AULA 6.2

POSIÇÃO DE UM PLANO

Casos particulares

A existência de um ou mais componentes nulos na equação geral do plano indica sua respectiva posição aos eixos ou planos coordenados.

$$3x + 4y + 2z - 12 = 0$$

Em quais pontos o plano corta os eixos?

Se *d* for nulo, a equação representará um plano paralelo ao da equação geral original e passará pela origem, pois:

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

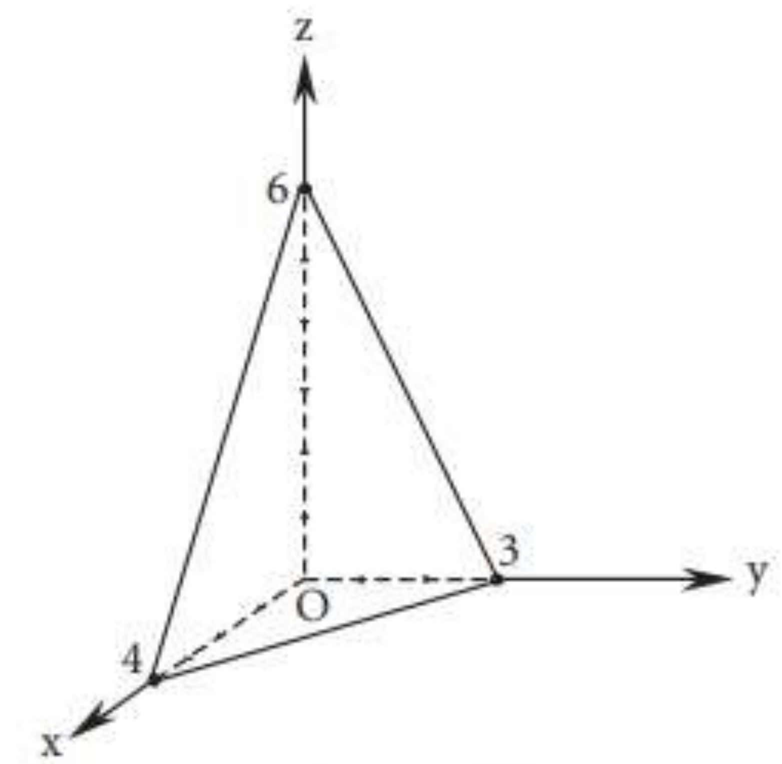

Figura 6.9

Casos particulares

Se *a* for nulo, então o plano será paralelo ao eixo *x*, mas cortando os dois outros eixos, pois:

$$4y + 2z - 12 = 0$$

$$(0;3;0)$$

$$4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 12$$

$$(0;0;6)$$

$$4 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = 12$$

$$(4;0;0)$$

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 12$$

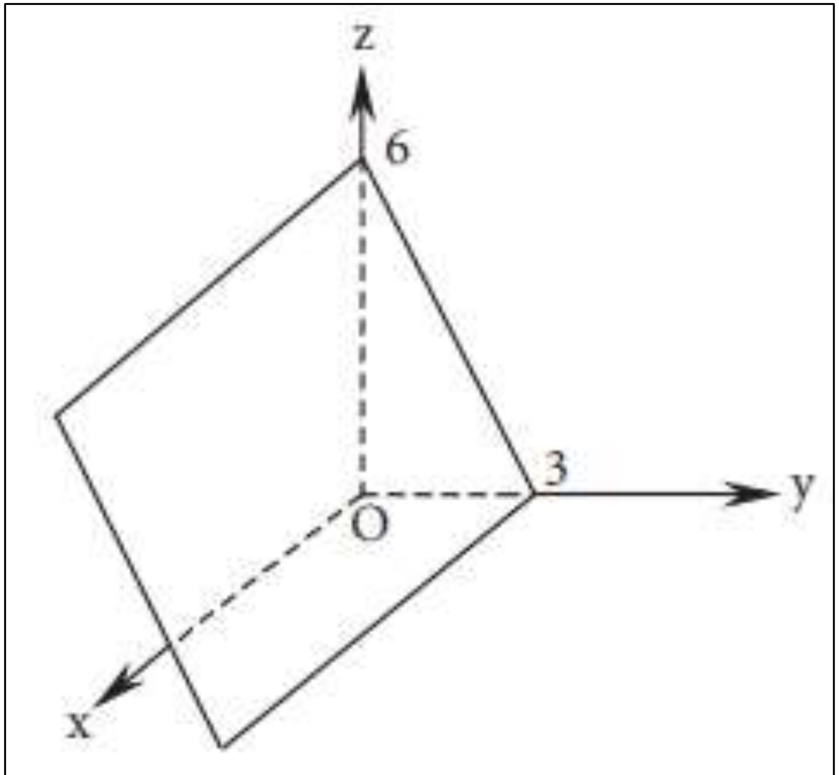

Figura 6.10

Casos particulares

De forma análoga, podemos dizer o mesmo quando o componente *b* ou o componente *c* for nulo.

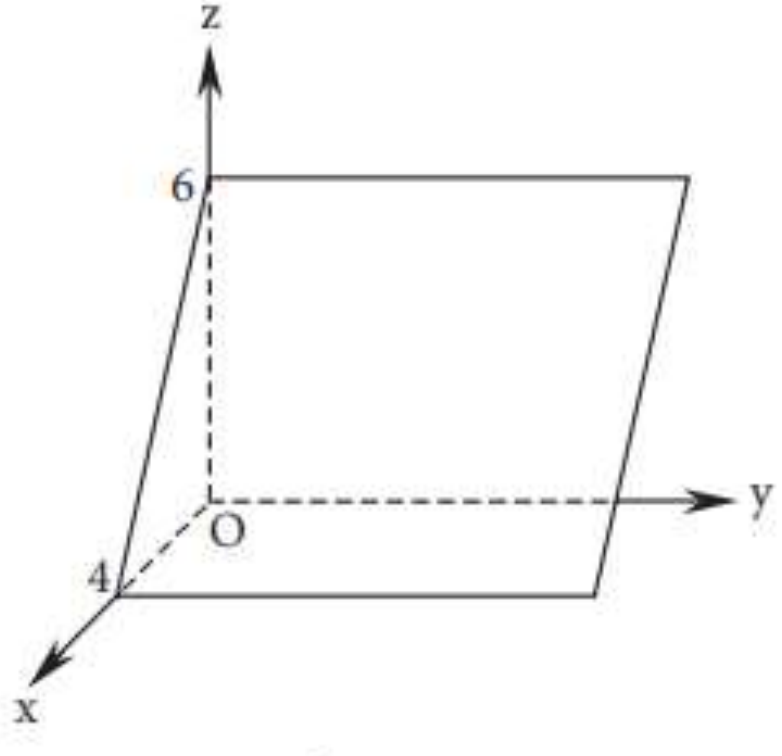

Figura 6.12

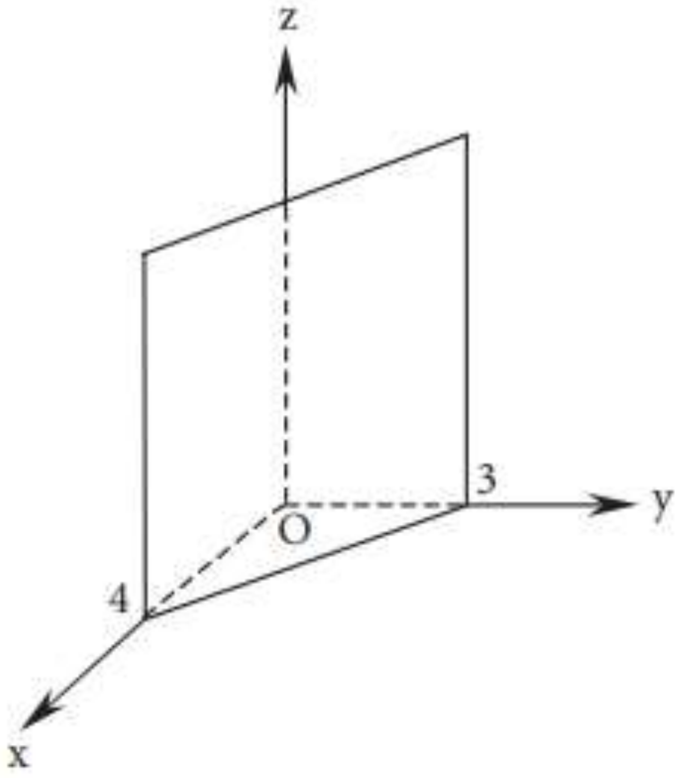

Figura 6.13

Casos particulares

Se *d* e mais outro componente forem nulos, o plano irá conter o respectivo eixo do outro componente nulo, além de passar pela origem. Vejamos quando *d* e *a* forem nulos:

$$4y + 2z = 0$$

$$0 \cdot x + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$(0; 3; 0)$$

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$(0; 0; 6)$$

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = 0$$

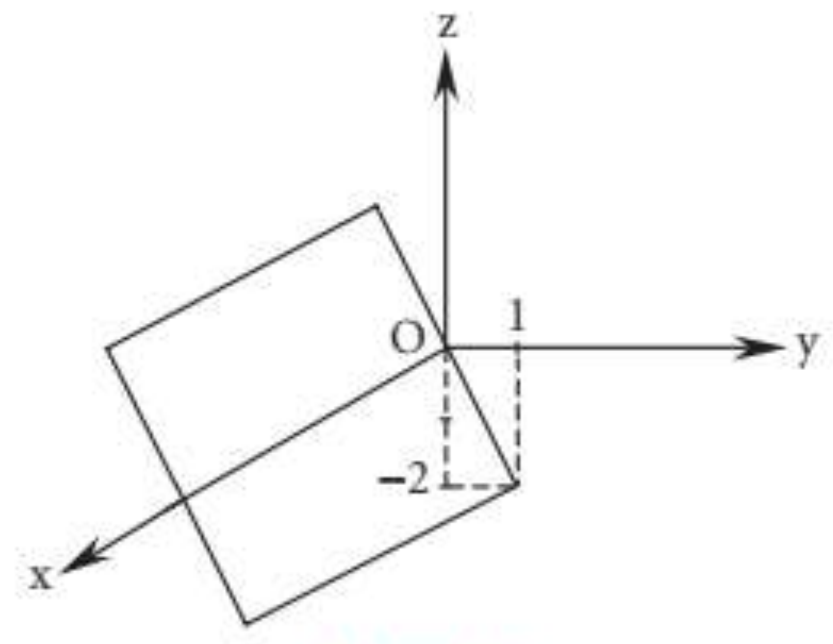

Figura 6.11

Casos particulares

Se *a* e *b* forem nulos, então o plano será paralelo ao plano *xOy* e, por consequência perpendicular ao eixo *z.* Além disso, o plano em questão cortará o eixo *z* no ponto que verificam a equação.

$$2z - 12 = 0$$

$$(0; 0; 6)$$

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = 12$$

$$(1; 1; 6)$$

$$3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 6 = 12$$

$$(5; 9; 6)$$

$$3 \cdot 5 + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 6 = 12$$

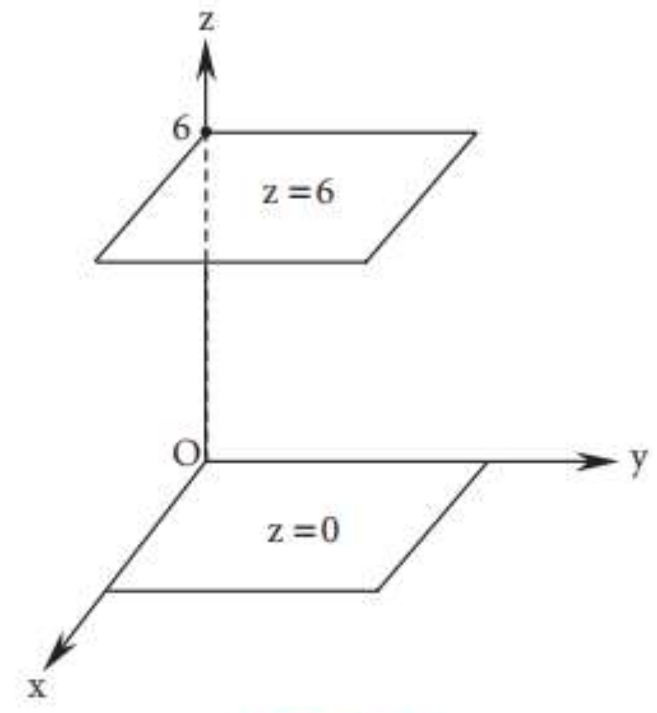

Figura 6.14

Casos particulares

De forma análoga podemos concluir como o plano se comporta ao possuir em sua equação geral duas componentes nulas que não seja *d.*

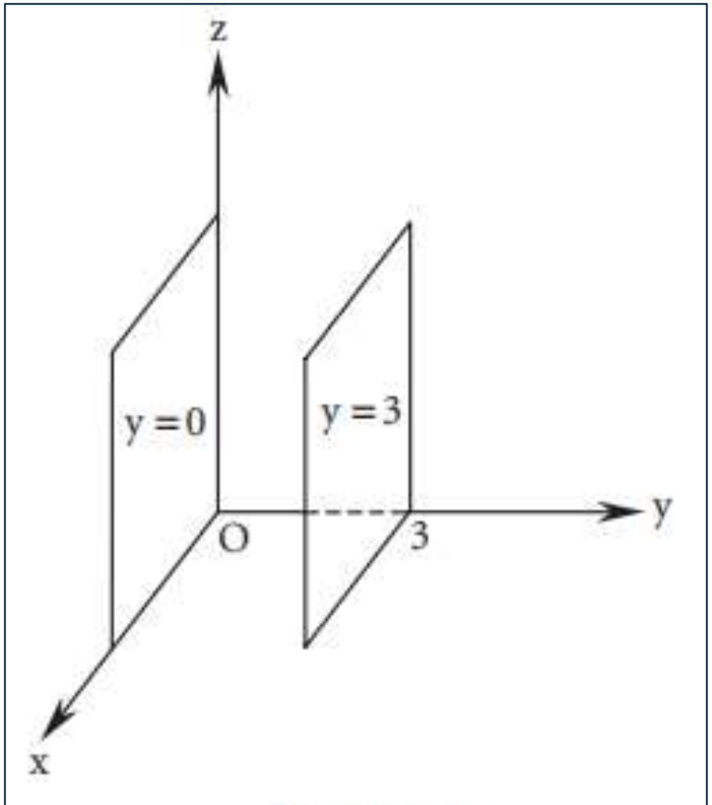

Figura 6.15

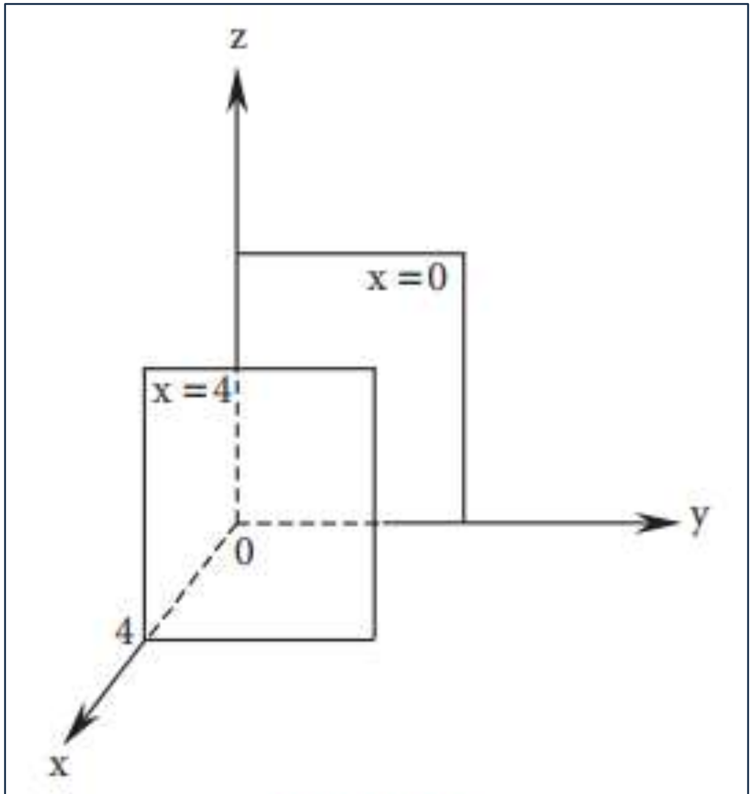

Figura 6.16

Ângulo de dois planos

O ângulo de dois planos é calculado a partir do ângulo formado pelos seus respectivos vetores normais.

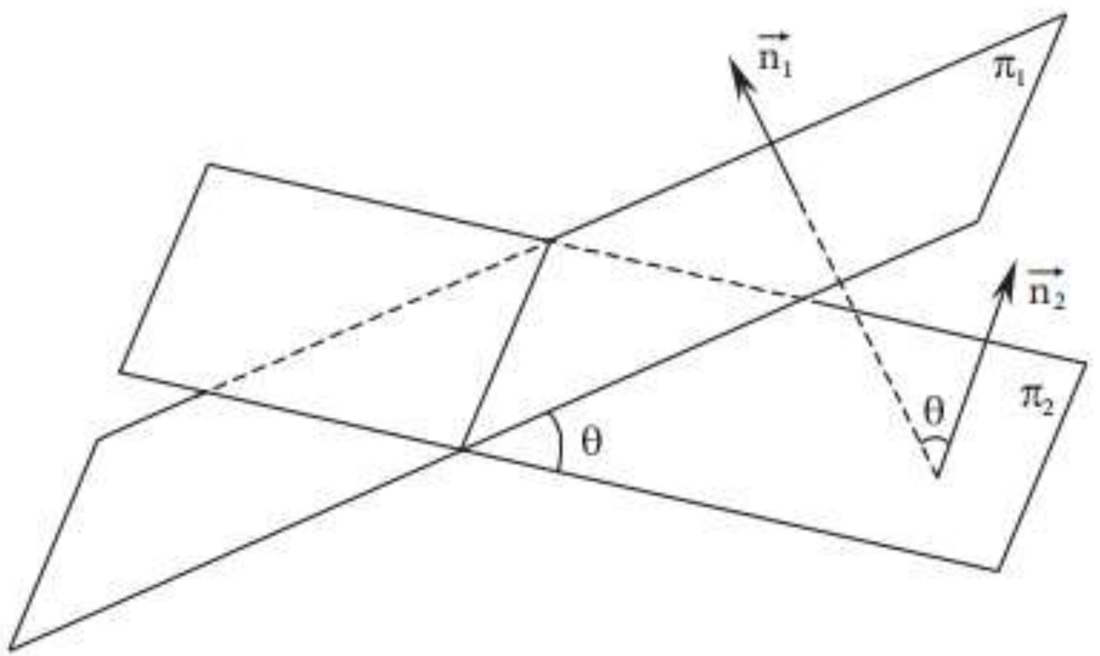

Figura 6.17

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Determinar o ângulo entre os planos

$$\pi_1: 2x + y - z + 3 = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi_2: x + y - 4 = 0$$

Ângulo de dois planos

Dois planos serão perpendiculares se o produto escalar dos seus respectivos vetores normais for zero.

$$\pi_1 : 3x + y - 4z + 2 = 0$$

$$\overrightarrow{n_1} : (3; 1; -4)$$

$$\pi_2 : 2x + 6y + 3z = 0$$

$$\overrightarrow{n_2} : (2; 6; 3)$$

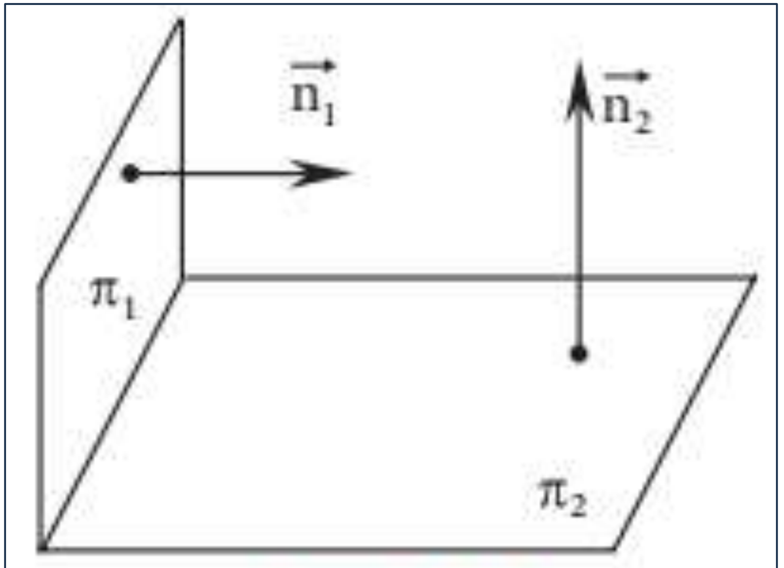

Figura 6.18

$$n_1 \cdot n_2 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 0$$

Interseção de dois planos

A interseção de dois planos não paralelos é uma reta *r*, as qual seus pontos precisam satisfazer as equações dos respectivos planos.

$\pi_1: 5x - y + z - 5 = 0$ $\quad\quad$ $\pi_2: x + y + 2z - 7 = 0$

$$r: \begin{cases} 5x - y + z - 5 = 0 \\ x + y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

Possui infinitas soluções, pois são infinitos pontos na reta *r.*

Escrevendo a reta *r* em função de *x* na sua forma reduzida temos.

$$r: \begin{cases} y = 3x - 1 \\ z = -2x + 4 \end{cases}$$

Existe um segundo método no livro.
Sugiro a leitura.

Paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

Para analisar a posição de uma reta em relação a um plano, deveremos nos atentar ao vetor direção da reta e o vetor normal do plano.

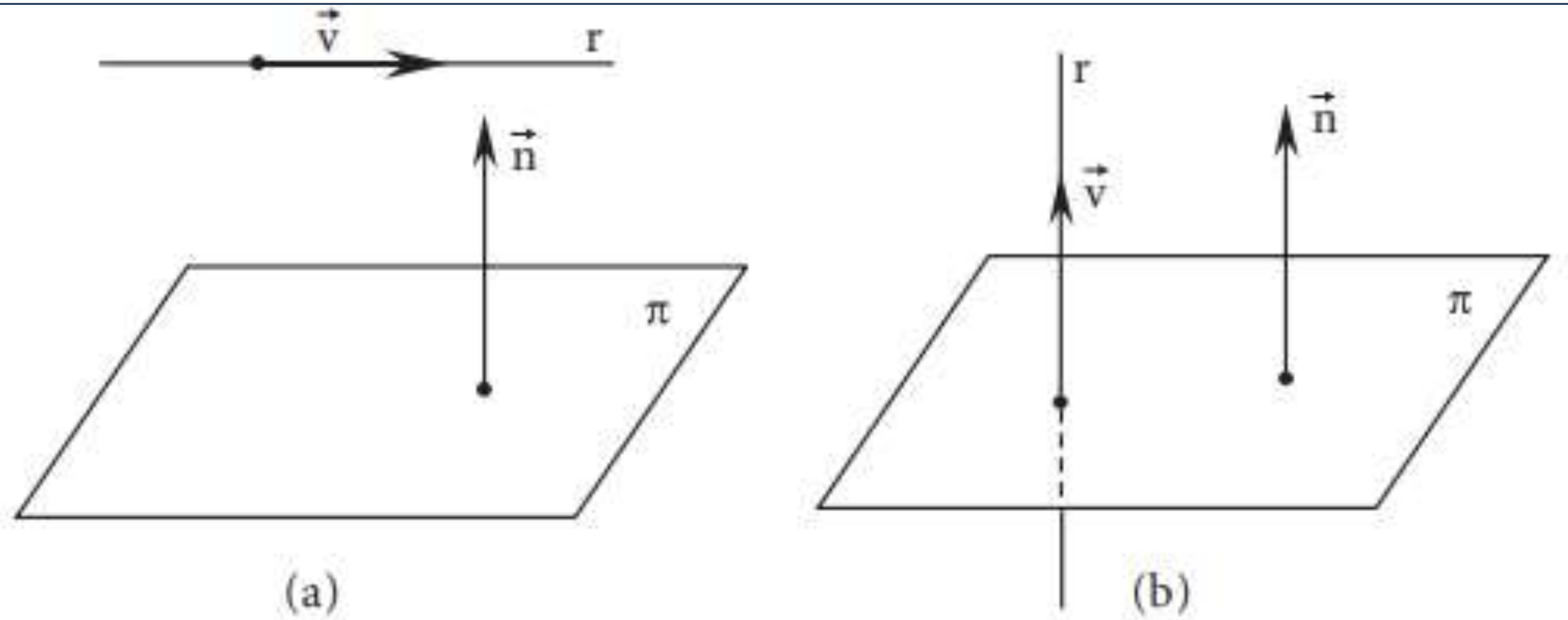

Figura 6.19

$r \parallel \pi \Leftrightarrow v \perp n \Leftrightarrow v \cdot n = 0$

$r \perp \pi \Leftrightarrow v \parallel n \Leftrightarrow v = \alpha n$

Interseção de uma reta com um plano

Se um ponto de uma reta *r* pertence a um plano qualquer, então suas coordenadas verificam a equação do plano em questão.

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad \pi: 2x - y + 3z - 4 = 0$$

$$2(-1 + 2t) - (5 + 3t) + 3(3 - t) - 4 = 0$$

$$-2 + 4t - 5 - 3t + 9 - 3t - 4 = 0 \quad \therefore -2t = 2 \therefore t = -1$$

$$\left.\begin{cases} x = -1 + 2(-1) \\ y = 5 + 3(-1) \\ z = 3 - (-1) \end{cases}\right\} (-3; 2; 4)$$