\ f''(0) = 2 \end{array} \right.$$

e assim

$$f(x) \approx f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} \approx -1 - x + x^2$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam x_1 e x_2 raízes da equação

$$x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Determine A de modo que x_1^3 e x_2^3 sejam raízes da equação:

$$y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + A = 0$$

Solução:
Por Girard em ambas as equações

$$\left\{ \begin{array}{l} ad - bc = x_1 x_2 \\ A = x_1^3 x_2^3 \end{array} \right. \Rightarrow A = (ad - bc)^3$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam $A, B \in \mathbb{R}^2$ de coordenadas cartesianas $(2, 5)$ e $(1, 3)$, vértices fixos de um conjunto de triângulos de área 12. Determine a equação do lugar geométrico do conjunto de pontos C, terceiro vértice destes triângulos.

Obs: A área é considerada positiva qualquer que seja a orientação do triângulo, de acordo com a definição axiomática.

1ª Solução:
Os pontos A e B são tais que

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5}$$

e estão sobre uma reta r descrita por

$$r : (y - 5) = \left(\frac{5-3}{2-1}\right)(x - 2) \Rightarrow y = 2x + 1$$

Logo, o terceiro vértice deve estar sobre duas retas p e q, paralelas a r e distando $\frac{24}{\sqrt{5}}$ de r. Seja t a reta perpendicular a r pelo ponto $(0, 1)$. Assim,

$$t : y = -\frac{1}{2}x + 1$$

Sejam os pontos P e Q, descritos genericamente por (x_0, y_0), interseções de t com p e q, respectivamente, distando $\frac{24}{\sqrt{5}}$ de $(0, 1)$. Assim,

$$\begin{aligned} & \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 1)^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{4}x_0^2} = \pm\frac{x_0\sqrt{5}}{2} = \frac{24}{\sqrt{5}} \\ & \Rightarrow x_0 = \pm\frac{48}{5};\quad y_0 = \frac{5 \mp 24}{5} \end{aligned}$$

Logo, as retas p e q são descritas por

$$p, q : \left(y - \frac{5 \mp 24}{5}\right) = 2\left(x \mp \frac{48}{5}\right) \Rightarrow y = 2x + (1 \mp 24)$$

2ª Solução:
Seja $C \equiv (x_c, y_c)$. Assim, devemos ter que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{array} \right| = 12 \\ & \Rightarrow |y_c - 2x_c - 1| = 24 \\ & \Rightarrow y_c - 2x_c = 25 \ \text{ ou } -23 \end{aligned}$$

4^a Questão [Valor: 1,0]
Seja

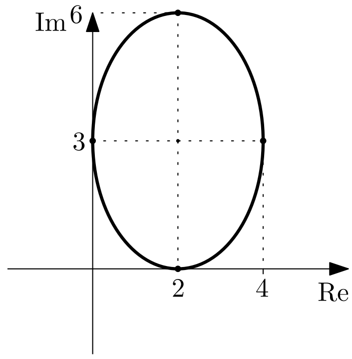
$$\begin{aligned} f:\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}\\ z &\longrightarrow iz+2+3i \end{aligned}$$

Seja o conjunto

$$A=\left\{x+iy\in\mathbb{C}\,\middle|\,\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\right\}$$

Determine o conjunto B imagem de A pela função f.

Solução:
No plano complexo, a transformação f perfaz uma rotação de 90^{o} no sentido anti-horário seguida de uma translação de $(2+3i)$. Assim, o conjunto B é a elipse A rotacionada de 90^{o} e centrada no ponto $(2+3i)$, como visto na figura abaixo.

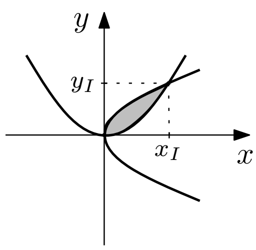


5^a Questão [Valor: 1,0]
Sejam as regiões definidas pelos conjuntos de pontos A e B onde

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y^2<mx, m\in\mathbb{R}^+\}$$
$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2<ny, n\in\mathbb{R}^+\}$$

Determine a área do conjunto $C=A\cap B$.

Solução:



A interseção $I\equiv(x_I,y_I)$ das fronteiras de A e B é

$$x_I^4=n^2y_I^2=n^2mx_I\Rightarrow I\equiv\left(\sqrt[3]{n^2m},\sqrt[3]{m^2n}\right)$$

Assim, a área S desejada é dada por

$$\begin{aligned} S&=\int_0^{x_I}\left(\sqrt{mx}-\frac{x^2}{n}\right)\mathrm{d}x\\ &=\left.\frac{2\sqrt{m}x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^3}{3n}\right|_0^{x_I}\\ &=\frac{2\sqrt{m}(\sqrt[3]{n^2m})^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{(\sqrt[3]{n^2m})^3}{3n}\\ &=\frac{mn}{3} \end{aligned}$$

6^a Questão [Valor: 1,0]
Sendo $x\in\mathbb{R}$, calcule:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x^2]{\cos x}$$

Solução:
Seja L o limite desejado. Assim, por L'Hôpital aplicado duas vezes,

$$\begin{aligned} \ln L&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}\\ &=-\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x\cos x}\\ &=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x-2x\operatorname{sen} x}\\ &=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

de modo que $L=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

7^a Questão [Valor: 1,0]
Seja $a,b\in\mathbb{R}^+$. Mostre que a equação

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=0$$

possui todas suas raízes reais, sendo uma no intervalo $]-b,0[$ e a outra no intervalo $]0,a[$.

Solução:
Desenvolvendo o lado esquerdo E da equação, tem-se

$$\begin{aligned} E&=\frac{(x-a)(x-b)+x(x-b)+x(x-a)}{x(x-a)(x-b)}\\ &=\frac{3x^2-2x(a+b)+ab}{x(x-a)(x-b)} \end{aligned}$$

e o discriminante Δ do numerador de E é então

$$\Delta=4(a+b)^2-12ab=4[(a-b)^2+ab]$$

de modo que $\Delta>0$, pois a e b são positivos. Assim, E tem duas raízes reais finitas, além das raízes impróprias em $x=\pm\infty$.

Analisando o caso particular

$$x=-b\Rightarrow E=-\frac{5b+3a}{2b(a+b)}<0$$

e os limites

$$\lim_{x\to 0^{\mp}}E=\lim_{x\to a^{\mp}}E=\lim_{x\to b^{\mp}}E=\mp\infty$$

conclui-se que se não houver descontinuidade no intervalo $]0,a[$, ou seja, se $b>a$, então há uma raiz neste intervalo. Neste caso $b>a$, a outra raiz se situa em $]a,b[$, de modo que não existe raiz no intervalo $]-b,0[$.

sln: Provavelmente, o enunciado se referia à equação

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=0$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Divide-se um quadrado de lado 1 em nove quadrados iguais e remove-se o quadrado central. Procede-se da mesma forma com os 8 quadrados restantes. Este processo é realizado n vezes.
a) Quantos quadrados de lado $1/3^n$ são conservados?
b) Qual a soma das áreas dos quadrados removidos quando n tende a infinito?

Solução:
a) A cada rodada, o número de quadrados conservados se multiplica por 8. Assim, há 8^n quadrados de lado $1/3^n$ após n rodadas.
b) A cada rodada, a área preservada é $\frac{8}{9}$ da área na rodada anterior. Assim, após infinitas rodadas, resta $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$ unidade de área, indicando que toda a área inicial será removida no processo.

9ª Questão [Valor: 1,0]
São dados n pontos em um plano, supondo-se:
i) Cada três pontos quaisquer não pertencem a uma mesma reta.
ii) Cada par de retas por eles determinado não é constituído por retas paralelas.
iii) Cada três retas por eles determinadas não passam por um mesmo ponto.

Pede-se o número de interseções das retas determinadas por esses pontos distintos dos pontos dados.

Solução:
Os n pontos geram $r = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ retas. Estas r retas geram $i = \begin{pmatrix} r \\ 2 \end{pmatrix}$ interseções. Precisamos, porém, determinar quantas destas interseções coincidem com os pontos originais.

Cada ponto inicial se conecta com os demais $(n-1)$ pontos, gerando $p = (n-1)$ das r retas. Assim, cada ponto inicial coincide com $j = \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}$ interseções. Logo, todos os pontos iniciais coincidem com $n \times j$ do total de i interseções.

Por tudo isto, o total T de interseções distintas dos pontos iniciais é

$$\begin{aligned}
T &= i - n \times j \\
&= \begin{pmatrix} r \\ 2 \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{r(r-1)}{2} - n\frac{p(p-1)}{2} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} - 1\right)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \\
&= \frac{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \\
&= \frac{n(n-1)(n^2-n-2) - 4n(n-1)(n-2)}{8} \\
&= \frac{n(n-1)(n^2-5n+6)}{8} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}
\end{aligned}$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Seja

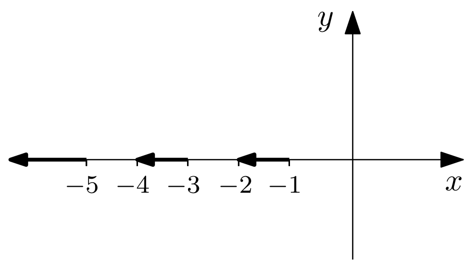
$$P_3(x) = (x+1)(x+3)(x+5) + k(x+2)(x+4)$$

onde $x \in \mathbb{C}$. Determine o lugar geométrico das raízes de $P_3(x)$ quando k assume todos os valores em $\mathbb{R}^+$, desenhando este lugar geométrico no plano complexo.

Solução:
Observando que

$$\begin{cases} P_3(-1) = 3k > 0 \\ P_3(-2) = -3 < 0 \\ P_3(-3) = -k < 0 \\ P_3(-4) = 3 > 0 \\ P_3(-5) = 3k > 0 \\ P_3(-\infty) = -\infty < 0 \end{cases}$$

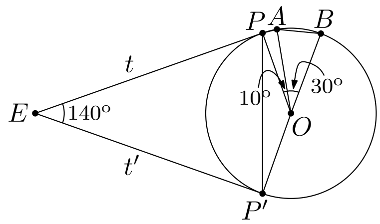
por continuidade, deve haver sempre uma raiz em cada um dos intervalos $(-2,-1)$, $(-4,-3)$ e $(-\infty,-5)$. Para $k \to 0$, estas raízes convergem para $x=-1$, $x=-3$ e $x=-5$, respectivamente. Já para $k\to\infty$, estas raízes convergem para $x=-2$, $x=-4$ e $x=-\infty$, respectivamente, gerando o lugar geométrico representado abaixo.



IME 1976/1977 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
De um ponto exterior E a um círculo O qualquer traçam-se duas tangentes t e t' a esse círculo e os pontos de tangência P e P'. O ângulo $P\hat{E}P'$ mede 140º. De P traça-se a corda PA cujo arco mede 10º no sentido do maior arco PP' sobre o círculo. De A traça-se a corda AB cujo arco mede 30º, no mesmo sentido do arco PA.
Pedem-se:
a) O ângulo $E\hat{P}P'$.
b) O ângulo $B\hat{P}'E$.
c) O número de lados do polígono inscrito no círculo O cujo lado é a corda BP.

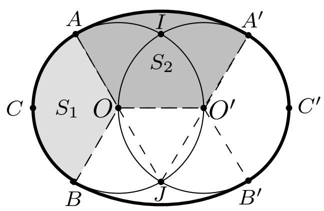
Solução:



a) Do triângulo $\Delta EPP'$, tem-se $2E\hat{P}P' + 140^\circ = 180^\circ$ e então $E\hat{P}P' = 20^\circ$.
b) Da figura acima, $B\hat{P}'E = B\hat{P}'P + E\hat{P}'P$, de modo que $B\hat{P}'E = \frac{B\hat{O}P}{2} + 20^\circ = 40^\circ$.
c) O polígono de corda BP tem $\frac{360^\circ}{B\hat{O}P} = 9$ lados.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Traçam-se dois círculos de raio r e centros em O e O' ($OO' = r$) que se cortam em I e J. Com centro em I e raio $2r$ traça-se um arco de círculo que tangencia O em A e O' em A'. Com centro em J e raio $2r$ traça-se um arco de círculo que tangencia O em B e O' em B'. Em O o diâmetro $O'O$ tem a outra extremidade em C; em O' o diâmetro OO' tem a outra extremidade em C'. Os arcos $\overset{\frown}{AA'}$, $\overset{\frown}{A'C'B'}$, $\overset{\frown}{B'B}$ e $\overset{\frown}{BCA}$ formam uma oval com quatro centros. Pede-se a área desta oval em função de r.

Solução:
A área S desejada é o dobro da soma das áreas S_1 e S_2 sombreadas na figura abaixo. A região de área S_1 é um setor circular de centro O, raio r, sub-entendendo o ângulo $A\hat{O}B = 120^\circ$. Já S_2 é a área de um setor circular de centro J, raio $2r$, sub-entendendo o ângulo $O\hat{H}O' = 60^\circ$, subtraída da área do triângulo equilátero $\Delta JOO'$ de lado r.



Desta forma,

$$S = 2\left(\frac{\pi r^2}{3} + \frac{\pi(2r)^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = r^2\left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Determine todos os arcos x tais que:

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x$$

Solução:
Pela fórmula da tangente de arco-soma e pela relação do enunciado, têm-se que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 3x &= \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}\\
\Rightarrow \operatorname{tg} 3x &= \frac{\operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}\\
&\Rightarrow \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x\\
&\Rightarrow \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x = 0
\end{aligned}$$

de modo que

$$x \in \{k\pi, \frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{3}\}$$

para todo k inteiro tal que

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

Em suma, $x = \frac{k\pi}{3}$ que engloba todas as soluções possíveis.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Prove que para todo arco x cada uma das relações abaixo é verdadeira:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x + \frac{2\pi}{3}) + \operatorname{sen}(x + \frac{4\pi}{3}) = 0$$

$$\cos x + \cos(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos(x + \frac{4\pi}{3}) = 0$$

Solução:
Usando as relações trigonométricas de arco-soma, as duas equações do enunciado tornam-se

$$\operatorname{sen} x\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}\right)+\cos x\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)=0$$

$$\cos x\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}\right)-\operatorname{sen} x\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)=0$$

onde

$$\begin{aligned}
1 + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} &= 1 - \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\\
&= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\\
&= 0\\
\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} &= \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\\
&= 0
\end{aligned}$$

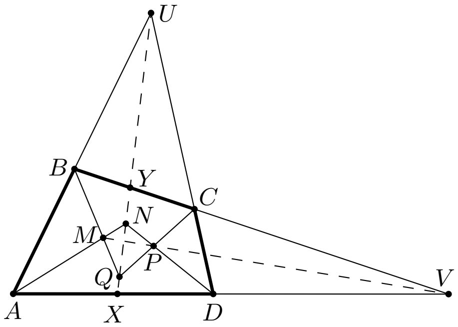
de modo que ambas as equações se aplicam para qualquer valor de x.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Traçam-se as bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ que se denominam respectivamente t_A, t_B, t_C e t_D e que determinam os pontos $M = t_A \cap t_B$, $N = t_B \cap t_C$, $P = t_C \cap t_D$, $Q = t_A \cap t_D$. Prove que:

a) O quadrilátero $MNPQ$ é inscritível.
b) As retas AB, CD e NQ são concorrentes em um ponto U, bem como as retas AD, BC e MP em um outro ponto V.

Obs: $\cap$ significa interseção.

Solução:



a) Do triângulo ΔAND, têm-se $N\hat{A}D = \frac{\hat{A}}{2}$ e $N\hat{D}A = \frac{\hat{D}}{2}$, e assim $A\hat{N}D = (180^{\text{o}} - \frac{\hat{A}+\hat{D}}{2})$. Analogamente, no triângulo ΔBQC, tem-se $B\hat{Q}C = (180^{\text{o}} - \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2})$, de modo que

$$A\hat{N}D + B\hat{Q}C = 360^{\text{o}} - \frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}}{2} = 180^{\text{o}}$$

Logo, o quadrilátero $MNPQ$ é inscritível, pois seus ângulos opostos são suplementares.

b) Prolongando-se UQ, determina-se o ponto X sobre AD. No triângulo ΔUXD, a reta DN é bissetriz do ângulo $X\hat{D}U$. Já no triângulo ΔUXA, a reta AN é bissetriz do ângulo $X\hat{A}U$. Assim, pelo Teorema das Bissetrizes,

$$\begin{cases} \frac{NX}{NU} = \frac{DX}{UD} \\ \frac{NX}{NU} = \frac{AX}{UA} \end{cases} \Rightarrow \frac{DX}{UD} = \frac{AX}{UA}$$

de modo que UX é bissetriz de $A\hat{U}D$.

Seja Y a interseção de UN com BC. No triângulo ΔUYB, a reta BQ é bissetriz externa do ângulo $Y\hat{B}U$. Já no triângulo ΔUYC, a reta CQ é bissetriz externa do ângulo $Y\hat{C}U$. Logo,

$$\begin{cases} \frac{QY}{QU} = \frac{BY}{UB} \\ \frac{QY}{QU} = \frac{CY}{UC} \end{cases} \Rightarrow \frac{BY}{UB} = \frac{CY}{UC}$$

de modo que UN é bissetriz de $B\hat{U}C$.

Logo, UX e UN são suportes da bissetriz de $A\hat{U}D = B\hat{U}C$, indicando que AB, CD e NQ se interceptam em U.

Por um raciocínio inteiramente análogo, mostra-se que VM e VP são a bissetriz de $B\hat{V}A$, indicando que as retas AD, BC e MP se interceptam em V.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam A e B dois pontos do espaço que se projetam ortogonalmente sobre um plano π em A' e B'. Dão-se $AA' = a$, $BB' = b$ e $A'B' = 2d$. Seja M um ponto de π tal que $A\widehat{M}A' = B\widehat{M}B'$. Ache o lugar geométrico do ponto M e as distâncias a C' (ponto médio de $A'B'$), em função de a, b e d, dos pontos em que o lugar geométrico do ponto M corta a reta que contém o segmento $A'B'$.

Solução:
Das condições do problema, devemos ter que

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{MA'} = \frac{b}{MB'} \Rightarrow \frac{MA'}{MB'} = \frac{a}{b}$$

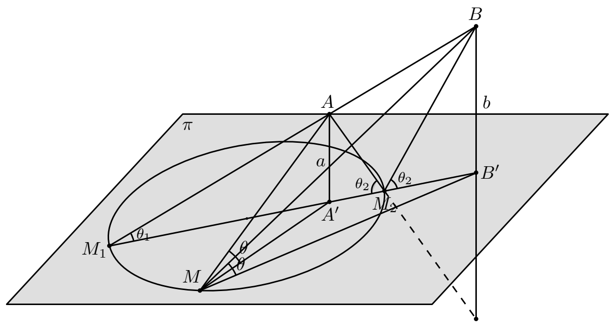
o que caracteriza o círculo de Apolônio do segmento $A'B'$ na razão $\frac{a}{b}$.

Assumindo $b > a$, como indicado na figura abaixo, na posição M_1, devemos ter

$$\frac{a}{M_1A'} = \frac{b}{M_1A' + 2d} \Rightarrow M_1C' = M_1A' + d = \frac{d(b+a)}{b-a}$$

enquanto que na posição M_2, tem-se que

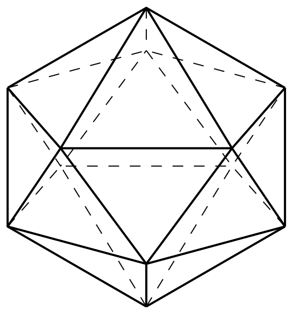
$$\frac{a}{M_2A'} = \frac{b}{2d - M_2A'} \Rightarrow M_2C' = d - M_2A' = \frac{d(b-a)}{b+a}$$

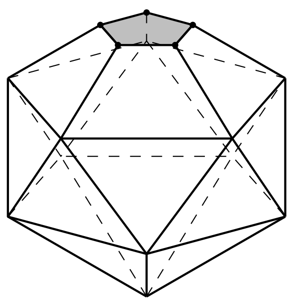


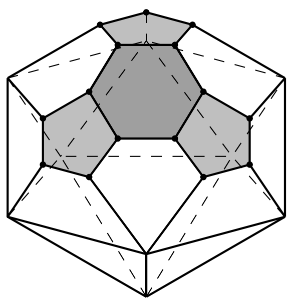
7ª Questão [Valor: 1,0]
Seja I um icosaedro regular de aresta a. Secciona-se o icosaedro por todos os planos tais que destaquem de cada vértice de I uma pirâmide regular, cujo vértice é vértice de I e cujas arestas laterais são arestas de I medindo $a/3$. Retiradas estas pirâmides resulta um poliedro P do qual se pedem:
a) Número e natureza de suas faces.
b) Número e natureza de seus ângulos poliedros.
c) Número de suas arestas e de suas diagonais.

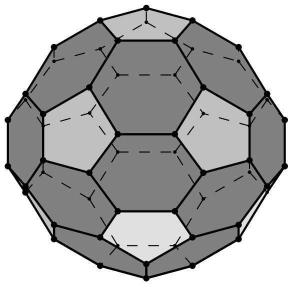
Solução:
Sejam V, F e A os números de vértices, faces e arestas, respectivamente, de I. Sejam ainda V', F' e A' os números de vértices, faces e arestas, respectivamente, do novo poliedro I'. O icosaedro, visto na Figura A, é formado por $F = 20$ faces triangulares, onde cada um dos $V = 12$ vértices se conecta a cinco outros vértices, requerendo um total de $A = \frac{V\times 5}{2} = 30$ arestas. Desta forma, a relação de Euler, $(V + F) = (A + 2) = 32$, é satisfeita, como era de se esperar.

No processo de formação do novo poliedro I', cada seção transforma um vértice de I numa face pentagonal (ver Figura B), formando cinco vértices de I'. As seções em conjunto transformam as faces originais de I em faces hexagonais regulares de I' (ver Figura C).


(A)


(B)


(C)

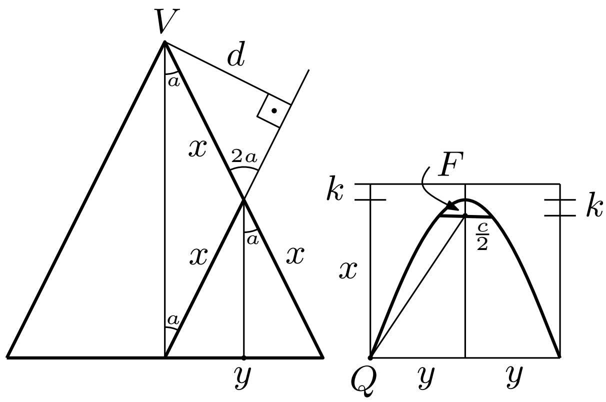

(D)

a) O poliedro I' tem $V = 12$ faces pentagonais e $F = 20$ faces hexagonais, num total de $F' = 32$ faces.
b) O poliedro I' tem $V' = 5V = 60$ vértices. Cada vértice forma um ângulo poliedro de três faces, sendo uma pentagonal (com ângulo de 104º) e duas hexagonais (com ângulo de 120º).
c) Pela relação de Euler, o poliedro I' possui $A' = (F' + V' - 2) = 90$ arestas.

   Para cada ângulo poliedro de vértice v'_i de I', há um total de doze vértices pertencentes ao ângulo poliedro (ver Figura D), incluindo o próprio vértice v'_i. Estes vértices não formam diagonais de I' quando conectados a v'_i. Logo, o número total D' de diagonais de I' é $D' = \frac{V'(V'-12)}{2} = 1440$.

8ª Questão [Valor: 1,0]
Um cone de revolução tem ângulo de abertura $2a$. Faz-se uma seção parabólica (determinando uma parábola P) por um plano que dista d de V, vértice do cone. Pede-se em função de d e a o comprimento da corda focal perpendicular ao eixo da parábola P.

Solução:



A distância x do vértice V para a interseção do plano com o cone é dada por

$$x = \frac{d}{\operatorname{sen} 2a}$$

Seja Q um dos pontos da parábola no mesmo plano horizontal que a interseção do plano com o eixo do cone. Logo, a distância y de Q ao eixo do cone é

$$y = 2x \operatorname{sen} a = \frac{d}{\cos a}$$

A distância de Q à diretriz da parábola deve ser a mesma que sua distância ao foco F. Assim,

$$(x + k)^2 = (x - k)^2 + y^2$$
$$\Rightarrow k = \frac{y^2}{4x} = \frac{\left(\frac{d}{\cos a}\right)^2}{4\frac{d}{\operatorname{sen} 2a}} = \frac{d \operatorname{tg} a}{2}$$

O comprimento c da corda focal perpendicular ao eixo da parábola é então tal que

$$\frac{c}{2} = 2k \;\Rightarrow\; c = 2d \operatorname{tg} a$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Em um triângulo qualquer ABC são dados: o lado a, a altura h e a bissetriz interna ℓ relativas a esse lado. Determine os lados b e c assim como os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ em função de a, h e ℓ.

Solução:
Sejam as grandezas auxiliares $(b+c) = M$ e $bc = N$, de modo que b e c são as raízes de $x^2 - Mx + N = 0$, isto é,

$$b, c = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4N}}{2}$$

Aplicando a relação de Stewart com a bissetriz, tem-se

$$\begin{aligned}
&b^2\left(\frac{ac}{b+c}\right)+c^2\left(\frac{ab}{b+c}\right) = \ell^2 a + a\left(\frac{ac}{b+c}\right)\left(\frac{ab}{b+c}\right)\\
&\Rightarrow \ell^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} = \frac{N(M^2-a^2)}{M^2}\\
&\Rightarrow N = \frac{\ell^2 M^2}{(M^2-a^2)}
\end{aligned}$$

Por Heron, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{ah}{2} &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}\\
&= \frac{\sqrt{[-a^2+(b+c)^2][a^2-(b-c)^2]}}{4}\\
&= \frac{\sqrt{[-a^2+(b+c)^2][a^2-(b+c)^2+4bc]}}{4}\\
&= \frac{\sqrt{(-a^2+M^2)(a^2-M^2+4\frac{\ell^2M^2}{(M^2-a^2)})}}{4}\\
&= \frac{\sqrt{-(a^2-M^2)^2+4\ell^2M^2}}{4}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&M^4 - 2M^2(2\ell^2+a^2) + a^2(4h^2+a^2) = 0\\
&\Rightarrow M = \sqrt{\frac{2(2\ell^2+a^2)+\sqrt{4(2\ell^2+a^2)^2-4a^2(4h^2+a^2)}}{2}}\\
&\Rightarrow M = \sqrt{2\ell^2+a^2+2\sqrt{\ell^4+\ell^2a^2+a^2h^2}}
\end{aligned}$$

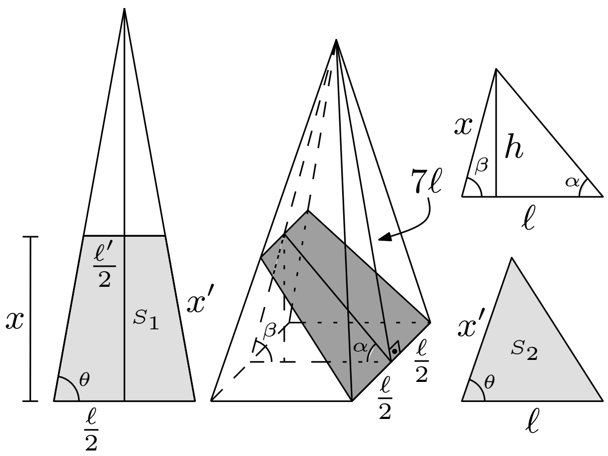
o que nos permite determinar N, b e c, em seqüência, pelas relações anteriormente obtidas.

Aplicando-se a lei dos cossenos três vezes no triângulo ΔABC, têm-se

$$\begin{cases}
\cos\hat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\
\cos\hat{B} = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\
\cos\hat{C} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}
\end{cases}$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Dá-se uma pirâmide quadrangular regular P cujo lado da base mede ℓ, e cujo apótema mede 7ℓ. Um plano passando por uma das arestas da base divide a área total dessa pirâmide em duas partes equivalentes. Determine a posição desse plano e o volume do prisma que ele determinou.

Solução:



A área total S_T da pirâmide P é

$$S_T = \ell^2 + 4\frac{7\ell^2}{2} = 15\ell^2$$

Sejam S_1 e S_2 as áreas das seções definidas pelo plano nas faces laterais da pirâmide, como indicado na figura acima. A área total S_I do sólido inferior (a menos da área da seção propriamente dita, que é comum a ambos os sólidos) é então

$$\begin{aligned}
S_I &= \ell^2 + S_1 + 2S_2\\
&= \ell^2 + \frac{(\ell+\ell')x}{2} + 2\frac{\ell x' \operatorname{sen}\theta}{2}\\
&= \ell^2 + \frac{\left(\ell + \frac{7\ell-x}{7}\right)x}{2} + \ell x
\end{aligned}$$

Fazendo $S_I = \frac{S_T}{2}$, tem-se

$$x^2 - 28\ell x + 91\ell^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \left(\frac{28 \pm \sqrt{784-364}}{2}\right)$$

de modo que $x = (14-\sqrt{105})\ell$, já que a outra raiz é maior que o apótema 7ℓ da pirâmide. Assim, o ângulo α do plano secante com o plano da base é tal que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x\operatorname{sen}\beta}{\ell - x\cos\beta} = \frac{x\frac{\sqrt{195}}{14}}{1 - x\frac{1}{14}} = (\sqrt{28}-\sqrt{15})\sqrt{13}$$

Seja $h = x\operatorname{sen}\beta$ a altura do triângulo em destaque acima. O volume V_I do sólido abaixo da seção é

$$\begin{aligned}
V_I &= \frac{\ell h}{2}\ell' + \frac{(\ell-\ell')\ell}{3}h\\
&= \frac{\ell x\operatorname{sen}\beta}{2}\left(\frac{7\ell-x}{7}\right) + \frac{(\ell - \frac{7\ell-x}{7})\ell}{3}x\operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

que, após um certo algebrismo, nos dá

$$V_I = \frac{(\sqrt{105}-1)\sqrt{195}}{84}\ell^3$$

IME 1975/1976 - Álgebra

1ª Questão [Valor: 1,0]
A soma dos 50 primeiros termos de uma progressão aritmética é igual a 200 e a soma dos 50 seguintes é igual a 2700. Calcule a razão da progressão e seu primeiro termo.

Solução:
Sejam r a razão e a_1 o primeiro termo da progressão. Do enunciado,

$$\begin{cases} \frac{a_1+a_1+49r}{2} \times 50 = 200 \\ \frac{a_1+50r+a_1+99r}{2} \times 50 = 2700 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 49r = 8 \\ 2a_1 + 149r = 108 \end{cases}$$

de modo que $r = 1$ e $a_1 = -20{,}5$.

2ª Questão [Valor: 1,0]
Considere a família de curvas C, definida pela equação:

$$y = x^2 - 2(n-5)x + n + 1$$

a) **[Valor: 0,5]** Sabendo que a curva intercepta o eixo x em dois pontos, determine os valores que n pode assumir.
b) **[Valor: 0,5]** Determine a equação do lugar geométrico dos vértices das curvas da família C, apresentando um esboço deste lugar geométrico.

Solução:

a) Fazendo o discriminante Δ ser positivo, tem-se

$$\Delta = 4(n-5)^2 - 4(n+1) = 4(n-3)(n-8) > 0$$

de modo que $n < 3$ ou $n > 8$.

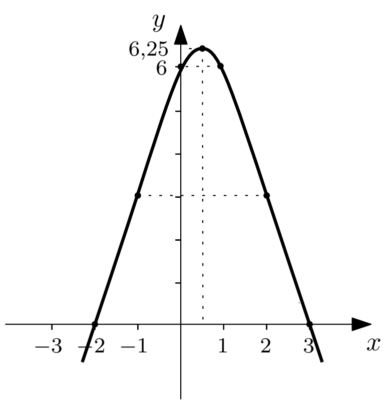
b) Fazendo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, tem-se

$$2x_0 - 2(n-5) = 0 \Rightarrow x_0 = n - 5$$

e assim

$$y_0 = x_0^2 - 2x_0x_0 + x_0 + 6 = -(x_0-3)(x_0+2)$$

cujo gráfico é representado abaixo.



3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Sabendo que $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ e que

$$z_1^2 + az_1^2 + b = 0$$
$$z_2^2 + az_2^2 + b = 0$$

Determine a relação $r = \frac{a^2}{b}$ para que os pontos z_1, z_2 e $z_0 = (0,0)$ do plano complexo formem um triângulo equilátero, esboçando as soluções no plano complexo.
Obs: $z_0 = (0,0)$ é a origem no plano complexo. O símbolo $\in$ significa "pertence".

Solução:
Os valores de z_1 e z_2 são dados por

$$z = \pm\sqrt{\frac{-b}{1+a}}$$

de modo que z_1 e z_2 são simultaneamente reais ou imaginários. Desta forma, não é possível formar um triângulo equilátero com vértices em z_0, z_1 e z_2.

4ª Questão [Valor: 1,0]
Dado o polinômio $2x^4 + x^3 + px^2 + qx + 2$, determine p e q de modo que ele seja divisível por $(x-1)^2$.

Solução:
Devemos ter $P(1) = P'(1) = 0$. Assim,

$$\begin{cases} 2+1+p+q+2 = 0 \\ 8+3+2p+q = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p+q = -5 \\ 2p+q = -11 \end{cases}$$

de modo que $p = -6$ e $q = 1$.

5ª Questão [Valor: 1,0]
Dada a equação:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a^{(1-n)y^3} = b$$

onde a é um número real maior que 1, calcule todos os valores reais ou complexos de y que satisfazem essa equação, sabendo-se que a^4 é média geométrica entre $(1+b)$ e $(\frac{1}{b})$.

Solução:
O lado esquerdo E da equação pode ser visto como a soma de uma progressão geométrica infinita. Se $y^3 > 0$, esta soma converge e podemos escrever que

$$E = a^{-y^3} + a^{-2y^3} + a^{-3y^3} + \ldots = \frac{a^{-y^3}}{1-a^{-y^3}} = \frac{1}{a^{y^3}-1}$$

de modo que devemos ter

$$\frac{1}{a^{y^3}-1} = b \Rightarrow a^{y^3} = \frac{1+b}{b}$$

Pelo enunciado,

$$a^4 = \sqrt{\frac{1+b}{b}}$$

de forma que

$$a^8 = a^{y^3} \Rightarrow y^3 = 8$$
$$\Rightarrow y \in \{2, (-1+\sqrt{3}i), (-1-\sqrt{3}i)\}$$

o que satisfaz a condição de convergência do somatório.

6ª Questão [Valor: 1,0]

a) [**Valor: 0,5**] Dada a equação:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Determine a relação entre os seus coeficientes para que a soma de duas raízes seja igual à soma das outras duas.

b) [**Valor: 0,5**] Encontre as raízes da equação

$$x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x - 5 = 0$$

sabendo que seus coeficientes satisfazem as relações do item anterior.

Solução:

a) Reescrevendo a equação do enunciado como

$$\begin{aligned} &(x^2+\alpha x+\beta)(x^2+\alpha x+\gamma) = 0 \\ \Rightarrow\ &x^4+2\alpha x^3+(\alpha^2+\beta+\gamma)x^2+\alpha(\beta+\gamma)x+\beta\gamma = 0 \end{aligned}$$

têm-se

$$\begin{cases} 2\alpha = a \\ \alpha^2+\beta+\gamma = b \\ \alpha(\beta+\gamma) = c \\ \beta\gamma = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{a}{2} \\ \beta+\gamma = b - \frac{a^2}{4} \\ \beta+\gamma = \frac{2c}{a} \\ \beta\gamma = d \end{cases}$$

de modo que devemos ter $8c = (4ab - a^3)$.

b) Do item anterior, $\alpha = 3$ e

$$\begin{cases} \beta+\gamma = 4 \\ \beta\gamma = -5 \end{cases}$$

de modo que β e γ são raízes de

$$k^2 - 4k - 5 = (k-5)(k+1) = 0$$

Logo, $\beta = 5$ e $\gamma = -1$, e assim podemos escrever a equação do enunciado como

$$(x^2+3x+5)(x^2+3x-1) = 0$$

cujas raízes são $x \in \{\frac{-3\pm\sqrt{-11}}{2}, \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}\}$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
São dados os conjuntos $E = \{a,b,c,d\}$ e $F \subset E$, tal que $F = \{a,b\}$. Denote por $P(E)$ o conjunto das partes de E e considere, em $P(E)$, a relação R, tal que

$$X\ R\ Y \Leftrightarrow F\cap X = F\cap Y$$

a) [**Valor: 0,4**] Verifique se R é uma relação de equivalência.

b) [**Valor: 0,3**] $Z \subset P(E)$. Determine Z, sabendo-se que $Z \cap F = \{b\}$.

c) [**Valor: 0,3**] $W \subset P(E)$. Determine W, sabendo-se que $F \cap W = \emptyset$.

Obs: $P(E)$ tem 16 elementos. $\Leftrightarrow$ significa "se e somente se".

Solução:

a) (i) Como $F\cap X = F\cap X \Leftrightarrow X\ R\ X$, para qualquer conjunto X, então R é reflexiva.

(ii) Além disto, R é simétrica, pois

$$\begin{aligned} X\ R\ Y &\Leftrightarrow F\cap X = F\cap Y \\ &\Leftrightarrow F\cap Y = F\cap X \\ &\Leftrightarrow Y\ R\ X \end{aligned}$$

(iii) Por fim, R é transitiva, pois

$$\begin{aligned} \begin{cases} X\ R\ Y \\ Y\ R\ Z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} F\cap X = F\cap Y \\ F\cap Y = F\cap Z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow F\cap X = F\cap Z \\ &\Leftrightarrow X\ R\ Z \end{aligned}$$

Pelas três propriedades acima, R é uma relação de equivalência.

b) O conjunto $P(E)$ das partes de E é dado por

$$\begin{aligned} P(E) = \{&\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \\ &\{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \\ &\{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\} \end{aligned}$$

Para termos $Z \cap \{a,b\} = \{b\}$, então Z deve conter b e não conter a. Assim, as possíveis soluções de $Z \subset P(E)$ são

$$Z \in \{\{b\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{b,c,d\}\}$$

c) Para termos $W\cap\{a,b\} = \emptyset$, então W não deve conter nem a nem b. Logo, as possíveis soluções de $W \subset P(E)$ são

$$W \in \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c,d\}\}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Considere

$$y = \frac{x(x+1)}{x^2+1}$$

Determine os pontos de máximo, de mínimo, de inflexão, as suas assíntotas e verifique se os pontos de inflexão pertencem a uma mesma reta, apresentando, em caso afirmativo, a equação desta reta. Faça um esboço da função indicando os pontos e retas acima aludidos.

Solução:
Com o devido algebrismo, têm-se

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2+1)(2x+1)-(2x)(x^2+x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} \\ y'' &= \frac{(x^2+1)^2(-2x+2)-2(x^2+1)(2x)(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Assim, os intervalos de crescimento e decrescimento são

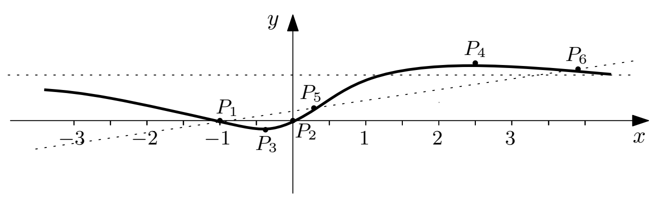
$$\begin{cases} y<0 & : \quad -1<x<0 \\ y>0 & : \quad x<-1 \text{ ou } x>0 \\ y'<0 & : \quad x<(1-\sqrt{2}) \text{ ou } x>(1+\sqrt{2}) \\ y'>0 & : \quad (1-\sqrt{2})<x<(1+\sqrt{2}) \\ y''<0 & : \quad x<-1 \text{ ou } (2-\sqrt{3})<x<(2+\sqrt{3}) \\ y''>0 & : \quad -1<x<(2-\sqrt{3}) \text{ ou } x>(2+\sqrt{3}) \end{cases}$$

Os pontos notáveis são: $P_1 \equiv (-1,0)$ (raiz e ponto de inflexão), $P_2 \equiv (0,0)$ (raiz), $P_3 \equiv (1-\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2})$ (mínimo), $P_4 \equiv (1+\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$ (máximo), $P_5 \equiv (2-\sqrt{3}, \frac{3-\sqrt{3}}{4})$ e $P_6 \equiv (2+\sqrt{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{4})$ (pontos de inflexão). Os três pontos de inflexão P_1, P_5 e P_6 estão sobre a reta $4y = x+1$. Além disto,

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = 1; \quad \lim_{x\to\pm\infty} y' = 0$$

indicando uma assíntota horizontal em $y = 1$.

O gráfico resultante é esboçado abaixo.



9ª Questão [Valor: 1,0]
Considere as progressões geométrica e aritmética abaixo, as quais se prolongam indefinidamente nos dois sentidos:

$$\ldots, a^{-\frac{2m}{4}}, a^{-\frac{m}{4}}, a^0, a^{\frac{m}{4}}, a^{\frac{2m}{4}}, \ldots$$
$$\ldots, (1-\frac{5m}{4}), (1-\frac{3m}{4}), (1-\frac{m}{4}), (1+\frac{m}{4}), (1+\frac{3m}{4}), \ldots$$

Verifique se elas podem definir o núcleo de um sistema de logaritmos. Em caso negativo, justifique a resposta. Em caso afirmativo, determine a base do sistema.

Solução:
As razões q e r das progressões geométrica e aritmética são, respectivamente,

$$q = a^{\frac{m}{4}}; \quad r = \frac{m}{2}$$

Um núcleo de função logaritmo é definido se

$$\log_b q = r \Rightarrow \log_b a^{\frac{m}{4}} = \frac{m}{2} \Rightarrow \log_b a = 2 \Rightarrow b = \sqrt{a}$$

Com esta base, tem-se ainda que

$$\log_{\sqrt{a}} a^0 = 1 - \frac{m}{4} = 0 \Rightarrow m = 4$$

de modo que as progressões tornam-se

$$\ldots, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, \ldots$$
$$\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots$$

10ª Questão [Valor: 1,0]
Determine quantos números M existem satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:

i) $10^6 < M < 10^7$.
ii) O algarismo 4 aparece pelo menos 2 vezes em M.
iii) O algarismo 8 aparece pelo menos 3 vezes em M.

Obs: Os números M são inteiros escritos na base 10.

Solução:
Pelo enunciado, M deve ser um número de 7 dígitos. Sejam n_4 e n_8 os números exatos de ocorrências dos dígitos 4 e 8, respectivamente, em M. Seja ainda n_x o número de dígitos x distintos de 4 e 8. Logo, temos seis casos com M satisfazendo as restrições do enunciado:

$= (2;3;2), (2;4;1), (2;5;0), (3;3;1), (3;4;0), (4;3;0)$

Sendo $\#(n_4;n_8;n_x)$ o número de permutações com repetição para o caso $(n_4;n_8;n_x)$, tem-se

$$\#(n_4;n_8;n_x) = \frac{7!}{n_4!\,n_8!\,n_x!}8^{n_x} - \frac{6!}{n_4!\,n_8!\,(n_x-1)!}8^{n_x-1}$$

onde o fator 8^{n_x} considera os oito possíveis valores de x e, quando $n_x > 0$, a segunda parcela elimina os números iniciados pelo dígito 0.

Desta forma, para os seis possíveis casos de $(n_4;n_8;n_x)$, têm-se

$$\begin{cases} \#(2;3;2) = \frac{7!}{2!\,3!\,2!}8^2 - \frac{6!}{2!\,3!\,1!}8^1 = 13440 - 480 \\ \#(2;4;1) = \frac{7!}{2!\,4!\,1!}8^1 - \frac{6!}{2!\,4!\,0!}8^0 = 840 - 15 \\ \#(2;5;0) = \frac{7!}{2!\,5!\,0!}8^0 = 21 \\ \#(3;3;1) = \frac{7!}{3!\,3!\,1!}8^1 - \frac{6!}{3!\,3!\,0!}8^0 = 1120 - 20 \\ \#(3;4;0) = \frac{7!}{3!\,4!\,0!}8^0 = 35 \\ \#(4;3;0) = \frac{7!}{4!\,4!\,0!}8^0 = 35 \end{cases}$$

e o total de possíveis números M é 14976.

IME 1975/1976 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,25]
Considere um triângulo ABC, com os ângulos internos representados por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. São dados:

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2} = m \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2} = n$$

a) **[Valor: 0,5]** Determine $\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}$ em função de m e n, especificando a condição a ser imposta ao produto mn para que o triângulo ABC exista.
b) **[Valor: 0,75]** Determine o valor do produto mn, para que o lado oposto ao ângulo $\hat{A}$ seja igual à média aritmética dos outros dois lados.

Solução:
a) Como $(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}) = 180^o$, então

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2} &= \operatorname{tg}\left(90^o - \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right) \\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(90^o - \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)}{\cos\left(90^o - \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}} \\
&= \frac{\cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2} - \operatorname{sen}\frac{\hat{B}}{2}\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2} + \operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}} \\
&= \frac{1-mn}{m+n}
\end{aligned}$$

Como $0^o < \frac{\hat{A}}{2}, \frac{\hat{B}}{2}, \frac{\hat{C}}{2} < 90^o$, então devemos ter $\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}, \operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}, \operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2} > 0$ e assim: $m > 0$, $n > 0$ e $0 < mn < 1$.

b) Pelo lei dos senos,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{b+c}{\operatorname{sen}\hat{B} + \operatorname{sen}\hat{C}}$$

Se $2a = (b+c)$, então devemos ter

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\hat{B} + \operatorname{sen}\hat{C} &= 2\operatorname{sen}\hat{A} \\
&= 2\operatorname{sen}[180^o - (\hat{B}+\hat{C})] \\
&= 2\operatorname{sen}(\hat{B}+\hat{C}) \\
&= 4\operatorname{sen}\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}
\end{aligned}$$

Usando a transformação em produto, tem-se

$$\operatorname{sen}\hat{B} + \operatorname{sen}\hat{C} = 2\operatorname{sen}\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$$

e assim

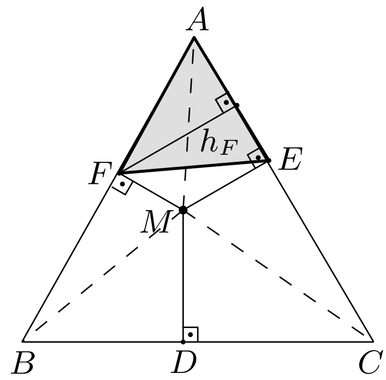
$$\begin{aligned}
2\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} &= \cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} \\
\Rightarrow \cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2} &= 3\operatorname{sen}\frac{\hat{B}}{2}\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2} \\
\Rightarrow mn &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

2ª Questão [Valor: 1,25]
Considere um triângulo equilátero ABC e um ponto M em seu interior. A partir de M traçam-se três retas perpendiculares aos lados do triângulo ABC. Estas retas encontram os lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ do triângulo nos pontos D, E e F, respectivamente. Sabendo que

$$\frac{\overline{MF}}{2} = \frac{\overline{ME}}{3} = \frac{\overline{MD}}{5}$$

e que o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC é igual a 20 metros, calcule a área do triângulo AEF.

Solução:



Sejam ℓ e S o lado e a área, respectivamente, do triângulo ΔABC. Pela lei dos senos,

$$\frac{\ell}{\operatorname{sen} 60^o} = 2R \;\Rightarrow\; \ell = R\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \text{ m}$$

Definindo

$$\frac{\overline{MF}}{2} = \frac{\overline{ME}}{3} = \frac{\overline{MD}}{5} = x \;\Rightarrow\; \begin{cases} \overline{MF} = 2x \\ \overline{ME} = 3x \\ \overline{MD} = 5x \end{cases}$$

de modo que

$$S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2x\ell}{2} + \frac{3x\ell}{2} + \frac{5x\ell}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{\ell\sqrt{3}}{20} = 3 \text{ m}$$

Pela lei dos cossenos no triângulo ΔMEF, tem-se

$$\overline{FE} = \sqrt{(2x)^2 + (3x)^2 - 2(2x)(3x)\cos 120^o} = x\sqrt{19}$$

de modo que, pela lei dos senos, o círculo circunscrito C_1 a este triângulo tem raio R' tal que

$$2R' = \frac{\overline{FE}}{\operatorname{sen} 120^o} = 2\sqrt{57} \text{ m}$$

O quadrilátero $AEMF$ é inscritível no círculo C_1, de forma que

$$\overline{AM} = 2R' \;\Rightarrow\; \begin{cases} \overline{AE} = \sqrt{(2R')^2 - (3x)^2} = 7\sqrt{3} \text{ m} \\ \overline{AF} = \sqrt{(2R')^2 - (2x)^2} = 8\sqrt{3} \text{ m} \end{cases}$$

Logo, por semelhança,

$$\frac{h_F}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{\overline{AF}}{\ell} \;\Rightarrow h_F = 12 \text{ m}$$

e então

$$S_{AEF} = \frac{\overline{AE}\, h_F}{2} = 42\sqrt{3} \text{ m}^2$$

3ª Questão [Valor: 1,25]

a) **[Valor: 1,0]** Em um triângulo ABC são dados o perímetro $2p$, o raio da circunferência inscrita r e a altura h sobre o lado $\overline{BC} = a$. Deduza as fórmulas que permitem calcular, em função de p, r e h, o lado $\overline{BC} = a$, a soma $\overline{AC} + \overline{AB} = b + c$ e o produto $\overline{AC}.\overline{AB} = bc$, dos outros dois lados.

b) **[Valor: 0,25]** Em um triângulo ABC, de perímetro $2p$, o raio da circunferência inscrita é igual a r e a altura sobre o lado $\overline{BC} = a$ é igual a h. Determine p em função de r e h para que o triângulo ABC seja retângulo em A.

Solução:

a) Podemos escrever a área S do triângulo ΔABC como

$$S = pr = \frac{ah}{2} \Rightarrow a = \frac{2pr}{h}$$
$$\Rightarrow (b+c) = 2p - a = 2p\left(\frac{h-r}{h}\right)$$

Por Heron,

$$\begin{aligned} pr &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{p(p-a)[p^2-(b+c)p+bc]} \\ &= \sqrt{p\left(p-\frac{2pr}{h}\right)\left[p^2-2p\left(\frac{h-r}{h}\right)p+bc\right]} \\ &= \sqrt{p^2\left(\frac{h-2r}{h}\right)\left[p^2\left(\frac{2r-h}{h}\right)+bc\right]} \end{aligned}$$

logo

$$bc = \frac{hr^2}{h-2r} - \frac{p^2(2r-h)}{h} = \frac{h^2r^2+p^2(2r-h)^2}{h(h-2r)}$$

b) Por Pitágoras, devemos ter

$$a^2 = b^2 + c^2 = (b+c)^2 - 2bc$$

e assim

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2pr}{h}\right)^2 = 4p^2\left(\frac{h-r}{h}\right)^2 - 2\frac{h^2r^2+p^2(2r-h)^2}{h(h-2r)} \\ &\Rightarrow \frac{4p^2}{h^2}[(h-r)^2-r^2] = 2\frac{h^2r^2+p^2(2r-h)^2}{h(h-2r)} \\ &\Rightarrow 2p^2(h-2r)^2 = h^2r^2+p^2(2r-h)^2 \\ &\Rightarrow p^2(h-2r)^2 = h^2r^2 \\ &\Rightarrow p = \frac{hr}{h-2r} \end{aligned}$$

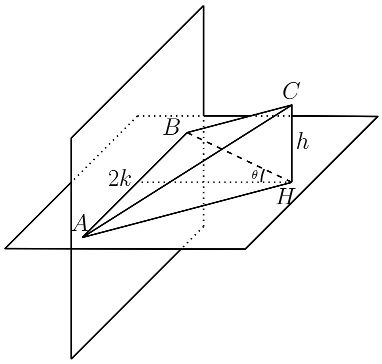
4ª Questão [Valor: 1,25]

Considere um triângulo equilátero ABC, de lado $2k$. O lado $\overline{AB}$ está contido na interseção dos planos π_1 e π_2. H_1 é a projeção ortogonal de C sobre π_1 e H_2 é a projeção ortogonal de C sobre π_2.

a) **[Valor: 0,5]** Calcule $\overline{CH_1}$ em função de k, supondo que o ângulo $\widehat{AH_1B} = 120^o$.

b) **[Valor: 0,75]** Calcule o volume V do tetraedro $ABCH_2$, em função de k, sabendo que o quadrado da área de uma das faces do tetraedro é igual à soma dos quadrados das áreas das outras faces.

Solução:



a) Seja $H \equiv H_1$ na figura acima. Assim,

$$\overline{AH_1}\,\text{sen}\,\frac{\widehat{AH_1B}}{2} = k \ \Rightarrow\ \overline{AH_1} = \frac{2k\sqrt{3}}{3}$$

de modo que

$$\overline{CH_1} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH_1}^2} = \sqrt{4k^2 - \frac{4k^2}{3}} = \frac{2k\sqrt{6}}{3}$$

b) Neste item, sejam $H \equiv H_2$ e $\overline{AH_2} = \overline{BH_2} = x$. Logo,

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{(2k)^2\sqrt{3}}{4} \\ S_{ABH_2} &= \frac{(2k)\sqrt{x^2-k^2}}{2} \\ S_{ACH_2} = S_{BCH_2} &= \frac{x\sqrt{(2k)^2-x^2}}{2} \end{aligned}$$

de forma que devemos ter

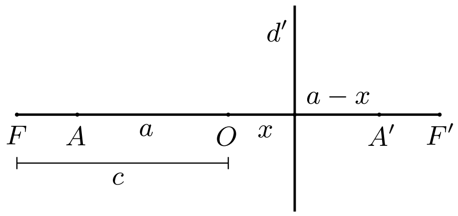
$$\begin{aligned} &3k^4 = k^2(x^2-k^2) + \frac{x^2}{2}(4k^2-x^2) \\ &\Rightarrow x^4 - 6k^2x^2 + 8k^4 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 = \frac{6k^2 \pm \sqrt{(36-32)k^4}}{2} \\ &\Rightarrow x = k\sqrt{2} \end{aligned}$$

já que as outras raízes para x não condizem com o problema. Logo, o volume V é igual a

$$V = \frac{\frac{(2k)\sqrt{x^2-k^2}}{2}\sqrt{(2k)^2-x^2}}{3} = \frac{k^3\sqrt{2}}{3}$$

5ª Questão [Valor: 1,25]
Em um plano são dados A e F', tais que $\overline{AF'} = 3$. Represente a mediatriz do segmento $\overline{AF'}$ por d'. Seja h uma hipérbole que tem A como vértice de um dos ramos, F' como foco situado na concavidade do outro ramo e d' a diretriz associada a F'. Calcule a excentricidade de h, a distância de A ao centro de h e o ângulo (no interior do qual está um ramo de h) que as assíntotas de h formam entre si.

Solução:



A razão das distâncias de um ponto qualquer de uma cônica para um foco e a diretriz correspondente é constante e igual à excentricidade da cônica. Sendo x a distância da diretriz d' ao centro O da hipérbole, tem-se

$$\frac{\overline{A'F'}}{a-x} = \frac{c-a}{a-x} = e = \frac{c}{a} \;\Rightarrow\; x = \frac{a^2}{c}$$

Assim, pelo enunciado, têm-se

$$\begin{cases} \overline{AF'} = a + c = 3 \\ a + \frac{a^2}{c} = 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

de forma que $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}$. Com isto,

$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} = 2 \\ \overline{AO} &= a = 1 \\ \theta &= 2\,\text{arctg}\,\frac{b}{a} = 120^{\circ} \end{aligned}$$

6ª Questão [Valor: 1,25]
Considere um trapézio isósceles $ABCD$. A base maior $\overline{AB} = 2$ é constante. A altura x do trapézio é variável e os lados não paralelos são $\overline{AD} = \overline{BC} = 2x$. S_1 e S_2 são as áreas totais dos sólidos de revolução obtidos girando-se o trapézio, respectivamente, em torno das bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Suponha que $k = \frac{S_1}{S_2}$. Exprima x em função de k, determine o valor de k que corresponde a um trapézio circunscritível T e calcule o raio da circunferência na qual este trapézio T está inscrito.

Solução:
Seja $\overline{CD} = \ell$. Usando Pitágoras, tem-se

$$\left(\frac{2-\ell}{2}\right)^2 + x^2 = (2x)^2 \;\Rightarrow\; \ell = 2(1 - x\sqrt{3})$$

já que a outra solução para ℓ é maior do que 2. Note que como $\ell > 0$, então $x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

A área total S_1 corresponde a duas superfícies cônicas, de geratrizes $\overline{AD} = \overline{BC} = 2x$ e raio da base x, e uma superfície cilíndrica, de raio x e altura $\overline{CD} = \ell$. Logo,

$$S_1 = 2(2\pi x^2) + 2\pi x\ell = 2\pi x(2x + \ell)$$

Já S_2 corresponde às mesmas duas superfícies cônicas e a uma superfície cilíndrica, de raio x e altura $\overline{AB} = 2$, de modo que

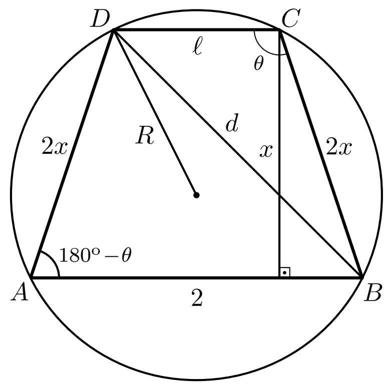
$$S_2 = 2(2\pi x^2) + 4\pi x = 4\pi x(x+1)$$

Logo,

$$\begin{aligned} k &= \frac{2x+\ell}{2(x+1)} = \frac{1 + x(1-\sqrt{3})}{x+1} \\ \Rightarrow x &= \frac{1-k}{k + \sqrt{3} - 1} \end{aligned}$$

Para que o trapézio seja circunscritível, as somas dos lados opostos devem ser iguais. Assim, devemos ter

$$\begin{aligned} & 2 + \ell = 2 + 2(1 - x\sqrt{3}) = 4 - 2x\sqrt{3} = 4x \\ & \Rightarrow x = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = 2(2-\sqrt{3}) \\ & \Rightarrow k = \frac{1 + 2(2-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})+1} = \frac{19 - 8\sqrt{3}}{13} \end{aligned}$$



Neste caso, aplicando-se a lei dos cossenos nos triângulos ΔABD e ΔBCD, tem-se

$$\begin{aligned} & d^2 = (2x)^2 + 2^2 + 8x\cos\theta = (2x)^2 + \ell^2 - 4x\ell\cos\theta \\ & \Rightarrow \cos\theta = \frac{\ell^2 - 4}{4x(2+\ell)} = \frac{\ell - 2}{4x} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \theta = 150^{\circ} \\ & \Rightarrow d^2 = 4x^2 + 4 + 2(\ell - 2) = 20(7 - 4\sqrt{3}) \end{aligned}$$

de forma que, pela lei dos senos no triângulo ΔBCD,

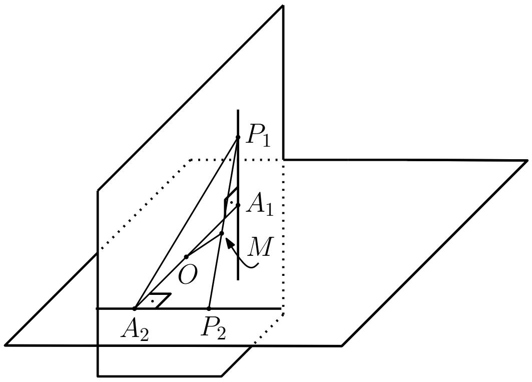
$$\frac{d}{\operatorname{sen}\theta} = 2R \;\Rightarrow\; R = \frac{d}{2\operatorname{sen}150^{\circ}} = d = 2\sqrt{5(7-4\sqrt{3})}$$

7ª Questão [Valor: 1,25]
Considere duas retas reversas ortogonais, r_1 e r_2. A_1 é um ponto de r_1, A_2 é um ponto de r_2, $\overline{A_1A_2} = k$ é perpendicular comum a r_1 e r_2. Sejam e a esfera de diâmetro $\overline{A_1A_2}$ e t uma reta tangente a e em um ponto M variável de e, com a condição de t encontrar r_1 em P_1 e r_2 em P_2.

a) **[Valor: 0,5]** Sendo $\overline{A_1P_1} = x_1$ e $\overline{A_2P_2} = x_2$, calcule o produto x_1x_2 em função de k.

b) **[Valor: 0,75]** π_1 é o plano que contém r_1 e A_2. π_2 é o plano que contém r_2 e A_1. Calcule as distâncias de M aos planos π_1 e π_2, em função de $\overline{A_1P_1} = x_1$ e $\overline{A_2P_2} = x_2$, especificando o lugar geométrico descrito pelo ponto M.

Solução **(Baseada em solução do Colégio Impacto):**



a) O raio $\overline{OM}$ é perpendicular à tangente $t \equiv P_1P_2$. Dos triângulos retângulos ΔOA_1P_1 e ΔOMP_1, têm-se

$$\begin{cases} \overline{OP_1}^2 = \overline{OA_1}^2 + \overline{A_1P_1}^2 = \frac{k^2}{4} + x_1^2 \\ \overline{OP_1}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MP_1}^2 = \frac{k^2}{4} + \overline{MP_1}^2 \end{cases} \Rightarrow \overline{MP_1} = x_1$$

Analogamente, dos triângulos retângulos ΔOA_2P_2 e ΔOMP_2, têm-se

$$\begin{cases} \overline{OP_2}^2 = \overline{OA_2}^2 + \overline{A_2P_2}^2 = \frac{k^2}{4} + x_2^2 \\ \overline{OP_2}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MP_2}^2 = \frac{k^2}{4} + \overline{MP_2}^2 \end{cases} \Rightarrow \overline{MP_2} = x_2$$

Logo, do triângulo retângulo $\Delta P_1A_1A_2$, tem-se

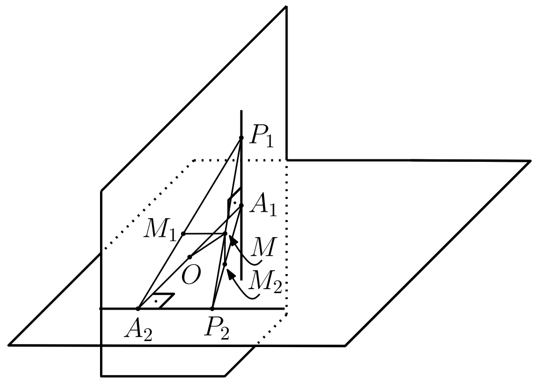
$$\overline{P_1A_2}^2 = \overline{P_1A_1}^2 + \overline{A_1A_2}^2 = x_1^2 + k^2$$

e, por fim, do triângulo retângulo $\Delta P_1A_2P_2$,

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_1+x_2)^2 = \overline{P_1A_2}^2 + \overline{A_2P_2} = (x_1^2+k^2)+x_2^2$$

de modo que

$$x_1x_2 = \frac{k^2}{2}$$



b) A projeção de P_1P_2 no plano π_1 é o segmento P_1A_2. Logo, a projeção M_1 de M em π_1 pertence a P_1A_2 e, por semelhança dos triângulos ΔP_1M_1M e $\Delta P_1A_2P_2$, é tal que

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{P_1M}} = \frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_1P_2}} \Rightarrow \overline{M_1M} = \frac{\overline{P_1M}\,\overline{A_2P_2}}{\overline{P_1P_2}} = \frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$$

Analogamente, a projeção de P_1P_2 no plano π_2 é o segmento A_1P_2, e a projeção M_2 de M em π_2 pertence a A_1P_2. Por semelhança dos triângulos ΔP_2M_2M e $\Delta P_2A_1P_1$, têm-se

$$\frac{\overline{M_2M}}{\overline{P_2M}} = \frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_2P_1}} \Rightarrow \overline{M_2M} = \frac{\overline{P_2M}\,\overline{A_1P_1}}{\overline{P_2P_1}} = \frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$$

Logo, $\overline{M_1M} = \overline{M_2M}$, de modo que M pertence aos círculos-interseção da esfera com os planos bissetores do diedro $\pi_1\pi_2$.

8ª Questão [Valor: 1,25]
Considere,

$$E = \left[\operatorname{sen}\frac{1\pi n}{N}\right]^2 + \left[\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{N}\right]^2 + \ldots + \left[\operatorname{sen}\frac{N\pi n}{N}\right]^2$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\left[\operatorname{sen}\frac{k\pi n}{N}\right]^2$$

N e n são números inteiros, tais que $0 < n < N$. Calcule E em função de N.

Solução:
Usando a relação de Euler, podemos escrever

$$\operatorname{sen}\frac{k\pi n}{N} = \frac{e^{\frac{jk\pi n}{N}} - e^{-\frac{jk\pi n}{N}}}{2j}$$

e assim

$$E = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{e^{\frac{jk\pi n}{N}} - e^{-\frac{jk\pi n}{N}}}{2j}\right)^2$$
$$= \frac{1}{(2j)^2}\sum_{k=1}^{N}\left(e^{\frac{jk2\pi n}{N}} - 2 + e^{-\frac{jk2\pi n}{N}}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\left[e^{\frac{j2\pi n}{N}}\left(\frac{e^{j2\pi n}-1}{e^{\frac{j2\pi n}{N}}-1}\right) - 2N + e^{-\frac{j2\pi n}{N}}\left(\frac{e^{-j2\pi n}-1}{e^{-\frac{j2\pi n}{N}}-1}\right)\right]$$

Logo, $E = \frac{N}{2}$, pois $e^{j2\pi n} = e^{-j2\pi n} = 1$, já que n é inteiro, e $e^{\pm\frac{j2\pi n}{N}} \neq 1$, já que $0 < n < N$.

IME 1974/1975 - Geometria

1ª Questão [Valor: 1,0]
Determine todas as soluções da equação trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 9x + \operatorname{sen} 5x + 2\operatorname{sen}^2 x = 1$$

Solução:
Usando as relações do arco-dobro e de transformação em produto, têm-se

$$\begin{aligned} 1 - 2\operatorname{sen}^2 x &= \cos 2x \\ \operatorname{sen} 9x + \operatorname{sen} 5x &= 2\operatorname{sen} 7x \cos 2x \end{aligned}$$

Logo, a equação do enunciado é equivalente a

$$2\operatorname{sen} 7x \cos 2x - \cos 2x = 0$$

cuja solução, para qualquer k inteiro, é dada por

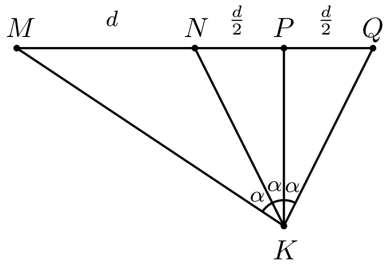
$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \text{ou} \\ \operatorname{sen} 7x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ 7x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{2k\pi+\pi}{4} \\ \text{ou} \\ \frac{12k\pi+3\pi\pm 2\pi}{42} \end{cases}$$

2ª Questão [Valor: 1,0]
Sejam o segmento de reta $\overline{MQ}$ e os pontos N e P sobre $\overline{MQ}$, na ordem M, N, P e Q. Considere um ponto K não situado sobre a reta suporte de $\overline{MQ}$. Suponha que:

$$\overline{MN} = 2\overline{NP} = 2\overline{PQ} = d \;\text{ e }\; \widehat{MKN} = \widehat{NKP} = \widehat{PKQ}$$

Determine o valor numérico da relação $\frac{h}{d}$, sendo h a distância do ponto K à reta suporte de $\overline{MQ}$.

Solução:



Pelo teorema das bissetrizes no triângulo ΔNKQ,

$$\frac{\overline{NK}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{QK}}{\overline{QP}} \Rightarrow \overline{NK} = \overline{QK} \Rightarrow \widehat{KPN} = \widehat{KPQ} = 90^{\text{o}}$$

Pelos teoremas de Pitágoras e das bissetrizes no triângulo ΔMPK, têm-se

$$\begin{cases} \overline{MK}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PK}^2 \\ \frac{\overline{MK}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{PK}}{\overline{PN}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{9d^2}{4} + h^2}}{d} = \frac{h}{\frac{d}{2}}$$

de modo que

$$\frac{9d^2}{4} + h^2 = 4h^2 \Rightarrow \frac{h}{d} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um triângulo ABC, tal que $\hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{2}$.

a) **[Valor: 0,5]** Os lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do triângulo ABC não são conhecidos, mas é conhecido o valor de m, sendo $m = \frac{\overline{AC}+\overline{AB}}{\overline{BC}}$. Calcule $\operatorname{sen} A$, $\operatorname{sen} B$ e $\operatorname{sen} C$, em função de m.

b) **[Valor: 0,5]** Calcule o ângulo que a altura do triângulo ABC, traçada a partir de A, forma com o raio $\overline{OA}$ da circunferência de centro O, circunscrita ao triângulo ABC.

Solução:

a) Da lei dos senos,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b+c}{\operatorname{sen}(90^{\text{o}} + \hat{C}) + \operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{ma}{\cos\hat{C} + \operatorname{sen}\hat{C}}$$

de modo que devemos ter

$$\begin{aligned} \cos\hat{C} + \operatorname{sen}\hat{C} &= m\operatorname{sen}\hat{A} \\ &= m\operatorname{sen}(90^{\text{o}} - 2\hat{C}) \\ &= m\cos 2\hat{C} \\ &= m(\cos^2\hat{C} - \operatorname{sen}^2\hat{C}) \\ &= m(\cos\hat{C} + \operatorname{sen}\hat{C})(\cos\hat{C} - \operatorname{sen}\hat{C}) \end{aligned}$$

Cancelando o termo $(\cos\hat{C} + \operatorname{sen}\hat{C})$ e elevando ao quadrado, tem-se

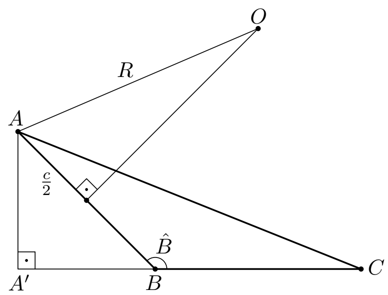
$$\frac{1}{m^2} = \cos^2\hat{C} - 2\cos\hat{C}\operatorname{sen}\hat{C} + \operatorname{sen}^2\hat{C} = 1 - \operatorname{sen} 2\hat{C}$$

e então

$$\operatorname{sen} 2\hat{C} = \frac{m^2-1}{m^2} \;\Rightarrow\; \cos 2\hat{C} = \frac{\sqrt{2m^2-1}}{m^2}$$

Logo,

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\hat{C} = \sqrt{\frac{1-\cos 2C}{2}} = \sqrt{\frac{m^2-\sqrt{2m^2-1}}{2m^2}} \\ \operatorname{sen}\hat{A} = \cos 2\hat{C} = \frac{\sqrt{2m^2-1}}{m^2} \\ \operatorname{sen}\hat{B} = \cos\hat{C} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\hat{C}} = \sqrt{\frac{m^2+\sqrt{2m^2-1}}{2m^2}} \end{cases}$$



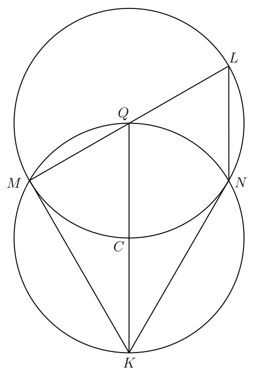
b) Da figura, e pela lei dos senos no triângulo ΔABC, tem-se que

$$\cos\widehat{OAB} = \frac{\frac{c}{2}}{R} = \frac{c}{2R} = \operatorname{sen}\hat{C} \;\Rightarrow\; \widehat{OAB} = 90^{\text{o}} - \hat{C}$$

Se A' é o pé da altura do vértice A em relação ao lado BC, então

$$\widehat{A'AO} = \widehat{A'AB} + \widehat{OAB} = (\hat{B} - 90^{\text{o}}) + (90^{\text{o}} - \hat{C}) = 90^{\text{o}}$$

4ª Questão [Valor: 1,0]
A figura abaixo mostra duas circunferências, ambas de raio R, as quais se interceptam nos pontos M e N. Uma circunferência tem centro em C; a outra tem centro em Q, sendo $\overline{KQ}$ um diâmetro da circunferência de centro C, tal que $\stackrel{\frown}{MQ}=\stackrel{\frown}{QN}$. Calcule a área do quadrilátero $KMLN$ em função de R.



Solução:
A área S do quadrilátero $KMLN$ é a soma das áreas S_1 do triângulo retângulo ΔLMN e S_2 do triângulo equilátero ΔKMN. Observando que

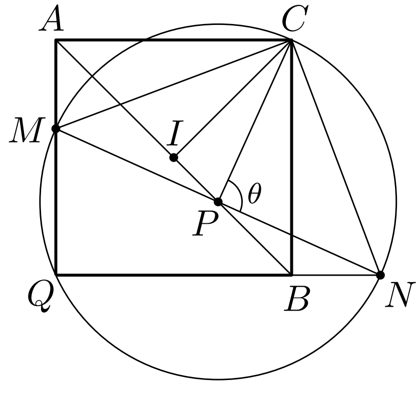
$$\begin{array}{l}\overline{MQ}=\overline{NQ}=\overline{MC}=\overline{NC}=\overline{NL}=R\\ \overline{MN}=\overline{KM}=\overline{KN}=R\sqrt{3}\end{array}$$

têm-se

$$\left\{\begin{array}{l} S_1=\frac{(R\sqrt{3})R}{2}=\frac{R^2\sqrt{3}}{2}\\ S_2=\frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\end{array}\right. \Rightarrow S=\frac{5R^2\sqrt{3}}{4}$$

5ª Questão [Valor: 1,0]
Seja um quadrado $QACB$, de centro I, e um ponto P de posição variável situado sobre a diagonal $\overline{AB}$, tal que $P\neq I$. Com centro em P e raio $\overline{PQ}$ traça-se uma circunferência que corta $\overline{QA}$ (ou seu prolongamento) em M e $\overline{QB}$ (ou seu prolongamento) em N. Considere os triângulos CMA, CNB e CPI e calcule os valores numéricos das relações $r_1=\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}}$ e $r_2=\frac{\overline{AM}}{\overline{IP}}$ e do ângulo formado por $\overline{CP}$ e $\overline{MN}$.

Solução:



O quadrilátero $QMCN$ é inscritível. Como, $\widehat{NQM}=90^{\circ}$, então $\widehat{NCM}=90^{\circ}$ e assim

$$\widehat{NCM}=\widehat{ACB}-\widehat{ACM}+\widehat{BCN}\;\Rightarrow\;\widehat{ACM}=\widehat{BCN}$$

e os triângulos ΔACM e ΔBCN são congruentes, de modo que $\overline{AM}=\overline{BN}$ e assim $r_1=1$.

Além disto, tem-se $\overline{CM}=\overline{CN}$, e como $\overline{PM}=\overline{PN}$, então CP é a altura do triângulo isósceles ΔCMN, de forma que $\theta=90^{\circ}$.

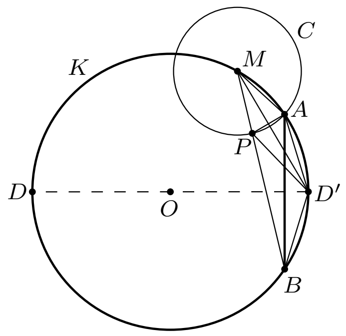
Sejam $\overline{AC}=a$ e $\overline{PQ}=r$, respectivamente, o lado do quadrado e o raio da circunferência de centro P. Nos triângulos retângulos ΔACM e ΔCIP, têm-se

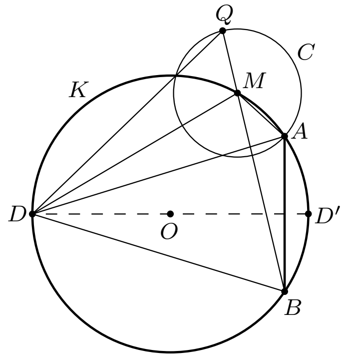
$$\left\{\begin{array}{l}\overline{AM}^2=\overline{CM}^2-\overline{AC}^2=(\overline{PC}^2+\overline{PM}^2)-a^2=2r^2-a^2\\ \overline{IP}^2=\overline{PC}^2-\overline{CI}^2=r^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=r^2-\frac{a^2}{2}\end{array}\right.$$

de modo que $r_2=\sqrt{2}$.

6ª Questão [Valor: 1,0]
Considere uma circunferência K de centro O e raio R e uma corda fixa $\overline{AB}$. Seja M um ponto variável da circunferência K. Uma reta que passa por B e M corta a circunferência C, de centro em M e raio $\overline{MA}$, nos pontos P e Q. Determine o lugar geométrico de P e Q, quando M descreve a circunferência K.

Solução:



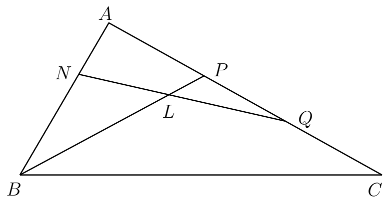


Seja $\overline{DD'}$ o diâmetro de K perpendicular à corda $\overline{AB}$.

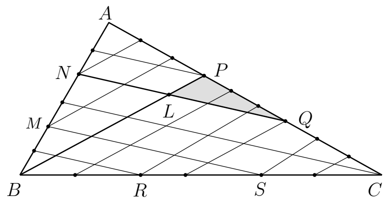
Como $\overline{AD'}=\overline{BD'}$, então, no quadrilátero inscritível $BMAD'$, tem-se $\widehat{AMD'}=\widehat{BMD'}$. Logo, como $\overline{MP}=\overline{MA}$, os triângulos $\Delta PMD'$ e $\Delta AMD'$ são congruentes, de modo que $\overline{PD'}=\overline{AD'}$. Assim, o ponto P percorre a circunferência de centro D' e raio $\overline{AD'}$.

Para o ponto Q, como $\overline{AD}=\overline{BD}$, então, no quadrilátero inscritível $BDMA$, tem-se $(180^{\circ}-\widehat{AMD})=\widehat{BMD}$. Logo, os triângulos ΔQMD e ΔAMD são congruentes, pois $\overline{MQ}=\overline{MA}$, de modo que $\overline{QD}=\overline{AD}$. Assim, o ponto Q percorre a circunferência de centro D e raio $\overline{AD}$.

7ª Questão [Valor: 1,0]
Na figura abaixo é dado um triângulo ABC, retângulo em A, cujos lados têm as seguintes medidas: $\overline{AB} = 1$ e $\overline{BC} = 2$. Sabe-se que $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$ e que $\overline{AN} = \frac{\overline{NB}}{2}$. Calcule a área do triângulo LPQ.



Solução:



Como $\widehat{BAC} = 90^{\text{o}}$, então

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{3}$$

e assim

$$\begin{cases} \overline{PB} = \sqrt{\overline{AB}^2 + (\frac{1}{3}\overline{AC})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \overline{QN} = \sqrt{\overline{AN}^2 + \overline{AQ}^2} = \sqrt{(\frac{1}{3}\overline{AB})^2 + (\frac{2}{3}\overline{AC})^2} = \frac{\sqrt{13}}{3} \end{cases}$$

Dividindo-se o lado $\overline{AC}$ em nove partes e traçando, por cada parte, uma paralela a $\overline{BP}$, o segmento $\overline{AP}$ engloba três divisões iguais, de modo que a primeira divisão é ligada ao ponto N sobre $\overline{AB}$. Logo, $\overline{QL} = \frac{3}{5}\overline{QN} = \frac{\sqrt{13}}{5}$.

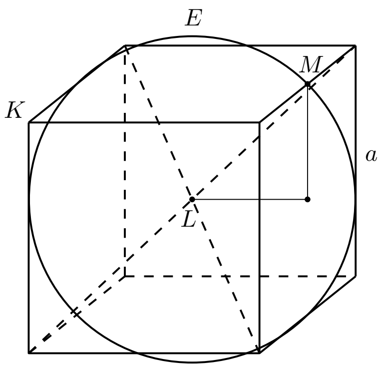
Dividindo-se o lado $\overline{AB}$ em seis partes e traçando, por cada divisão, uma paralela a $\overline{QN}$, a primeira parte se une ao ponto P e assim a terceira parte se une ao vértice C. As demais paralelas dividem o lado $\overline{BC}$ em três partes iguais, de forma que $\overline{PL} = \frac{1}{5}\overline{PB} = \frac{2\sqrt{3}}{15}$.

Usando a notação $\overline{QL} = a$, $\overline{PL} = b$ e $\overline{PQ} = c$, e denotando o perímetro do triângulo ΔPLQ por $2p$, a área desejada deste triângulo pode ser calculada como

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{[-a^2+(b+c)^2][a^2-(b-c)^2]}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{[-(3\sqrt{13})^2+(7\sqrt{3})^2][(3\sqrt{13})^2-(3\sqrt{3})^2]}}{30^2} \\ &= \frac{\sqrt{(-117+147)(117-27)}}{900} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{30} \end{aligned}$$

8ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um cubo K de aresta a. Suponha que L é o ponto em que as diagonais do cubo K se interceptam e que M é o ponto médio de uma aresta do cubo K. Com centro em L e raio $\overline{LM}$ é construída uma esfera E. O plano tangente à esfera E e perpendicular a uma diagonal do cubo K destaca do cubo K uma pirâmide P. Calcule o volume da pirâmide P, em função de a.

Solução:



O raio R da esfera E é dado por

$$R = \overline{LM} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Logo, a pirâmide P tem altura

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} - R = \frac{a(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}$$

Sejam ℓ_ℓ e ℓ_b os respectivos comprimentos das arestas laterais e da base de P. Como as faces laterais de P são triângulos retângulos, tem-se

$$\ell_b = \ell_\ell\sqrt{2}$$

Além disto, na pirâmide regular

$$\ell_\ell^2 = h^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{\ell_b\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

de modo que

$$\begin{aligned} & \ell_\ell^2 - \frac{\ell_b^2}{3} = h^2 \\ \Rightarrow\ & \ell_\ell^2 - \frac{2\ell_\ell^2}{3} = h^2 \\ \Rightarrow\ & \ell_\ell = h\sqrt{3} \ \text{ e } \ \ell_b = h\sqrt{6} \end{aligned}$$

Logo, o volume V de P é dado por

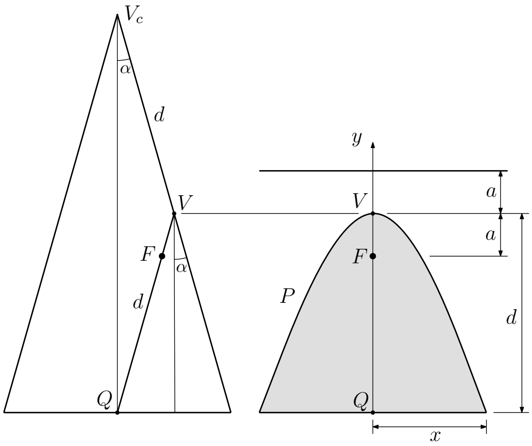
$$\begin{aligned} V &= \frac{\frac{\ell_b^2\sqrt{3}}{4}h}{3} \\ &= \frac{h^3\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{a^3(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3\sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{a^3(27-11\sqrt{6})}{16} \end{aligned}$$

9ª Questão [Valor: 1,0]
Considere um cone de revolução, cujo eixo forma com uma geratriz o ângulo α.

a) **[Valor: 0,5]** Determine o lugar geométrico dos focos de todas as parábolas, seções planas deste cone.

b) **[Valor: 0,5]** Seja P uma parábola, seção do cone dado, cujo vértice dista d do vértice do cone. Calcule, em função de d e de α, a área do segmento parabólico de P, compreendido entre P e uma corda que é perpendicular ao eixo de P e que encontra o eixo do cone.

Solução:



a) Seja d a distância do vértice V da parábola ao vértice V_c do cone. Seja ainda Q a interseção do plano gerador da parábola com o eixo do cone. Como $\widehat{VQV_c} = \widehat{VV_cQ} = \alpha$, então $\overline{VQ} = \overline{VV_c} = d$ e com isto, usando a notação indicada na figura acima,

$$x = 2d \operatorname{sen} \alpha$$

Além disto, pela definição de parábola, tem-se

$$\sqrt{x^2 + (d-a)^2} = d + a \Rightarrow x^2 = 4ad \Rightarrow a = d \operatorname{sen}^2\alpha$$

Assim, para cada d, o foco da parábola correspondente dista $d \operatorname{sen}^2\alpha$ do vértice V. Logo, o lugar geométrico desejado é uma reta passando por V_c.

b) Situando os eixos coordenados xy como indicado na figura acima, a parábola P é descrita pela equação

$$y = -\frac{x}{4d \operatorname{sen}^2\alpha} + d$$

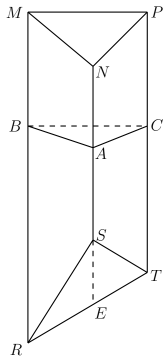
de modo que a área S desejada é dada por

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2d \operatorname{sen}\alpha}^{2d \operatorname{sen}\alpha} \left(-\frac{x^2}{4d \operatorname{sen}^2\alpha} + d \right) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{x^3}{12d \operatorname{sen}^2\alpha} + dx \Bigg|_{x=-2d \operatorname{sen}\alpha}^{x=2d \operatorname{sen}\alpha} \\ &= \frac{8}{3} d^2 \operatorname{sen}\alpha \end{aligned}$$

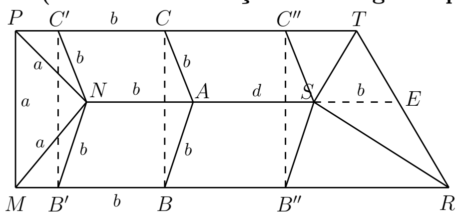
10ª Questão [Valor: 1,0]
A figura abaixo mostra um prisma em que uma seção reta é o triângulo retângulo isósceles ABC, no qual $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ e $\overline{AB} = b$. A base superior do prisma é o triângulo equilátero MNP, de lado a. A base inferior do prisma é o triângulo RST, sendo E o ponto médio de $\overline{RT}$ e sendo $\overline{SE} = b$, por construção. A menor distância entre as bases se encontra sobre a aresta $\overline{NS} = \overline{NA} + \overline{AS}$, sendo, por construção, $\overline{NA} = b$. O comprimento $\overline{AS} = d$ é escolhido de tal forma que o volume V_1, do semi-prisma superior $BACMNP$, seja igual ao volume V_2, do semi-prisma inferior $BACRST$. Calcule:

a) **[Valor: 0,5]** V_1 em função de b.

b) **[Valor: 0,5]** d em função de b.



Solução **(Baseada em solução do Colégio Impacto):**



Seja a figura devidamente rotacionada para efeito de diagramação.

a) Traçando, por N, paralelas a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, determinam-se B' e C' sobre $\overline{MR}$ e $\overline{PT}$, respectivamente. Assim, do triângulo retângulo $\Delta B'NC'$, tem-se $a = b\sqrt{2}$. O volume V_1 é a soma dos volumes V_a do prisma reto $ABCB'NC'$ e V_b da pirâmide $B'MPC'N$. Logo,

$$V_1 = \frac{\overline{AB}\,\overline{AC}}{2}\overline{AN} + \frac{\overline{MB'}\,\overline{MP}\frac{b\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{b^3}{2} + \frac{b^3}{3} = \frac{5b^3}{6}$$

b) Traçando, por S, paralelas a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, determinam-se B'' e C'' sobre $\overline{MR}$ e $\overline{PT}$, respectivamente. Se X é médio de $\overline{B''C''}$, no triângulo retângulo ΔSXE, tem-se $\overline{XE} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$. Além disto, $\overline{XE}$ é base média do trapézio $C''TRB''$, e assim $2\overline{XE} = (\overline{C''T} + \overline{B''R})$.

O volume V_2 é dado pela área da base ΔABC multiplicada pela média das arestas laterais $\overline{CT}$, $\overline{AS}$ e $\overline{BR}$ do semi-prisma. Logo,

$$V_2 = \frac{b^2}{2}\frac{[(d+\overline{C''T})+d+(d+\overline{B''R})]}{3} = \frac{b^2(3d+b\sqrt{2})}{6}$$

de modo que

$$V_1 = V_2 \Rightarrow d = \frac{(5-\sqrt{2})b}{3}$$

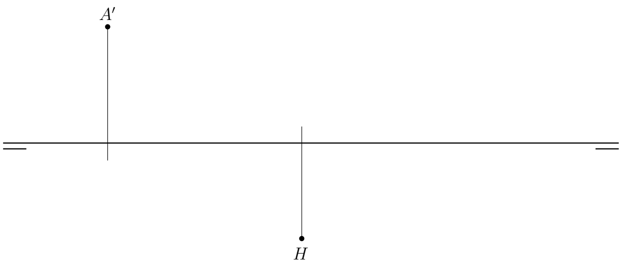
IME 1971/1972 - Desenho

IME 1971/1972, Questão 1, Item 1 [valor 0,7]:

(a) Trace as projeções de uma reta (r) paralela ao bissetor ímpar (β_I) sendo conhecidas as projeções A' (de um ponto da reta) e H (do traço horizontal).

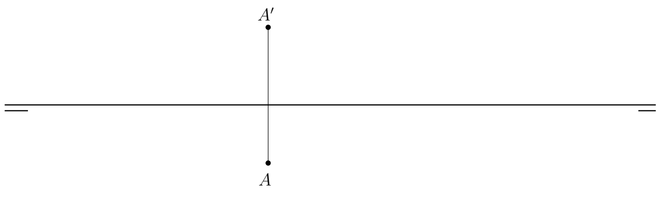
(b) Determine as projeções dos pontos notáveis da reta.

(c) Determine a verdadeira grandeza do segmento $(A)(H)$ e a verdadeira grandeza dos ângulos que a reta faz com os planos de projeção.



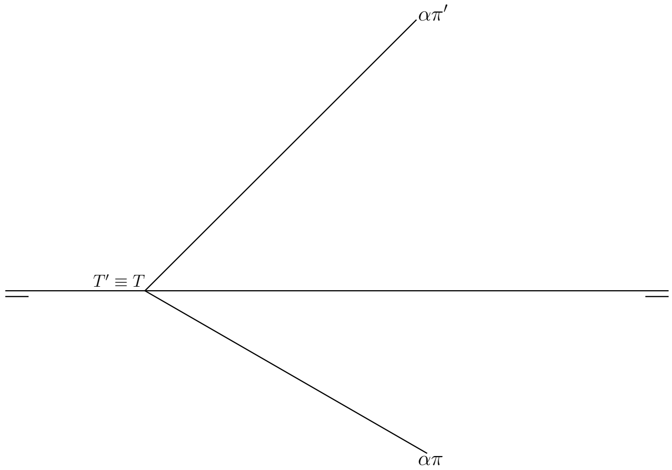
IME 1971/1972, Questão 1, Item 1.

IME 1971/1972, Questão 1, Item 2 [valor 0,3]: Dado um ponto (A), determine as projeções de um segmento $(A)(B)$ igual a 5 cm e perpendicular ao bissetor par (β_P). O ponto (B) tem maior afastamento do que o ponto (A).



IME 1971/1972, Questão 1, Item 2.

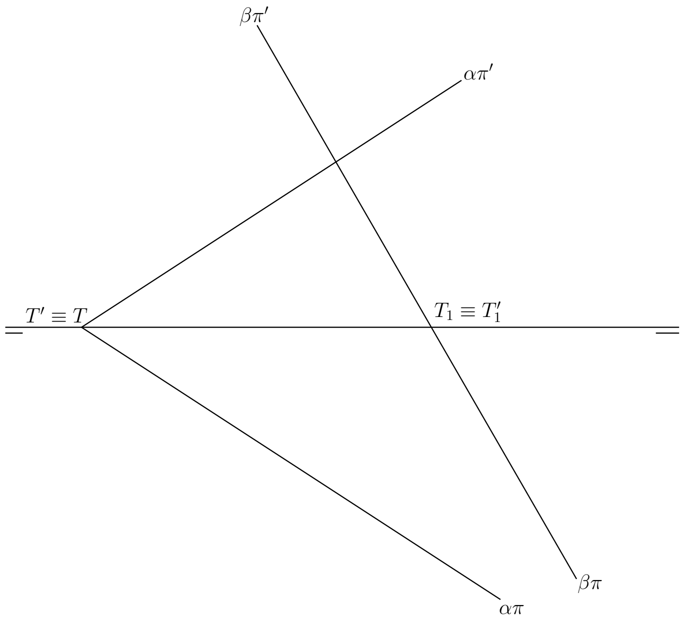
IME 1971/1972, Questão 2 [valor 1,0]: Determine, no primeiro diedro, as projeções de um círculo do plano (α) sabendo-se que é tangente aos dois planos de projeção e seu raio em verdadeira grandeza mede 3,5 cm.



IME 1971/1972, Questão 2.

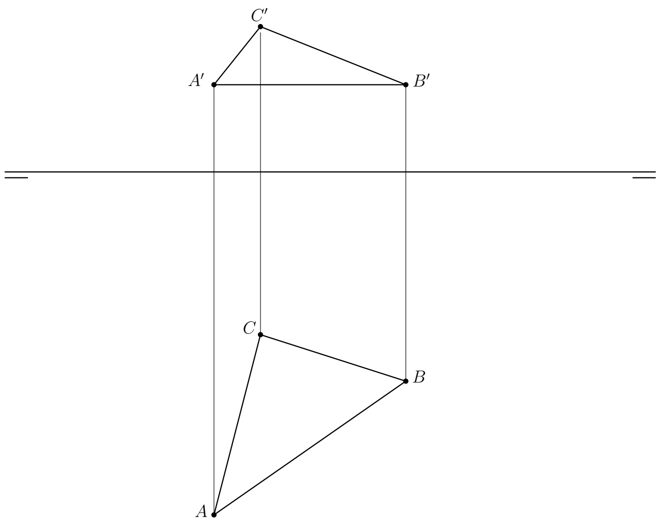
IME 1971/1972, Questão 3 [valor 1,0]: Determinar, sobre o plano (β), um ponto (P) equidistante das faces do triedro formado pelos planos (α), (π) e (π'). Justifique sucintamente a solução.

- (π') plano vertical de projeção;
- (π) plano horizontal de projeção.



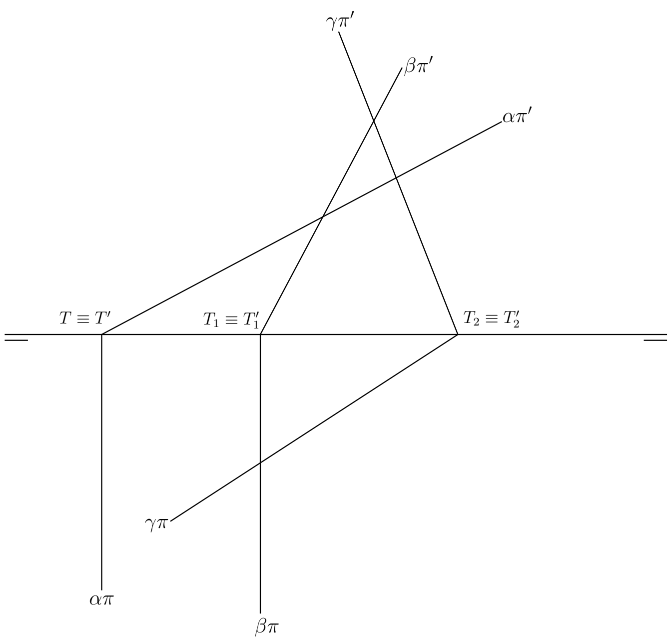
IME 1971/1972, Questão 3.

IME 1971/1972, Questão 4 [valor 1,0]: Faça uma rotação do triângulo $(A)(B)(C)$ em torno de seu lado horizontal $(A)(B)$ até uma posição para a qual as áreas de suas projeções horizontal e vertical sejam iguais. Após a rotação a nova posição do ponto (C) deverá ter a maior cota e o menor afastamento possíveis.



IME 1971/1972, Questão 4.

IME 1971/1972, Questão 5 [valor 1,0]: Determine a verdadeira grandeza do ângulo da rotação em torno de um único eixo, necessária para que o plano (γ) se transforme em bissetor do ângulo diedro formado pelos planos de topo (α) e (β).



IME 1971/1972, Questão 5.

IME 1971/1972, Questão 6 [valor 1,0]: Um feixe de círculos F é dado por: um círculo de centro O, com dois centímetros de raio; eixo radical e, distante quatro centímetros de O e comum a todos os círculos de F. Pedem-se:

(a) Construir o menor círculo que seja ortogonal a todos os círculos de F.

(b) Construir um círculo de F tangente a uma reta r perpendicular ao eixo radical e e distante seis centímetros de O.

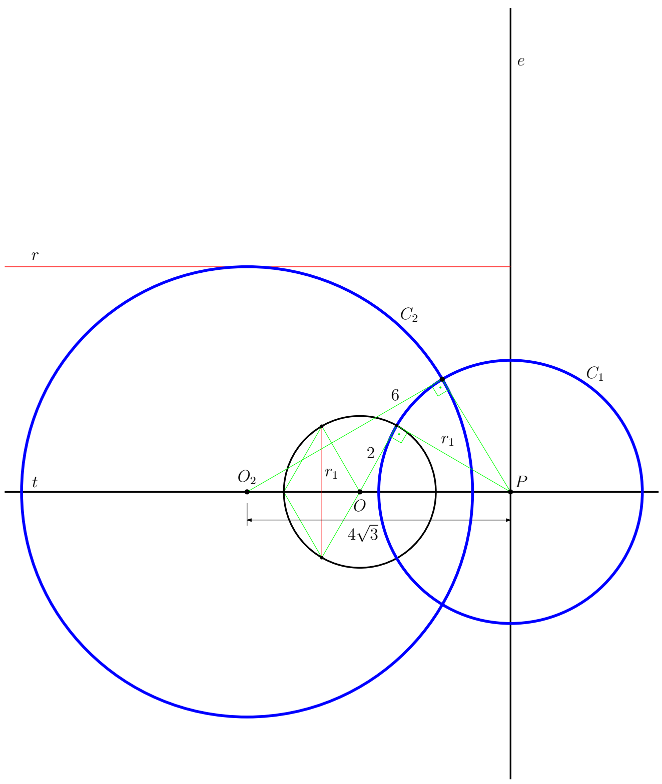
Construção (item (a)): (i) Trace o círculo $C_1 \equiv \mathcal{C}(P, 2\sqrt{3})$, onde P é a interseção do eixo radical e com a reta t suporte dos centros dos círculos de F;

Justificativa (item (a)): Os centros dos círculos do feixe F estão todos sobre a reta t passando pelo ponto O e ortogonal ao eixo radical e. Seja P a interseção do eixo radical e com esta reta t. O eixo radical é o lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais aos círculos do feixe F.

Seja um círculo C_1, de raio r_1 e centro O_1 sobre e, ortogonal aos círculos do feixe F, inclusive ao círculo de centro O e raio de 2 cm. Assim,

$$\begin{cases} O_1O^2 = r_1^2 + 2^2 \\ O_1O^2 = O_1P^2 + OP^2 \end{cases} \Rightarrow r_1^2 = O_1P^2 + 4^2 - 2^2 = O_1P^2 + 12$$

Logo, o círculo C_1 de raio mínimo é tal que $O_1 \equiv P$ e $r_1 = 2\sqrt{3}$.



IME 1971/1972, Questão 6: Solução.

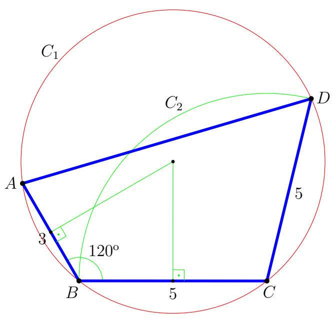
Construção (item (b)): (i) Trace o círculo $C_2 \equiv \mathcal{C}(O_2, r_2)$, onde $r_2 = 6$ cm e O_2 pertence a t e é tal que $O_2P = 4\sqrt{3}$

Justificativa (item (b)): O círculo desejado deve ter raio $r_2 = 6$ cm e deve ser ortogonal ao círculo C_1 determinado no item anterior. Logo,

$$O_2P^2 = r_2^2 + r_1^2 = 48 \Rightarrow O_2P = 4\sqrt{3}$$

sln: O enunciado é dúbio, não deixando claro quem está a seis centímetros de O: a reta r ou o círculo desejado. Pela problema, conclui-se que deve ser a reta r.

IME 1971/1972, Questão 7 [valor 1,0]: Construir um quadrilátero inscritível convexo cujos lados medem $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 5$ cm e $DA = 8$ cm.



IME 1971/1972, Questão 7: Solução.

Construção: (i) Trace o ângulo $\hat{B} = 120^o$ e marque $AB = 3$ cm e $BC = 5$ cm sobre seus lados; (ii) Determine o círculo C_1 circunscrito ao triângulo ΔABC ([?], Exercício 1.3); (iii) Trace o círculo $C_2 \equiv \mathcal{C}(C, CB)$, cuja interseção com C_1 (distinta do vértice B) é o vértice D.

Justificativa: Da Lei dos Cossenos, a diagonal AC é tal que

$$\begin{cases} AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos\hat{B} \\ \quad\;\; = 9 + 25 - 30\cos\hat{B} \\ AC^2 = DA^2 + CD^2 - 2DA.CD\cos(180^o - \hat{B}) \\ \quad\;\; = 64 + 25 + 80\cos\hat{B} \end{cases}$$

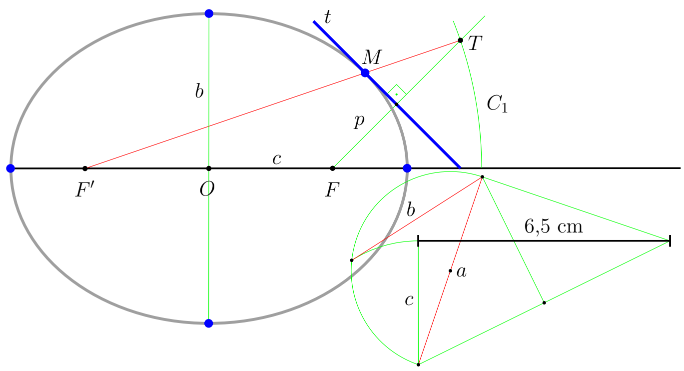
Logo, $\cos\hat{B} = -\frac{1}{2}$ e então $\hat{B} = 120^o$.

IME 1971/1972, Questão 8 [valor 1,0]: Dão-se o centro O e o foco F de uma elipse. Sabe-se que de um ponto P distante 6,5 cm do ponto O podem ser traçadas duas tangentes à elipse, perpendiculares entre si. Pedem-se:

(a) Determinar, graficamente, com os dados acima, os vértices da elipse;

(b) Construir uma tangente à elipse inclinada de 45° com seus eixos;

(c) Achar o ponto de contato M desta mesma tangente.



IME 1971/1972, Questão 8: Solução.

Construção: (i) Marque F' tal que O seja médio de FF'; (ii) Determine $a = \sqrt{\frac{OF^2+OP^2}{2}}$ e $b = \sqrt{a^2 - OF^2}$ e marque os vértices da elipse $OA = OA' = a$, com A e A' sobre a reta suporte de FF', e $OB = OB' = b$, com B e B' sobre a perpendicular a FF' por O; (iii) Trace o círculo diretor $C_1 \equiv (F', 2a)$; (iv) Trace por F uma perpendicular p à direção da tangente desejada t, cuja interseção com C_1 é o ponto T; (v) Trace a mediatriz de TF, determinando t, cuja interseção com $F'T$ é o ponto de tangência M.

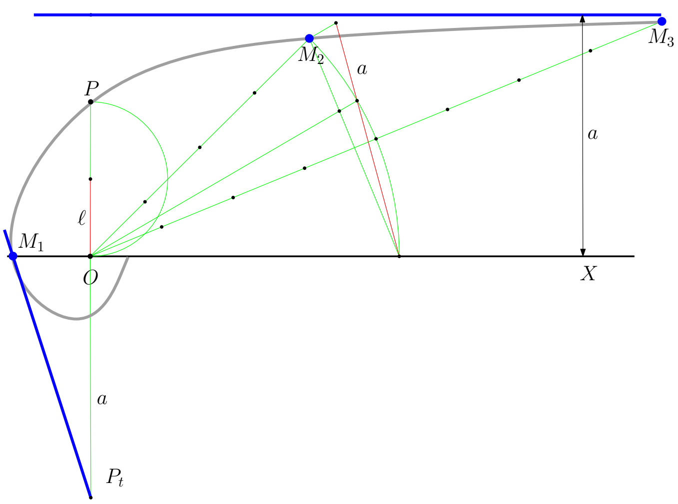
Justificativa: A interseção de duas tangentes perpendiculares pertence ao círculo de Monge da elipse, cujo raio é $OP = \sqrt{a^2 + b^2}$. Assim, $a = \sqrt{\frac{c^2+OP^2}{2}}$ e, conseqüentemente, $b = \sqrt{a^2 - OF^2}$, determinando os vértices da elipse e o círculo diretor $C_1 \equiv (F', 2a)$. A tangente desejada t é mediatriz de FT, com T pertencendo a C_1. Logo, FT é perpendicular a t, o que permite determinar T.

IME 1971/1972, Questão 9 [valor 1,0]: Em uma espiral hiperbólica são dados: (i) O ponto assintótico O; (ii) A direção assintótica orientada OX no sentido do ramo infinito da espiral; (iii) A distância de O ao ponto P, sendo P o ponto mais afastado da espiral sobre a perpendicular à assíntota: $OP = 4$ cm. Pedem-se:

(a) Construir os pontos M_1, M_2 e M_3 da curva, mais afastados de O e tais que $M_1\hat{O}X = \pi$, $M_2\hat{O}X = \frac{\pi}{4}$, $M_3\hat{O}X = \frac{\pi}{8}$.

(b) Construir a assíntota da espiral;

(c) Construir a tangente no ponto M_1.



IME 1971/1972, Questão 9: Solução.

Construção: (i) Determine $\ell = \frac{OP}{2} = 2$ cm e marque as distâncias ℓ, 4ℓ e 8ℓ em ângulos π, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{8}$, respectivamente, em relação a OX, determinando os pontos M_1, M_2 e M_3; (ii) Retifique o arco do círculo (O, OM_3), entre OX e OM_3, determinando a distância a entre OX e a assíntota; (iii) Determine o ponto P_t, sobre a perpendicular a OM_1 por O, tal que $OP_t = a$, e trace a tangente desejada P_tM_1.

Justificativa: Na espiral hiperbólica, o raio vetor é inversamente proporcional ao ângulo deste com o eixo polar OX. Com isto, a medida a do arco associada ao raio vetor é constante e a assíntota é a paralela a uma distância a do eixo. Além disto, a sub-tangente por um ponto da espiral é constante e igual a a também (ver [**?**], pp. 263–265, ou ITA 1988, Questão 7).

IME 1971/1972, Questão 10 [valor 1,0]: Uma hipérbole equilátera H tem a diretriz distante 4 cm do seu centro O.

(a) Determinar graficamente, com os dados acima, os focos e as extremidades dos eixos de H.

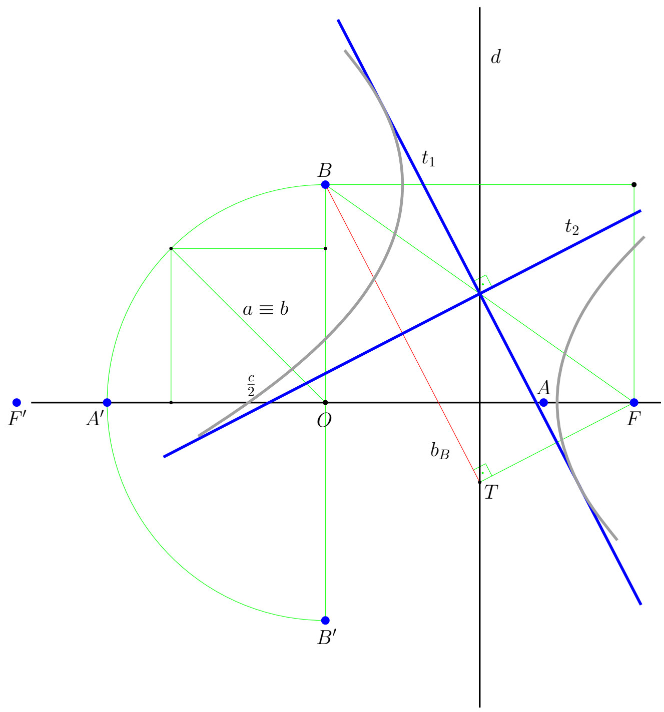
(b) Sabendo-se que: (i) Uma diretriz da hipérbole H e seu foco são a diretriz e o foco de uma parábola P_1; (ii) A mesma diretriz, acima citada, da hipérbole H e um vértice do seu eixo não transverso, são a diretriz e o foco de uma parábola P_2. Pede-se construir as tangentes comuns às parábolas P_1 e P_2.

Construção: (i) Marque sobre o eixo transverso os focos F e F', tais que $F'O = OF = c = 8$ cm, e os vértices A e A', tais que $A'O = OA = a = 4\sqrt{2}$ cm, e sobre o eixo não transverso os vértices B e B', tais que $BO = OB' = b = 4\sqrt{2}$ cm; (ii) Trace a bissetriz b_B de $O\hat{B}F$, direção da tangente comum; (iii) Trace uma perpendicular a b_B por F, cuja interseção com d é o ponto T; (iv) Trace a mediatriz de FT, determinando a tangente comum t_1; (v) Trace a perpendicular a t_1 pelo ponto médio de BF, determinando a outra tangente comum t_2.

Justificativa: (a) Dos dados do problema, têm-se

$$\begin{cases} \frac{a^2}{c} = 4 \text{ cm} \\ c = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow c = 8 \text{ cm} \;\text{ e }\; a = b = 4\sqrt{2} \text{ cm},$$

o que permite determinar os focos e os vértices de H.



IME 1971/1972, Questão 10: Solução.

(b) (Justificativa geométrica): Como t_1 é mediatriz de TF, pelo conceito de base média no triângulo ΔBTF, a interseção de t_1 com BF é o ponto M médio deste segmento. Pela simetria de B e F, o ponto M pertence a d. Logo, $BM = MF$ e $MT = MF$, de forma que $BM = MT$, indicando que o triângulo ΔBMT é isósceles com base BT. Uma análise angular simples indica que $O\hat{B}T = O\hat{F}T = B\hat{T}M = M\hat{B}T$, de forma que BT é a bissetriz de $O\hat{B}F$.
(b) (Justificativa algébrica): Considerando eixos coordenados com origem em O, com o eixo das abscissas ao longo de OF, as parábolas são descritas por

$$\begin{cases} P1 : cx + (y-b)^2 = \frac{c^2}{4} \\ P2 : cx - y^2 = \frac{3c^2}{4} \end{cases},$$

onde $P1$ e $P2$ têm focos B e F, respectivamente, e diretriz d. Assim, as tangentes genéricas de cada parábola pelos respectivos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são descritas por

$$\begin{cases} T1 : 2(y_1 - b)y = -cx + +(y_1^2 - b^2 + \frac{c^2}{4}) \\ T2 : 2y_2 y = cx + (y_2^2 - \frac{3c^2}{4}) \end{cases}.$$

Igualando estas equações, tem-se

$$\begin{cases} y_2 = b - y_1 \\ y_1^2 - b^2 + \frac{c^2}{4} = -y_2^2 + \frac{3c^2}{4} \end{cases} \Rightarrow y_1^2 - by_1 - \frac{c^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + c^2}}{2}.$$

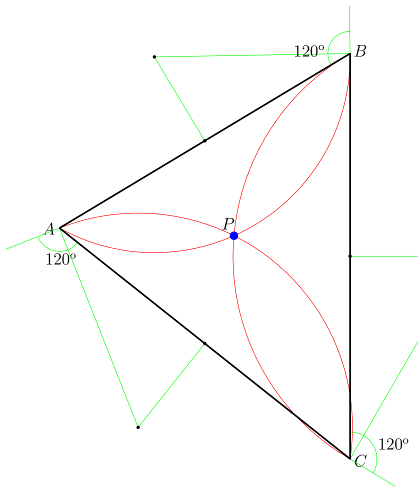
Substituindo as soluções para y_1 na equação de $T1$ e considerando $c = b\sqrt{2}$, tem-se a equação geral das tangentes comuns:

$$T : y = -(1 \pm \sqrt{3})\frac{\sqrt{2}}{2}x + (2 \pm \sqrt{3})\frac{b}{2}.$$

Multiplicando os coeficientes angulares das duas tangentes, obtém-se o produto -1, indicando que as duas tangentes são perpendiculares. Além disto, usando $x = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}b$, tem-se $y = \frac{b}{2}$ para as duas tangentes, indicando que ambas passam pelo ponto médio de BF.

IME 1970/1971 - Desenho

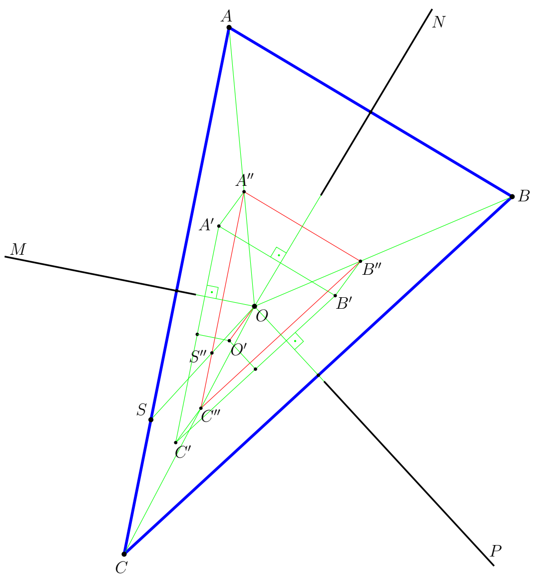
IME 1970/1971, Questão 1, Item 1 [valor 0,5]: Dado o triângulo ABC, ache no seu interior um ponto tal que a soma das distâncias aos três vértices seja mínima.



IME 1970/1971, Questão 1, Item 1: Solução.

Construção: (i) Trace os arcos-capazes do ângulo de 120º relativos a cada lado do triângulo dado, cuja interseção é o ponto P desejado.
Justificativa: Ver [**?**], pp. 430–434.
sln: Este ponto é chamado de *ponto de Fermat*, que foi quem primeiro teria proposto tal problema. Em [**?**], porém, este problema é atribuído a Steiner.

IME 1970/1971, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]: As retas M, N e P são as mediatrizes de um triângulo. O ponto S está sobre um dos lados. Construa o triângulo.



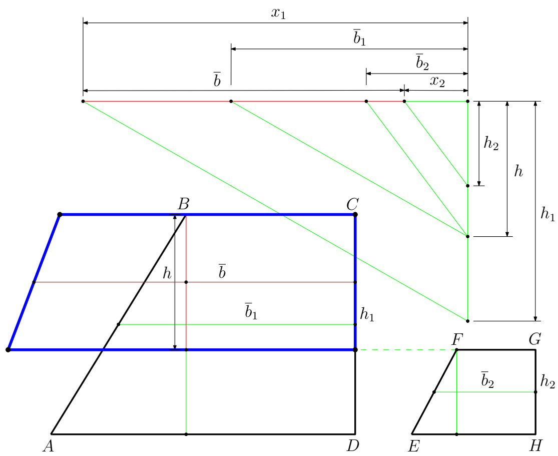
IME 1970/1971, Questão 1, Item 2: Solução.

Construção: (i) Prolongue as mediatrizes M, N e P, cuja interseção é o circuncentro O do triângulo desejado; (ii) Trace uma reta perpendicular qualquer para cada mediatriz dada, cujas interseções duas-a-duas determinam o triângulo auxiliar $\Delta A'B'C'$; (iii) Determine o circuncentro O' do triângulo $\Delta A'B'C'$, ponto de encontro de suas mediatrizes ([**?**], Exercício 1.3); (iv) Aplique uma translação $O'O$ no triângulo $\Delta A'B'C'$, determinando o triângulo $\Delta A''B''C''$, cujo circuncentro é O; (v) Trace o segmento OS, cuja interseção com o triângulo $\Delta A''B''C''$ é o ponto S''; (vi) Aplique uma homotetia, de centro O e razão $\frac{OS}{OS''}$, no triângulo $\Delta A''B''C''$, determinando o triângulo desejado ΔABC.
Justificativa: Os lados dos triângulos $\Delta A'B'C'$ e ΔABC são ortogonais às respectivas mediatrizes M, N e P dadas. Assim, os triângulos $\Delta A''B''C''$ (obtido pela translação $O'O$ do triângulo $\Delta A'B'C'$) e ΔABC possuem os mesmos ângulos internos, os respectivos lados paralelos e o mesmo circuncentro O. Logo, o triângulo ΔABC pode ser obtido por uma transformação de homotetia, de centro O, do triângulo $\Delta A''B''C''$. A razão de homotetia é determinada para que o ponto S pertença ao triângulo ΔABC desejado.

IME 1970/1971, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]: Construa um trapézio retângulo que satisfaça as seguintes condições:

(i) Altura igual à diferença das alturas dos trapézios $ABCD$ e $EFGH$.

(ii) Área igual à diferença das áreas dos trapézios $ABCD$ e $EFGH$.



IME 1970/1971, Questão 1, Item 3: Solução.

Construção: (i) Determine a quarta proporcional $h : \bar{b}_1 = h_1 : x_1$; (ii) Determine a quarta proporcional $h : \bar{b}_2 = h_2 : x_2$; (iii) Trace um trapézio de altura $h = (h_1 - h_2)$ e base média $\bar{b} = (x_1 - x_2)$.
Justificativa: Pela relação das áreas, tem-se

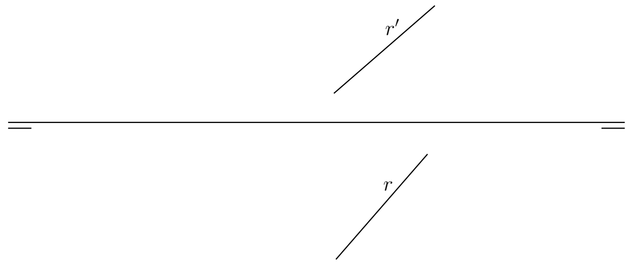
$$\frac{h\bar{b}}{2} = \frac{h_1\bar{b}_1}{2} - \frac{h_2\bar{b}_2}{2} \Rightarrow \bar{b} = \frac{h_1\bar{b}_1 - h_2\bar{b}_2}{h_1 - h_2}$$

sln: Existem infinitas soluções que satisfazem as condições do problema.

IME 1970/1971, Questão 2, Item 1 [valor 1,0]: Determine os traços dos planos (α) e (β), sabendo que:

(i) Os traços de mesmo nome são perpendiculares entre si;

(ii) (r) é a reta interseção de (α) e (β).



IME 1970/1971, Questão 2, Item 1.

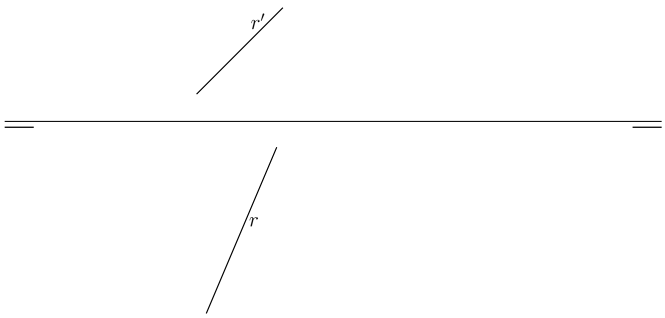
IME 1970/1971, Questão 2, Item 2 [valor 1,0]: Trace uma reta (s) do 1^o diedro, que satisfaça as seguintes condições:

(i) Encontre a reta (r) dada;

(ii) Diste 3 cm da linha de terra;

(iii) Faça ângulos de 30^o com os planos de projeção;

(iv) O traço vertical da reta (s) tenha maior abscissa que o traço horizontal.



IME 1970/1971, Questão 2, Item 2.

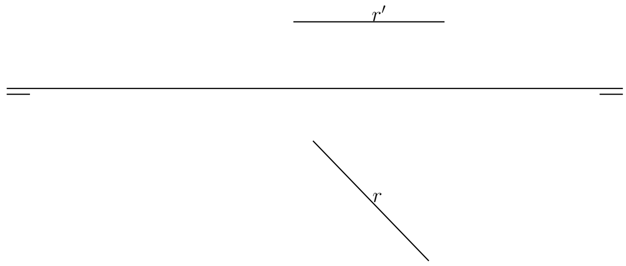
IME 1970/1971, Questão 2, Item 3 [valor 1,0]: Determine os traços dos planos (α) e (β) sabendo que:

(i) (r) é a reta interseção dos dois planos;

(ii) O traço vertical de (α) faz um ângulo de 45^o com o traço vertical de (β);

(iii) O traço horizontal de (α) dista 3 cm do traço horizontal de (β);

(iv) As interseções de (α) e (β) com a linha de terra têm abscissas menores que o traço da reta (r).



IME 1970/1971, Questão 2, Item 3.

IME 1970/1971, Questão 2, Item 4 [valor 1,0]: Dê as projeções de segmento de uma reta (s) que satisfaça as seguintes condições:

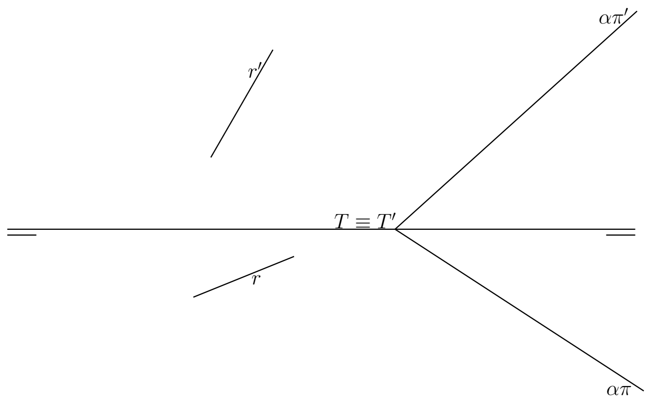
(i) Seja paralelo ao plano (α);

(ii) Faça um ângulo de 45^o com o plano horizontal;

(iii) Seja o maior segmento contido no 1^o diedro;

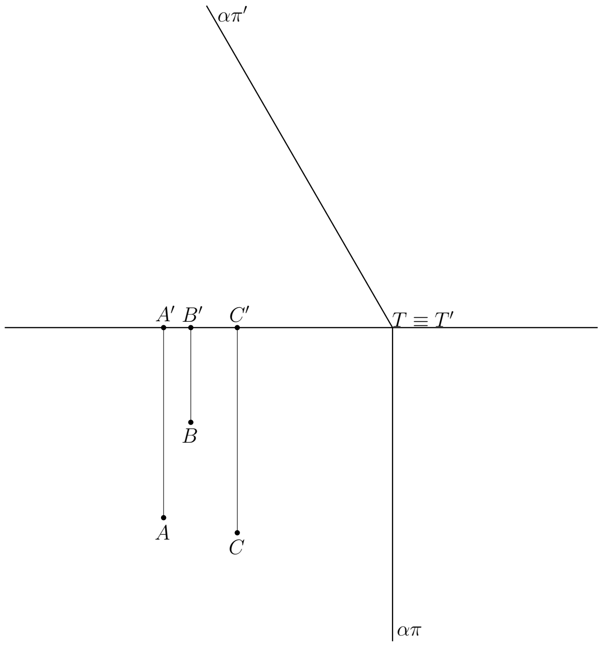
(iv) Tenha seu meio sobre a reta (r);

(v) Tenha a abscissa do traço horizontal maior que a do traço vertical.



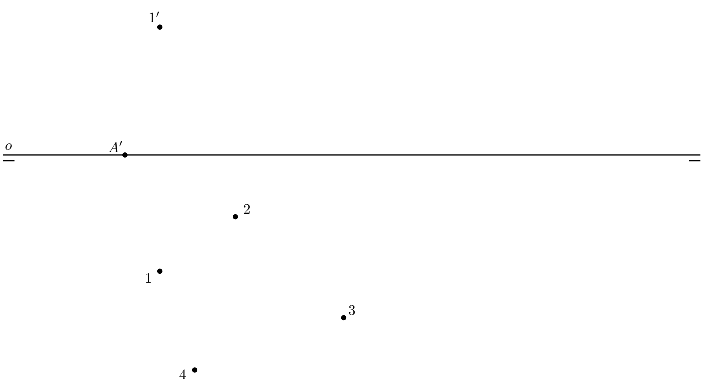
IME 1970/1971, Questão 2, Item 4.

IME 1970/1971, Questão 2, Item 5 [valor 1,0]: Determine o ponto (O), do 1º diedro, equidistante dos pontos (A), (B), (C) e do plano (α).



IME 1970/1971, Questão 2, Item 5.

IME 1970/1971, Questão 3, Item 1 [valor 1,0]: Represente as projeções da pirâmide regular $(V)-(A)(B)(C)(D)$, no 1º diedro, apoiada pela base no plano horizontal de projeção. Determine as projeções e a verdadeira grandeza da seção feita pelo plano (α), indicando os seus traços. Dados: 1, 2, 3, 4 projeções horizontais dos vértices da seção; A' e $1'$ pertencentes à mesma aresta.

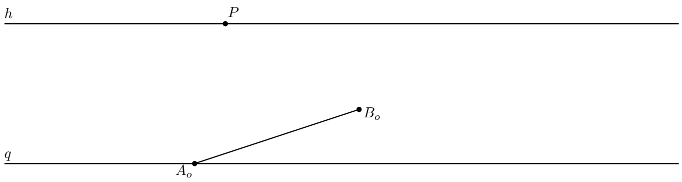


IME 1970/1971, Questão 3, Item 1.

IME 1970/1971, Questão 3, Item 2 [valor 0,5]: Faça a perspectiva do cubo apoiado por uma face no plano geometral. Dados:

- h - linha do horizonte;
- q - traço do quadro;
- p - ponto principal;
- A_oB_o - aresta no geometral, já em perspectiva, e que em verdadeira grandeza faz 30º com o traço do quadro;
- A_o pertence à aresta vertical mais próxima do observador.

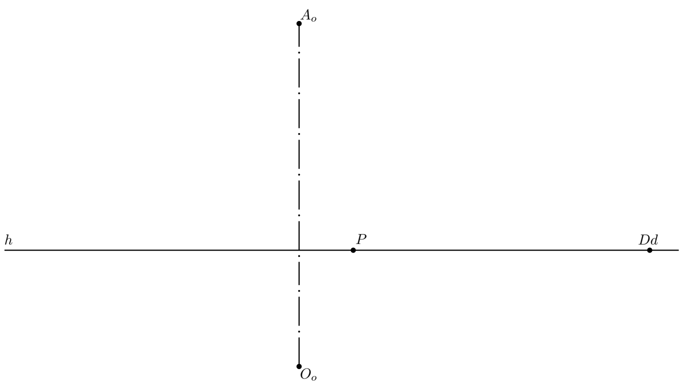
Observação: Indique a visibilidade das arestas.



IME 1970/1971, Questão 3, Item 2.

IME 1970/1971, Questão 3, Item 3 [valor 1,0]: Faça a perspectiva do cone de revolução com a base apoiada no plano geometral. Dados:

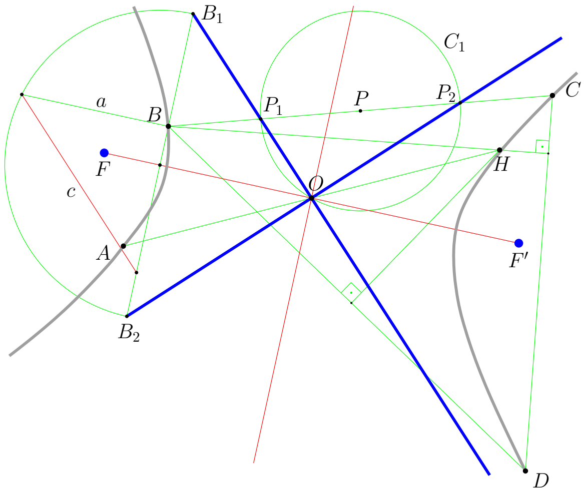
- h - linha do horizonte;
- p - ponto principal;
- Dd - ponto de distância da direita;
- O_oA_o - altura do cone, em perspectiva;
- O raio da base do cone é igual a $\frac{1}{3}$ da altura.



IME 1970/1971, Questão 3, Item 3.

IME 1969/1970 - Desenho

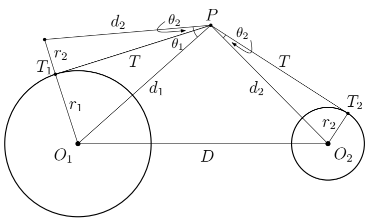
IME 1969/1970, Questão 1, Item 1 [valor 1,5]: O quadrilátero $ABCD$ inscritível tem os vértices A e B num dos ramos de uma hipérbole equilátera e os vértices C e D no outro ramo da hipérbole. Ache as assíntotas e focos da hipérbole.



IME 1969/1970, Questão 1, Item 1.

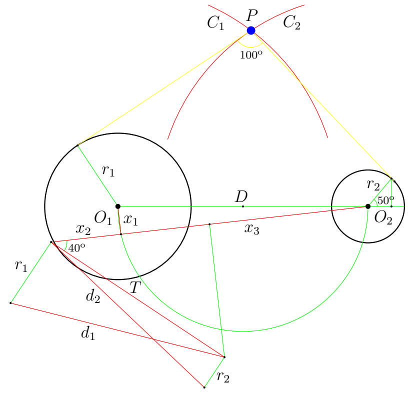
Construção (fornecida por Nikolaos e Bernard Gilbert, via Luís Lopes): (i) Determine o ortocentro H do triângulo ΔBCD; (ii) Determine o ponto médio O de HA, centro da hipérbole desejada; (iii) Sendo P o ponto médio de BC, trace $C_1 \equiv (P, PO)$, cujas interseções com BC são os pontos P_1 e P_2 tais que OP_1 e OP_2 são as assíntotas, cujas bissetrizes são os eixos da hipérbole; (iv) Trace uma perpendicular ao eixo transverso por B, determinando B_1 e B_2 sobre as assíntotas, de modo que $c = a\sqrt{2} = \sqrt{2(BB_1 \times BB_2)} = OF = OF'$, o que permite determinar os focos F e F'.

IME 1969/1970, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]: Os pontos O_1 e O_2 são os centros de duas circunferências de raios 2 cm e 1 cm respectivamente. Ache um ponto tal que as tangentes mais inclinadas, traçadas às circunferências, sejam iguais e formem um ângulo de 100°.



IME 1969/1970, Questão 1, Item 2: Análise algébrica.

Construção (Algébrica): (i) Determine $x_1 = (r_1 - r_2)\text{sen}50^\circ = r_2\text{sen}50^\circ$ e $x_2 = (r_1 + r_2)\cos 50^\circ = 3r_2 \cos 50^\circ$; (ii) Construa o triângulo retângulo de hipotenusa D e cateto x_1, determinando o outro cateto x_3; (iii) Construa o triângulo retângulo de cateto $\frac{x_2+x_3}{2}$ e ângulo adjacente 40°, determinando a hipotenusa T; (iv) Construa o triângulo retângulo de catetos T e r_1, determinando a hipotenusa d_1; (v) Construa o triângulo retângulo de catetos T e r_2, determinando a hipotenusa d_2; (vi) Trace os círculos $C_1 \equiv (O_1, d_1)$ e $C_2 \equiv (O_2, d_2)$, cuja interseção é o ponto P desejado.



IME 1969/1970, Questão 1, Item 2.

Justificativa (Algébrica): Sejam P a solução do problema, T_1 e T_2 os pontos de tangência por P aos círculos de centros O_1 e O_2, respectivamente. Sejam as distâncias $D = O_1O_2$, $T = PT_1 = PT_2$, $d_1 = PO_1$ e $d_2 = PO_2$. Justapondo os triângulos ΔPO_1T_1 e ΔPO_2T_2, têm-se, pela lei dos cossenos, que

$$\begin{cases} (r_1 + r_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ D^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos(100^\circ - (\theta_1 + \theta_2)) \end{cases}$$

Da primeira equação,

$$r_1^2+2r_1r_2+r_2^2 = (T^2+r_1^2)+(T^2+r_2^2)-2d_1d_2\cos(\theta_1+\theta_2)$$

de modo que

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \frac{T^2-r_1r_2}{d_1d_2} \Rightarrow \text{sen}(\theta_1+\theta_2) = \frac{T(r_1+r_2)}{d_1d_2}$$

Com isto, da segunda equação do sistema, tem-se

$$\begin{aligned} D^2 &= d_1^2+d_2^2-2d_1d_2[\cos(\theta_1+\theta_2)\cos 100^\circ + \text{sen}(\theta_1+\theta_2)\,\text{sen}100^\circ] \\ &= d_1^2+d_2^2-2\left[(T^2-r_1r_2)\cos 100^\circ + T(r_1+r_2)\,\text{sen}100^\circ\right] \end{aligned}$$

de modo que o comprimento T das tangentes por P é solução de

$$\begin{aligned} &2T^2(1-\cos 100^\circ)-2T(r_1+r_2)\,\text{sen}100^\circ \\ &+ (r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos 100^\circ)-D^2 = 0 \end{aligned}$$

Assim,

$$T = \frac{2(r_1+r_2)\text{sen}100^\circ \pm \sqrt{\Delta}}{4(1-\cos 100^\circ)} = \frac{4(r_1+r_2)\text{sen}50^\circ\cos 50^\circ \pm \sqrt{\Delta}}{8\text{sen}^2 50^\circ}$$

pois $\text{sen}100^\circ = 2\text{sen}50^\circ\cos 50^\circ$ e $(1-\cos 100^\circ) = 2\text{sen}^2 50^\circ$, com

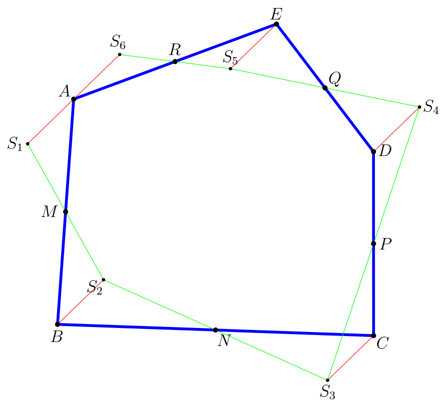
$$\begin{aligned} \Delta &= 4(r_1+r_2)^2\text{sen}^2 100^\circ \\ &- 8(1-\cos 100^\circ)(r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos 100^\circ - D^2) \\ &= 4(r_1+r_2)^2 - 4(r_1+r_2)^2\cos^2 100^\circ - 8(r_1^2+r_2^2) \\ &- 16r_1r_2\cos 100^\circ + 8(r_1^2+r_2^2)\cos 100^\circ \\ &+ 16r_1r_2\cos^2 100^\circ + 8D^2(1-\cos 100^\circ) \\ &= -4(r_1-r_2)^2+8(r_1-r_2)^2\cos 100^\circ \\ &- 4(r_1-r_2)^2\cos^2 100^\circ + 8D^2(1-\cos 100^\circ) \\ &= -4(r_1-r_2)^2(1-\cos 100^\circ)^2 + 8D^2(1-\cos 100^\circ) \\ &= 16\text{sen}^2 50^\circ[-(r_1-r_2)^2\text{sen}^2 50^\circ + D^2] \end{aligned}$$

Logo,

$$T = \frac{(r_1+r_2)\cos 50^\circ \pm \sqrt{-(r_1-r_2)^2\text{sen}^2 50^\circ + D^2}}{2\text{sen}50^\circ}$$

IME 1969/1970, Questão 1, Item 3 [valor 0,5]: Os pontos M, N, P, Q e R são os pontos médios dos lados de um pentágono qualquer. Ache o pentágono.

Construção I: Ver [?], Exercício 5.59.

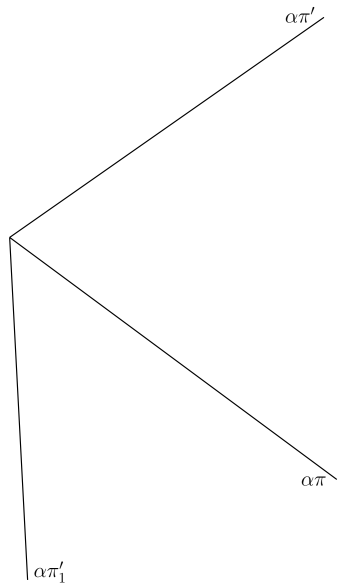


IME 1969/1970, Questão 1, Item 3: Solução II [?].

Construção II [?]: (i) Reflita um ponto S_1 qualquer pelos pontos M, N, P, Q e R dados, gerando os pontos S_2, S_3, S_4, S_5 e S_6, em seqüência; (ii) Determine o vértice A, ponto médio de S_1S_6; (iii) Reflita o ponto A pelos pontos M, N, P, Q e R dados, gerando os demais vértices B, C, D e E do pentágono desejado.

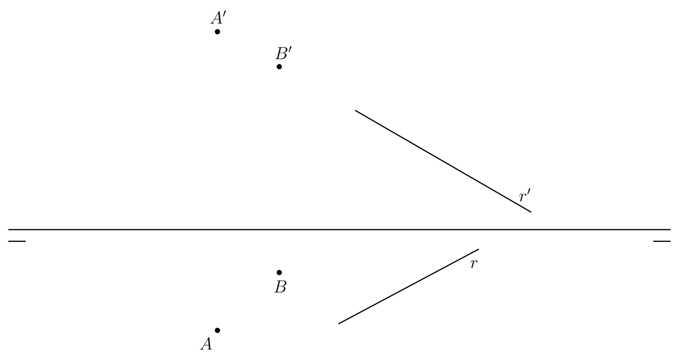
Justificativa II [?]: Os pontos S_2 e B são simétricos de S_1 e A, respectivamente, em relação ao ponto M. Logo, o segmento S_2B é paralelo e de mesmo tamanho que o segmento S_1A. Estendendo o raciocínio, o mesmo pode ser concluído para todos os segmentos S_1A, S_2B, S_3C, S_4D, S_5E e S_6A, de modo que o vértice A é ponto médio de S_1S_6.

IME 1969/1970, Questão 2, Item 1 [valor 0,5]: Dados o plano (α) e seu traço vertical rebatido $(\alpha\pi'_1)$ sobre o plano horizontal de projeção, determine a linha de terra.



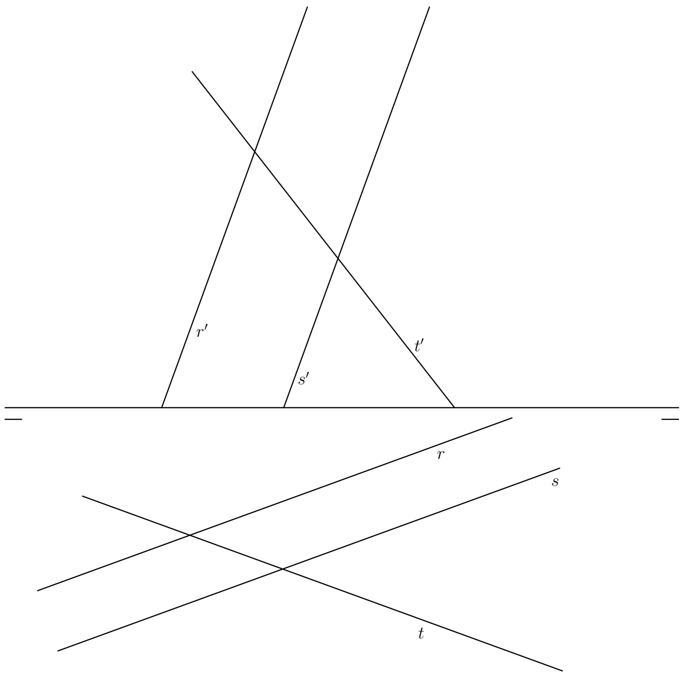
IME 1969/1970, Questão 2, Item 1.

IME 1969/1970, Questão 2, Item 2 [valor 1,0]: Dados os pontos (A) e (B) e a reta (r), trace pelo ponto (A) uma reta que se apóie em (r) e que diste 2 cm do ponto (B).



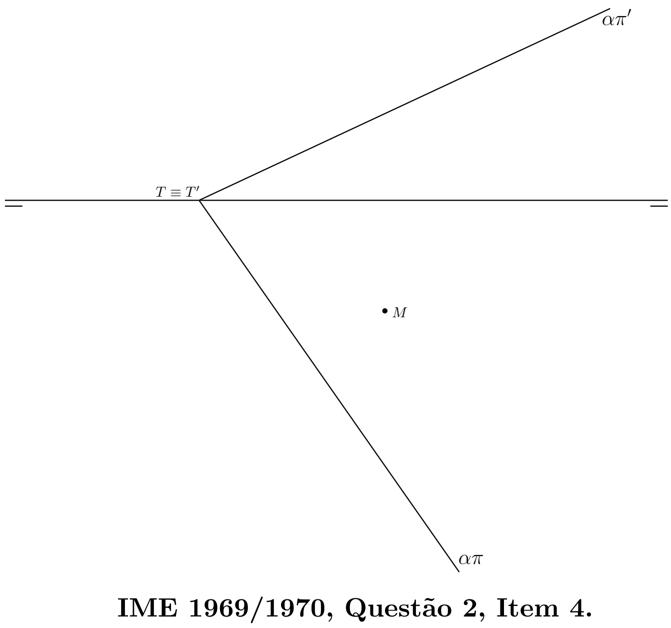
IME 1969/1970, Questão 2, Item 2.

IME 1969/1970, Questão 2, Item 3 [valor 1,0]: Dadas as retas (r), (s) e (t), sendo as duas primeiras paralelas, determine o traço do plano horizontal de menor cota que corta estas três retas em três pontos, vértices de um triângulo retângulo. O vértice de ângulo reto do triângulo está sobre a reta (t).



IME 1969/1970, Questão 2, Item 3.

IME 1969/1970, Questão 2, Item 4 [valor 1,5]: Um tetraedro regular do 1º diedro e de 4 cm de aresta possui a face $(A)(B)(C)$ no plano (α). (M) é o centro da face $(A)(B)(C)$ que possui o lado BC, de menor cota, paralelo ao plano horizontal de projeção. Determine as projeções do tetraedro e a verdadeira grandeza de sua altura.



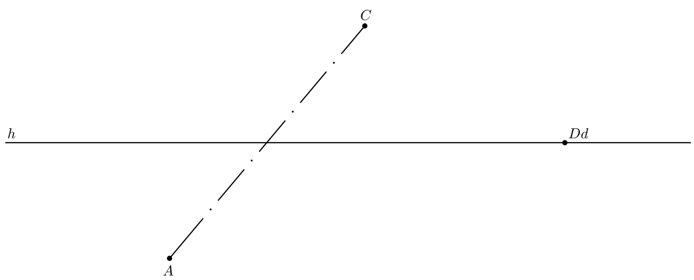
IME 1969/1970, Questão 2, Item 4.

IME 1969/1970, Questão 3, Item 1 [valor 1,5]: Represente as projeções e a verdadeira grandeza da seção feita por um plano genérico (α) em uma pirâmide de base retangular (V) – $(A)(B)(C)(D)$, apoiada pela base no plano horizontal de projeção. As arestas laterais se projetam horizontalmente segundo as diagonais da base. Dados:

- Linha de terra $\pi\pi'$; R_o ponto de origem;
- (A) vértice de menor afastamento: $(A)[7;1;0]$;
- $(A)(D) = 5$ e o seu suporte faz ângulo de -150^o com a linha de terra, sendo (D) o vértice de menor abscissa;
- $(A)(B) = 3{,}5$, sendo (B) o vértice de maior abscissa;
- $(V)[?;?;7]$;
- Plano secante (α): $\alpha\pi\hat{}\pi\pi' = -135^o$, com $\alpha\pi$ passando pela projeção horizontal de (B); $\alpha\pi'\hat{}\pi\pi' = 150^o$.

IME 1969/1970, Questão 3, Item 2 [valor 1,0]: Represente a perspectiva cônica do quadrado $ABCD$, vertical em relação ao geometral e a 45º com o quadro. Dados:

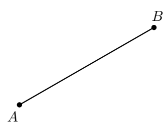
- h - linha do horizonte;
- Dd - ponto de distância da direita;
- AC - diagonal do quadrado já em perspectiva;
- A - vértice mais próximo do ponto de vista, pertencente ao lado AD no geometral.



IME 1969/1970, Questão 3, Item 2.

IME 1969/1970, Questão 3, Item 3 [valor 0,5]: Represente a perspectiva cavaleira, segundo a direção de 30º e coeficiente de redução de 1/3, de um cone de revolução apoiado pela base na face superior de um cubo assente no geometral e de aresta igual ao diâmetro da base do cone. Os dois sólidos têm eixo vertical comum. Dados:

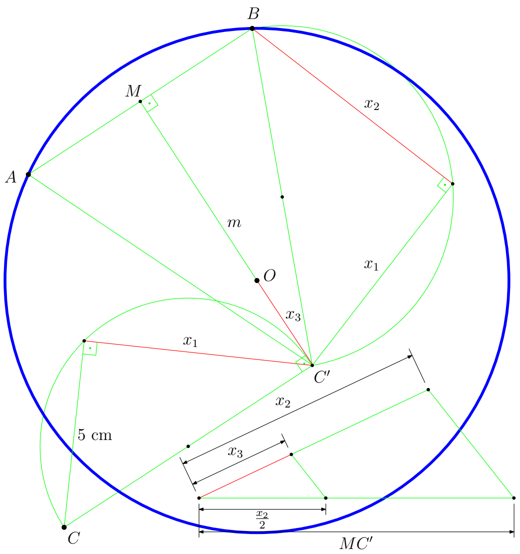
- AB diâmetro da base do cone já em perspectiva;
- Altura do cone igual a 8 cm;
- Escala do desenho = 1:1.



IME 1969/1970, Questão 3, Item 3.

IME 1968/1969 - Desenho

IME 1968/1969, Questão 1, Item 1 [valor 1,0]: Dados os três pontos A, B e C, passar por A e B uma circunferência tal que a tangente tirada por C tenha um comprimento de 5 cm.



IME 1968/1969, Questão 1, Item 1: Solução.

Construção: (i) Determine a projeção C' de C sobre a mediatriz m de AB; (ii) Trace o triângulo retângulo de hipotenusa CC' e cateto de 5 cm, determinando o outro cateto x_1; (iii) Trace o triângulo retângulo de hipotenusa BC' e cateto x_1, determinando o outro cateto x_2; (iv) Determine a quarta proporcional $MC' : x_2 = \frac{x_2}{2} : x_3$, onde M é o ponto médio de AB; (v) Trace a circunferência desejada $C_1 \equiv \mathcal{C}(O, OA)$, com O entre M e C' é tal que $OC' = x_3$.
Justificativa: Como a tangente por C mede 5 cm, tem-se

$$5^2 + R^2 = OC^2 = OC'^2 + CC'^2$$
$$\Rightarrow R^2 = OC'^2 + (CC'^2 - 5^2) = OC'^2 + x_1^2$$

Além disto, do triângulo retângulo ΔOMB, tem-se

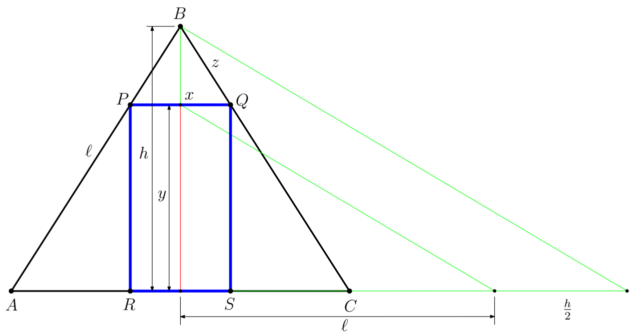
$$OM^2 + MB^2 = (MC' - OC')^2 + MB^2 = R^2$$

de modo que

$$OC' = \frac{(MC'^2 + MB^2) - x_1^2}{2MC'} = \frac{BC'^2 - x_1^2}{2MC'} = \frac{x_2^2}{2MC'}$$

IME 1968/1969, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]: No triângulo isósceles ABC, inscrever um retângulo cujo perímetro seja duplo do perímetro do triângulo isósceles que fica na parte superior do retângulo.

Construção: (i) Determine a quarta proporcional $\frac{h+2\ell}{2} : h = \ell : y$, onde ℓ e h são o lado e a altura do triângulo isósceles, respectivamente; (ii) Trace uma paralela à base do triângulo a uma distância y da mesma, cujas interseções com o triângulo determinam os vértices P e Q; (iii) Trace por A e B perpendiculares à base do triângulo, cujas interseções com a mesma determinam os outros dois vértices R e S do retângulo desejado.

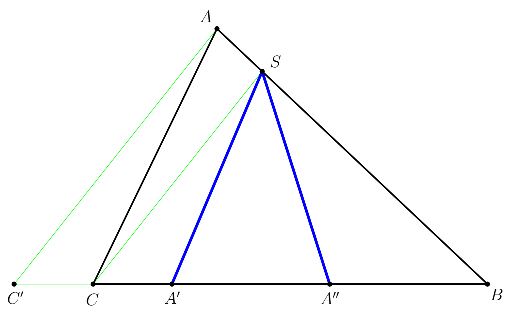


IME 1968/1969, Questão 1, Item 2: Solução.

Justificativa: Sejam x e y a base e a altura do retângulo desejado, respectivamente. Seja z o lado do triângulo isósceles, de perímetro $(2p)_T$, acima do retângulo desejado, de perímetro $(2p)_R$. Por semelhança de triângulos e para que $(2p)_R = 2(2p)_T$, têm-se

$$\begin{cases} \frac{\ell}{h} = \frac{z}{h-y} \\ 2x + 2y = 2(2z + x) \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2\ell h}{h + 2\ell}$$

IME 1968/1969, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]: Pelo ponto comum S dividir o triângulo ABC em três áreas iguais.



IME 1968/1969, Questão 1, Item 3: Solução.

Construção: (i) Trace por A uma paralela a SC, determinando o ponto C' sobre o prolongamento de BC; (ii) Divida BC' em três partes iguais, determinando os pontos A' e A'', que devem ser unidos a S.

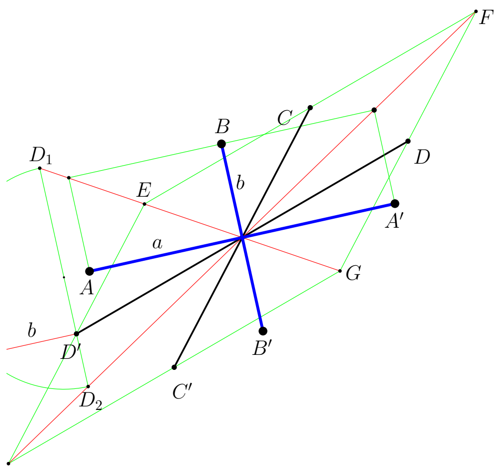
Justificativa: Como $AC' \parallel SC$, as alturas de A e C' em relação a SC são iguais. Assim, as áreas dos triângulos ΔACS e $\Delta C'CS$, que possuem a mesma base CS, são iguais, fazendo com que as áreas dos triângulos ΔACB e $\Delta SC'B$ sejam iguais. Dividindo a base $C'B$ em três partes iguais, dividimos o triângulo $\Delta SC'B$, e conseqüentemente o triângulo ΔACB, em três partes iguais.

IME 1968/1969, Questão 1, Item 4 [valor 0,5]: Determinar a direção e tamanho dos eixos de uma hipérbole de diâmetros conjugados CC' e DD'.

Construção: (i) Trace por C e C' paralelas a DD' e por D e D' paralelas a CC', determinando o paralelogramo $EFGH$, cujas diagonais EG e FH são as assíntotas da hipérbole; (ii) Trace as bissetrizes dos ângulos formados por EG e FH, determinando as direções dos eixos da hipérbole; (iii) Trace por D' uma paralela ao eixo não transverso, cujas interseções com as assíntotas D_1 e D_2 permitem determinar o comprimento deste semi-eixo $\frac{BB'}{2} = b = \sqrt{DD_1 \times DD_2}$; (iv) Trace por B uma paralela ao eixo transverso, cujas interseções com as assíntotas, quando projetadas no eixo transverso, são os extremos deste eixo.

Justificativa: Ver [?], Hipérbole, Problema 13.

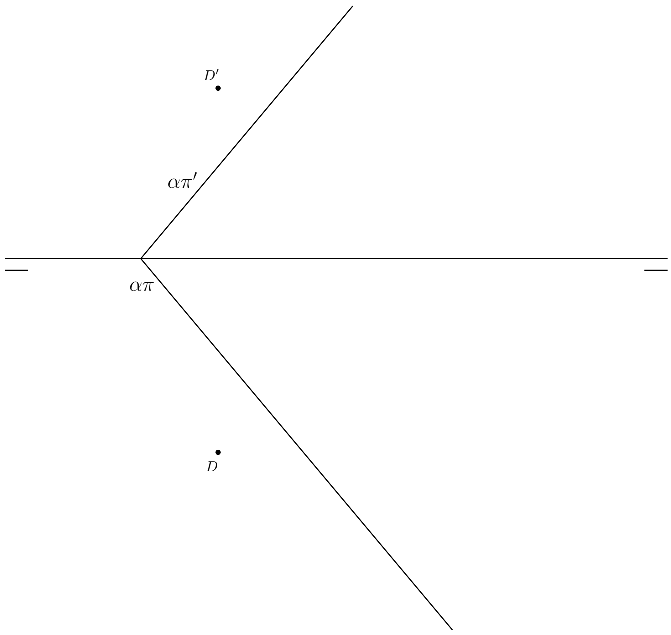
sln: Considerou-se o diâmetro transverso DD', de modo que D e D' pertencem à hipérbole.



IME 1968/1969, Questão 1, Item 4.

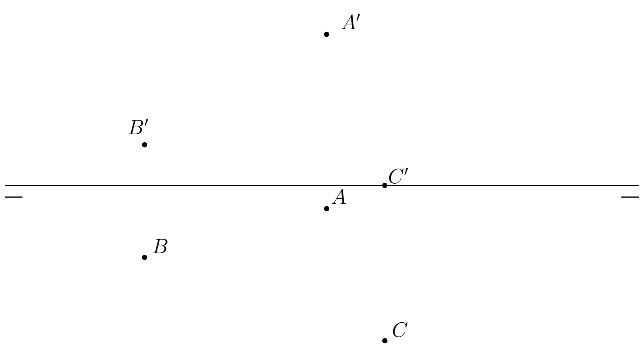
IME 1968/1969, Questão 2, Item 1 [valor 0,5]: Duas arestas paralelas $(A)(B)$ e $(C)(D)$ da mesma face de um cubo do primeiro diedro acham-se sobre os traços de um plano paralelo à linha da Terra. Este plano faz um ângulo de 30º com o plano vertical. Determinar as projeções do cubo e a verdadeira grandeza de sua diagonal empregando um método descritivo.

IME 1968/1969, Questão 2, Item 2 [valor 0,5]: Determinar as projeções de um tetraedro regular de vértice (D), sabendo-se que a face oposta a (D) está no plano (α). Esta face tem um lado paralelo ao traço $\alpha\pi$, estando o mais próximo possível deste traço.



IME 1968/1969, Questão 2, Item 2.

IME 1968/1969, Questão 2, Item 3 [valor 0,5]: Determinar as projeções da circunferência inscrita no triângulo $(A)(B)(C)$.



IME 1968/1969, Questão 2, Item 3.

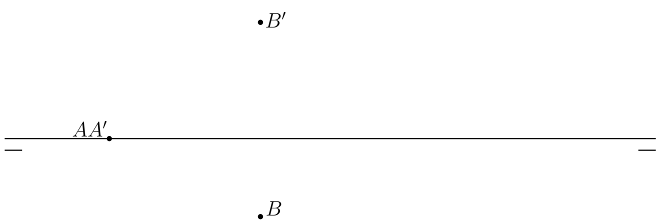
IME 1968/1969, Questão 2, Item 4 [valor 1,0]: Determinar a linha de terra. Dados:

(i) Projeções do ponto (A);

(ii) Rebatimento $(A)_1$ do ponto (A) em torno da linha de terra, sobre o plano horizontal de projeção.

IME 1968/1969, Questão 2, Item 4.

IME 1968/1969, Questão 2, Item 5 [valor 1,0]: Dado o segmento de reta $(A)(B)$ da bissetriz dos traços de um plano, determinar estes traços.



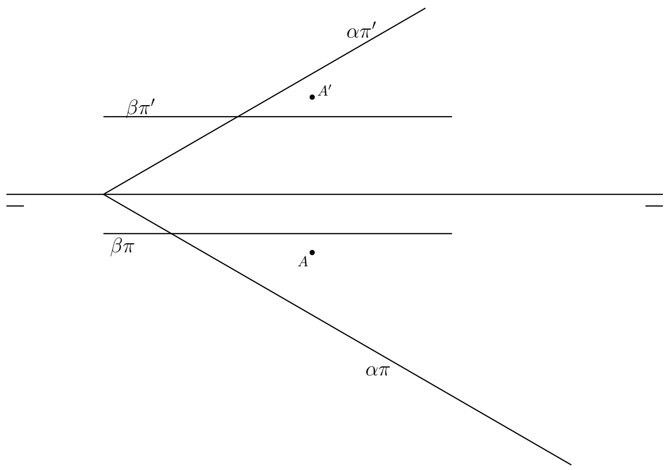
IME 1968/1969, Questão 2, Item 5.

IME 1968/1969, Questão 2, Item 6 [valor 1,5]: Sendo dados o ponto (A) e os planos (α) e (β), determine as projeções da reta que:

(i) Passe pelo ponto (A);

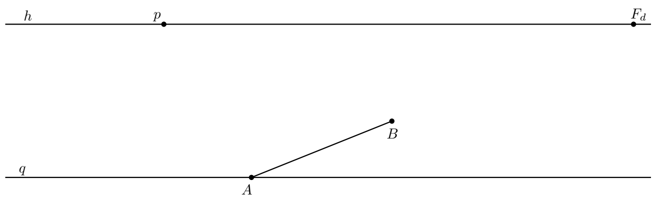
(ii) Seja ortogonal à interseção dos planos (α) e (β);

(iii) Seus traços sobre os planos dados sejam equidistantes do ponto (A).



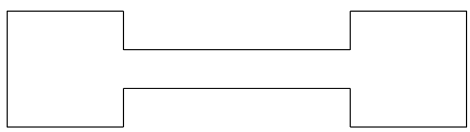
IME 1968/1969, Questão 2, Item 6.

IME 1968/1969, Questão 3, Item 1 [valor 1,0]: Construir a perspectiva de um quadrado de plano inclinado de 45° com o geometral. É dado o lado AB, no geometral e já em perspectiva. O lado CD está mais afastado do Ponto de Vista e acima do geometral. AB faz ângulo de 30° com o traço do quadro. Dados: h linha do horizonte; q traço do quadro; p ponto principal; Fd Ponto de fuga de AB.



IME 1968/1969, Questão 3, Item 1.

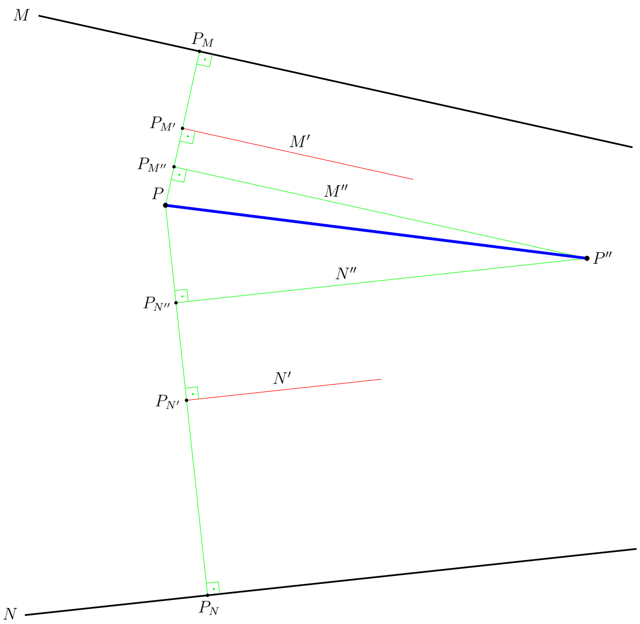
IME 1968/1969, Questão 3, Item 2 [valor 0,5]: Conhecida a projeção horizontal e a altura de um prisma reto, fazer a perspectiva cavaleira, na mesma escala, segundo a direção de 30° e redução de 1/3.



IME 1968/1969, Questão 3, Item 2.

IME 1967/1968 - Desenho

IME 1967/1968, Questão 1, Item 1 [valor 0,5]: Pelo ponto P, traçar uma reta que passe pelo ponto de concorrência das retas M e N que não podem ser prolongadas.



IME 1967/1968, Questão 1, Item 1: Solução.

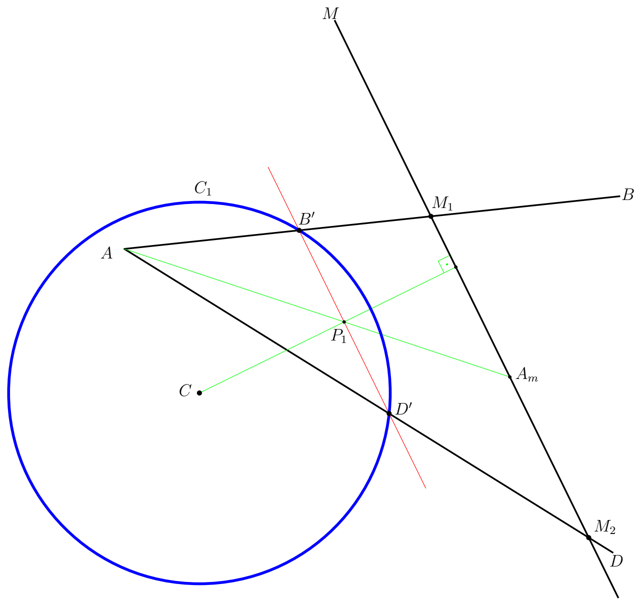
Construção: (i) Trace por P as perpendicular às retas M e N, cujas interseções com estas mesmas retas determinam, respectivamente, os pontos P_M e P_N; (ii) Trace as mediatrizes M' de PP_M e N' de PP_N, cuja interseção é o ponto P' (que não cabe na folha de resposta); (iii) Sejam $P_{M'}$ e $P_{N'}$ as projeções de P em M' e N', respectivamente. Trace as mediatrizes M'' de $PP_{M'}$ e N'' de $PP_{N'}$, cuja interseção é o ponto P''; (iv) Trace a reta PP'' desejada.

Justificativa: Seja Q o ponto de interseção das retas M e N. Como $P\hat{P_M}Q = P\hat{P_N}Q = 90^{\text{o}}$, então o quadrilátero PP_MP_NQ é inscritível num círculo, de diâmetro PQ, que é também o círculo circunscrito ao triângulo ΔPP_MP_N, cujo centro é determinado pela interseção das mediatrizes M' de PP_M e N' de PP_N. No caso, esta interseção é indeterminada. Assim, devemos repetir o procedimento usando as retas M' e N' em substituição às retas M e N, respectivamente.

IME 1967/1968, Questão 1, Item 2 [valor 0,5]: Do ponto C como centro, traçar uma circunferência que corte os lados do ângulo $B\hat{A}D$, de modo que a corda obtida seja paralela à reta M.

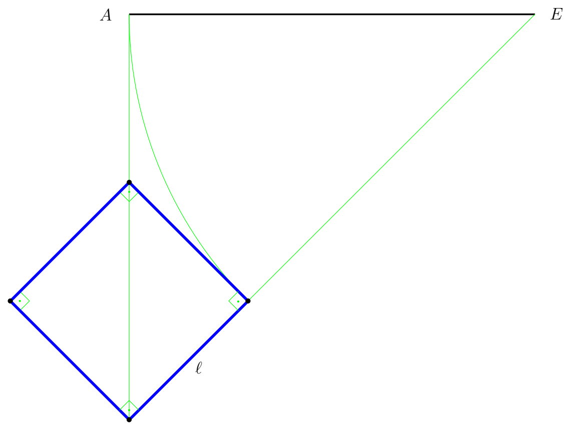
Construção: (i) Trace a mediana AA_m, onde A_m é o ponto médio de M_1M_2, que são as interseção da reta M com os lados AB e AD, respectivamente; (ii) Trace pelo ponto C uma perpendicular à reta M, cuja interseção com a mediana AA_m é o ponto P_1; (iii) Trace por P_1 uma paralela à reta M, cujas interseções com os lados AB e AD são os pontos B' e D', respectivamente; (iv) Trace a circunferência desejada $C_1 \equiv \mathcal{C}(C, CB')$.

Justificativa: Da construção acima, tem-se $B'D' \parallel M_1M_2$. Assim, pela semelhança dos triângulos $\Delta AB'D'$ e ΔAM_1M_2, como A_m é médio de M_1M_2, então P_1 é médio de $B'D'$. Além disto, como $CP_1 \perp M$, então $CP_1 \perp B'D'$, de forma que CP_1 é mediatriz de $B'D'$. Logo, B' e D' pertencem a uma mesma circunferência de centro C.



IME 1967/1968, Questão 1, Item 2: Solução.

IME 1967/1968, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]: O segmento de reta AE representa a soma da diagonal e do lado de um quadrado. Pede-se construir o quadrado.



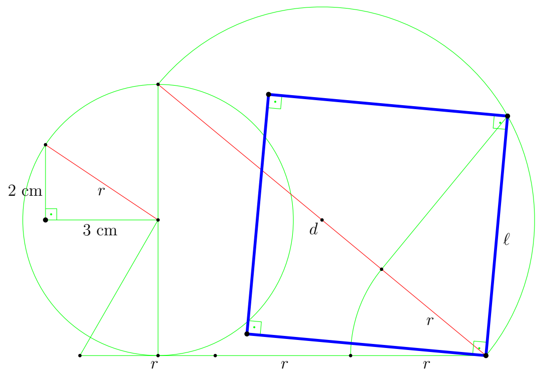
IME 1967/1968, Questão 1, Item 3: Solução.

Construção: (i) Determine $\ell = (AE\sqrt{2} - AE)$; (ii) Trace o quadrado de lado ℓ.

Justificativa: Do enunciado,

$$AE = \ell\sqrt{2} + \ell \Rightarrow \ell = AE(\sqrt{2} - 1)$$

IME 1967/1968, Questão 1, Item 4 [valor 1,0]: Construir um quadrado, equivalente a um círculo cuja área é a soma das áreas de dois círculos de raios 3 e 2 cm.

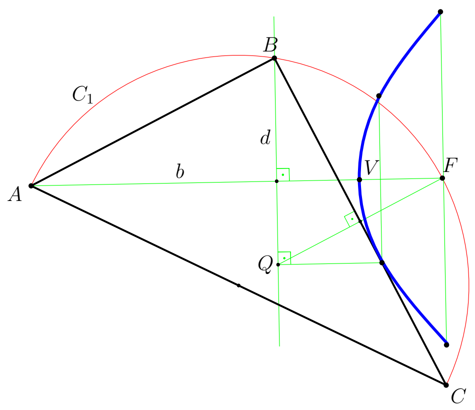


IME 1967/1968, Questão 1, Item 4: Solução.

Construção: (i) Trace um triângulo retângulo de catetos 3 e 2 cm, determinando a hipotenusa $r = \sqrt{3^2 + 2^2}$ cm; (ii) Retifique o semi-círculo de raio r, determinando a distância $d \approx \pi r$ cm; (iii) Determine a média geométrica $\ell = \sqrt{dr} \approx \sqrt{\pi r^2}$ cm^2; (iv) Trace o quadrado de lado ℓ.
Justificativa: Sendo $r = \sqrt{3^2 + 2^2}$ cm, tem-se

$$\ell^2 = \pi r^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{\pi r r}$$

IME 1967/1968, Questão 1, Item 5 [valor 1,0]: O triângulo ABC, retângulo em B, é formado por três tangentes a uma parábola. O foco da parábola é um ponto da bissetriz interna do ângulo A. Pede-se determinar 5 pontos de passagem da parábola.

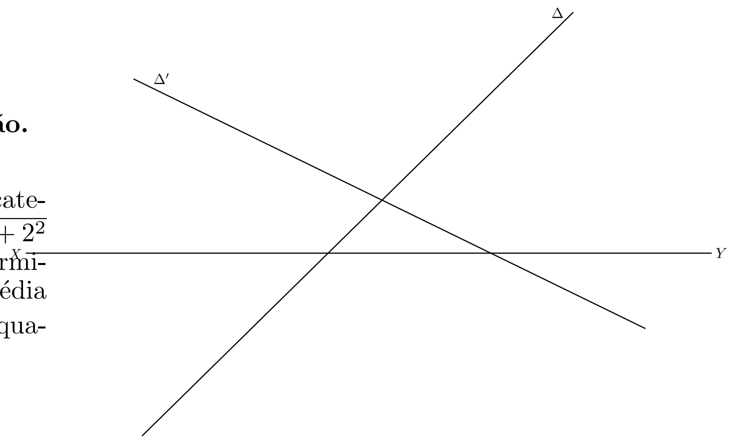


IME 1967/1968, Questão 1, Item 5: Solução.

Construção: (i) Trace o círculo C_1 circunscrito ao triângulo ΔABC; (ii) Trace a bissetriz b de $B\hat{A}C$, cuja interseção com C_1 é o foco F da parábola; (iii) Trace pelo vértice B uma perpendicular a b, determinando a diretriz d da parábola; (iv) Trace perpendiculares à diretriz por pontos Q quaisquer de d e determine as interseções destas perpendiculares com as respectivas mediatrizes de QF, obtendo os pontos desejados da parábola.

Justificativa: O foco F pertence ao círculo circunscrito ao triângulo formado pelas interseções das tangentes duas a duas ([**?**], Teorema 9, Parábola). Como F pertence à bissetriz b de $B\hat{A}C$, lugar geométrico dos pontos equidistantes às retas suportes de AB e AC, tangentes à parábola, então b é o próprio eixo de simetria da parábola. A diretriz d é a perpendicular a b passando pelo vértice B, encontro de duas tangentes perpendiculares ([**?**], Teorema 7, Parábola). Conhecendo-se d e F, os pontos da parábola são facilmente determinados.

IME 1967/1968, Questão 2, Item 1 [valor 0,5]: Determinar a Verdadeira Grandeza do segmento da reta (Δ), limitado pelos planos bissetores.

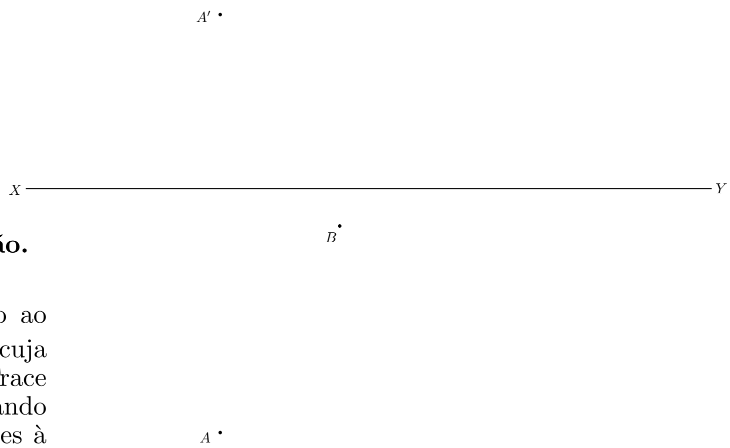


IME 1967/1968, Questão 2, Item 1.

IME 1967/1968, Questão 2, Item 2 [valor 0,5]: Os pontos (A), (B) e (C) pertencem a uma mesma reta. Sabe-se que o ponto (C) está no terceiro diedro e tem 0,8 cm de cota e 6,5 cm de afastamento. Pedem-se:

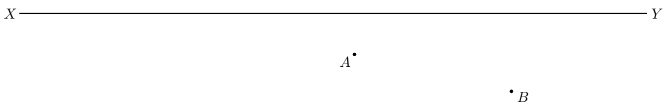
(a) Determinar os traços do plano QaQ' perpendicular à reta $(A)(C)$ e que a intercepta no ponto (B);

(b) Determinar a verdadeira grandeza do ângulo formado pelos traços do plano QaQ'.



IME 1967/1968, Questão 2, Item 2.

IME 1967/1968, Questão 2, Item 3 [valor 1,0]: Completar as projeções do trapézio retângulo $(A)(B)(C)(D)$ do 1º diedro, sabendo-se que a soma das suas bases é igual a 4 cm e que o seu lado não paralelo maior, $(A)(B)$, pertence ao plano horizontal de projeção e o menor, $(C)(D)$, ao plano vertical de projeção.

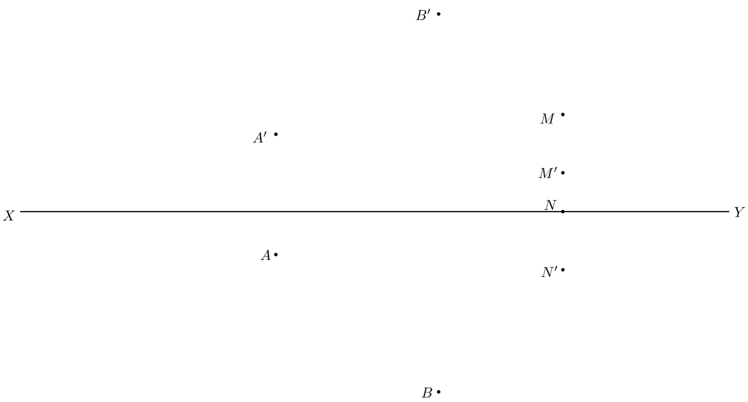


IME 1967/1968, Questão 2, Item 3.

IME 1967/1968, Questão 2, Item 4 [valor 1,0]: Dadas as retas $(A)(B)$ e $(M)(N)$, determinar:

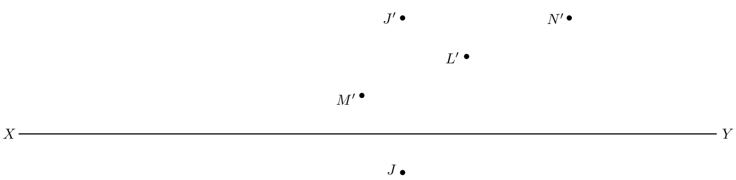
(a) Os traços do plano PaP' definido pela reta $(A)(B)$ e pelo ponto (D) de cota conhecida e pertencente à reta $(M)(N)$;

(b) O ponto (C), sobre a reta $(A)(B)$, que tem o afastamento três vezes maior que a cota.



IME 1967/1968, Questão 2, Item 4.

IME 1967/1968, Questão 2, Item 5 [valor 1,0]: A reta $(J)(L)$ mede 4 cm e é perpendicular a $(M)(N)$. O ponto (L) é a interseção das duas retas e se acha no 1º diedro. Completar as projeções das referidas retas.



IME 1967/1968, Questão 2, Item 5.

IME 1966/1967 - Desenho

IME 1966/1967, Questão 1 [valor 2,0]: Uma pirâmide reta de base pentagonal regular assentada no plano objetivo é vista por um observador colocado a 6 metros de altura. A pirâmide tem 5 metros de altura. O raio do círculo circunscrito à base tem 3 metros. O centro S deste círculo é $(8\text{m}; 4\text{m})$. O lado da base mais próximo ao quadro é paralelo à linha de terra. O ponto de vista está afastado 10 metros do quadro. O ponto principal dista 10 metros da origem. Pede-se a perspectiva cônica na escala $1:100$ do tronco de pirâmide resultante da interseção de um plano horizontal com a pirâmide a 3 metros de sua base.

IME 1966/1967, Questão 2 [valor 3,0]: A reta Δ e o ponto F são respectivamente uma tangente e o foco direito de uma elipse com 80 mm de distância focal e 0,8 de excentricidade. Pedem-se:

(a) Determinar os vértices, o outro foco e o centro da elipse;

(b) Traçar o suporte Δ_1 do diâmetro conjugado da direção Δ;

(c) Traçar a circunferência do círculo equivalente à elipse e que a tangencie na extremidade superior da corda focal mínima relativa ao foco direito.

Construção: (a.i) Determine o ponto F_1, simétrico de F em relação à reta Δ; (a.ii) Trace $C_1 \equiv (F, 8\text{ cm})$ e $C_2 \equiv (F_1, 10\text{ cm})$, cuja interseção à esquerda de F é o outro foco F'; (a.iii) Determine o ponto O, médio de FF' e marque $OA = OA' = 5$ cm sobre o prolongamento de FF' e $OB = OB' = 3$ cm sobre a perpendicular por O a FF'. (b.i) Trace $F'F_1$, cuja interseção com a tangente Δ é o ponto de tangência T; (b.ii) A direção do diâmetro conjugado Δ_1 de Δ é determinada por TO. (c.i) Determine a quarta proporcional $a : b = b : x$ e marque $FM = x$, perpendicular a FF' por F; (c.ii) Trace $C_3 \equiv (F', 10\text{ cm})$, cuja interseção com o prolongamento de $F'M$ é o ponto M'; (c.iii) Trace a mediatriz t de $M'F$, determinando a tangente à elipse no ponto M; (c.iv) Trace a perpendicular à reta t por M, e marque a distância $MO' = r = \sqrt{ab}$; (c.v) Trace a circunferência desejada $C_4 \equiv (O', r)$.

Justificativa: (a) Pelos dados do problema, têm-se

$$\left\{\begin{array}{l} 2c = 8\text{ cm} \\ \frac{c}{a} = 0{,}8 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 5\text{ cm} \\ b = 3\text{ cm} \\ c = 4\text{ cm} \end{array}\right. .$$

A tangente Δ é mediatriz de FF_1, onde F_1 pertence ao círculo diretor de centro F' e raio $2a = 10$ cm. Assim, F_1 é simétrico de F em relação à tangente Δ e F' pode ser determinado pelas relações

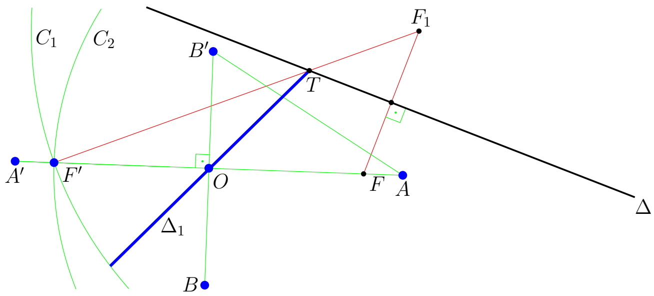
$$\left\{\begin{array}{l} FF' = 2c = 8\text{ cm} \\ F_1F' = 2a = 10\text{ cm} \end{array}\right. .$$

Os demais pontos podem ser determinados a partir do centro O da elipse, médio de FF', usando as medidas a e b determinadas acima.

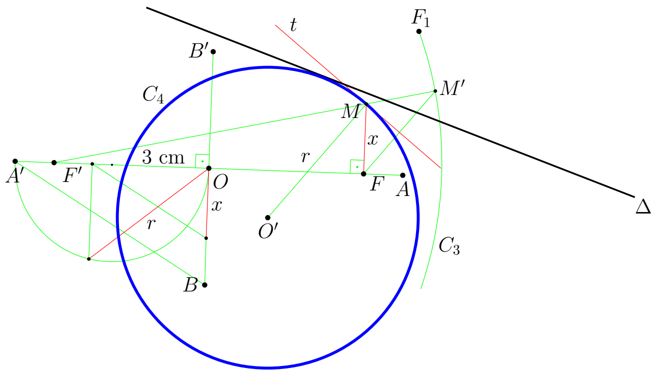
(b) Como Δ é mediatriz de FF_1, tem-se que

$$2a = F'F_1 = F'T + TF_1 = F'T + TF.$$

Assim, T pertence à elipse, sendo de fato o ponto de contato da tangente Δ, caso-limite das secantes de mesma direção. Neste limite, T pode ser visto como o *ponto médio* das interseções de Δ com a elipse. Traçando pelo centro O uma secante paralela à Δ, o ponto médio das interseções desta secante com a elipse, por simetria, é o próprio centro O. Assim, T e O determinam a direção dos diâmetros conjugados à direção Δ.



IME 1966/1967, Questão 2, Itens (a) e (b): Solução.



IME 1966/1967, Questão 2, item (c): Solução.

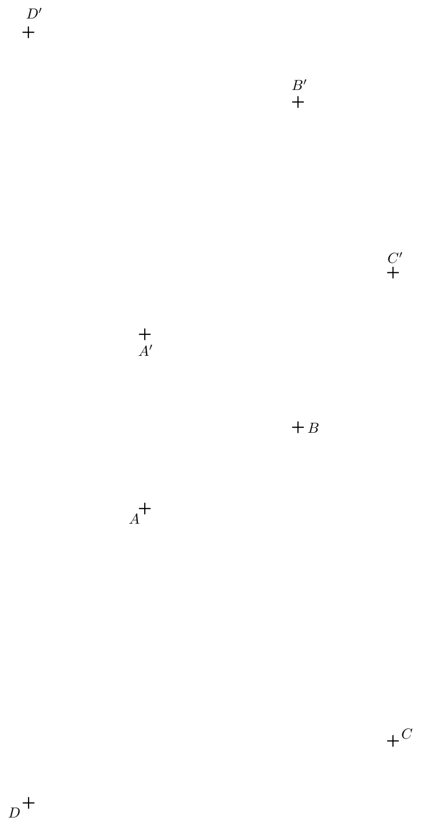
(c) A corda focal tem comprimento $FM = \frac{b^2}{a}$, sendo perpendicular a FF'. A tangente t em M é a mediatriz de $M'F$, onde M' é a interseção do prolongamento de $F'M$ com o círculo diretor $C_3 \equiv (F', 2a)$. Para que a cirunferência desejada seja tangente à elipse em M (extremo superior da corda focal), seu centro O' deve estar na perpendicular à tangente t. Igualando as áreas, tem-se que o raio da circunferência desejada é dado por $r = \sqrt{ab}$.

IME 1966/1967, Questão 3 [valor 2,0]: Um cubo $(A)(B)(C)(D)$–$(E)(F)(G)(H)$, do primeiro diedro, com a face $(A)(B)(C)(D)$ no P.H. tem a diagonal $(B)(D)$ de topo. Secciona-se o cubo pelos planos $(E)(B)(D)$, $(G)(B)(D)$, $(A)(F)(H)$ e $(C)(F)(H)$, retirando-se do corpo primitivo os sólidos que assim se vão obtendo. Pedem-se

(a) As projeções do sólido resultante após todos os seccionamentos.

(b) Desenhar as verdadeiras grandezas de cada tipo de face do sólido resultante.

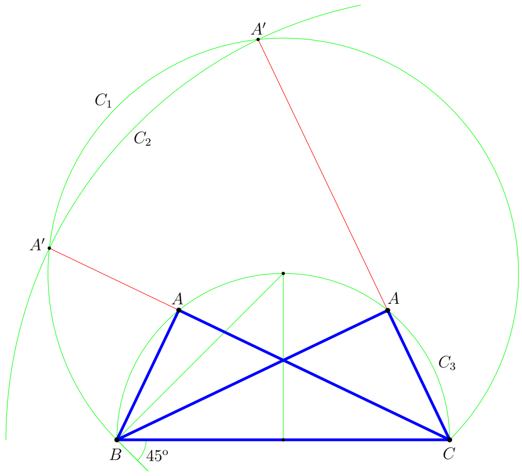
IME 1966/1967, Questão 4 [valor 3,0]: Pelos pontos médios (M) e (N) das arestas opostas $(A)(B)$ e $(C)(D)$ de um tetraedro $(A)(B)(C)(D)$ faz-se passar um plano que encontra as arestas $(B)(D)$ e $(A)(C)$ em (P) e (Q) respectivamente. Determinar as projeções do quadrilátero $(M)(P)(N)(Q)$ de área mínima. Justifique a solução.



IME 1966/1967, Questão 4.

IME 1965/1966 - Desenho

IME 1965/1966, Questão 1, Item (a): Construir um triângulo retângulo sendo dados a hipotenusa = 9 cm e a soma dos catetos = 12 cm.



IME 1965/1966, Questão 1, Item (a): Solução.

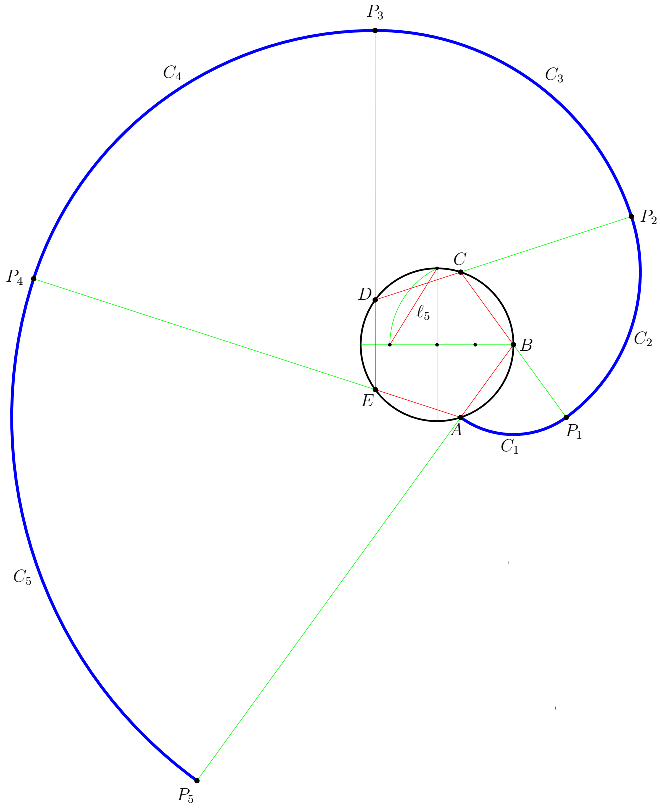
Construção: (i) Trace o arco-capaz C_1 do ângulo de 45º relativo à hipotenusa $BC = 9$ cm; (ii) Trace o círculo $C_2 \equiv \mathcal{C}(C, 12 \text{ cm})$, cuja interseção com C_1 são os pontos A'; (iii) Trace o arco-capaz C_3 do ângulo de 90º relativo à hipotenusa BC, cuja interseção com os segmentos CA' é o vértice A.
Justificativa: Da construção acima, $BA \perp A'C$ e $B\hat{A}'A = 45^o$. Logo, $A'\hat{B}A = 45^o$ e então $BA = AA'$, de forma que $(BA + AC) = (AA' + AC) = A'C = 12$ cm, como desejado.

IME 1965/1966, Questão 1, Item (b): Traçar uma falsa espiral de 5 centros, dispostos estes segundo uma circunferência de 4 cm de diâmetro. A espiral deverá ser traçada até o prolongamento do primeiro raio.

Construção: (i) Inscreva o pentágono $ABCDE$ de lado

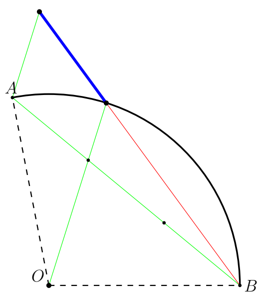
$$\ell_5 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} R$$

em uma circunferência de diâmetro $2R = 4$ cm (ver [?], Exercício 2.25) e prolongue os lados AB, BC, CD, DE e EA; (ii) Trace o arco $C_1 \equiv (B, BA) = \overset{\frown}{AP_1}$, com P_1 sobre o prolongamento de CB; (iii) Trace o arco $C_2 \equiv (C, CP_1) = \overset{\frown}{P_1P_2}$, com P_2 sobre o prolongamento de DC; (iv) Trace o arco $C_3 \equiv (D, DP_2) = \overset{\frown}{P_2P_3}$, com P_3 sobre o prolongamento de ED; (v) Trace o arco $C_4 \equiv (E, EP_3) = \overset{\frown}{P_3P_4}$, com P_4 sobre o prolongamento de AE; (vi) Trace o arco $C_5 \equiv (A, AP_4) = \overset{\frown}{P_4P_5}$, com P_5 sobre o prolongamento de BA.
Justificativa: A falsa espiral de n centros é formada por uma seqüência de arcos de circunferências, com os centros destas percorrendo os vértices de um n-ágono regular (ver [?], pp. 169–171).



IME 1965/1966, Questão 1, Item (b): Solução.

IME 1965/1966, Questão 1, Item (c): Retificar a terça parte do arco AB dado.



IME 1965/1966, Questão 1, Item (c): Solução.

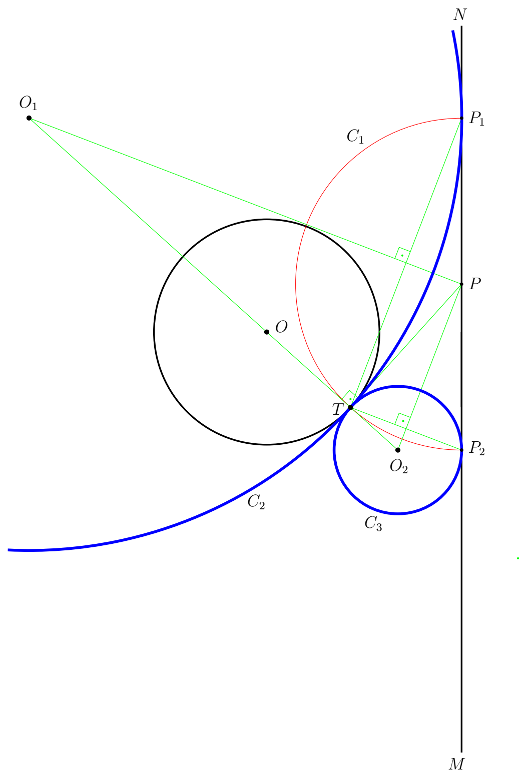
Construção: (i) Retifique o arco dado usando, por exemplo, o método de d'Ocagne ([?], pp. 63–65); (ii) Divida o arco retificado em três partes iguais.

Justificativa: A construção me parece auto-explicativa. De qualquer forma, o método de d'Ocagne é propício para a trisecção do arco retificado.

IME 1965/1966, Questão 1, Item (d): Traçar as circunferências tangentes à reta MN dada e tangentes à circunferência O, num ponto T dado sobre esta.

Construção: (i) Trace a perpendicular a OT, cuja interseção com a reta MN determina o ponto P; (ii) Trace o círculo $C_1 \equiv \mathcal{C}(P, PT)$, cujas interseções com a reta MN determinam os pontos P_1 e P_2; (iii) Trace as mediatrizes das retas TP_1 e TP_2, cujas respectivas interseções com o prolongamento da reta OT são os pontos O_1 e O_2; (iv) Trace os círculos desejados $C_2 \equiv \mathcal{C}(O_1, O_1T)$ e $C_3 \equiv \mathcal{C}(O_2, O_2T)$.

Justificativa: A reta PT é tangente comum aos círculos desejados. Logo, os centros O_1 e O_2 destes círculos são tais que $O_1T \perp PT$ e $O_2T \perp PT$, de forma que O_1 e O_2 estão sobre a reta suporte de OT. Além disto, as outras tangentes por P a estes círculos são tais que $PP_1 = PP_2 = PT$, com P_1 e P_2 sobre MN como desejado no enunciado. Assim, os centros O_1 e O_2 estão, respectivamente, sobre as mediatriz das cordas TP_1 e TP_2.



IME 1965/1966, Questão 1, Item (d): Solução.

IME 1965/1966, Questão 1, Item (e): Restabelecer o eixo, o vértice, o foco e a diretriz da parábola dada.

Construção: (i) Trace duas retas paralelas, r e s, secantes à parábola nos pontos R_1 e R_2 e S_1 e S_2, respectivamente; (ii) Trace uma perpendicular p qualquer a RS, onde R é médio de R_1R_2 e S é médio de S_1S_2, cujas interseções com a parábola são os pontos P_1 e P_2; (iii) Trace a mediatriz x de P_1P_2, determinando o eixo da parábola, cuja interseção com a parábola constitui o vértice V da mesma; (iv) Trace uma perpendicular y a x por V e marque um ponto (x_0, y_0) qualquer da parábola; (v) Determine a quarta proporcional $x_0 : y_0 = y_0 : k$ e marque o foco F sobre o eixo x com $VF = f = \frac{k}{4}$; (vi) Trace a diretriz d paralela ao eixo y a uma distância f de V.

Justificativa: As interseções da parábola $x = ay^2 + by + c$ com uma reta descrita por $x = \alpha y + \beta$ são da forma

$$ay^2 + (b - \alpha)y + (c - \beta) = 0,$$

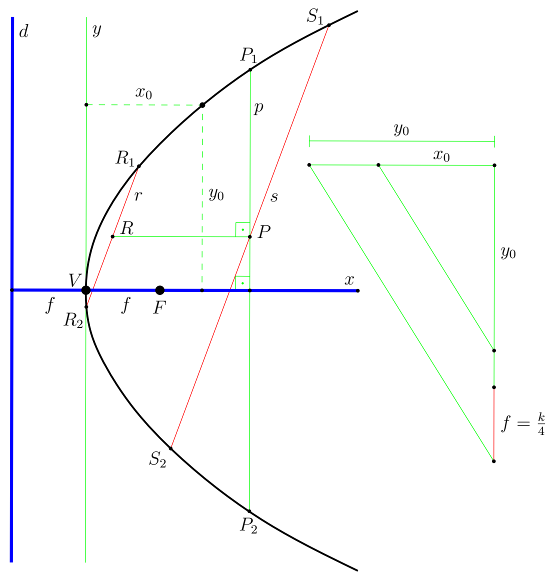
de modo que o ordenada média das interseções é dada por

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{\alpha - b}{2a}.$$

Assim, retas paralelas, com mesmo coeficiente angular α, geram interseções com mesma ordenada média, o que permite determinar a direção do eixo da parábola. Uma perpendicular a esta direção intercepta a parábola em dois pontos, cuja mediatriz x é o eixo desejado, que intercepta a parábola dada no vértice V da mesma.

Traçando eixos coordenados com origem no vértice V, um ponto (x_0, y_0) da parábola é descrito por $x_0 = \frac{y_0^2}{k}$. O foco $F \equiv (f, 0)$ é tal que

$$(f - x_0)^2 + y_0^2 = (f + x_0)^2 \Rightarrow y_0^2 = 4fx_0 \Rightarrow f = \frac{y_0^2}{4x_0} = \frac{k}{4}.$$



IME 1965/1966, Questão 1, Item (e): Solução.

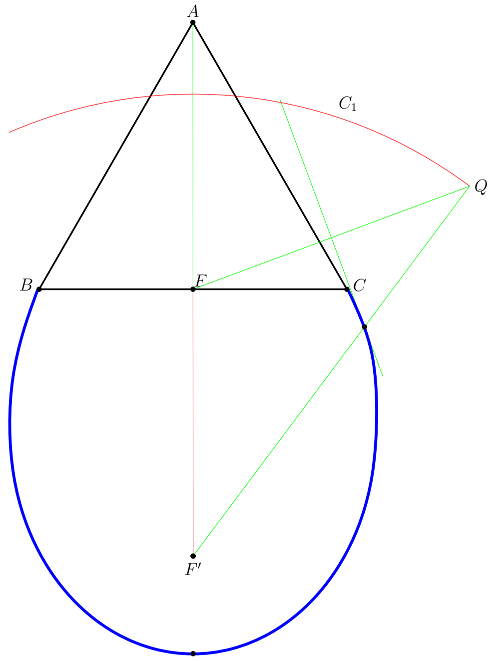
IME 1965/1966, Questão 1, Item (f): Dado um triângulo equilátero ABC de 8 cm de lado, concordar os lados AB e AC com um arco de elipse. Tomar um dos focos da elipse sobre o lado BC.

Construção: (i) Trace o triângulo equilátero ΔABC de lado 8 cm e marque os pontos F, médio de BC, e F', simétrico de A em relação a F, de modo que $AF = FF' = 4\sqrt{3}$ cm; (ii) Trace o círculo diretor $C_1 \equiv (F', 12 \text{ cm})$; (iii) Os pontos da elipse são dados pela interseção de $F'Q$, com Q pertencente a C_1, com a mediatriz de FQ.

Justificativa: Por simetria, F é médio de BC. Assim, A é encontro de tangentes pelos extremos da corda focal BC, de forma que $AO = \frac{a^2}{c} = AF + FO = 4\sqrt{3} + c$, onde O é o centro da elipse. Além disto, BC é a corda focal mínima, de forma que BF é o parâmetro da elipse, e assim $BF = \frac{BC}{2} = \frac{b^2}{4}$.

Logo, a elipse é caracterizada por

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 4\sqrt{3}c \\ b^2 = 4a \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 12 \text{ cm} \\ 2b = 2\sqrt{6} \text{ cm} \\ 2c = 4\sqrt{3} \text{ cm} \end{cases}.$$

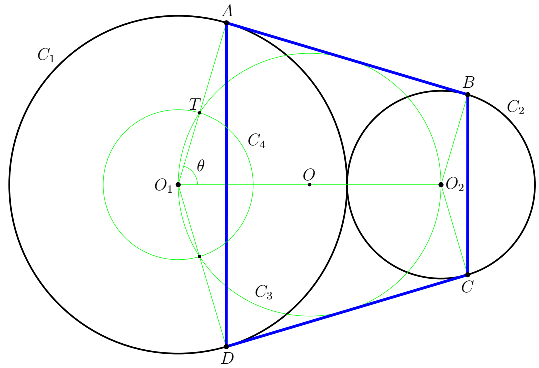


IME 1965/1966, Questão 1, Item (f): Solução.

IME 1965/1966, Questão 1, Item (g): Um observador colocado a 6 m de altura vê uma pirâmide reta de base hexagonal regular assentada no plano objetivo. A pirâmide tem 4 m de altura. O ponto de vista está afastado 9 m do quadro. O ponto principal dista 10 m da origem. Dois vértices consecutivos da base da pirâmide são $A_1(7{,}5\text{m}; 1{,}0\text{m})$ e $B_1(10{,}5\text{m}; 1{,}5\text{m})$. Pede-se a perspectiva cônica da pirâmide na escala $1 : 100$.

IME 1965/1966, Questão 2, Item (a): Os vértices de um trapézio são os pontos de contatos das tangentes comuns exteriores a duas circunferências tangentes entre si, cujos centros estão afastados de 7 cm, sendo 9 cm o diâmetro de uma delas. Pedem-se:

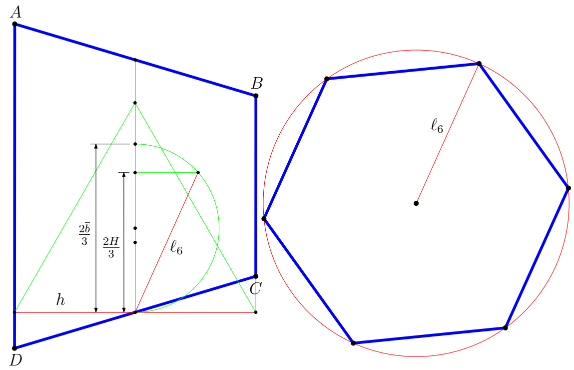
(a) Desenhar o trapézio.
(b) Determinar o hexágono regular cuja área seja equivalente à do trapézio.



IME 1965/1966, Questão 2, Item A(a): Solução.

Construção (item (a)): (i) Marque $O_1O_2 = 7$ cm e trace $C_1 \equiv \mathcal{C}(O_1, r_1)$ e $C_2 \equiv \mathcal{C}(O_2, r_2)$, com $r_1 = 4{,}5$ cm e $r_2 = 2{,}5$ cm; (ii) Trace $C_3 \equiv \mathcal{C}(O, OO_1)$, onde o ponto O é médio de O_1O_2; (iii) Trace $C_4 \equiv \mathcal{C}(O_1, r)$, com $r = 2$ cm, cujas interseções com C_3 determinam os ângulos $\pm\theta$ dos segmentos O_1A, O_2B, O_2C e O_1D que definem o trapézio $ABCD$ desejado.

Justificativa: Seja T a interseção, sobre O_1A, de C_3 e C_4. Como o triângulo ΔO_1TO_2 está inscrito na semi-circunferência C_3, então $O_1T \perp TO_2$. Como $AB \parallel TO_2$, pois $TA = O_2B = r_2$ e $TA \parallel O_2B$, então $O_1A \perp AB$, como desejado. Um raciocínio análogo verifica que $O_2B \perp AB$, $O_1D \perp DC$ e $O_2C \perp DC$.



IME 1965/1966, Questão 2, Item A(b): Solução.

Construção (item (b)): (i) Seja o trapézio $ABCD$ determinado no item anterior, de altura h e base média $\bar{b}$; (iii) Construa um triângulo equilátero de lado h cuja altura é $H = \frac{h\sqrt{3}}{2}$; (iv) Determine a grandeza $\ell_6 = \sqrt{\frac{2\bar{b}}{3}\frac{2H}{3}}$; (v) Trace circunferência de raio ℓ_6 e trace hexágono inscrito de lado também ℓ_6.

Justificativa: A equivalência das áreas S_T do trapézio, de base média $\bar{b}$ e altura h, e S_H do hexágono, de semi-perímetro p_6, apótema a_6 e lado ℓ_6, é obtida para

$$\begin{cases} S_T = \bar{b}h \\ S_H = p_6 a_6 = 3\ell_6 \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \ell_6 = \frac{\sqrt{2\bar{b}h\sqrt{3}}}{3}$$

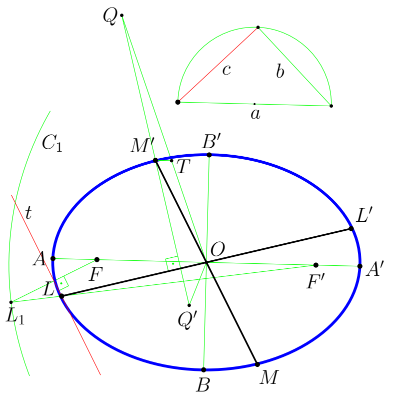
IME 1965/1966, Questão 2, Item (b): São dados dois diâmetros conjugados LL' e MM' de uma elipse que tangencia os 2 ramos de uma hipérbole, sendo L um dos pontos de tangência. Sabendo-se que o eixo maior da elipse é perpendicular ao eixo não transverso da hipérbole e que os raios vetores desta última fazem em L um ângulo de 50°, traçar as duas curvas.

Construção: (i) Determine os eixos da elipse (ver ITA 1984, Questão 20, ou [?], p. 230) e, em seguida, sua distância focal, marcando os extremos e os focos, o que permite traçar a curva; (ii) Trace $C_1 \equiv (F', 2a)$ e a reta $F'L$, cujo prolongamento intercepta C_1 em L_1; (iii) Trace a mediatriz de FL_1, determinando a tangente comum t; (iv) Determine o ponto simétrico L'_1 de L e a reta simétrica t_1 de t em relação ao eixo menor da elipse; (v) Trace as retas r_1 e r_2 fazendo ângulos de $\pm 25°$ com t e as retas r'_1 e r'_2 fazendo ângulos de $\pm 25°$ com t_1, cujas interseções de r_1 com r'_1 e de r_2 com r'_2 são os focos F_h e F'_h da hipérbole; (vi) Determine o comprimento $2a = |F'_h L - F_h L|$ do eixo transverso da hipérbole, que permite determinar os demais dados desta curva, viabilizando o seu traçado.

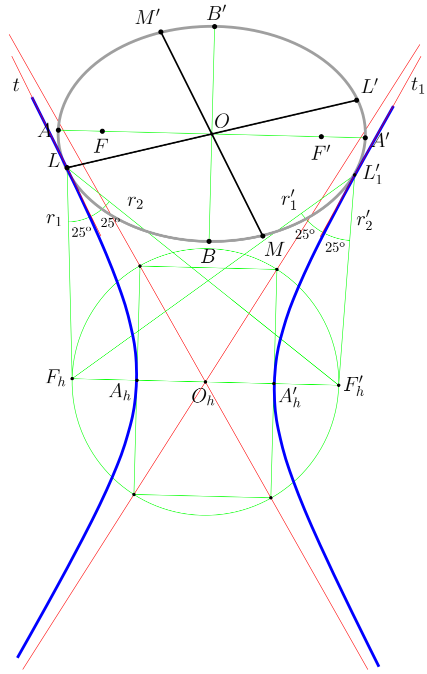
Justificativa: Para o traçado da elipse, ver [?], p. 230. A tangente comum por L é mediatriz de FL_1, onde L_1 é a interseção do prolongamento do raio vetor $F'L$ com o círculo diretor relativo a F'.

Como a elipse é tangente a ambos os ramos da hipérbole e seus eixos são paralelos dois a dois (maior da elipse com o transverso da hipérbole e o menor da elipse com o não transverso da hipérbole), por simetria, o outro ponto de tangência é o simétrico de L em relação ao eixo menor da elipse.

Pelo teorema de Poncelet, a tangente de uma hipérbole pelo ponto L (ou L'_1) é a bissetriz dos raios vetores $F_h L$ e $F'_h L$ (ou $F_h L'_1$ e $F'_h L'_1$). Como o ângulo entre os raios vetores é de 50°, então cada raio vetor faz um ângulo de 25° com a respectiva tangente. Isto permite determinar os focos F_h e F'_h da hipérbole, encontro dos respectivos raios vetores para cada ponto de tangência L e L'_1. Como L pertence à hipérbole, é possível determinar o comprimento do eixo transverso pela definição de hipérbole, ou seja, $2a = |F_h L - F'_h L|$, viabilizando o traçado da hipérbole.



IME 1965/1966, Questão 2, Item (b): Solução - Elipse.



IME 1965/1966, Questão 2, Item (b): Solução - Hipérbole.

IME 1965/1966, Questão 3, Item (a): Um pentágono regular estrelado inscrito num círculo de 1,5 m de raio, está contido num plano $P'\alpha P$, definido por seu traço horizontal, que forma um ângulo de $-50°$ com a linha de terra, e pelo ponto M de coordenadas (+3,5m; +1,0m; +2,0m), em relação a α. O ponto M é o centro do pentágono que tem dois vértices sucessivos numa linha de frente. Pedem-se as projeções do pentágono.

Obs.:

(i) Adotar a escala 1/50;

(ii) A linha de terra deverá ser paralela à menor dimensão do papel e passando pelo meio da folha;

(iii) A ordem das coordenadas é: abscissa, afastamento e cota;

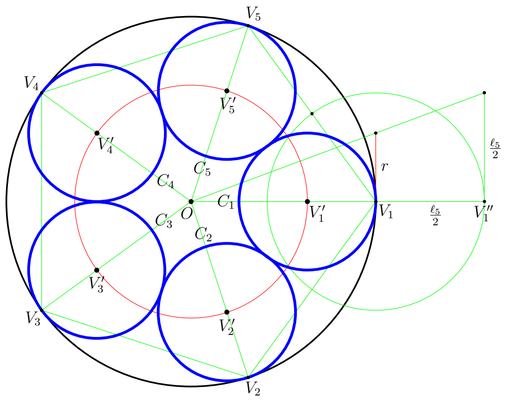
(iv) Na construção deverá ser observado o sentido trigonométrico;

(v) (α) deverá estar a 7 cm da borda esquerda do papel.

IME 1965/1966, Questão 3, Item (b): Um tetraedro regular tem dois vértices no 1° bissetor e os outros dois no segundo bissetor. Sabendo-se que a altura do tetraedro é 7 cm e que as coordenadas do centro da esfera circunscrita são (+8,0cm; 0,0; ?), determinar as projeções do tetraedro.
Obs.: São válidas as observações (ii) e (iii) do Item (a) desta questão.

IME 1964/1965 - Desenho

IME 1964/1965, Questão 1, Item 1 [valor 1,0]: Dada uma circunferência de 5 cm de raio, traçar 5 outras circunferências internas tangentes à ela e tangentes entre si, duas a duas.

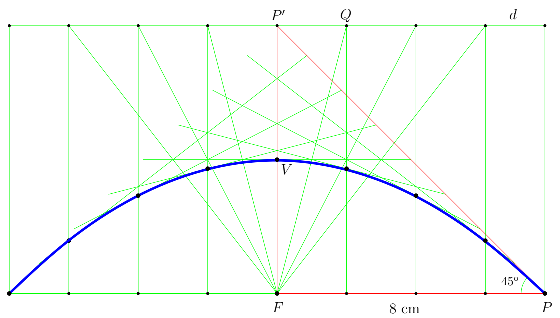


IME 1964/1965, Questão 1, Item 1: Solução.

Construção: (i) Construa o pentágono regular $V_1V_2V_3V_4V_5$ inscrito na circunferência de centro O e raio $R = 5$ cm ([**?**], Exercício 2.25), determinando o lado $\ell_5 = R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$; (ii) Determine a quarta proporcional $(R + \frac{\ell_5}{2}) : R = \frac{\ell_5}{2} : r$, (iii) Marque, para cada vértice V_i do pentágono regular, a distância $V_iV_i' = r$, com V_i' entre O e V_i; (iv) Trace as circunferências desejadas $C_i \equiv \mathcal{C}(V_i', r)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Justificativa: A circunferência C_1 pode ser obtida a partir da circunferência $C_x \equiv \mathcal{C}(V_1, \frac{\ell}{2})$ por uma homotetia de centro O e razão $k = \frac{R}{R+\frac{\ell_5}{2}}$, que mapeia o ponto V_1'' da figura-solução no ponto V_1 e determina $r = \frac{\ell_5}{2}k$.

IME 1964/1965, Questão 1, Item 2 [valor 1,0]: Um jato d' água, sob pressão constante, descreve uma parábola no espaço. A interseção desta parábola com o plano horizontal se dá num ponto P, 8 cm à direita do seu eixo, que é vertical. Construir a parábola, sabendo que a tangente à curva, tirada no ponto P, faz um ângulo de 45° com o plano horizontal. (Determinar o vértice e mais 6 pontos da curva).



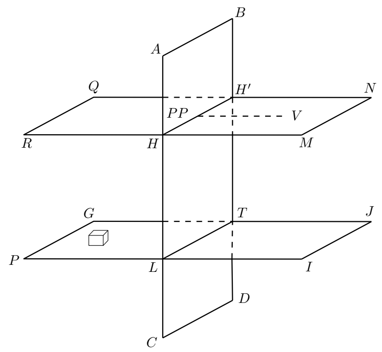
IME 1964/1965, Questão 1, Item (2): Solução.

Construção: (i) Trace o triângulo retângulo isósceles $\Delta FPP'$ com catetos $FP = FP' = 8$ cm; (ii) Marque o vértice V da parábola, médio de FP'; (iii) Trace a diretriz d, paralela a FP por P'; (iv) Determine pontos da parábola, interseções das perpendiculares a d por Q qualquer com a mediatriz de FQ.

Justificativa: A tangente por um ponto P de uma parábola é a bissetriz do ângulo formado por PF, sendo F o foco da parábola, e a perpendicular à diretriz d por P. Como a tangente dada faz um ângulo de 45°, então o foco F da parábola é a própria projeção de P no eixo vertical. Por definição, a distância de P a d é igual a $PF = 8$ cm, o que permite determinar d e, em seguida, o vértice V, médio de F e a projeção P' deste em d.

Os pontos da parábola devem ser equidistantes de F e da diretriz d. Assim traçando uma perpendicular a d por Q qualquer, determina-se um ponto da parábola pela interseção desta perpendicular com a mediatriz de FQ.

IME 1964/1965, Questão 1, Item 3 [valor 1,0]: Dada a figura:



IME 1964/1965, Questão 1, Item 3.

Escreva nos espaços abaixo:

(a) O nome dos planos:

$ABCD$ ____________________
$LTGP$ ____________________
$LTIJ$ ____________________
$MNQR$ ____________________

(b) O nome das linhas:

LT ____________________
HH' ____________________

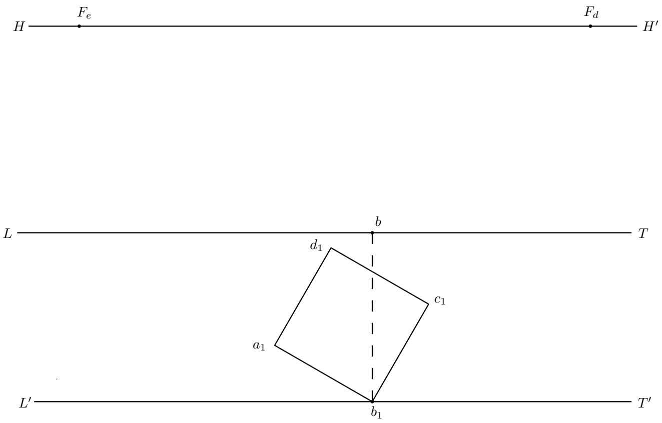
(c) A linha que representa a "Visual Principal":

____

(d) A definição de Ponto Principal:

____

IME 1964/1965, Questão 1, Item 4 [valor 1,0]: Na figura abaixo, sabe-se que b é a perspectiva de b_1. Determinar a perspectiva de um cubo cuja face sobre o plano objetivo é $a_1b_1c_1d_1$.



IME 1964/1965, Questão 1, Item 4.

IME 1964/1965, Questão 2 [valor 3,0]: Sobre um plano (α), tem-se um triângulo equilátero $(A)(E)(C)$ que representa uma das faces de um octaedro regular. Pedem-se:

(a) Determinar as projeções do poliedro no 1º diedro.

(b) O desenvolvimento de sua superfície total.

São dados:

(i) Centro da face dada: $(?; 3; 3)$;

(ii) O lado $(A)(E)$ é uma reta de maior declive do plano (α), (A) tem cota nula e (C) tem abscissa maior do que (A);

(iii) As coordenadas descritivas do plano (α) são: $T(29; 0; 0)$, $\alpha\pi' = +135^{\circ}$, $\alpha\pi = -150^{\circ}$;

(iv) A linha de terra deverá ser paralela à maior dimensão do papel e passando pelo meio da folha;

(v) A origem das abscissas será a borda esquerda do papel, sendo abscissa, afastamento e cota a ordem das coordenadas.

IME 1964/1965, Questão 3 [valor 3,0]: Determinar, justificando, as projeções de um triângulo $(A)(D)(E)$, de perímetro mínimo, resultante de uma seção feita na pirâmide regular triangular $(S)(A)(B)(C)$ de altura igual a 9 cm. São dados:

(i) O plano de base $(A)(B)(C)$ faz ângulos de 50º e 75º respectivamente com o P.H. e o P.V.;

(ii) O centro da base tem afastamento e cota menores do que os de (S) e abscissa maior do que a de (S);

(iii) O vértice (C) está no P.H. e sobre a perpendicular baixada do centro da base ao traço horizontal do plano de $(A)(B)(C)$ e o vértice (A) tem afastamento menor do que o de (B);

(iv) Vértice (S) da pirâmide: $S(20; 7; 8)$;

(v) A linha de terra deverá ser paralela à maior dimensão do papel e distante da borda superior de 11 cm;

(vi) A origem das abscissas será a borda esquerda do papel, sendo abscissa, afastamento e cota a ordem das coordenadas.