AULA 6.1

O PLANO

Equação geral do plano

$\vec{n} \perp \pi \qquad \vec{n} = (a; b; c)$

$A(x_1; y_1; z_1) \quad P(x; y; z)$

$\vec{n} \cdot (P - A) = 0 \rightarrow P \in \pi$

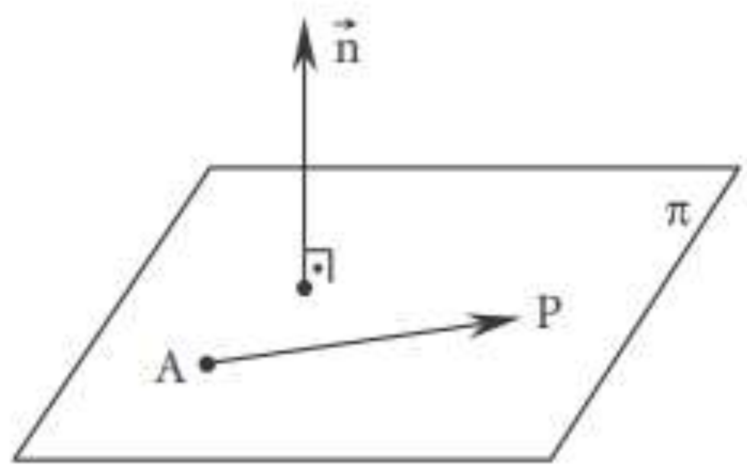

Figura 6.1

$$(a; b; c) \cdot (x - x_1; y - y_1; z - z_1) =$$

$$= a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) =$$

$$= ax - ax_1 + by - by_1 + cz - cz_1 =$$

$$-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$$

$$= ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 =$$

$$= ax + by + cz + d = 0$$

Equação geral do plano

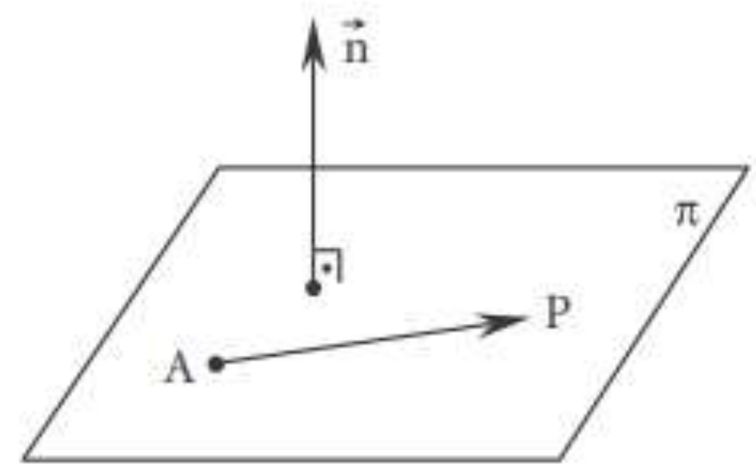

Figura 6.1

Os coeficientes a, b e c da equação geral do plano são os componentes do vetor normal ao plano.

$$\pi: 3x + 2y - z + 1 = 0$$

$$\vec{n} = (3; 2; -1)$$

Para se obter os pontos de um plano a partir de sua equação geral, basta atribuir valores para duas de suas variáveis e calcular a terceira.

$$x = 4 \qquad y = -2$$

$$3(4) + 2(-2) - z + 1 = 0 \qquad \therefore z = 9$$

$$A(4; -2; 9)$$

Equação segmentária do plano

$A_1(2;0;0)$ $A_2(0;2;0)$ $A_3(0;0;2)$ $A_1;A_2;A_3 \in \pi$

$$\pi: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$$

$$\pi: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} - 1 = 0$$

$$\pi: 3x + 2y + z - 6 = 0$$

Equação vetorial do plano

$$A(x_0; y_0; z_0) \in \pi; \ \vec{u}(a_1; b_1; c_1) \parallel \pi; \ \vec{v}(a_2; b_2; c_2) \parallel \pi; \quad \vec{u} \nparallel \vec{v}$$

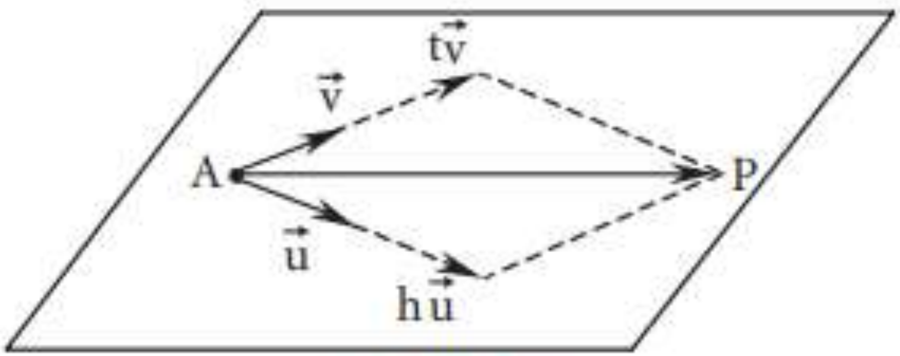

Figura 6.3

Os dois vetores em serão os vetores diretores do plano em questão.

$$P(x; y; z) \in \pi$$

$$(h; t) \in \mathbb{R}$$

$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$\therefore P = A + h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$(x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + h(a_1; b_1; c_1) + t(a_2; b_2; c_2)$$

Equação paramétrica do plano

Se $(x;y;z) = (x_0;y_0;z_0) + h(a_1;b_1;c_1) + t(a_2;b_2;c_2)$

Então $\begin{cases} x = x_o + a_1h + a_2t \\ y = y_0 + b_1h + b_2t \\ z = z_0 + c_1h + c_2t \end{cases}$

Seja na equação vetorial, seja na equação paramétrica, basta atribuir valores para *h* e *t* para obtermos pontos que pertençam ao plano em questão.

1. Seja o plano π que passa pelo ponto A(2, 2, −1) e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2,-3,1)$ e $\vec{v} = (-1,5,-3)$. Obter uma equação vetorial, um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.

Equação vetorial: $(x; y; z) = (2; 2; -1) + h(2; -3; 1) + t(-1; 5; -3)$

Equação paramétrica: $\begin{cases} x = 2 + 2h - t \\ y = 2 - 3h + 5t \\ z = -1 + h - 3t \end{cases}$

$$\vec{n} = \vec{u} X \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (4; 5; 7)$$

$$4x + 5y + 7z + d = 0$$

Aplicando A

$$4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) + d = 0$$

$$d = -11$$

Equação geral:

$$4x + 5y + 7z - 11 = 0$$