AUXILIA

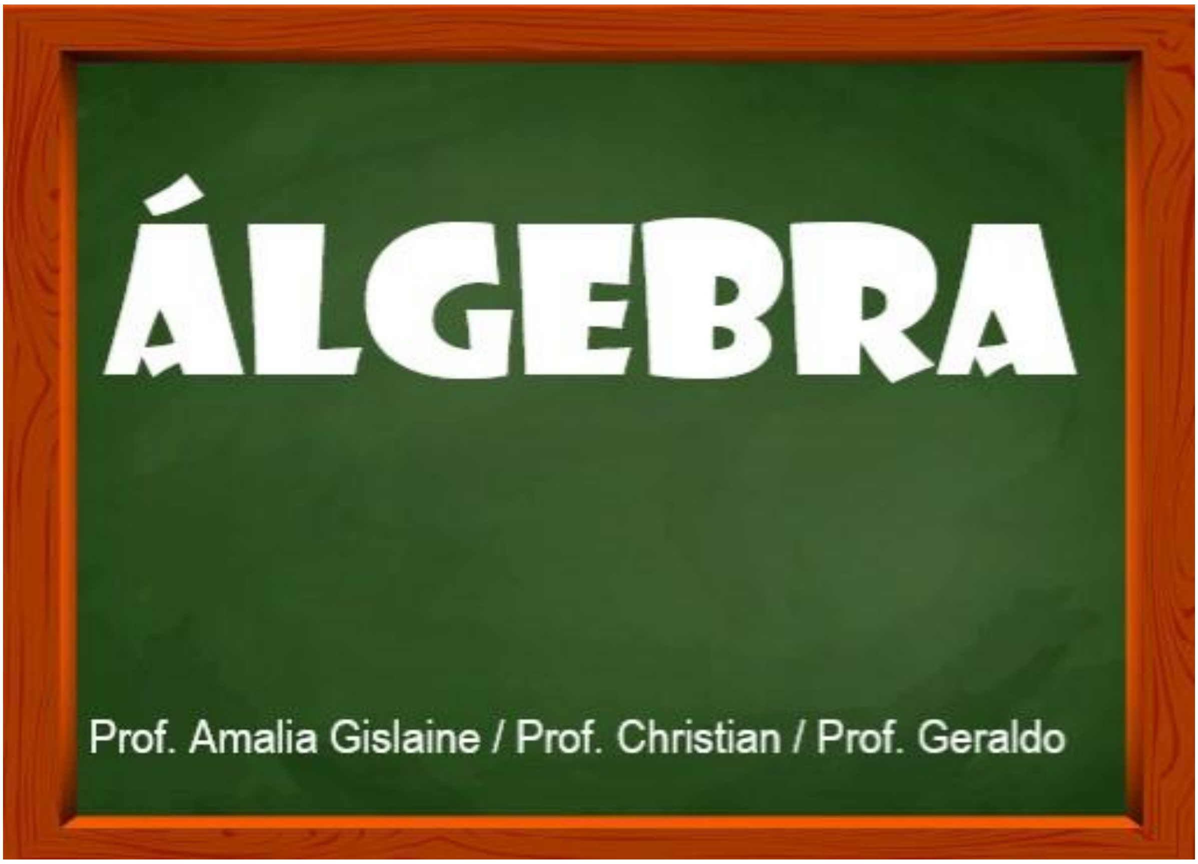
PREPARATÓRIO PARA O ENEM

2020

# MATEMÁTICA

# ÁLGEBRA

# Matemática • Álgebra




**Contatos:**

**Professora Amalia Gislaine:**

gislaine.heberle380@gmail.com

53981160134 (Whatsapp)

**Professor Christian:**

christian.mgeisler@gmail.com

53981575997 (Whatsapp)

**Professor Geraldo:**

geraldoolivieira23041997@gmail.com

53984582151 (Whatsapp)

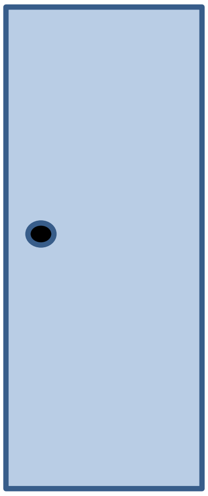
AUXILIA
PREPARATÓRIO PARA O ENEM

# Semana 1

**Expressões Algébricas:**

As expressões algébricas tem como função inicial a tradução da língua portuguesa para uma linguagem matemática. Quando queremos nos referir a um número que não conhecemos, atribuímos a ele uma letra. Vejamos o exemplo abaixo:

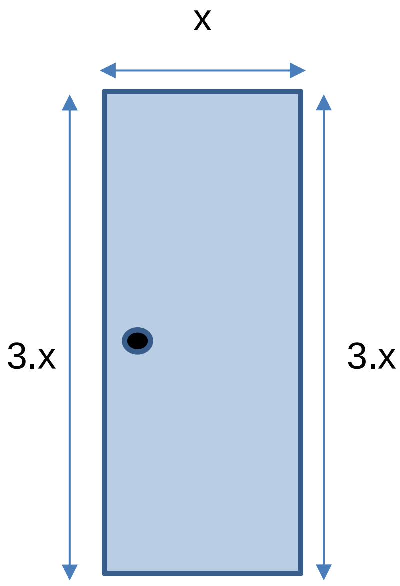
*A altura de uma porta é o triplo do seu comprimento. Escreva a expressão algébrica que representa o perímetro da porta.*



Acima, temos o desenho da porta. O problema nos coloca uma relação entre o comprimento e a altura dela. Porém, não sabemos qualquer das medidas. Então, vamos chamar o comprimento de uma letra, chamadas de "incógnitas". A letra mais utilizada é o "x", mas qualquer uma serviria. Vamos chamar o comprimento de "x". Temos, então:

Comprimento: x

Como a altura mede o triplo do comprimento, temos que ela mede ***"<u>3x</u>"***. O perímetro de um polígono é a soma de todos os seus lados e é representado na matemática como "2p". Temos, então:




Resposta: 2p = 3.x + 3.x + x + x

Abaixo, vamos ver mais alguns exemplos de expressões algébricas, separadas em colunas.

| ***Expressão na Língua Portuguesa*** | ***Matemática*** |
|---|---|
| O dobro de 5 | 2.5 |
| O triplo de 7 | 3.7 |
| O quádruplo de 2 | 4.2 |
| A terça parte de 7 | $^{7}/_{3}$, $\frac{7}{3}$ ou 7:3 |
| O produto entre 3 e 8 | 3.8 |
| A quarta parte de um número | $^{x}/_{4}$, $\frac{x}{4}$ ou x:4 |
| O sucessor de um número | z+1 |
| O antecessor de um número | z-1 |
| A soma de um número com a metade dele | $x + \frac{x}{2}$ |
| A razão entre dois números | $\frac{a}{b}$ ou a:b |
| A razão entre um número e o seu sucessor | $\frac{y}{y+1}$ ou y:(y+1) |
| A soma de 2 números | x+y |

Agora, vamos estudar os “TERMOS ALGÉBRICOS”, também chamados de "MONÔMIOS”. São os termos que indicam um produto entre números reais (coeficientes) e variáveis (parte literal). Vejamos alguns exemplos:

I) 3.x → 3 é o coeficiente e “x” é a parte literal. Este monômio representa o “TRIPLO DE UM NÚMERO”, sendo que não conhecemos este número. Por convenção, são omitidos nos monômios os pontos que representam a operação de multiplicação. Assim, “3.x” é escrito como “3x”.

II) 5.a → 5 é o coeficiente “a” é a parte literal. Este monômio representa o “QUÍNTUPLO DE UM NÚMERO”, representado também por 5a, conforme a convenção citada no item anterior.

III) $-x^2yz^5$ → neste caso, o coeficiente é o número -1, pois podemos escrever a expressão também da seguinte forma: $-x^2yz^5= (-1)x^2yz^5$. A parte literal, por sua vez, é o produto das letras, ou seja: “$x^2yz^5$”. É importante destacar que os expoentes compõem a parte literal porque representam uma multiplicação da incógnita, por exemplo: “$z^5$=z.z.z.z.z”.

IV) $\frac{3kx}{2}$ = O coeficiente é $\frac{3}{2}$, pois a expressão pode ser escrita como $\frac{3}{2}kx$. A parte literal, por sua vez, é “kx”.

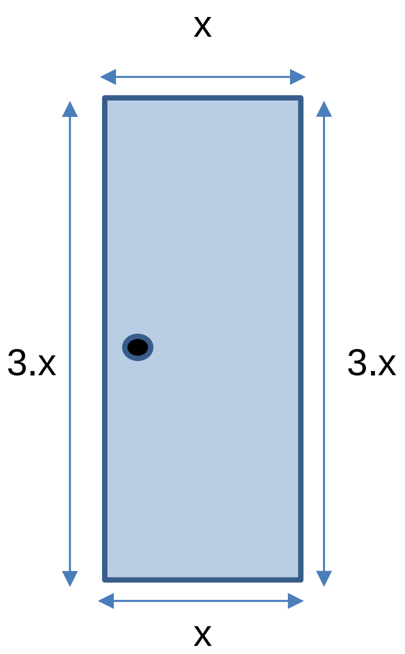
Agora, vamos praticar? Identifique nos termos abaixo o coeficiente e a parte literal de cada monômio:

| Termo Algébrico (Monômio) | Coeficiente | Parte Literal |
|---|---|---|
| $5xy^3$ | | |
| $7a^2b$ | | |
| $\frac{5x}{2y}$ | | |
| 4p | | |
| $X^2y^3z$ | | |
| -a | | |

AUXILIA
PREPARATÓRIO PARA O ENEM

**Valor Numérico da Expressão Algébrica:**

Quando temos uma expressão algébrica, ela tem um determinado valor numérico ao atribuirmos um valor real às partes literais. Vamos obter alguns valores numéricos às expressões algébricas acima. Vejamos, novamente, o exemplo utilizado no começo da aula: o perímetro da porta.




Resposta: 2p = 3.x + 3.x + x + x

Se a porta tiver comprimento de 1 metro, terá o seguinte perímetro 2p:
2p = 3.1 + 3.1 + 1 + 1 = 8

Então, concluímos que "O VALOR NUMÉRICO DA EXPRESSÃO ALGÉBRICA PARA X=1 É 8". Para cada valor atribuído a "x". Em outras palavras, podemos afirmar que para calcular o valor numérico de uma expressão algébrica, basta substituirmos as letras por números dados e efetuar as operações indicadas.

**Exercícios:**

Obtenha os valores numéricos das expressões algébricas abaixo para os respectivos valores.

a) $5xy^3$ $x=1$, $y=2$.
b) $7a^2b$ $a=2$, $b=\frac{1}{7}$.
c) $\frac{5x}{2y}$ $x=1$, $y=5$.
d) $4p$ $p=0$.
e) $x^2y^3z$ $x=2$, $y=3$, $z=-1$.
f) $-a$ $a=-3$

**Operações com expressões algébricas:**

Primeiramente, vamos a algumas definições. A soma (ou subtração) de dois, ou mais, monômios é denominada "POLINÔMIO". Tem nomenclaturas próprias os casos em que temos dois ou três monômios. São eles "BINÔMIO" E "TRINÔMIO", respectivamente. Mesmo assim, os monômios, binômios e trinômios também podem ser chamados de polinômios.

***SOMA DE POLINÔMIOS***: quando temos uma soma de monômios, devemos somar os coeficientes daqueles que tem partes literais iguais, mantendo está no resultado. Vejamos os exemplos abaixo:

a) ***2x+3y+5x+8y***; neste exemplo, temos 2 monômios com parte literal "x" e outros 2 com parte literal "y". Somamos os coeficientes de "x" e mantemos a parte literal no resultado, o que resulta em

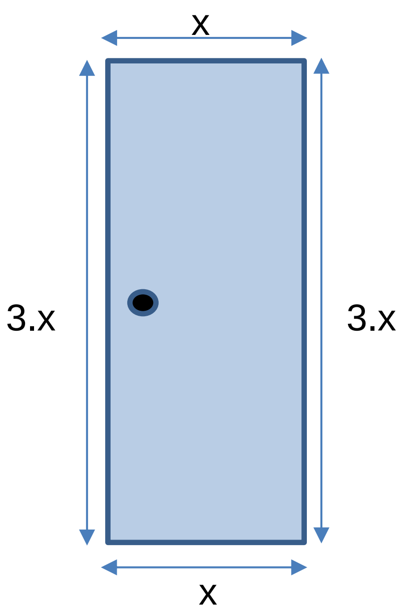
$$2x+5x=7x$$

Realizando o mesmo procedimento em relação àqueles que tem "y" como parte literal, temos:

$$3y+8y=11y.$$

Assim, $2x + 3y + 5x + 8y= 7x+11y$ (o resultado é, portanto, um binômio)

b) Voltemos ao exemplo mencionado anteriormente relacionado à porta:




$$2p = 3.x + 3.x + x + x$$

Temos o perímetro 2p representado por uma expressão algébrica composta por 4 monômios que tem “x” como parte literal. Assim, poderíamos escrever:

$$2p = 3x + 3x + x + x = 8x, \text{ pois } 3+1+3+1=8.$$

c) ***<u>4x+7xy+3x²y+2xy+x²y+x</u>***: Nesta expressão, temos apenas x e y. Temos alguns pares de monômios de partes literais em comum Devemos observar que os expoentes são importantes para verificar se dois monômios tem partes literais iguais. Por exemplo, $x^2y$ e $xy$ não são iguais, apesar de envolverem x e y. Isso se deve ao fato de que elas tem valores numéricos diferentes para ao menos 1 número real (neste caso, na verdade, infinitos). Podemos citar o valor numérico para x=2 e y=1: $x^2y=2^2.1=4$ e $xy=2.1=2$. Então, apenas as partes literais que tem as mesmas letras com os mesmos expoentes são consideradas iguais.

$$4x+7xy+3x^2y+2xy+x^2y+x = 5x + 9xy + 4x^2y \text{ (trinômio)}$$

***SUBTRAÇÃO***: quando temos uma subtração de monômios, devemos subtrair os coeficientes daqueles que tem partes literais iguais, mantendo esta no resultado, exatamente como na soma. Temos os seguintes exemplos:

a) 5a-4a = a, pois 5-4=1.
b) $6b^2+a+8b-b^2-6b = 5b^2+2b+a$

**Exercícios:**

1. Determine os valores numéricos das expressões algébricas abaixo para os respectivos números reais atribuídos às variáveis:

a) $5x - y$________________________x=1, y=9
b) $a + b^2$________________________ a=3, b=4
c) $4x^3yz^2 + 7xy^2z^2$_________________ x=2, y=1, z=1
d) $3a + 5b + 2b^3$_________________ a=1, b=-1
e) $\frac{1}{2x^2y^3z^3}$ _____________________ x=2, y=-2, z=-1
f) $4a^2b + 3a^2b^3$_________________a=2, b=-1

2. Some os termos semelhantes em cada uma das expressões algébricas:

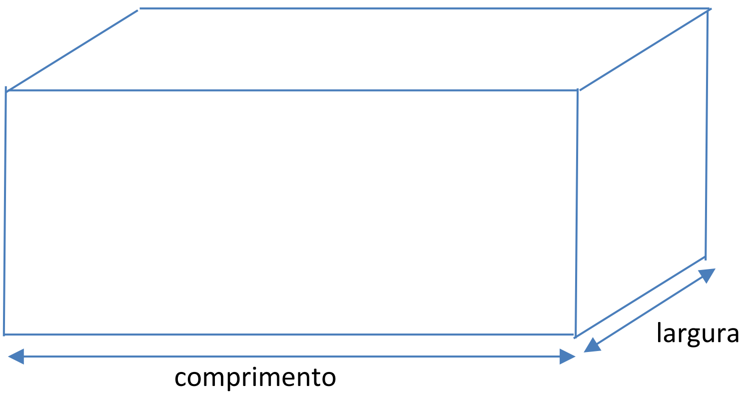
a) $3a + 5b - 4a - 2b^3 + b - 3b^3$

b) $3y^2 + 5x^2 - 2x^3yz + 4x^2 - 3x^3yz - y^2$

c) $3a^2 + 5b^2 - 2ab + 4a - 3b^2 - a^2$

3. Determine as expressões algébricas que representam as situações a seguir:

a) A tampa da caixa em forma de paralelepípedo reto retângulo (*isso significa que as bases inferior e superior são retângulos de mesmas medidas e que a caixa não está inclinada em relação à superfície*) abaixo tem comprimento igual ao quadrado da sua largura. Chamando a largura de "a", qual expressão representa o semiperímetro da tampa?




b) Num campeonato de voleibol de um bairro de Pelotas, sempre que as partidas acabam são dados 3 pontos aos times vencedores e retirado 1 ponto do time perdedor. Escreva a expressão algébrica que represента os pontos de uma determinada equipe na competição. (*Vale lembrar que no voleibol não existe empate*).

***<u>MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS</u>***: Temos, agora, uma parte importante para as expressões algébricas. Quando multiplicamos polinômios, devemos lembrar de propriedades da matemática básica, como produtos e divisões de potências de mesma base, comutatividade da multiplicação e propriedade distributiva da multiplicação. Vamos separar por casos:

**a) (Monômio).(Monômio)**

**i) $5x^2y^3.2x^3y$**

Neste exemplo, temos os monômios $5x^2y^3$ e $2x^3y$. Temos, das propriedades de multiplicação de potências de mesma base. Efetuamos as multiplicações dos coeficientes, que no caso são 5 e 2.

Então, 5.2=10.

Após este procedimento, multiplicamos as mesmas letras das partes literais, desta vez mesmo que sejam com potências diferentes. Temos $x^2$ no primeiro monômio e $x^3$ no segundo. Multiplicando-os, temos $x^2.x^3=x^{2+3}=x^5$.

Efetuando o mesmo com o $y^3$ e o y (que estão no primeiro monômio e no segundo, respectivamente), temos $y^3.y=y^{3+1}=y^4$.

A resposta é, portanto, $10x^5y^4$.

Outra forma de enxergar este resultado é relembrando da propriedade comutativa, que afirma que a ordem dos fatores não altera o produto (2.3=3.2, 2.4=4.2, 6.7=7.6...). Aplicamos esta importante propriedade a todos os termos dos monômios, deixando os coeficientes lado a lado, bem como as letras iguais:

$$5x^2y^3.2x^3y = (5.2).(x^2.x^3).(y^3.y) = 10.(x^{2+3}).(y^{3+1}) = 10x^5y^4$$

**ii) $7r^2t^5.3r^3t^6z$**

Vamos, novamente, efetuar as multiplicações dos coeficientes (7.3=21) e das partes literais ($r^2r^3=r^5$, $t^5.t^6=t^{11}$). Porém, agora, temos a letra z presente somente na parte literal do segundo monômio. Portanto, ela é mantida. A resposta final é, portanto:

$$\mathbf{7r^2t^5.3r^3t^6z = 21r^5t^{11}z.}$$

**b) (Polinômio).(monômio):**

**i) $(x^2 + y^2z).(xy)$**

Basta aplicarmos a distributiva à direita, multiplicando o monômio xy pelos monômios que compõem "$x^2+y^2z$".

$$(x^2 + y^2z).(xy) = x^2.xy + y^2z.xy = x^3y + xy^3z$$

**ii) $(a^2b^3c + abc^2).(b^3c)$**

Aplicando o mesmo método, temos

$$(a^2b^3c + abc^2) = a^2b^3c.b^3c + abc^2.b^3c = a^2b^6c^2 + ab^4c^3.$$

**iii) $(x^2 + y).xy$** $= x^2.xy + y.xy = x^3y+xy^2$

**c) (Polinômio).(Polinômio):**

**i) $(2x + 3y).(x - y) =$** $2x.x + 2x.(-y) + 3y.x + 3y.(-y) = 2x^2 - 2xy +3xy - 3y^2 = 2x^2 + xy - 3y^2$

***DIVISÃO DE POLINÔMIOS:***

**a) (Monômio):(Monômio)**

Devemos simplificar o coeficiente do numerador com o do denominador, fazendo o mesmo com as letras iguais das partes literais, devendo efetuar as divisões de acordo com as propriedades de divisão de potências de mesma base.

i) $\frac{4x^3yz^2}{6x^2y^3z^2} = \frac{4x^3yz^2}{6x^2y^3z^2} = \frac{4}{6}.x^{3-2}.y^{1-3}.z^{2-2} = \frac{2}{3}.x^1.y^{-2}.z^0 = \frac{2x}{3y^2}$

ii) $\frac{9x^2yz^3}{3xyz^2} = \frac{9}{3}.x^{2-1}.y^{1-1}.z^{3-2} = 3xz$

iii) $\frac{4x^6z^5}{12x^2y^3z^2} = \frac{4x^{6-2}.z^{5-2}}{12y^3} = \frac{x^4.z^3}{3y^3} =$

Exercícios:

i) $\frac{25x^8y^6z^3}{5x^2y^4z^2} =$

ii) $\frac{12x^{10}y^4z^3}{5x^2y^4} =$

iii) $\frac{20x^5y^6z^3}{6x^4y^2z^4} =$

iv) $\frac{32x^6y}{8x^2y^4z^2} =$

v) $\frac{6x^8}{5x^2z^2} =$

vi) $\frac{x^2y^3z^3}{5xz^2} =$

vii) $\frac{x^2y^2z^3}{x^2y^3z^5} =$

**b) (Polinômio):(Monômio)**

$(10a^3b^3 + 8ab^2):(2ab^2)$

O dividendo $10a^3b^3 + 8ab^2$ é um polinômio composto por por dois monômios. Dessa forma, o divisor $2ab^2$, que é um monômio, dividirá cada um deles em separado, veja:

i) $(10a^3b^3 + 8ab^2):(2ab^2)$

$$\frac{10a^3b^3 + 8ab^2}{2ab^2} = \frac{10a^3b^3}{2ab^2} + \frac{8ab^2}{2ab^2} = 5a^2b + 4$$

ii) $(9x^2y^3 + 6x^3y^2 - xy) : (3x^2y)$

AUXILIA
PREPARATÓRIO PARA O ENEM

$$\frac{9x^2y^3 + 6x^3y^2 - xy}{3x^2y} = \frac{9x^2y^3}{3x^2y} + \frac{6x^3y^2}{3x^2y} - \frac{xy}{3x^2y}$$

$$3y + 2xy - \frac{1}{3x}$$

**c) (Polinômio):(Polinômio)**

A divisão de polinômio por polinômio é realizada entre polinômios compostos por monômios que tem parte literal composta por uma mesma variável e apenas uma letra, apenas com diferentes potências inteiras. Vejamos o exemplo abaixo:

$(6x^4 – 10x^3 + 9x^2 + 9x – 5):(2x^2 – 4x + 5)$

Ambos os polinômios acima são compostos por monômios que tem como parte literal "x", em diferentes potências, em que todas são números inteiros. Além disto, o expoente máximo do primeiro polinômio (chamado de "dividendo") é maior ou igual ao segundo (divisor). Então, vamos realizar a divisão destes polinômios pelo chamado método da chave.

Antes de iniciarmos o processo da divisão é preciso fazer algumas verificações:

• Verificar se tanto o dividendo como o divisor está em ordem decrescente, conforme as potências de x.

• Verificar se no dividendo, não está faltando nenhum termo, se estiver é preciso completar.

Após estas verificações, realizemos a divisão dos polinômios:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5 & 2x^2 - 4x + 5 \\ \hline \end{array}$$

Primeiramente, dividimos o monômio de maior grau do dividendo pelo de maior grau do divisor. Temos, então:

$$\frac{6x^4}{2x^2} = 3x^2$$

Ficamos, então, com:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5 & 2x^2 - 4x + 5 \\ \hline & 3x^2 \end{array}$$

Após este procedimento, multiplicamos $3x^2$ por todo o divisor ($2x^2 – 4x + 5$) e colocamos o resultado abaixo do dividendo, com os sinais trocados:

$3x^2.(2x^2 - 4x + 5) = 6x^4 - 12x^3 + 15x^2$

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5 & 2x^2 - 4x + 5 \\ \cline{2-2} -6x^4 + 12x^3 - 15x^2 & 3x^2 \end{array}$$

Após isto, realizamos as operações de soma e subtração presentes na parte esquerda da conta de divisão:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5 & 2x^2 - 4x + 5 \\ \cline{2-2} -6x^4 + 12x^3 - 15x^2 & 3x^2 \\ \hline 0 + 2x^3 - 6x^2 + 9x - 5 & \end{array}$$

Em seguida, realizamos a divisão do monômio de maior potência do resultado obtido, (no caso, $2x^3$) pelo monômio com maior potência do divisor ($2x^2$). Assim, temos:

$$\frac{2x^3}{2x^2} = x$$

Então, multiplicamos este resultado pelo dividendo, da mesma forma que realizamos anteriormente, trocando o sinal e inserindo o novo polinômio abaixo do que tínhamos antes:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5 & 2x^2 - 4x + 5 \\ \cline{2-2} -6x^4 + 12x^3 - 15x^2 & 3x^2 + x \\ \hline 2x^3 - 6x^2 + 9x - 5 & \\ -2x^3 + 4x^2 - 5x & \\ \hline 0 - 2x^2 + 4x - 5 & \end{array}$$

Realizando mais uma vez o mesmo procedimento, dividimos $-2x^2$ (maior potência de x no polinômio “$-2x^2 + 4x - 5$”) por $2x^2$ (maior potência do divisor).

$$\frac{-2x^2}{2x^2} = -1$$

Multiplicando -1 pelo divisor e posicionando o resultado logo abaixo de “$-2x^2 + 4x - 5$” com os sinais invertidos, temos:

$$
\begin{array}{l|l}
6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5 & 2x^2 - 4x + 5 \\
\hline
-6x^4 + 12x^3 - 15x^2 & 3x^2 + x - 1 \\
\hline
\quad 2x^3 - 6x^2 + 9x - 5 & \\
\quad -2x^3 + 4x^2 - 5x & \\
\hline
\quad 0 - 2x^2 + 4x - 5 & \\
\qquad + 2x^2 - 4x + 5 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Temos, então, que $(6x^4 – 10x^3 + 9x^2 + 9x – 5):(2x^2 – 4x + 5)$ resulta em $3x^2 + x – 1$.

Exercícios:

1. Efetue as divisões os polinômios abaixo:

a) $(3x^5 – 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x – 1):(x^2 - 2x + 3)$
b) $(2x^5 – 3x^4 + 4x^3 - 6x + 7):(x^3 - x^2 + x – 1)$
c) $(x^4 – 16):(x + 1)$
d) $(2x^3 + x^2 - 8x):(x^2-4)$

**Produtos Notáveis:**

São multiplicações em que os fatores são **polinômios.** Existem cinco produtos notáveis mais relevantes: quadrado da soma, quadrado da diferença, produto da soma pela diferença, cubo da soma e cubo da diferença.

**Quadrado da soma:**

Os produtos entre polinômios conhecidos como quadrados da soma são os do tipo:

$$(x + a)(x + a)$$

O nome quadrado da soma é dado porque a representação por potência desse produto é a seguinte: $(x + a)^2$

A solução desse produto notável sempre será o polinômio a seguir:

$$(x + a)^2 = x^2 + (2)(x)(a) + a^2$$

Esse polinômio é obtido por meio da aplicação da propriedade distributiva da seguinte maneira:

$$(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = x^2 + (x)(a) + (a)(x) + a^2 = x^2 + (2)(x)(a) + a^2$$

O resultado final desse produto notável pode ser usado como fórmula para qualquer hipótese em que houver uma soma elevada ao quadrado. Geralmente, esse resultado é ensinado da seguinte maneira:

**O quadrado do primeiro termo mais duas vezes o primeiro vezes o segundo mais o quadrado do segundo termo**

**Exemplo:**

$$(x + 7)^2 = x^2 + (2)(x)(7) + (7)^2 = x^2+(2x)(7)+49 = x^2 + 14x + 49$$

Observe que esse resultado é obtido pela aplicação da propriedade distributiva em (x + 7)2. Portanto, a fórmula é obtida a partir da propriedade distributiva sobre $(x + a)(x + a)$.

**Quadrado da diferença:**

O quadrado da diferença é o seguinte:

$$(x - a)(x - a)$$

Esse produto pode ser escrito da seguinte maneira por meio da notação de potências:

$$(x - a)^2$$

O seu resultado é o seguinte:

$$(x - a)^2 = x^2 - (2)(x)(a) + a^2$$

Perceba que a única diferença entre os resultados do quadrado da soma e da diferença é um sinal negativo no termo do meio. Geralmente, esse produto notável é ensinado da seguinte maneira:

**O quadrado do primeiro termo menos duas vezes o primeiro vezes o segundo mais o quadrado do segundo termo.**

**Produto da soma pela diferença:**

É o produto notável que envolve um fator com uma soma e outro com uma subtração. Exemplo:

$$(x + a)(x - a)$$

Não há representação em forma de potência para esse caso, mas sua solução sempre será determinada pela seguinte expressão, também obtida com a técnica do quadrado da soma:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

Como exemplo, vamos calcular $(xy + 4)(xy - 4)$.

$$(xy + 4)(xy - 4) = (xy)^2 - (4)^2 = x^2y^2 - 16$$

Esse produto notável é ensinado da seguinte maneira:

O quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

**Cubo da soma:**

Com a propriedade distributiva, é possível criar uma “fórmula” também para produtos com o seguinte formato:

$$(x + a)(x + a)(x + a)$$

Na notação de potência, ele é escrito da seguinte maneira:

$$(x + a)^3$$

Por meio da propriedade distributiva e simplificando o resultado, encontraremos o seguinte para esse produto notável:

$$(x + a)^3 = x^3 + (3)(x^2)(a) + (3)(x)(a^2) + a^3$$

Assim, em vez de fazer um cálculo extenso e cansativo, podemos calcular $(x + 5)^3$, por exemplo, facilmente da seguinte maneira:

$$(x + 5)^3 = x^3 + (3)(x^2)(5) + (3)(x)(5^2) + 5^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

**Cubo da diferença:**

O cubo da diferença é o produto entre os seguintes polinômios:

$$(x - a)(x - a)(x - a)$$

Por meio da propriedade distributiva e simplificando os resultados, encontraremos o seguinte resultado para esse produto:

$$(x - a)^3 = x^3 - (3)(x^2)(a) + (3)(x)(a^2) - a^3$$

Vamos calcular como exemplo o seguinte cubo da diferença:

$$(x - 2y)3$$

$$(x - 2y)^3 = x^3 - (3)(x^2)(2y) + (3)(x)(2y)^2 - (2y)^3 = x^3 - (3)(x^2)(2y) + (3)(x)(4y^2) - 8y^3 =$$

$$x3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$$

**Fatoração de polinômios:**

Fatorar um número significa escrevê-lo na forma de produto de números primos. Por exemplo,

A fatoração do número 36 consiste na multiplicação entre os números 2 * 2 * 3 * 3.

Na fatoração de polinômios devemos escrever o mesmo através do produto entre outros polinômios.

As fatorações mais conhecidas são: fator comum em evidência, agrupamento, diferença entre dois quadrados, trinômio quadrado perfeito e trinômio soma e produto.

**Fator comum em evidência:**

Nesse modelo de fatoração temos que determinar o elemento comum aos termos que formam o polinômio. Observe:

No polinômio $x^2 + 2x$, temos que a variável x é comum aos dois termos. Ela será o termo em evidência, a qual dividirá todos os termos do polinômio original.

$$x^2 + 2x \rightarrow x * (x + 2)$$

$$x^2 : x = x$$

$$2x : x = 2$$

Veja mais exemplos de fatoração por evidência:

**Exemplo 1:**

$$4x^3 - 2x^2 \rightarrow 2x^2 * (2x - 1)$$

$$4x^3 : 2x^2 = 2x$$

$$2x : 2x = 1$$

**Exemplo 2:**

$$16x^2 + 8 \rightarrow 8 * (2x^2 + 1)$$

$$16x^2 : 8 = 2x^2$$

$$8 : 8 = 1$$

**Fatoração por Agrupamento:**

Na fatoração por agrupamento, utilizamos inicialmente a fatoração por evidência e logo em seguida agrupamos os termos sob certas condições também de evidenciação. Observe:

$2yx - x - 6y + 3$, aplicar evidência entre $2yx$ e $-x$ e entre $-6y$ e 3.

$$2yx - x \rightarrow x * (2y - 1)$$

$$-6y + 3 \rightarrow -3 * (2y - 1)$$

$$2yx - x - 6y + 3 \rightarrow x * (2y - 1) - 3 * (2y - 1) \rightarrow (x - 3) *(2y - 1)$$

Observe mais exemplos:

**Exemplo 1:**

$$bx - 2b + x - 2 \rightarrow bx + x - 2b - 2 \rightarrow x * (b + 1) - 2 * (b + 1) \rightarrow (x - 2) * (b + 1)$$

**Exemplo 2:**

$$10x^2 + 15xy + 4x + 6y \rightarrow 10x^2 + 4x + 15xy + 6y \rightarrow 2x * (5x + 2) + 3y * (5x + 2) \rightarrow$$

$$(2x + 3y) * ( 5x + 2)$$

**Diferença entre dois quadrados:**

Nessa fatoração aplicaremos a raiz quadrada entre os elementos. O valor resultante das raízes formará uma multiplicação entre binômios no mesmo modelo do notável produto da soma pela diferença. Veja:

**Exemplo 1:**

$$4x^2 - 16 \rightarrow (2x + 4) * (2x - 4)$$

$$\sqrt{4x^2} = 2x$$

$$\sqrt{16} = 4$$

**Exemplo 2:**

$$25x^2 - 100 \rightarrow (5x + 10) * (5x - 10)$$

$$\sqrt{25x^2} = 5x$$

$$\sqrt{100} = 10$$

**Exemplo 3:**

$$81x4 - 144 \rightarrow (9x^2 + 12) * (9x^2 - 12)$$

$$\sqrt{81x4} = 9x^2$$

$$\sqrt{144} = 12$$

**Exemplo 4:**

$$400x^2 - 49 \rightarrow (20x + 7) * (20x - 7)$$

$$\sqrt{400x^2} = 20x$$

$$\sqrt{49} = 7$$

**Trinômio quadrado perfeito:**

Determinaremos o produto notável responsável pela formação do trinômio $x^2 + 2xy + y^2$ ou $x^2 - 2xy + y^2$. Observe:

**Exemplo 1:**

$$x^2 + 18x + 81 \rightarrow (x + 9)^2$$

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$\sqrt{81} = 9$$

$$(x + 9)^2 = (x + 9) * (x + 9) = x^2 + 9x + 9x + 81 = x^2 + 18x + 81$$

**Exemplo 2:**

$$4x^2 - 48x + 144 \rightarrow (2x - 12)^2$$

$$\sqrt{4x^2} = 2x$$

$$\sqrt{144} = 12$$

$$(2x - 12)^2 = (2x - 12) * (2x - 12) = 4x^2 - 24x - 24x + 144 = 4x^2 - 48x + 144$$

**Trinômio Soma e Produto:**

São as fatorações envolvendo trinômios do tipo $x^2 + Sx + P$, que podem ser fatorados e escritos da seguinte forma $(x + a) * (x + b)$. Nessa situação temos que Soma = a + b e Produto = a * b. Observe:

**Exemplo 1:**

$$x^2 + 10x + 16 \rightarrow (x + 8) * (x + 2)$$

Soma = 10

Produto = 16

Os números são 8 e 2, pois:

8 + 2 = 10

8 * 2 = 16

**Exemplo 2:**

$$x^2 - 13x + 42 \rightarrow (x - 6) * (x - 7)$$

Soma = –13

Produto = 42

Os números são –6 e –7, pois:

$$-6 - 7 = -13$$
$$(-6) * (-7) = 42$$

**Exemplo 3:**

$$x^2 + 3x - 10 \rightarrow (x - 2) * (x + 5)$$

Soma = 3

Produto = –10

Os números são 3 e –10, pois:

$$-2 + 5 = 3$$
$$(-2) * 5 = -10$$

**Frações Algébricas:**

São expressões munidas de pelo menos uma incógnita no denominador. Tendo em vista que incógnitas representam números reais ainda desconhecidos, é possível afirmar que as frações algébricas também representam números reais. Dessa forma, todas as operações válidas para esse conjunto numérico também são válidas para as frações algébricas, a saber: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Quando essas operações envolvem frações algébricas, pode ser necessário apelar para outras propriedades matemáticas, como propriedades de potências, fatoração de polinômios, produtos notáveis etc. Veja um exemplo de fração algébrica:

$$\frac{4x^3y^2}{3k^2a}$$

**Simplificação de fração algébrica:**

A simplificação de frações algébricas faz uso de propriedades de potências e, algumas vezes, de fatoração de polinômios. A tentativa é de escrever a fração algébrica na forma mais fatorada possível e eliminar o excesso de incógnitas repetidas no numerador e denominador por meio da divisão de potências de mesma base. Observe o exemplo:

$$\frac{4a^3(a^2 + 2ab + b^2)}{16a^2(a^2 - b^2)}$$

Observe que os elementos presentes no numerador podem ser fatorados por dois procedimentos diferentes: o número 4 se transformará em $2^2$ e o polinômio $a^2 + 2ab + b^2$, que é um trinômio quadrado perfeito, poderá ser reescrito na forma $(a + b)^2$.

Já o denominador também pode ser fatorado ao rescrever 16 como $2^4$ e $a^2 – b^2$, que é uma diferença de dois quadrados, como $(a + b)(a – b)$. Substituindo essas formas fatoradas na fração algébrica dada, obteremos:

$$\frac{2^2a^3(a+b)^2}{2^4a^2(a+b)(a-b)}$$

Agora, elimine aquilo que aparece repetido no numerador e no denominador. Para facilitar esse processo, as potências podem ser expandidas. Observe:

$$\frac{(2)(2)(a)(a)(a)(a+b)(a+b)}{(2)(2)(2)(2)(a)(a)(a+b)(a-b)}$$

Em azul, estão os fatores que se repetem e que serão eliminados. O resultado será o seguinte:

$$\frac{a(a+b)}{(2)(2)(a-b)}$$

Essa é a forma simplificada da fração algébrica dada como exemplo.

**Adição e subtração de fração algébrica:**

As duas operações são feitas da mesma maneira. Se os denominadores das frações algébricas forem iguais, basta somar/subtrair os numeradores e repetir os denominadores no resultado. Por exemplo:

$$\frac{4xy}{k}+\frac{2xy}{k}=\frac{4xy+2xy}{k}=\frac{6xy}{k}$$

AUXILIA
PREPARATÓRIO PARA O ENEM

$$\frac{9xy}{k} - \frac{2xy}{k} = \frac{9xy - 2xy}{k} = \frac{7xy}{k}$$

Com denominadores diferentes, encontre o m.m.c. dos denominadores, divida-o pelo denominador das frações iniciais e multiplique o quociente pelo numerador das mesmas. Depois é só somar ou subtrair os numeradores obtidos.

**Exemplo:**

$$\frac{2\text{x}}{3} + \frac{1\text{x}}{2} = \frac{4x + 3x}{6} = \frac{7x}{6}$$

**MMC (3,2) = 6**

| | |
|---|---|
| **3 – 2** | **3** |
| **1 – 2** | **2** |
| **1 1** | **6** |

$$\frac{9y}{3} - \frac{5y}{2} = \frac{18y - 15y}{6} = \frac{3y \div 3}{6 \div 3} = \frac{1y}{2}$$

**MMC(3-2) = 6**

| | |
|---|---|
| **3 – 2** | **2** |
| **3 – 1** | **3** |
| **1 – 1** | **6** |

**Multiplicação de frações Algébricas:**

A multiplicação de frações algébricas é exatamente igual à multiplicação de frações numéricas: multiplica-se numerador por numerador e denominador por denominador. A diferença é que, após a multiplicação, é importante analisar se o resultado obtido pode ser simplificado. Esse processo de simplificação é semelhante ao que discutimos no início do texto. Por exemplo:

$$\frac{2xy}{3ab^2} \cdot \frac{9a^2b}{6x} = \frac{2.x.y}{3.a.b.b} \cdot \frac{3.3.a.a.b}{2.3.x} = \frac{ay}{b}$$

**Divisão de fração algébrica:**

Também é feita de modo idêntico à divisão entre frações numéricas. Para tanto, multiplique a primeira fração pelo inverso da segunda. Para encontrar o inverso de uma fração, basta trocar numerador e denominador de lugar. Observe a divisão de frações no exemplo a seguir:

$$\frac{15m^2}{7pq} \div \frac{5m}{p^2} = \frac{3.5.m.m}{7pq} \cdot \frac{p.p}{5.m} = \frac{3mp}{7q}$$

**Exercícios:**

1. Desenvolva os seguintes produtos notáveis:
a) $(x + y)^2$
b) $(2a + b)^2$
c) $(x - 5y)^2$
d) $(3 - a^3)^2$

2. Sabe-se que $x^2 + y^2 = 20$ e $xy = 3$, qual é o valor de $(x + y)^2$?

3. Fatore os polinômios a seguir:

a) $2x + 10$

b) $5a^3 + 20a^2x$

c) $ab + ac + bx + cx$

d) $x + y - ax - ay$

4. A expressão

$$x^2 - 2x - 2y - 2z + xy + xz$$

É igual a

a) $(1 - y - z)(x^2 - 2)$

b) $(x - y + z)(2 + x)$

c) $(x + y + z)(2 - x)$

d) $(x + y + z)(x - 2)$

e) $(x - y - z)(x + 2)$

5. Simplifique as expressões algébricas abaixo:

a) $\dfrac{x^2-4}{2x+4}$

b) $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}$

c) $\dfrac{25a^2+30ab+9b^2}{25a^2-9b^2}$

6. Calcule o produto de $\dfrac{2a}{x-3}+\dfrac{a}{x}-\dfrac{2ax}{x^2-3x}$ por $\dfrac{x}{2a}$

7. Efetue as adições e subtrações entre frações algébricas:

a) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x^2+x}+\dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{3a}{x}-\dfrac{5a}{4x}+\dfrac{7a}{2x}$

c) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x+1}$

8. Efetue as multiplicações e divisões abaixo:

a) $\dfrac{2x-2y}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{x^2+2xy+y^2}{4x+4y}$

b) $\dfrac{5a^2-5}{6a-3}\cdot\dfrac{2a-1}{10a^2-10}$

c) $\dfrac{a^2-b^2}{3ab^2}:\dfrac{a^2+2ab+b^2}{6a^2b}$

d) $\dfrac{x^2-xy}{xy+y}:\dfrac{xy-y^2}{x^2+x}$

# Semana 2

**Equações:**

**Equação de 1° Grau:**

Uma equação do primeiro grau é uma expressão em que o grau da incógnita é 1, isto é, o expoente da incógnita é igual a 1. Podemos representar uma equação do primeiro grau, de maneira geral, da seguinte forma:

$$ax + b = 0$$

No caso acima, *x* é a incógnita, ou seja, o valor que devemos encontrar, e *a* e *b* são chamados de coeficientes da equação e pertencem aos reais. O valor do coeficiente $a \neq 0$.

**Exemplos de equações do 1º grau**

Veja aqui alguns exemplos de equações do primeiro grau com uma incógnita:

a) $3x + 3 = 0$

b) $3x = x(7+3x)$

c) $3(x - 1) = 8x + 4$

Note que, em todos os exemplos, a potência da incógnita x é igual a 1 (quando não há número na base de uma potência, quer dizer que o expoente é um, ou seja, $x = x^1$).

Em uma equação, temos uma igualdade, a qual separa a equação em dois membros. Do **lado esquerdo** da igualdade, vamos ter o **primeiro membro**, e do **lado direito**, o **segundo membro**.

$$ax + b = 0$$

**(1º membro)** = **(2º membro)**

Para manter a igualdade sempre verdadeira, devemos operar tanto no primeiro membro como no segundo, ou seja, se realizarmos uma operação no primeiro membro, devemos realizar a mesma operação no segundo membro. Essa ideia recebe o nome de **princípio da equivalência.**

$$15 = 15$$

$$15 + 3 = 15 + 3$$

$$18 = 18$$

$$18 - 30 = 18 - 30$$

$$-12 = -12$$

Veja que a igualdade permanece verdadeira desde que operemos de maneira simultânea nos dois membros da equação.

O princípio da equivalência é utilizado para determinar o valor da incógnita da equação, ou seja, determinar a raiz ou solução da equação. Para encontrar o valor de *x*, **devemos utilizar o princípio da equivalência para isolar o valor da incógnita**.

Veja um exemplo:

$$2x - 8 = 3x - 10$$

O primeiro passo é fazer com que o número – 8 desapareça do primeiro membro. Para isso, vamos somar o número 8 em ambos os lados da equação.

$$2x - \cancel{8} + \cancel{8} = 3x - 10 + 8$$

$$2x = 3x - 2$$

O próximo passo é fazer com que 3x desapareça do segundo membro. Para isso, vamos subtrair 3x em ambos os lados.

$$2x - 3x = \cancel{3x} - 2 - \cancel{3x}$$

$$-x = -2$$

Como estamos à procura de x, e não de – x, vamos agora multiplicar ambos os lados por (– 1).

$$(-1) \cdot (-x) = (-2) \cdot (-1)$$

$$x = 2$$

O conjunto solução da equação é, portanto, S = {2}.

**Exemplo utilizando problema:**

O dobro de um número adicionado com 5 é igual a 155. Determine esse número.

**Solução:**

Como desconhecemos o número, vamos chamá-lo de *n.* Sabemos que o dobro de qualquer número é duas vezes ele mesmo, logo o dobro de *n* é 2n.

$$2n + 5 = 155$$

$$2n = 155 - 5$$

$$2n = 150$$

$$n = 150/2$$

$$n = 75$$

Logo, que estamos procurando é 75.

**Equação 2° Grau:**

A equação do 2º grau é caracterizada por um polinômio de grau 2, ou seja, um polinômio do tipo $ax^2+bx+c$, em que *a*, *b* e *c* são números reais. Ao resolvermos uma equação de grau 2, estamos interessados em encontrar valores para a incógnita *x* que torne o valor da expressão igual a 0, que são chamadas de raízes, isto é, $ax^2 + bx + c = 0$.

A equação de 2º grau pode ser representada por $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$, em que os coeficientes *a*, *b* e *c* são números reais, com $a \neq 0$.

**Exemplos**

a) $2x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow a = 2$; $b = 4$ e $c = -6$

b) $x^2 - 5x + 2 = 0 \rightarrow a = 1$; $b = -5$ e $c = 2$

c) $0,5x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow a = 0,5$; $b = 1$ e $c = -1$

A equação do 2º grau é classificada como **completa** quando todos os coeficientes são diferentes de 0, ou seja, $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

A equação do 2º grau é classificada como **incompleta** quando o valor dos coeficientes *b* ou *c* são iguais a 0, isto é, $b = 0$ ou $c = 0$.

**Exemplos**

a) $2x^2 - 4 = 0 \rightarrow a = 2$; $b = 0$ e $c = -4$

b) $-x^2 + 3x = 0 \rightarrow a = -1$; $b = 3$ e $c = 0$

c) $x^2 = 0 \rightarrow a = 1$; $b = 0$ e $c = 0$

**Atenção:** o valor do coeficiente *a* nunca é igual a 0, caso isso ocorra, a equação deixa de ser do 2º grau.

**Fórmula de Bhaskara:**

Toda equação do segundo grau pode apresentar até duas soluções diferentes. Em todos os casos estas soluções podem ser obtidas pela fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Raízes de uma equação do 2º grau:**

Para resolvermos uma equação do 2º grau é necessário que encontremos as raízes da equação. As raízes são valores que quando substituímos nas incógnitas, tornam a sentença verdadeira. Assim, as raízes da equação formam o conjunto solução ou o conjunto verdade da equação.

As soluções da equação do segundo grau são chamadas de raízes da equação, sobretudo por apresentar na fórmula de Bhaskara uma radiciação. São apresentadas de forma separadas por $x_1$ e $x_2$. Onde:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dentro do radical da fórmula de Bhaskara temos ***b² – 4ac***, chamado de discriminante. Ele é representado pela letra grega maiúscula delta (**Δ**). O delta determina o total de soluções da equação do segundo grau no conjunto dos números reais.

Assim:

- Se **Δ > 0**, então a equação admite várias soluções em **R**;
- Se **Δ = 0**, então a equação admite uma única solução em **R**;

- Se **$\Delta < 0$**, ou seja, **$\Delta$** for negativo, a equação **não** admite solução em **R**.

**Equação do 2º grau (segundo grau) completa e incompleta:**

Uma equação do 2º grau é chamada de completa quando os coeficientes ***b*** e ***c*** são diferentes de zero.

**Exemplos:**

**$2x^2 + 3x + 3 = 0$**

**$x^2 + x + 1 = 0$**

São equações completas.

Uma equação do 2º grau é chamada de incompleta quando os coeficientes ***b*** ou ***c*** forem iguais a zero, basta um deles ser igual a zero, ou ambos serem iguais a zero.

**Exemplos:**

**$x^2 - 3 = 0$ ($b = 0$)**

**$2x^2 + x = 0$ ($c = 0$)**

**$5x^2 = 0$ ($b = 0$ e $c = 0$)**

São equações incompletas.

**Como resolver uma equação do segundo grau:**

Para resolver uma equação de grau 2, precisamos identificar o tipo da equação. Se for completa, resolveremos de uma forma e se for incompleta resolveremos de outra forma. Vamos aprender todas elas.

**Resolução de uma equação do segundo grau completa:**

Para resolver uma equação completa, a ideia é que comecemos a resolver pelo discriminante, e assim podemos resolver em dois passos a equação:

- Primeiro passo é encontrar o valor do discriminante: **$\Delta = b^2 - 4ac$**

- Então o segundo passo só deve ser resolvido se o valor de discriminante for maior ou igual a zero. Caso seja, usamos a expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Se o valor do discriminante for negativo, não ha como realizar o segundo passo levando em consideração o conjunto dos números reais. Portanto, a equação não possui uma solução real.

Vamos ver um exemplo:

Encontre a solução para a seguinte equação: **x² – 5x + 6 = 0**.

**Resposta:**

Observe que temos uma equação do segundo grau completa. Primeiro vamos encontrar os coeficientes da equação, isto é, os valores de **a**, **b** e **c**.

**x² – 5x + 6 = 0**

**a = 1, b = –5 e c = 6**

Vamos executar os passos para resolver essa equação:

**Primeiro passo**: (**Δ = b² – 4ac**)

**Δ = (-5)² – 4.1.6 = 25 – 24 = 1 (Δ > 0)**

Como delta é maior que zero, vamos realizar o segundo passo.

**Segundo passo**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Temos que substituir na expressão acima os valores para os coeficientes **a**, **b**, e o resultado do cálculo do descriminante **Δ**. Logo,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \times 1}$$

AUXILIA

PREPARATÓRIO PARA O ENEM

Agora temos que analisar em relação aos sinais de mais (+) e de menos (-). Para o sinal de mais vamos chamar a expressão de $\mathbf{x_1}$ e para o sinal de menos vamos chamar de $\mathbf{x_2}$.

Para $\mathbf{x_1}$ temos:

$$x_1 = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Para $\mathbf{x_2}$ temos:

$$x_2 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Na expressão já tínhamos o **-b** e ao adicionar o **-5** ficou **-(-5)**, então **–(–5) = 5**. E a raiz quadrada de 1 é 1, esse 1 vem do resultado do primeiro passo que foi o cálculo do descriminante **Δ**. No mais não há segredo.

Dessa forma, encontramos as duas raízes que formam o conjunto solução da equação dada neste exemplo. O conjunto solução que resolve a equação, que torna ela verdadeira.

Logo, **S = {2, 3}**

Veja:

Se substituirmos as raízes, veremos que elas realmente resolvem a equação.

$$\begin{aligned} 2^2 - 5\times 2 + 6 = 0 \Rightarrow \\ 4 - 10 + 6 = 0 \Rightarrow \\ 4 - 4 = 0 \Rightarrow \\ 0 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Temos uma igualdade para a raiz de número 2.

$$\begin{aligned} 3^2 - 5 \times 3 + 6 = 0 \Rightarrow \\ 9 - 15 + 6 = 0 \Rightarrow \\ 9 - 9 = 0 \Rightarrow \\ 0 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Também temos uma igualdade para a raiz de número 3. Portanto, encontramos realmente as raízes que resolvem essa equação.

Vamos ver outro exemplo para o caso em que **Δ = 0**.

Encontre as raízes da equação: **$4x^2 - 4x + 1 = 0$**.

Pela equação temos os coeficientes:

**a = 4**, **b = -4** e **c = 1**

**Primeiro passo**:

Vamos calcular o discriminante (**$\Delta = b^2 - 4ac$**):

**$\Delta = (-4)^2 - 4 . 4 . 1 = 16 - 16 = 0$**

**Segundo passo**:

Substituir os valores na expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Substituindo os valores aos coeficientes correspondentes, temos:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \times 4} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Portanto, **S = {½}**.

Perceba que quando **Δ = 0** temos somente uma raiz que resolve a equação.

Vamos ver agora um exemplo para o caso em que **Δ < 0**, ou seja, **Δ** negativo.

Calcule as raízes da equação: **$5x^2 + x + 6 = 0$**.

Os coeficientes da equação são:

**$a = 5$, $b = 1$** e **$c = 6$**

Primeiro passo é calcular o **Δ** (**$\Delta = b^2 - 4ac$**):

$$\Delta = 1^2 - 4 \,.\, 5 \,.\, 6 = 1 - 120 = -119$$

Como temos **$\Delta < 0$**, ou seja, o valor do descriminante é negativo, não conseguiremos realizar o segundo passo. Dessa forma, não há como encontrar raízes para essa equação no conjunto dos reais.

Portanto, o conjunto solução para essa equação é vazio: **$S = \{\} = \emptyset$**

**Resolução de uma equação do segundo grau incompleta**

Equações do segundo grau do tipo **$ax^2 + bx = 0$** e **$ax^2 + c = 0$**, com **$a \neq 0$**, são chamadas de equações incompletas, pois não possuem todos os parâmetros como uma equação completa.

Uma equação incompleta pode também ser resolvida utilizando a fórmula de Bhaskara, da mesma forma que resolvemos uma equação completa, caso o aluno entenda ser mais fácil usar a fórmula.

Dessa forma, temos que considerar **$c = 0$** no primeiro caso e **$b = 0$** no segundo caso.

Vamos aqui mostrar uma maneira mais eficiente e mais rápida de resolver uma equação incompleta. Vamos ver:

Considerem as equações abaixo:

**$3x^2 - 2x = 0$**

**$x^2 + x = 0$**

**$8x^2 + 6x = 0$**

As equações acima são da forma **$ax^2 + bx = 0$**, com **$a \neq 0$**.

Todas as equações que não possuem o termo independente ***c***, como as equações acima, ou seja, **c = 0**, admite **x = 0** como solução da equação.

Como todos os termos dependem da variável **x**, e **x** é nulo, os termos também serão anulado. Isso vale para qualquer equação independente do grau.

Encontramos, assim, uma das raízes da equação. O zero (0) é uma das soluções das equações acima. Para achar a outra raiz vamos fatorar o primeiro membro da equação:

$$\begin{aligned} &ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow \\ &ax^2 = -bx \Leftrightarrow \\ &x = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Dividimos os dois lados por **x**.

Dessa forma, o conjunto solução para equações do tipo **$ax^2 + bx = 0$** é dado por:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow S = \{0, -\frac{b}{a}\}$$

Agora veja como resolver as equações dadas no exemplo acima utilizando esta fórmula.

**$3x^2 - 2x = 0$**:

a = 3, b = -2

Assim, uma solução é 0, a outra é **$-b/a = -(-2)/3 = \frac{2}{3}$**

Logo: **$S = \{0, \frac{2}{3}\}$**

Perceba que sabendo disso resolvemos rapidamente sem precisar fazer todos os passos da fórmula de Bhaskara. Em uma prova esse procedimento pode economizar tempo.

Para equações do tipo **$ax^2 + c = 0$**, com **$a \neq 0$**, é similar. Mas neste caso **$x = 0$** não é solução da equação. Vamos então encontrar uma formula que resolva equações incompletas, com **$b = 0$**.

Fatorando **$ax^2 + c = 0$**, temos:

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow$$
$$ax^2 = -c \Leftrightarrow$$
$$x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow$$
$$x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Portanto, para equação do segundo grau incompleta, do tipo **$ax^2 + c = 0$**, o conjunto solução é:

$$S = \left\{ \pm \sqrt{-\frac{c}{a}} \right\}$$

Essa fórmula encontra as raízes da equação se **a** e **c** tiverem sinais diferentes. E **S = Ø**, se **a** e **c** tiverem o mesmo sinal, para **$x \in \mathbb{R}$**.

**Exemplo**:

**$x^2 - 2 = 0$**:

a = 1, c= -2

Solução:

$$x = \sqrt{-\left(-\frac{2}{1}\right)} = \sqrt{2}$$
$$S = \left\{ \pm \sqrt{2} \right\}$$

**Soma e Produto: Raízes da Equação do 2° Grau:**

**Soma e produto** é uma técnica que podemos utilizar para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau sem utilizar a fórmula de Bhaskara.

Se a equação possui raízes reais, podemos aplicar o seguinte método prático para encontrá-las:

Soma das raízes: **($x_1 + x_2$)**

Produto das raízes: **($x_1 * x_2$)**

**Soma:**

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

**Produto:**

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

**Exemplo**:

Seja a equação **$x^2 - 5x + 6 = 0$**, encontre as raízes que resolvem a equação. Veja o passo-a-passo sobre como fazer:

**Passo 1**:

Anotar os valores dos coeficientes da equação:

a = 1, b = -5 e c = 6

**Passo 2**:

Aplicar as fórmulas que definimos acima:

**Soma**:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-5)}{1} = 5$$

**Produto**:

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$$

**Passo 3**:

Encontrar valores em que a soma (**S**) seja igual a **5** e o produto (**P**), seja igual a **6**. É ideal começar pelos números candidatos ao produto, pois fica mais fácil.

Você deve perguntar: quais os números que eu multiplico e chego no resultado do produto?

Números candidatos para o produto:

**2 . 3 = 6**

1 . 6 = 6

(-1) . (-6) = 6

Os números candidatos para a soma, dos números acima, é a primeira opção, pois:

**2 + 3 = 5**

Portanto, as raízes que formam o conjunto solução da equação: **$x^2 - 5x + 6 = 0$** são **2** e **3**.

Logo, **S = {2, 3}**.

Vamos conferir:

**2**: $2^2 - 5 . 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

**3**: $3^2 - 5 . 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

**Equações Fracionárias:**

São as equações que tem frações com variável no seu denominador.

**Exemplo:**

$$\frac{2(x+2)+5}{x} = \frac{57}{3x}$$

**Como Resolver Equações Fracionárias:**

**Exemplo 1:**

$$\frac{2}{x} = \frac{x-1}{x+2}$$

Como os denominadores precisam ser diferentes de zero, teremos: $x \neq 0$ e $x \neq -2$

Para resolver essa equação fracionária devemos aplicar a propriedade das proporções:

$$\mathbf{2(x + 2) = x(x - 1)}$$

Agora precisamos aplicando a propriedade distributiva:

$$2x + 4 = x^2 - x$$

Passando dos os termos para o lado esquerdo da equação teremos:

$$0 = x^2 - x - 2x - 4$$

Somando os termos semelhantes chegamos em uma equação do segundo grau.

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bháskara:

$a = 1$, $b = -3$ e $c = -4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{((-3)^2 - 4.1.(-4))}}{2.1}$$

AUXILIA

PREPARATÓRIO PARA O ENEM

$$x = \frac{+3 \pm \sqrt{(9 + 16)}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x' = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x'' = \frac{3 - 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Chegamos finalmente ao resultado das raízes: **x = 4** e **x = – 1**

**Exemplo 2:**

$$\frac{3}{2} = \frac{5}{x} + \frac{1}{5}$$

Nessa equação temos x no denominador e esse nunca poderá ser igual a zero logo: $x \neq 0$.

Vamos começar tirando mínimo múltiplo comum dos denominadores **2, 5** , que é **10.** Logo após faremos a soma das frações do lado esquerdo.

$$\frac{3}{2} = \frac{10.5 + 2x.1}{10x}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{50 + 2x}{10x}$$

Agora vamos aplicar:

$$3.10x = 2(50 + 2x)$$

Resolvendo a equação, temos:

$$30x = 100 + 4x$$
$$30x - 4x = 100$$
$$26x = 100$$

$$x = \frac{100}{26}$$

Que simplificando fica:

$$x = \frac{50}{13}$$

Logo a raiz da equação é $\frac{50}{13}$

**Exemplo 3:**

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$$

Nessa equação temos x, x-2, x+2 e $x^2–4$ nunca poderão ser igual a zero por fazerem parte dos denominadores dos termos da equação logo:

$$x \neq 0$$

$$x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$$

$$x+2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$$

$$x^2 - 4 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 4 \rightarrow x \neq \pm \sqrt{4} \rightarrow x \neq \pm 2$$

Para resolver essa equação fracionária precisamos do conhecimento de um dos produtos notáveis:

**O produto da soma pela diferença de dois termos**

**Se tivermos o produto da soma pela diferença de dois termos, poderemos transformá-lo numa diferença de quadrados.**

$$(a+b).(a-b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = \mathbf{a^2 - b^2}, \text{ ou seja:}$$

$$\mathbf{(a+b).(a-b) = a^2 - b^2}$$

***O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos o quadrado do segundo termo.***

**Nesse caso temos: $x^2–4 = (x+2)(x–2)$**

AUXILIA
PREPARATÓRIO PARA O ENEM

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+2}=\frac{1}{(X+2)(x-2)}$$

Tirando o mínimo múltiplo comum entre x , x–2 e x+2 no lado direito da equação fracionária teremos:

$$\frac{2(x+2)(x-2)+1.x(x+2)+2.x(x-2)}{x(x+2)(x-2)}=\frac{1}{(x+2)(x-2)}$$

Podemos agora verificar que ao aplicar a propriedade “produto dos meios = produto dos extremos”, poderemos simplificar os denominadores!

$$\frac{2(x+2)(x-2)+1.x(x+2)+2.x(x-2)}{x\cancel{(x+2)(x-2)}}=\frac{1}{\cancel{(x+2)(x-2)}}$$

Passando o x multiplicando o número 1 (lado direito):

$$2.(x+2).(x-2) + 1x.(x+2) + 2x.(x-2) = 1.x$$

Aplicando a propriedade distributiva e somando:

$$2(x^2-4) +1x.(x+2) + 2x.(x-2) - x = 0$$

$$2x^2 - 8 + x^2 + 2x + 2x^2 - 4x - x = 0$$

$$5x^2 - 3x - 8 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bháskara:

a = 5, b = – 3 e c = – 8.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{((-3)^2 - 4.5.(-8))}}{2.5}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(9 + 160)}}{10}$$

$$x' = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{10}$$

$$x = \frac{3 \pm 13}{10}$$

$$x' = \frac{3 + 13}{10}$$

$$x' = \frac{16}{10}$$

$$x' = 8/5$$

$$x'' = \frac{3 - 13}{10}$$

$$x'' = \frac{-10}{10}$$

$$x'' = -1$$

Chegamos finalmente ao resultado das raízes: 8/5 e – 1**.**

**Sistemas de equações:**

Um sistema de equações é um conjunto de equações com uma ou mais variáveis que tem única solução, ou seja, são equações que devem ser resolvidas simultaneamente.

**Exemplo:**

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

**Classificação de Sistemas:**

Um sistema é **possível e determinado**, ou seja, tem uma única solução quando o número de incógnitas é o mesmo número de equações e além disso os número que acompanham as variáveis não são proporcionais.

Exemplo:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

Neste exemplo, os únicos números que satisfazem o sistema são x=2 e y=3

Um sistema é **possível e indeterminado**, ou seja, tem mais do que uma única solução quando o número de incógnitas é maior que o número de equações ou os números que acompanhamos as incógnitas e o termo independente são proporcionais

**Exemplo:**

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-2 \end{cases}$$

Na primeira equação x=2 e y=2 é uma solução possível, mas x-1 e y=3 também. Já na segundo temos x=2, y=2 e z=2 ou x=2, y=1 e z=3.

Um sistema é **impossível** quando os números que acompanham as incógnitas são proporcionais e os termos independentes não.

**Exemplo:**

$$\begin{cases} x=16 \\ x=-3 \end{cases}$$

**Resolução de sistemas Lineares:**

Uma das estratégias para a resolução de sistemas é o método substituição.

Estratégia:

- Isolar uma das incógnitas em uma das equações.
- Substituir essa mesmas incógnitas em outra equação e resolvê-la como uma equação de 1º grau.

Logo após substituir este valor encontrado em qualquer uma das equações e encontrar a outra incógnita.

**Exemplo:**

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

Trabalharemos com a segunda equação:

$$3x+y=9$$

Isolando y:

$$y=9-3x$$

Logo após, substituímos esse valor de y na primeira equação:

$$4x+2(9-3x)=14$$

E agora resolvemos a primeira equação:

$$4x+18-6x=14$$

$$4x-6x=14-18$$

$$-2x=-4$$

$$x=2$$

Por último substituímos x na segunda equação:

$$3.(2)+y=9$$

$$6+y=9$$

$$y=9-6$$

$$y=3$$

Logo, a solução se dá em x=2 e y=3

Agora vamos abordar o método da soma(ou subtração)

Estratégias:

- Podemos multiplicar uma equação por qualquer número, desde que os dois lados da equação sejam multiplicados pelo mesmo número.
- Podemos somar mais de uma equação do sistema a fim de isolarmos uma variável.
- A partir do ponto em que encontramos o valor de uma variável podemos resolver da mesma forma que na substituição.

**Exemplo:**

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

Vamos tentar isolar a incógnita y. Para isso vamos escolher números pelos quais multiplicar as equações:

Uma das estratégias é multiplicarmos cada equação pelo número que está multiplicando o x na outra mas em uma das delas multiplicamos pelo número com o sinal contrário.

Neste caso, multiplicamos a primeira equação por -3 já que o 3 multiplica o x na primeira e a segunda por 4.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 14 & \times(-3) \\ 3x + y = 9 & \times(4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 & \times(-3) \\ 3x + y = 9 & \times(4) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -12x - 6y = -42 \\ 12x + 4y = 36 \end{cases}$$

Logo após, somamos uma equação com a outra:

$$
+\begin{cases} -12x - 6y = -42 \\ 12x + 4y = 36 \end{cases}
$$
$$
\overline{0x - 2y = -6}
$$

$$-2y = -6$$

Agora resolvemos a equação:

-2y=-6

y=-6/-2

y=3

Logo após, resolvemos assim como no método da substituição, substituindo o valor de y encontrado em qualquer uma das equações:

4x+2y=14

4x+2(3)=14

4x+6=14

4x=14-6

4x=8

x=2

**Sistemas de mais de duas equações:**

Para resolver sistemas de mais de duas equações resolvemos da mesma forma do que sistemas de duas equações, somente temos que repetir os passos.

Tentaremos reduzir o número de variáveis de etapa em etapa e poderemos substituir as equações no sistema.

**Exemplo:**

$$\begin{cases} -2x + y + z = 8 \\ 5x - 4y + z = -6 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

Será utilizada o método da substituição de duas em duas equações. Utilizaremos a primeira e a segunda equação primeiramente e logo após a primeira e a terceira equação. Logo após, substituiremos pela segunda e a terceira equação.

Tentaremos “eliminar” o y. Como os números multiplicando o y na primeira equação é 1 e na terceira é 1, somando elas o y será zerado. Para a soma da primeira com a segunda equação podemos multiplicar o y por 4.

$$\begin{cases} -2x + y + z = 8(\times 4) \\ 5x - 4y + z = -6(\times 1) \end{cases}$$
$$\overline{-3x + 5z = 26}$$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 8 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$
$$\overline{-x + 0y + 2z = 11}$$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 8 \\ -3x + 5z = 26 \\ -x + 2z = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 5z = 26(\times 1) \\ -x + 2z = 11(\times -3) \end{cases}$$
$$\overline{0x - z = -7}$$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 8 \\ -x + 2z = 11 \\ -z = -7 \end{cases}$$

Agora, como temos uma linha com uma variável podemos isolá-la e substituindo nas equações restantes:

$$-z=-7$$

$$z=7$$

Logo após, substituímos nas equações acima para achar o valor de x:

$$-x+2z=11$$

$$-x+2(7)=11$$

$$-x+14=11$$

$$-x=11-14$$

$$-x=-3$$

$$x=3$$

Agora iremos achar o valor de y:

$$-2x+y+z=8$$

$$-2(3)+y+7=8$$

$$-6+y+7=8$$

$$y=8-7+6$$

$$y=7$$

Logo, a solução é $x=3$, $y=7$ e $z=7$

**Exercicios:**

1.Existem três números inteiros consecutivos com soma igual a 393. Que números são esses:

*2.* Resolva as equações a seguir:

a)18x - 43 = 65

b) 23x - 16 = 14 - 17x

c) 10y - 5 (1 + y) = 3 (2y - 2) - 20

*d)* $x(x + 4) + x(x + 2) = 2x^2 + 12$

e) (x - 5)/10 + (1 - 2x)/5 = (3-x)/4

f) $4x (x + 6) - x^2 = 5x^2$

3. Determine um número real "***a***" para que as expressões (3a + 6)/ 8 e (2a + 10)/6 sejam iguais:

4. Dentre os números -2, 0, 1, 4, quais deles são raízes da equação x2-2x-8= 0:

5. Identifique os coeficientes de cada equação e diga se ela é completa ou não:

a) $5x^2 - 3x - 2 = 0$

b) $3x^2 + 55 = 0$

c) $x^2 - 6x = 0$

d) $x^2 - 10x + 25 = 0$

6. Resolva as seguintes equações do 2º grau:

a) $3x^2 – 7x + 4 = 0$
b) $9y^2 – 12y + 4 = 0$
c) $5x^2 + 3x + 5 = 0$

7. Resolva a equação fracionária, sendo x ≠ 0:

$$\frac{3}{x}+\frac{2}{5}=\frac{3}{4}$$

8. Uma confecção produzia diariamente 200 calças. Após a contratação de 20 costureiras, a fábrica passou a produzir 240 calças. Quantas costureiras trabalhavam nessa confecção antes dessa contratação:

9. A população de uma cidade A é três vezes maior que a população da cidade B. Somando a população das duas cidades temos o total de 200.000 habitantes. Qual a população da cidade A:

10. Cláudio usou apenas notas de R$ 20,00 e de R$ 5,00 para fazer um pagamento de R$ 140,00. Quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo que no total foram 10 notas:

**Inequação de 1° Grau:**

Quando estudamos equações do 1º grau lidamos com igualdades, ou seja, expressões em que precisamos encontrar um valor para a variável em questão. Porém, quando tratamos de uma **inequação** a nossa expressão conterá, ao invés do sinal de igual (=), outros sinais que determinarão uma relação de ordem entre os seus elementos. Geralmente, o conjunto solução de inequações será definido no conjunto dos números reais. Abaixo as desigualdades e relações de ordem de números Reais:

- Se $x \geq y$, dizemos que x é maior ou igual a y;
- Se $x \leq y$, dizemos que x é menor ou igual a y;
- Se $x > y$ , então x é maior do que y;
- Se $x < y$, então x é menor do que y;
- Se $x \neq y$, dizemos que x é diferente de y;

***Exemplo 1:***

Vamos resolver a equação:

$3x+4<x-8$

Inicialmente solucionamos como uma equação do primeiro grau comum, isolando as variáveis conservando a regra de sinais:

$$3x-x<-4-8$$

AUXILIA
PREPARATÓRIO PARA O ENEM

$$2x<-12$$

$$x<-12/2$$

$$x<-6$$

Sendo assim, o conjunto solução da equação será:

$$S=\{x\in R:x<-6\}$$

A solução também pode ser escrita na notação de intervalos reais ou representado na reta real como:


$$S=]-\infty,-6[$$

**Exemplo 2:**

Agora neste exemplo, note a solução da equação $3x+4\leq 7x-8$:

$$3x-7x\leq -4-8$$

$$-4x\leq -12$$

Perceba que neste ponto, ambos os lados da desigualdade estão negativos. Convenientemente, podemos trocar o sinal de ambos os lados da igualdade multiplicando toda a expressão por (-1). Mas, numa desigualdade, quando invertemos o sinal de toda a expressão, também invertemos a desigualdade, o que nos leva a:

$$4x\geq 12$$

$$x\geq \frac{12}{4}$$

$$x\geq 3$$

Escrevendo então o conjunto solução desta equação nas três possíveis representações temos:

$$S=\{x\in R:x\geq 3\}$$

$$S=[3,+\infty[$$


**Inequação 2° Grau:**

Para resolver uma inequação do 2° grau, devemos aplicar o método do estudo da variação do sinal de uma função do segundo grau.

Uma equação do 2° grau tem a forma $ax^2 + bx + c = 0$, já a inequação do 2° grau tem formato semelhante, diferenciando-se apenas pelo fato de o sinal de = ser substituído por alguma das desigualdades: > (maior que), < (menor que), ≥ (maior ou igual a), ≤ (menor ou igual a).

A mesma ideia vista no estudo da variação do sinal de uma função do segundo grau deve ser aplicada para a resolução de uma inequação de 2° grau.

Vejamos um exemplo de inequação para analisar como é feito o estudo de sinal:

**Exemplo 1:**

$x^2 + x – 2 \geq 0$

Utilizaremos a fórmula de Bhaskara para resolver a função quadrática $f(x) = x^2 + x – 2$:

$\Delta = b^2 – 4.a.c$

$\Delta = 1^2 – 4.1.(– 2)$

$\Delta = 1 + 8$

$\Delta = 9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2.1}$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$x_1 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

$x_2 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Analisando o sinal de y, podemos concluir que o gráfico possui concavidade para cima, pois a = 1 > 0. Podemos ainda afirmar que, como Δ = 9 > 0, a função tem duas raízes (1 e – 2). Observe a seguir o estudo de sinal para f(x):

x= -3

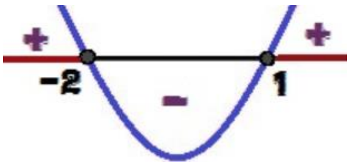
f(-3)= $(-3)^2$+3 – 2= 9+3 -2= 12 – 2= 10, logo é positivo

x= 0

f(0)=$(0)^2$+0 -2= -2, logo é negativo

x=2

f(2)= $(2)^2$+2 -2=4+2 -2= 4, logo é positivo




Para que valores de x teremos f(x) ≥ 0? Esses valores são 1 ≤ x ≤ – 2 e estão destacados em vermelho na imagem acima.

**Exercícios:**

1) Resolva as inequações a seguir:

a) 2x + 2 ≤ x + 1
b) 3x + 4 > 0
c) (x + 1)(x + 3) ≥ 0
d) $3x^2$ + 10x + 7 < 0

2) Quais são os resultados naturais da inequação a seguir?

2x – 18 > 4x – 38

a) x > 10

b) x < 10

c) $x = 10$

d) x é um número natural

e) $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 3$, $x = 5$, $x = 6$, $x = 7$, $x = 8$ e $x = 9$

3) O conjunto solução da inequação $(x – 2)^2 < 2x – 1$, considerando como universo o conjunto dos reais, está definido por:

a) $1 < x < 5$

b) $3 < x < 5$

c) $2 < x < 4$

d) $1 < x < 4$

e) $2 < x < 5$

# Semana 3

**Determinantes:**

O determinante de uma matriz possui várias aplicações atualmente. Utilizamos o determinante para verificar se três pontos estão alinhados no plano cartesiano, para calcular áreas de triângulos, para resolução de sistemas lineares, entre outras aplicações na matemática. O estudo de determinantes não se limita à matemática, há algumas aplicações na física, como no estudo de campos elétricos.

Calculamos determinantes somente de matrizes quadradas, ou seja, matrizes em que a quantidade de colunas e a quantidade de linhas são iguais. Para calcular o determinante de uma matriz, precisamos analisar a ordem dela, ou seja, se ela é 1x1, 2x2, 3x3 e assim sucessivamente, quanto maior a sua ordem, mais difícil será encontrar o determinante. No entanto, há métodos importantes realizar-se o exercício, como a regra de Sarrus, utilizada para calcular-se determinantes de matrizes 3x3.

**Determinante de matriz de ordem 1:**

Uma matriz é conhecida como de ordem 1 quando possui exatamente uma linha e uma coluna. Quando isso ocorre, a matriz possui um único elemento, o a11. Nesse caso o determinante da matriz coincide com esse seu único termo.

A = (a11)

det(A) = | a11 | = a11

Exemplo:

A = [2]

det(A) = |2| = 2

Para calcular-se determinantes de matrizes de ordem 1, é necessário então apenas conhecer o seu único elemento.

**Determinantes de matrizes de ordem 2:**

A matriz quadrada 2x2, conhecida também como matriz de ordem 2, possui quatro elementos, nesse caso, para calcular o determinante, é necessário conhecermos o que é a diagonal principal e a diagonal secundária.

Para calcular o determinante de uma matriz de ordem 2, calculamos a diferença entre o produto dos termos da diagonal principal e os termos da diagonal secundária. Utilizando o exemplo algébrico que construímos, o det(A) será:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

**Exemplo:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 3 - 10 = -7$$

**Determinante de matriz de ordem 3:**

A matriz de ordem três é mais trabalhosa para obter-se o determinante do que as anteriores, na verdade, quanto maior a ordem de uma matriz, mais difícil será esse trabalho. Nela é necessário utilizar o que conhecemos como regra de Sarrus.

**Regra de Sarrus:**

A regra de Sarrus é um método para calcular-se determinantes de matrizes de ordem 3. É necessário seguir alguns passos, sendo o primeiro duplicar as duas primeiras colunas no final da matriz, conforme o exemplo a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$det(A) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right|$$

Agora vamos multiplicar os termos de cada uma das três diagonais que estão no mesmo sentido da diagonal principal.

$$det(A) = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right|$$

$$det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{23} \cdot a_{23} \cdot a_{23} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - D_s$$

Realizaremos um processo parecido com a diagonal secundária e as outras duas diagonais que estão no mesmo sentido que ela.

$$det(A) = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right|$$

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{23}a_{23}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{22}a_{31})$$
$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{23}a_{23}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Note que os termos da diagonal secundária estão sempre acompanhados com o sinal negativo, ou seja, sempre trocaremos o sinal do resultado da multiplicação dos termos da diagonal secundária.

**Exemplo:**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ 10 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det(B) = \left|\begin{matrix} 1 & 9 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ 10 & 4 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 10 & 4 \end{matrix}\right|$$

$$det(B) = 1 \cdot 7 \cdot 2 + 9 \cdot 8 \cdot 10 + 5 \cdot 3 \cdot 4 - 5 \cdot 7 \cdot 10 - 1 \cdot 8 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 9$$
$$det(B) = 14 + 720 + 60 - 350 - 32 - 54$$
$$det(B) = 794 - 436$$
$$det(B) = 358$$

**Propriedades do determinante**

**1ª propriedade**

Caso uma das linhas da matriz seja igual a 0, então o seu determinante será igual a 0.

**Exemplo:**

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \\ 10 & 4 \end{matrix}\Bigg|$$

$$det(C) = 1 \cdot 0 \cdot 2 + 9 \cdot 0 \cdot 10 + 5 \cdot 0 \cdot 4 - 5 \cdot 0 \cdot 10 - 1 \cdot 0 \cdot 4 - 2 \cdot 0 \cdot 9$$
$$det(C) = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$$

**2ª propriedade**

Seja A e B duas matrizes, det(A·B) = det(A) · det(B).

**Exemplo:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculando os determinantes separados, temos que:

det(A) = 2 · (-6) – 5 · 3

det(A) = -12 – 15 = -27

det(B) = 4 · 1 – 2 · (-2)

det(B) = 4 + 4 = +8

Então det(A) · det(B) = -27 · 8 = -216

Agora vamos calcular det(A·B)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 + (-6) \cdot (-2) & 5 \cdot 2 + (-6) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 16 \\ 17 & -14 \end{pmatrix}$$

$$det(A \cdot B) = -4 \cdot (-14) - 16 \cdot 17$$
$$det(A \cdot B) = 56 - 272 = 216$$

**3ª propriedade**

Seja A uma matriz e A’ uma nova matriz construída trocando-se as linhas da matriz A, então det(A’) = -det(A), ou seja, ao inverter-se a posição das linhas de uma matriz, o seu determinante terá o mesmo valor, porém de sinal trocado.

**Exemplo:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \to A' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$
$$det(A') = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 6 - 4 = 2$$
$$det(A') = -det(A)$$

**4ª propriedade**

Linhas iguais ou proporcionais fazem com que o determinante da matriz seja igual a 0.

**Exemplo:**

Note que, na matriz A, os termos da linha dois são o dobro dos termos da linha um.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right|$$
$$det(A) = 1 \cdot 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 6 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 6 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot (-1)$$
$$det(A) = -4 + 24 + 18 - 24 - 18 + 4 = 0$$

**Exercícios resolvidos:**

**Questão 1 -** (Vunesp) Considerando as matrizes A e B, determine o valor de det(A·B):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) -1

b) 6

c) 10

d) 12

e) 14

**Resolução**
Alternativa E

Sabemos que det(A·B) = det(A) · det(B):

det(A) = 1· 4 – 2 · 3 = 4 – 6 = -2
det(B) = -1 · 1 – 3 · 2 = -1 – 6 = -7
Então temos que:
det(A·B) = det(A) · det(B)
det(A·B) = -2 (-7) = 14

**Questão 2 -** Dada a matriz A, qual deve ser o valor de x para que det(A) seja igual a 0?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) 1/2

b) 1/3

c) 1/9

d) 3
e) 9

**Resolução**
Alternativa B

Calculando o determinante de A, temos que:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{matrix}\Bigg|$$

$$det(A) = 2 + 6x + 0 - 3 - 3x - 0$$
$$det(A) = -1 + 3x$$
$$-1 + 3x = 0$$
$$3x = 1$$
$$x = \frac{1}{3}$$

**Exercícios:**

1. (Unicap – PE) Calcule o valor de x, a fim de que o determinante da matriz A seja nulo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & x & x-7 \end{pmatrix}$$

2. Determine o valor de x para que o determinante da matriz A seja igual a 8.

$$A = \begin{pmatrix} x & -3 \\ x+2 & x-2 \end{pmatrix}$$

3. **(Vunesp)** Dadas as matrizes A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, o determinante da matriz **A.B** é:

a) – 1

b) 6

c) 10

d) 12

e) 14

**Regra de três:**

A regra de três simples e composta é a proporção entre duas ou mais grandezas, que podem ser velocidades, tempos, áreas, distâncias, comprimentos, entre outros. É o método para determinar o valor de uma incógnita quando são apresentados duas ou mais razões, sejam elas diretamente ou inversamente proporcionais.

**As grandezas:**

Dentro da regra de três simples e composta existem grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

Caracteriza-se por grandezas diretas aquelas em que o acréscimo ou decréscimo de uma equivale ao mesmo processo na outra. Por exemplo, ao triplicarmos uma razão, a outra também será triplicada, e assim sucessivamente. Entenda melhor a seguir:

Supondo que cada funcionário de uma microempresa com 35 integrantes gasta 10 folhas de papel diariamente. Quantas folhas serão gastas nessa mesma empresa quando o quadro de colaboradores aumentar para 50?

| **Funcionários** | | **Papéis** |
|---|---|---|
| 35 | --------------- | 10 |
| 50 | -------------- | x |

Ao analisarmos o caso percebemos que o aumento de colaboradores provocará também um aumento no gasto de papel. Logo, essa é uma razão do tipo direta – que deve ser resolvida através da multiplicação cruzada:

$$35x = 50.10$$

$$35x = 500$$

$$x = 500/35 = 14,3$$

Portanto, serão necessários 14,3 papéis para suprir as demandas da microempresa com 50 funcionários.

Por outro lado, as grandezas inversas ocorrem quando o aumento ou diminuição de uma resulta no processo inverso. Ou seja, se uma é quadruplicada, a outra é reduzida pela metade, e assim por diante. Vejamos:

Se 7 pedreiros constroem uma casa grande em 80 dias, apenas 5 deles construirão a mesma casa em quanto tempo?

| **Pedreiros** | | **Dias** |
|---|---|---|
| 7 | --------------- | 80 |
| 5 | ---------------- | x |

AUXILIA
PREPARATÓRIO PARA O ENEM

Nesta situação, é preciso inverter uma das grandezas, pois a relação é inversamente proporcional. Isso acontece porque a diminuição de pedreiros provoca o aumento no tempo de construção.

| Pedreiros | | Dias |
|---|---|---|
| 7 | --------------- | x |
| 5 | ---------------- | 80 |

5x = 80.7

5x = 560

X = 560/5 = 112

Sendo assim, serão 112 dias para a construção da casa com 5 pedreiros.

**Regra de três simples:**

A regra de três simples funciona na relação de apenas duas grandezas, que podem ser diretamente ou inversamente proporcionais. Confira:

**Exemplo 1:**

Para fazer um bolo de limão utiliza-se 250 ml do suco da fruta. Porém, foi feito uma encomenda de 6 bolos. Quantos limões serão necessários?

| Bolos | | Limões |
|---|---|---|
| 1 | -------------- | 250 ml |
| 6 | ------------- | x |

Reparem que as grandezas são diretamente proporcionais, já que o aumento no pedido de bolos pede uma maior quantidade de limões. Logo, o valor desconhecido é determinado pela multiplicação cruzada:

x = 250.6

x = 1500 ml de suco

**Exemplo 2:**

Um carro com velocidade de 120 km/h percorre um trajeto em 1 hora. Se a velocidade for reduzida para 70 km/h, em quanto tempo o veículo fará o mesmo percurso?

**Velocidade** **Tempo**

120km/h ------------ 2h

70km/ h ----------- x

Observa-se que neste exemplo teremos uma regra de três simples inversa, uma vez que ao diminuirmos a velocidade do carro, o tempo de deslocamento irá aumentar. Então, pela regra, uma das razões deverá ser invertida e transformada em direta.

**Velocidade** **Tempo**

70km/h ------------ 2h

120km/ h ----------- x

70x = 120.2

70x = 240

X= 240/70 = 3,4 h

**Regra de três composta:**

A regra de três composta é a razão e proporção entre três ou mais grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, ou seja, as relações que aparecem em mais de duas colunas.

**Exemplo:**

Para ler os 8 livros indicados pela professora para realizar o exame final, o estudante precisa estudar 6 horas durante 7 dias para atingir sua meta. Porém, a data do exame foi antecipada e, portanto, ao invés de 7 dias para estudar, o estudante terá apenas 4 dias. Assim, quantas horas ele terá de estudar por dia, para se preparar para o exame?

| **Livros** | **Horas** | **Dias** |
|---|---|---|
| 8 | 6 | 7 |
| 8 | x | 4 |

Observe que ao diminuir o número de dias, será necessário aumentar o número de horas de estudo para a leitura dos 8 livros. Portanto, trata-se de grandezas inversamente proporcionais e, por isso, inverte-se o valor dos dias para realizar a equação:

| **Livros** | **Horas** | **Dias** |
|---|---|---|
| 8 | 6 | 4 |
| 8 | x | 7 |

$$6/x = 8/8 \,.\, 4/7$$

$$6/x = 32/56 = 4/7$$

$$6/x = 4/7$$

$$4\,x = 42$$

$$x = 42/4$$

$$x = 10{,}5 \text{ horas}$$

Logo, o estudante precisará estudar 10,5 horas por dia, durante os 4 dias, a fim de realizar a leitura dos 8 livros indicados pela professora.

**Exercícios:**

1) Uma fábrica engarrafa 3000 refrigerantes em 6 horas. Quantas horas levará para engarrafar 4000 refrigerantes?

a. 2 horas

b. 4 horas

c. 6 horas

d. 8 horas

e. 10 horas

2) Uma usina produz 500 litros de álcool com 6 000 kg de cana – de – açúcar. Determine quantos litros de álcool são produzidos com 15 000 kg de cana?

3) Uma equipe de 5 professores gastou 12 dias para corrigir as provas de um vestibular. Considerando a mesma proporção, quantos dias levarão 30 professores para corrigir as provas?

4) Se foram empregados 4 kg de fios para tecer 14 m de uma maquete de fazenda com 80 cm de largura, quantos quilogramas serão necessários para produzir 350 m de uma maquete de fazenda com 120 cm largura?

5) Se 6 impressoras iguais produzem 1000 panfletos em 40 minutos, em quanto tempo 3 dessas impressoras produziriam 2000 desses panfletos?

**Porcentagem:**

Porcentagem envolve diversas situações com que nos deparamos frequentemente em nosso cotidiano, por exemplo em indicadores econômicos, resultados de pesquisas ou promoções. Entendemos porcentagem como sendo a razão entre um número qualquer e 100, sendo representada pelo símbolo %.

Sabemos que a porcentagem é uma razão, logo, pode ser representada por uma fração, que, por sua vez, pode ser escrita na forma decimal. De modo geral, se temos um número acompanhado pelo símbolo %, basta dividi-lo por 100, ou seja:

$$x\% = \frac{x}{100}$$

Veja os exemplos seguintes que mostram as diferentes representações de porcentagens. Lembre-se, para “transformar” a porcentagem em fração, basta dividir o número que acompanha o símbolo % por 100 e simplificar a fração; para “transformar” a fração em forma decimal, basta realizar a divisão.

**Exemplo:**

$$2\% = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} = 0,02$$

$$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$100\% = \frac{100}{100} = \frac{1}{1} = 1$$

$$210\% = \frac{210}{100} = \frac{21}{10} = 2,1$$

Perceba que quando escrevemos a porcentagem 100% é o mesmo que considerar um inteiro, ou seja, quando consideramos 100% de algo, estamos levando em conta o total daquilo. No caso de 210%, estamos considerando mais que um inteiro, isto é, consideramos 2,1 vezes o total.

Para fazer o caminho de volta, ou seja, dado uma fração ou um número decimal para ser escrito na forma percentual, basta multiplicar o número em questão por 100. Veja:

$$0,13 \cdot 100 = 13\%$$

$$0,05 \cdot 100 = 5\%$$

$$0,8 \cdot 100 = 80\%$$

$$4 \cdot 100 = 400\%$$

**Como calcular a porcentagem?**

Para realizar o cálculo da porcentagem de um valor, basta multiplicar esse valor pela porcentagem em sua forma decimal ou fracionária.

**Exemplos:**

Calcule 50% de 600.

Sabemos que 50% = 0,5, assim, basta fazer a substituição e multiplicar os valores. Veja:

0,5 . 600= 300

Podendo também substituir os 50% na forma fracionária, ficando:

$$50\% \textit{ de } 600$$

$$\frac{50}{100} \cdot 600$$

$$\frac{1}{2} \cdot 600$$

$$\frac{600}{2} = 300$$

Logo, 50% de 600 = 300.

**Exercícios:**

1) Calcule as porcentagens correspondentes:

a) 2% de 700 laranjas

b) 40% de 48 m

c) 38% de 200 Kg

d) 6% de 50 telhas

2) Em uma determinada fruta cuja massa é 60 g, o teor de água é 45% e o resto é polpa. Calcule quantos gramas há de polpa de fruta?

3) Em uma sala de aula há 30 alunos, dos quais 40% são meninas. Quantas meninas têm na sala?

a) 10 meninas

b) 12 meninas

c) 15 meninas

d) 18 meninas

**Referências Bibliográficas:**


CORTÊS, R.. **Como resolver equações fracionárias**, *Gênio da Matemática*. Disponivel em: http://geniodamatematica.com.br/como-resolver-equacoes-fracionarias/. Acesso em: 10 de agosto de 2020.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar - Complexos, Polinômios, Equações** - Vol. 6 - 7ª Ed. 2005. Editora: Atual. Acesso: 31 de julho de 2020.

LESSA, J. R.. **Inequação de 1° grau**, *Info Escola*. Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/inequacao-do-primeiro-grau/. Acesso em: 04 de agosto de 2020.

LUIZ, R.. **Equação do 2º grau**, *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/equacao-2-grau.htm. Acesso em: 09 de agosto de 2020.

LUIZ, R.. **Equação do primeiro grau com uma incógnita**, *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/equacao-1-o-grau-com-uma-incognita.htm. Acesso em: 05 de agosto de 2020.

LUIZ, R.. **Porcentagem** ; *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/porcentagem.htm. Acesso em 15 de agosto de 2020.

NOÉ, M. **Fatoração de Polinômios.** *Alunos Online*. Disponível em: www.alunosonline.uol.com.br/matematica/fatoracao-de-polinomios.html. Acesso: 02 de agosto de 2020.

NOVAES, J. C.. **Equação do 2° grau**, *Matemática Básica*. Disponível em: https://matematicabasica.net/equacao-do-2-grau-segundo-grau/. Acesso em: 09 de agosto de 2020.

NOVAES, J. C.. **Soma e Produto: Raízes da Equação do 2° grau**, *Matemática Básica*. Disponível em: https://matematicabasica.net/soma-e-produto/. Acesso em: 09 de agosto de 2020.

OLIVEIRA, R. R.. **Determinantes**; *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/determinantes-1.htm. Acesso em 15 de agosto de 2020.

PROCÓPIO, R.. **Adição e subtração de polinômios - Álgebra Básica | MAB #71.** *YOUTUBE. 1 vídeo (52min30s).* Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=zwcknUY1SFw&list=PL83s8LGM84J4mRCdgGKJaZh8KWFU7GgcO&index=98. Acesso: 31 de julho de 2020.

PROCÓPIO, R. **Divisão de Polinômio por Monômio com Exemplos e Desafio / Álgebra Básica / MAB #75**. *Youtube. 1 vídeo (19min32s).* Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=B7MXqu431M&list=PL83s8LGM84J4mRCdgGKJaZh8KWFU7GgcO&index=102. Acesso em: 30 de julho de 2020.

PROCÓPIO, R. **Expressões Algébricas e Valor Numérico – Álgebra Básica/ MAB #68**. *Youtube 1 vídeo (59 min31s).* Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Yv_S6onjBvU&list=PL83s8LGM84J4mRCdgGKJaZh8KWFU7GgcO&index=95. Acesso em 26 de julho de 2020

PROCÓPIO, R. **Introdução aos Monômios e Polinômios – Álgebra Básica / MAB #69**. *Youtube. 1 vídeo (1h02min18s).* Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=LazMa0Naf9U&list=PL83s8LGM84J4mRCdgGKJaZh8KWFU7GgcO&index=96. Acesso em 26 de julho de 2020.

PROCÓPIO, R. **Multiplicação de Monômio por Monômio / Álgebra Básica / MAB #71**. *Youtube. 1 vídeo (13min15s).* Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=pW8xjVNEqc&list=PL83s8LGM84J4mRCdgGKJaZh8KWFU7GgcO&index=99. Acesso em: 31 de julho de 2020.

PROCÓPIO, R. **Multiplicação de Polinômio por Polinômio e Exercícios / Álgebra Básica / MAB #74**. *Youtube. 1 vídeo (28min41s).* Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=tdNYR781hIl&list=PL83s8LGM84J4mRCdgGKJaZh8KWFU7GgcO&index=101. Acesso em: 01 de agosto de 2020.

RIBEIRO, A. G.. **Exercícios sobre equações algébricas fracionárias**, *Brasil Escola*. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-equacoes-algebricas-fracionarias.htm#questao-2. Acesso em: 08 de Agosto de 2020.

RIBEIRO, A. G.. **Exercícios sobre inequação de 2° grau**, Brasil Escola. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios sobreinequacao-2-o-grau.htm. Acesso em: 04 de agosto de 2020.

RIBEIRO, A. G.. **Inequação de 2° grau**, *Alunos Online*. Disponível em: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/inequacao-2-grau.html. Acesso em: 04 de agosto de 2020.

SILVA, L. P. M.. **Frações Algébricas**. Alunos Online. Disponível em: www.alunosonline.uol.com.br/matematica/fracoes-algebricas.html. Acesso: 01 de agosto de 2020.

SILVA, L. P. M.. **O que são produtos notáveis?.** *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-sao-produtos-notaveis.htm. Acesso em 02 de agosto de 2020.

SILVA, L. P. M.. **O que é regra de três?**; *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-regra-tres.htm. Acesso em 15 de agosto de 2020.

SILVA, M. N. P.. **Exercícios sobre equação de 2° Grau,** Brasil Escola. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobreequacao-2-o-grau.htm. Acesso em: 09 de Agosto de 2020.

SILVA, M. N. P.. **Resolução de Problemas com Sistemas de Equações,** *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/resolucao-problemas-com-sistemas-equacoes.htm. Acesso em: 10 de agosto de 2020.