AULA 7.1

DISTÂNCIAS

Distância entre dois pontos

Considerando que dois pontos definem um segmento de reta, o cálculo da distância entre dois pontos será semelhante ao cálculo da medida de um vetor.

Sejam: $\begin{cases} P_1(x_1; y_1; z_1) \\ P_2(x_2; y_2; z_2) \end{cases}$ e $d(P_1; P_2) = |\overline{P_1P_2}|$

Como $\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ Então

$$d(P_1; P_2) = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

O livro fornece outra forma de cálculo.
Sugiro a leitura.

Calcular a distância entre $P_1(2,-1,3)$ e $P_2(1,1,5)$.

$$\overline{P_1P_2} = (1-2; 1+1; 5-3) = (-1; 2; 2)$$

$$d(P_1; P_2) = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(-1\,)^{\,2} + 2^{\,2} + 2^{\,2}}$$

$$d(P_1; P_2) = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{1+4+4}$$

$$d(P_1; P_2) = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{9}$$

$$d(P_1; P_2) = |\overline{P_1P_2}| = 3$$

Distância entre um ponto e uma reta

A distância é obtida pelo cálculo da altura do paralelogramo que forma se traçarmos um vetor qualquer ligando a reta até o ponto em questão e um vetor diretor na reta em questão.

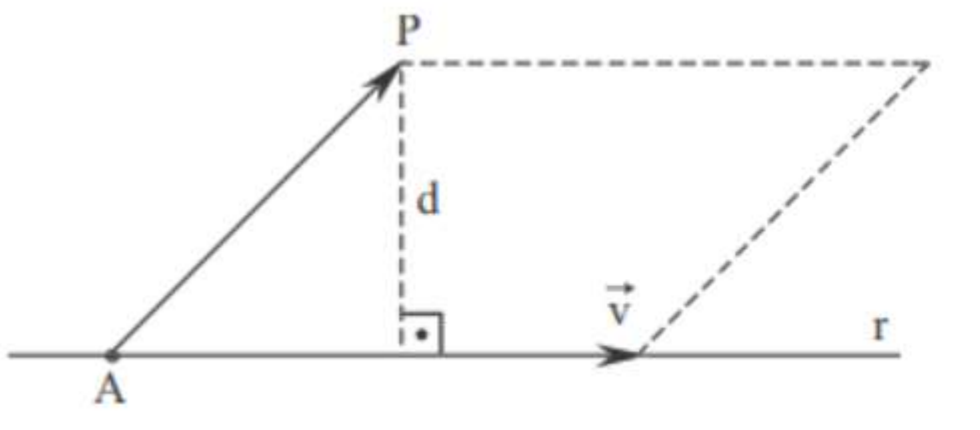

Figura 7.1

Sabe-se que a área do paralelogramo é base vezes a altura. E pode ser calculada:

$$A = |\vec{v}| \cdot d$$

Ou através de:

$$A = \left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|$$

Logo:

$$d(P;r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{v}|}$$

O livro fornece outra forma de cálculo. Sugiro a leitura.

Calcular a distância do ponto P(2, 1, 4) à reta

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

<u>Distância de um ponto a um plano</u>

$P_0(x_0; y_0; z_0) \qquad A(x; y; z)$

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

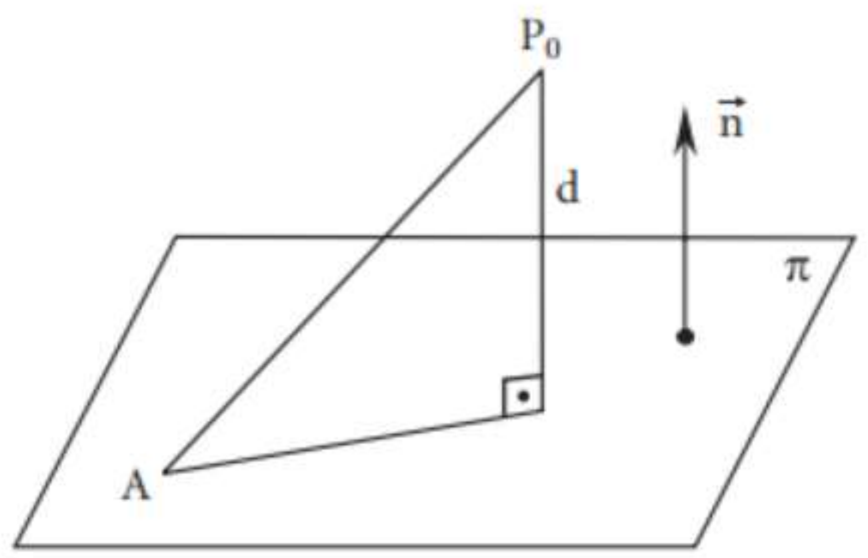

Figura 7.3

A distância se dará ao calcular a projeção do segmento de reta do ponto A até o ponto em questão com direção do vetor normal em destaque. Logo:

$$d(P_0;\pi) = \left|proj_{\vec{n}}\overrightarrow{AP_0}\right| = \left|\overrightarrow{AP_0}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$$

Ou melhor escrito:

$$d(P_0;\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + d^2 + c^2}}$$

O livro fornece outra forma de cálculo.
Sugiro a leitura.

Distância entre retas

- Quando as retas são concorrentes

$$d(r_1; r_2) = 0$$

- Quando as retas são paralelas

$$d(r_1; r_2) = d(P_1; r_2); P_1 \in r_1$$

Ou

$$d(r_1; r_2) = d(P_2; r_1); P_2 \in r_2$$

Distância entre retas

- Quando as retas são concorrentes

O cálculo se assemelha ao da distância entre um ponto e uma reta. Contudo, usaremos um paralelepípedo e seu volume.

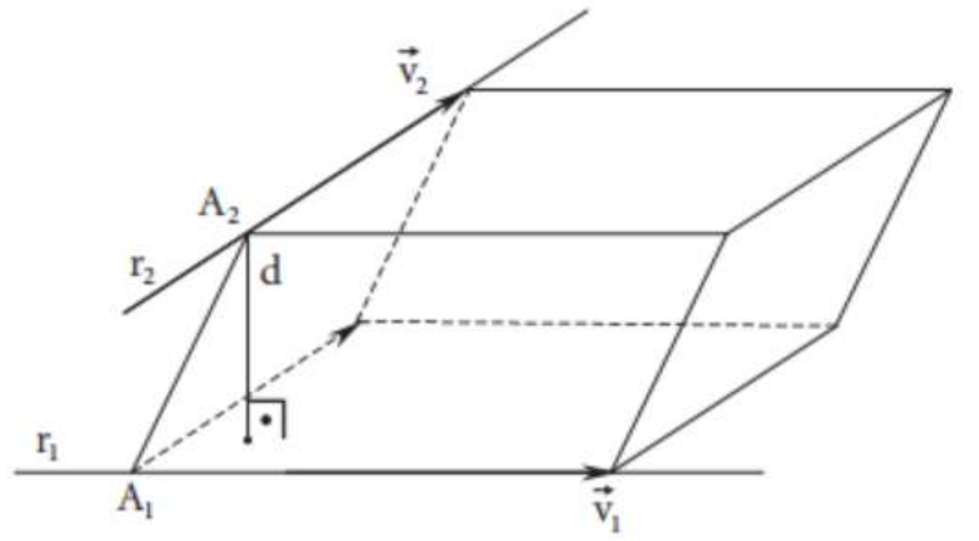

Figura 7.6

$$d(r_1;r_2) = \frac{\left|(\overrightarrow{v_1};\overrightarrow{v_2};\overrightarrow{A_1A_2})\right|}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|}$$

O livro fornece outra forma de cálculo. Sugiro a leitura.

Calcular a distância entre as retas

$A_1\ (-1; 3; -1)$

$\overrightarrow{v_1}(1; -2; -1)$

$$r_1: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} y = x - 3 \\ z = -x + 1 \end{cases}$$

$A_2\ (0; -3; 1)$

$\overrightarrow{v_2}(1; 1; -1)$

$$\overrightarrow{A_1A_2}(1; -6; 2)$$

$$\left(\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{A_1A_2}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 9$$

$$\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (3; 0; 3)$$

$$d(r_1; r_2) = \frac{|9|}{|(3; 0; 3)\ |} = \frac{9}{\sqrt{9 + 0 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$