Lógica para computação

Cálculo de predicados

Limitações da linguagem proposicional

Toda proposição que vimos até agora pode ser decomposta até certo ponto:

A = 5 é ímpar

Limitações da linguagem proposicional

Toda proposição que vimos até agora pode ser decomposta até certo ponto:

A = 5 é ímpar

B = 3 é ímpar

Limitações da linguagem proposicional

Toda proposição que vimos até agora pode ser decomposta até certo ponto:

A = 5 é ímpar

B = 3 é ímpar

C = Todos os homens são mortais

Limitações da linguagem proposicional

Toda proposição que vimos até agora pode ser decomposta até certo ponto:

A = 5 é ímpar

B = 3 é ímpar

C = Todos os homens são mortais

D = Eu sou mortal

Limitações da linguagem proposicional

Toda proposição que vimos até agora pode ser decomposta até certo ponto:

A = 5 é ímpar

B = 3 é ímpar

C = Todos os homens são mortais

D = Eu sou mortal

E = Não existe x tal que x é ímpar e par ao mesmo tempo

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

4 é um número par

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

6 é um número par

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

7 não é um número par

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

x é um número par

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

y não é um número par

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

Eu sou mortal

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

Todos os homens são mortais

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

Para qualquer homem x, x é mortal

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

Existem homens mortais

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

Existe x tal que x é mortal

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

Não existem homens mortais

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

Todos os homens são imortais

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

x é divisível por 2

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

x é divisível por 2
x é par

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

x é divisível por 2
x é par
Todo número divisível por 2 é par

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

Alguém estuda aqui

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

Alguém estuda aqui
Ninguém estuda aqui

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

x é um cachorro

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

A = ser um cachorro
B = ser manso

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

A = ser um cachorro
B = ser manso
Todo cachorro é manso

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

A = ser um cachorro
B = ser manso
Todo cachorro é manso
Nem todo cachorro é manso

Linguagem de predicados

Ideia: separar sujeito de predicados e adicionar quantificadores

A(x) = x é divisível por 2
B(x) = x é divisível por 3

Linguagem de predicados

Proposições	Tradução
$(\exists x)(A(x))$	Existe um número natural divisível por 2.
$(\exists x)(\neg A(x))$	Existe um número natural que não é divisível por 2.
$(\forall x)(A(x))$	Todo número natural é divisível por 2.
$[\neg((\forall x)(A(x))]$	Não é verdade que todo número natural seja divisível por 2.
$(\forall x)(\neg A(x))$	Todo número natural não é divisível por 2.ouNenhum número natural é divisível por 2.ouNão existe número natural divisível por 2.
$(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$	Existe um número natural divisível por 2 e divisível por 3.
$(\exists x)(A(x) \vee B(y))$	Existe um número natural divisível por 2 ou divisível por 3.

Linguagem de predicados

Também possível com múltiplas entradas (constantes/variáveis)

x é maior que y

Linguagem de predicados

Também possível com múltiplas entradas (constantes/variáveis)

x é maior que y

Z é pai de Y

Linguagem de predicados

Também possível com múltiplas entradas (constantes/variáveis)

x é maior que y

Z é pai de Y

X é mãe de Y

Linguagem de predicados

Também possível com múltiplas entradas (constantes/variáveis)

x é maior que y

x está entre y e z

Z é pai de Y

X é mãe de Y

Linguagem de predicados

Também possível com múltiplas entradas (constantes/variáveis)

x é maior que y

x está entre y e z

Z é pai de Y

X é mãe de Y

Podemos adicionar quantificadores e constantes

Linguagem de predicados

$$A(x) \equiv x \text{ é um animal.}$$
$$B(x) \equiv x \text{ é um mamífero.}$$
$$C(x) \equiv x \text{ é um homem.}$$

$$[\ (\forall x)(C(x) \rightarrow B(x)\ ) \wedge (\forall x)(B(x) \rightarrow A(x)\ )\ ] \rightarrow [\ (\forall x)(C(x) \rightarrow A(x)\ )\ ]$$

Subfórmulas

Definição 4 (Subfórmula). Seja A uma fórmula.

1. Se A é uma fórmula atômica $p(t_1, \ldots, t_n)$, então $p(t_1, \ldots, t_n)$ é uma subfórmula de A.
2. Se A é do tipo $\neg B$, então B é uma subfórmula de A.
3. Se A é do tipo $B \vee C$, então B e C são subfórmulas de A.
4. Se A é do tipo $B \wedge C$, então B e C são subfórmulas de A.
5. Se A é do tipo $B \rightarrow C$, então B e C são subfórmulas de A.
6. Se A é do tipo $\forall xB$, então B é subfórmula de A.
7. Se A é do tipo $\exists xB$, então B é subfórmula de A.
8. Se B é subfórmula de A e C é subfórmula de B, então C é subfórmula de A.
9. As únicas subfórmulas de A são definidas pelas regras (1 a 8) acima, além da própria fórmula A.

Subfórmulas

Definição 4 (Subfórmula). Seja A uma fórmula.

1. Se A é uma fórmula atômica $p(t_{1,} \dots, t_n)$, então $p(t_{1,} \dots, t_n)$ é uma subfórmula de A.
2. Se A é do tipo $\neg B$, então B é uma subfórmula de A.
3. Se A é do tipo $B \vee C$, então B e C são subfórmulas de A.
4. Se A é do tipo $B \wedge C$, então B e C são subfórmulas de A.
5. Se A é do tipo $B \rightarrow C$, então B e C são subfórmulas de A.
6. Se A é do tipo $\forall xB$, então B é subfórmula de A.
7. Se A é do tipo $\exists xB$, então B é subfórmula de A.
8. Se B é subfórmula de A e C é subfórmula de B, então C é subfórmula de A.
9. As únicas subfórmulas de A são definidas pelas regras (1 a 8) acima, além da própria fórmula A.

$$\forall x \exists y(\neg p(x) \rightarrow \quad z(q(z) \rightarrow \neg p(z)))$$

Escopo de quantificadores

Definição 5 (Escopo de quantificadores). Se x é uma variável individual e A é uma fórmula, definimos o escopo do quantificador $\forall x$, na fórmula $\forall x A$, como sendo a fórmula A. Analogamente, o escopo do quantificador $\exists x$, na fórmula $\exists x A$, *é* a fórmula A.

Escopo de quantificadores

Definição 5 (Escopo de quantificadores). Se x é uma variável individual e A é uma fórmula, definimos o escopo do quantificador $\forall x$, na fórmula $\forall xA$, como sendo a fórmula A. Analogamente, o escopo do quantificador $\exists x$, na fórmula $\exists xA$, *é* a fórmula A.

uma variável individual x é livre em uma fórmula A, se essa ocorrência de x não se dá no escopo de um quantificador ($\forall x$ ou $\exists x$) em uma subfórmula de A (do tipo $\forall xB$ ou $\exists xB$). Caso contrário, dizemos que a ocorrência dessa variável x é ligada.

Termo livre para uma variável

Definição 7 (Termo livre para uma variável). Dizemos que um termo t é livre para a variável x em uma fórmula A, se nenhuma ocorrência livre de x está no escopo de um quantificador ($\forall y$ ou $\exists y$), onde y é uma variável que ocorre em t.

Termo livre para uma variável

Definição 7 (Termo livre para uma variável). Dizemos que um termo t é livre para a variável x em uma fórmula A, se nenhuma ocorrência livre de x está no escopo de um quantificador ($\forall y$ ou $\exists y$), onde y é uma variável que ocorre em t.

Exemplo 7. Sejam t_1 o termo x, t_2 o termo y, t_3 o termo $f(x, y, z)$ e as fórmulas

$A : \forall z(p(z) \to q(\mathrm{x})) \to \exists x r(w)$,

$B : p(x) \to \exists x(r(x) \land q(z))$ e

$C : \forall y(p(y) \lor q(y))$.

Termo livre para uma variável

Definição 7 (Termo livre para uma variável). Dizemos que um termo t é livre para a variável x em uma fórmula A, se nenhuma ocorrência livre de x está no escopo de um quantificador ($\forall y$ ou $\exists y$), onde y é uma variável que ocorre em t.

Exemplo 7. Sejam t_1 o termo x, t_2 o termo y, t_3 o termo $f(x, y, z)$ e as fórmulas

$A : \forall z(p(z) \rightarrow q(\mathrm{x})) \rightarrow \exists x r(w)$,

$B : p(x) \rightarrow \exists x(r(x) \wedge q(z))$ e

$C : \forall y(p(y) \vee q(y))$.

t_2 é livre para x em A

t_1 é livre para y em C

t_3 não é livre para w em A

Processo dedutivo na linguagem de predicados

Sócrates é homem.
Todo homem é mortal.
Logo, Sócrates é mortal.

Particularização universal

$$\frac{(\forall x)(P(x))}{P(t)}$$

Particularização existencial

$$\frac{(\exists x)\,(P(x))}{P(t)}$$

Generalização universal

$$\frac{P(x)}{(\forall x)(P(x))}$$

Generalização existencial

$$\frac{P(t)}{(\exists x)\,(P(x))}$$

De	Podemos Deduzir	Nome/Abreviatura para a Regra	Restrições sobre o Uso
$(\forall x)P(x)$	$P(t)$, em que t é uma variável ou um símbolo constante	Particularização universal — pu	Se t for uma variável, não deve estar dentro do escopo de um quantificador para t.
$(\exists x)P(x)$	$P(a)$ em que a é um símbolo constante não utilizado anteriormente na sequência de demonstração	Particularização existencial — pe	É necessário que seja a primeira regra a usar a.
$P(x)$	$(\forall x)P(x)$	Generalização universal — gu	$P(x)$ não pode ter sido deduzida de nenhuma hipótese na qual x é uma variável livre, nem pode ter sido deduzida, através de pe, de uma fbf na qual x é uma variável livre.
$P(x)$ ou $P(a)$ em que a é um símbolo constante	$(\exists x)P(x)$	Generalização existencial — ge	Para ir de $P(a)$ a $(\exists x)P(x)$, x não pode aparecer em $P(a)$.

Exercícios

$(\forall x)(P(x)) \equiv (\forall x)((P(x) \vee Q(x))$

$(\forall x)(P(x)), (\exists x)(Q(x)) \equiv (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$

$(\forall x)(P(x)), (\exists x)(\sim P(x)) \equiv (\exists x)(Q(x))$

Paulo é estudioso e simpático. Se alguém é simpático ou inteligente, então é popular. Portanto, existe alguém estudioso e popular.

REGRAS DE INFERÊNCIA		
De	**Podemos Deduzir**	**Nome/Abreviatura para a Regra**
$P, P \to Q$	Q	*Modus ponens* — mp
$P \to Q, Q'$	P'	*Modus tollens* — mt
P, Q	$P \wedge Q$	Conjunção — conj
$P \wedge Q$	P, Q	Simplificação — simp
P	$P \vee Q$	Adição — ad
$P \to Q, Q \to R$	$P \to R$	Silogismo hipotético — sh
$P \vee Q, P'$	Q	Silogismo disjuntivo — sd
$P \to Q$	$Q' \to P'$	Contraposição — cont
$Q' \to P'$	$P \to Q$	Contraposição — cont