AULA 1.3

TRATAMENTO ALGÉBRICO

Vetores no plano

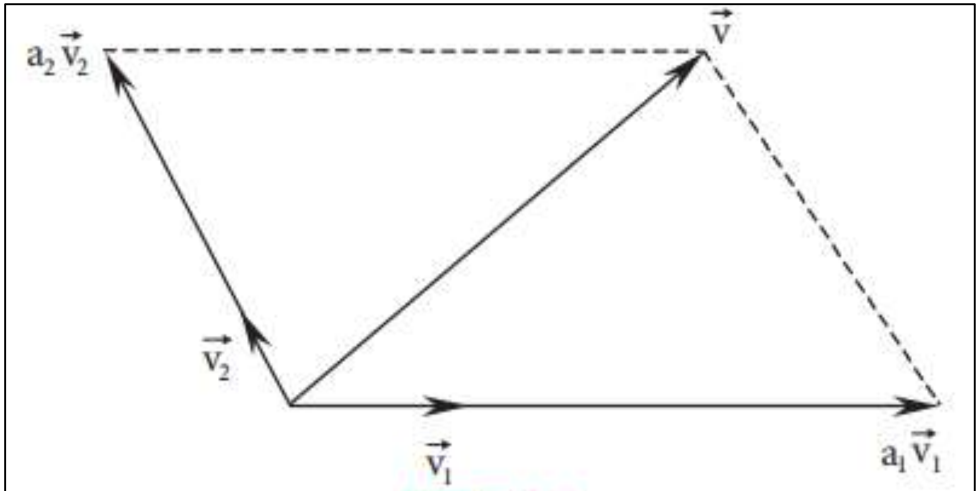

Figura 1.39

$$\vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$$

Combinação linear

$$B = \{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}\}$$

Base no plano

Outra simbologia:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (a_1; a_2) \\ \overrightarrow{v_B} = (a_1; a_2) \end{array}\right\} \quad a_1; a_2$$

Componentes ou coordenadas

Vetores no plano

$$\vec{x} = 4\overrightarrow{v_1} + 0\overrightarrow{v_2}$$

$$\vec{y} = 0\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2}$$

$$\vec{v} = -2\overrightarrow{v_1} + 3\overrightarrow{v_2}$$

$$\vec{u} = 5\overrightarrow{v_1} + 4\overrightarrow{v_2}$$

$$\vec{t} = 3\overrightarrow{v_1} - 2\overrightarrow{v_2}$$

$$\vec{w} = -4\overrightarrow{v_1} - 1\overrightarrow{v_2}$$

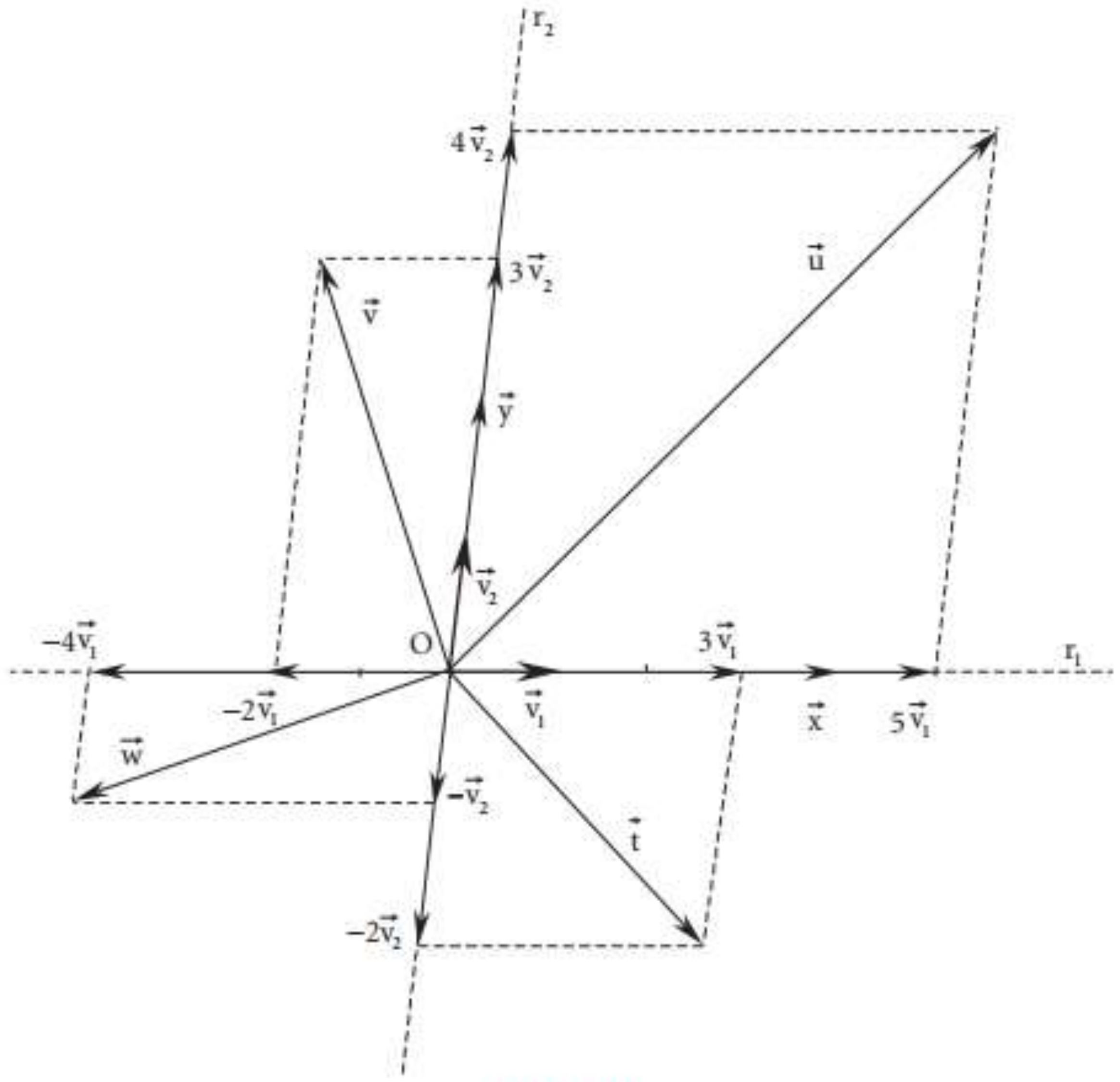

Figura 1.38

Bases ortonormais

Seja $\left\{ \begin{array}{l} B = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\} \\ \overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2} \\ |\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = |1| \end{array} \right\}$ Então é uma base ortonormal

Sistema cartesiano ortogonal

$C = \{\vec{\imath}; \vec{\jmath}\}$ Base canônica

$\vec{\imath} = (1; 0)$

$\vec{\jmath} = (0; 1)$

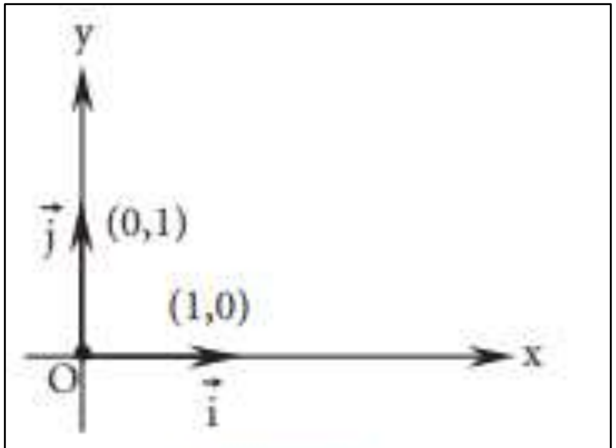

Figura 1.40

Base canônica $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Na base canônica, *x* e *y* são suas componentes as quais se chamam respectivamente de abscissa e ordenada.

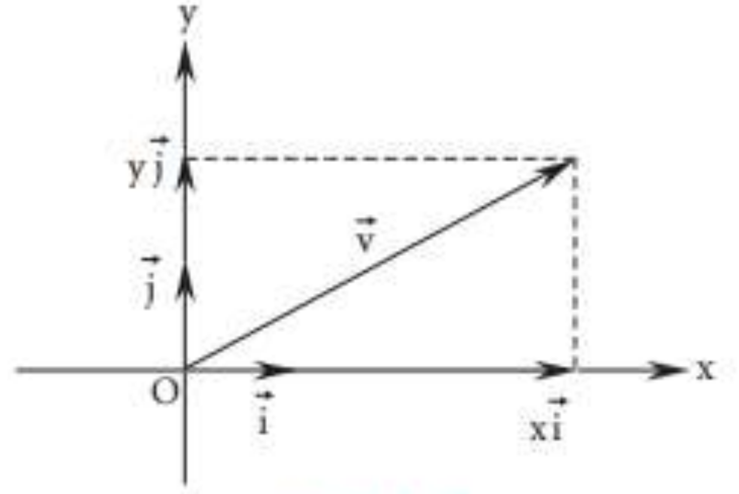

Figura 1.41

$$\vec{v} = (x; y)$$

Expressão analítica

Igualdade de vetores

$$\text{Seja} \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = (x_1; y_1) \\ \vec{v} = (x_2; y_2) \end{array} \right\} \text{ E } \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{array} \right\} \quad \vec{u} = \vec{v}$$

Operação com vetores

$$\vec{u} = (x_1; y_1); \quad \vec{v} = (x_2; y_2); \quad \alpha \in \mathcal{R}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2) \qquad \alpha\vec{u} = (\alpha x_1; \alpha y_1)$$

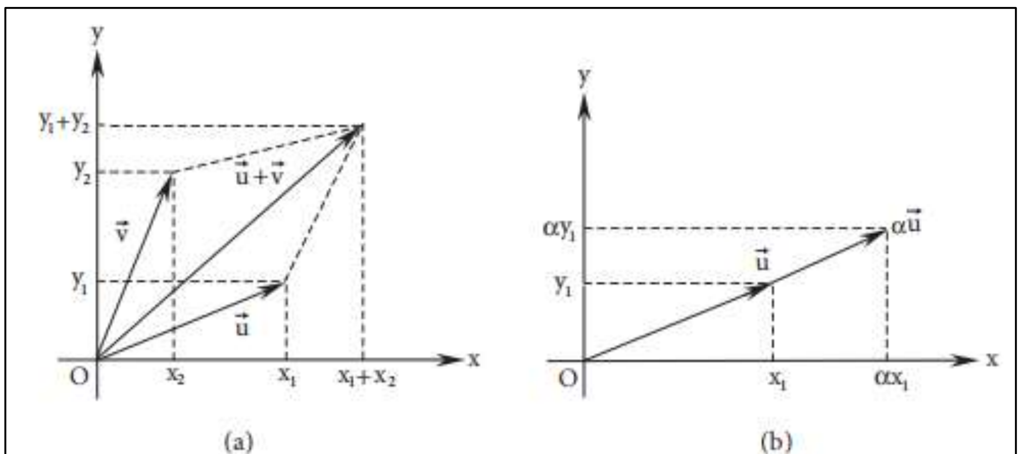

Figura 1.43

1. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (-1, 4)$, determinar $3\vec{u} + 2\vec{v}$ e $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

2. Determinar o vetor $\vec{x}$ na igualdade $3\vec{x} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{x}$, sendo dados $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 4)$.

Vetor definido por dois pontos

$$\overline{AB}\;\begin{cases} A(x_1;y_1) \\ B(x_2;y_2) \end{cases}$$

$$\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB} \quad \therefore \overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$$

$$\overline{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$$

Considerando que o vetor terá origem no ponto O e respeitando sua direção e sentido, temos um dos seus infinitos representantes.

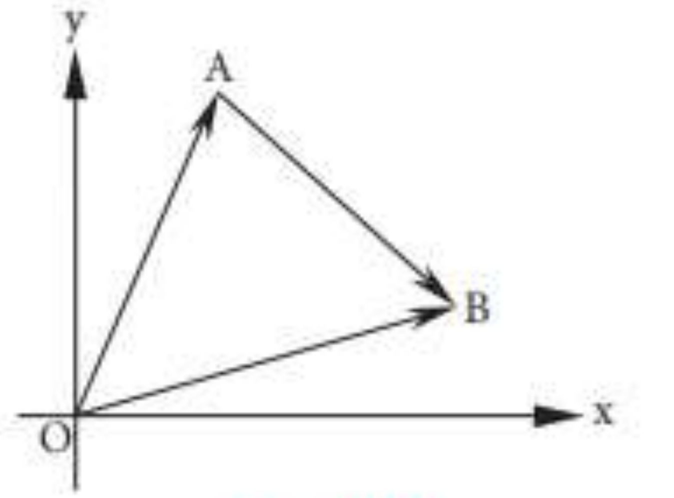

Figura 1.44

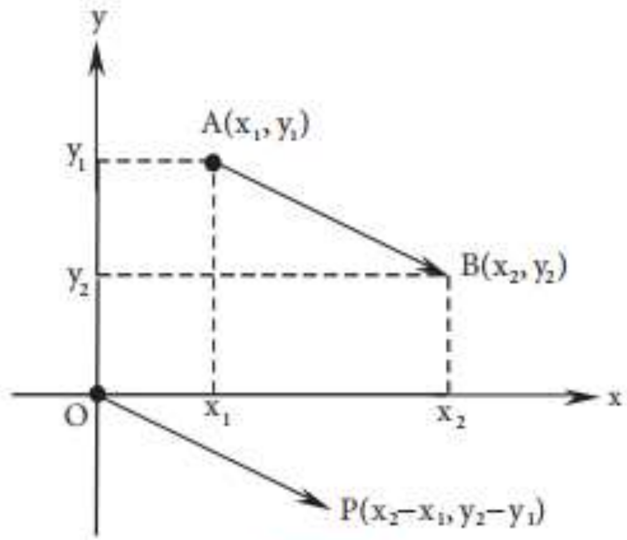

Figura 1.45

Vetor posição (vetor natural)

$$\vec{v} = \overline{PO} = P - O$$
$$\vec{v} = \overline{AB} = B - A$$
$$\vec{v} = \overline{CD} = D - C$$

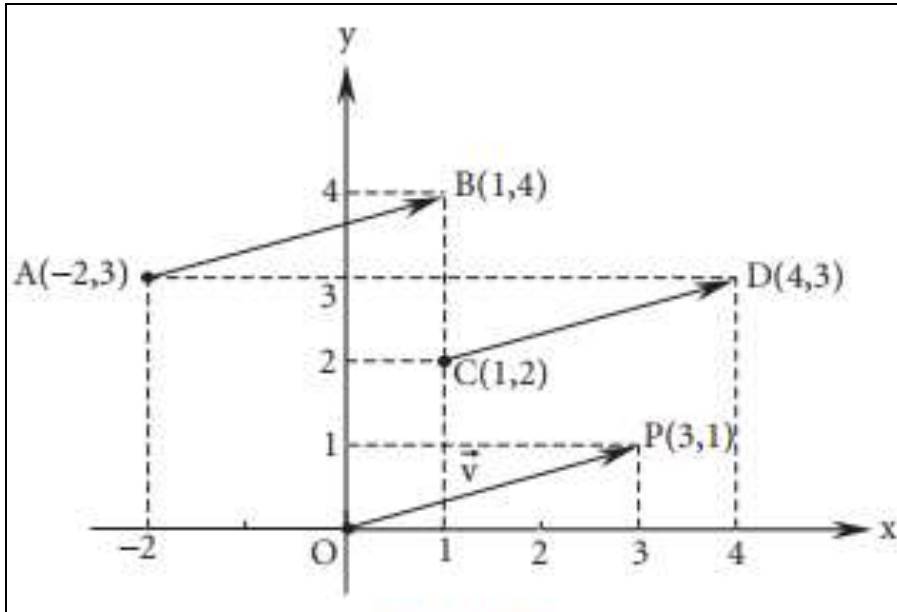

Figura 1.46

$$B = A + \vec{v} = (-2; 3) + (3; 1) = (1; 4)$$
$$D = C + \vec{v} = (1; 2) + (3; 1) = (4; 3)$$

Isto é, a partir de um ponto, o vetor posição transporta-o para a extremidade de um vetor igual a ele em módulo, direção e sentido.

Ponto médio

Seja
$$\begin{cases} A = (x_1; y_1) \\ B = (x_2; y_2) \\ M = (x; y) \end{cases}$$

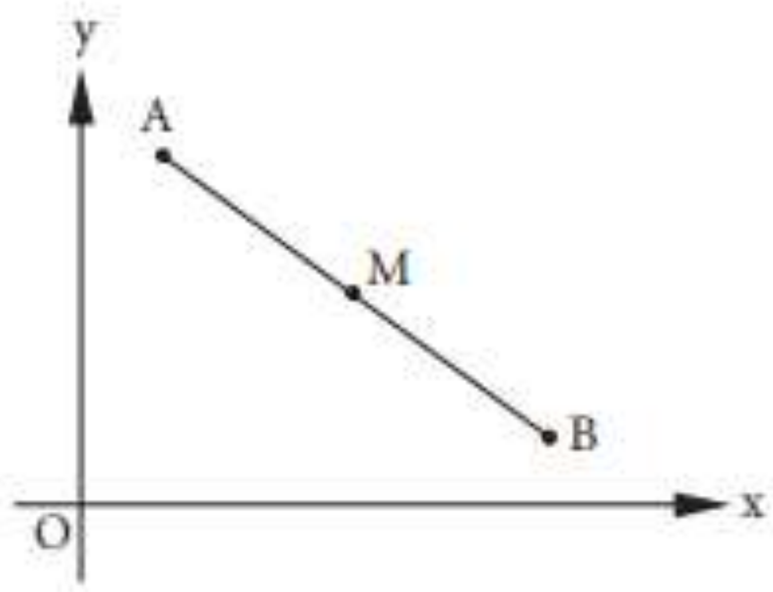

Figura 1.50

$$\overline{AM} = \overline{MB}$$
$$(x - x_1; y - y_1) = (x_2 - x; y_2 - y)$$

$$\left.\begin{array}{l} x - x_1 = x_2 - x \therefore x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y - y_1 = y_2 - y \therefore y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{array}\right\} M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Paralelismo de dois vetores

Dois vetores serão paralelos se suas componentes forem igualmente proporcionais.

$$\text{Seja } \left\{ \begin{matrix} \vec{u} = (x_1; y_1) \\ \vec{v} = (x_2; y_2) \end{matrix} \right\} \text{ E } \left\{ \begin{matrix} x_1 = \alpha x_2 \\ y_1 = \alpha y_2 \end{matrix} \right\} \quad \vec{u} \parallel \vec{v}$$

Isto é $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{y_2}{y_1} = \alpha$

Módulo de um vetor

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

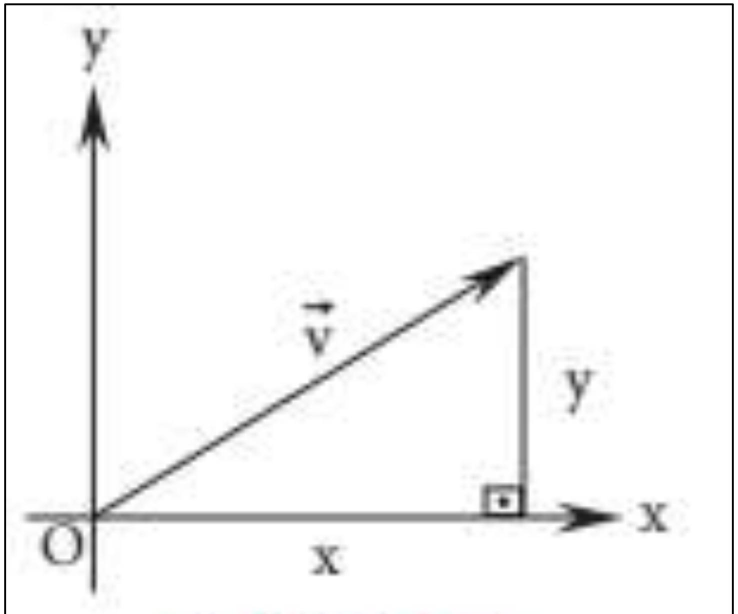

Figura 1.51

O módulo de um vetor nada mais que é que seu comprimento ou a distância entre os dois pontos que o definem.

$$d(\overline{AB}) = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2. Determinar, no eixo Ox, um ponto P que seja equidistante dos pontos $A(-1, -2)$ e $B(5, -4)$.