

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

DARICE LASCALA PADRÃO

A ORIGEM DO ZERO

**MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE
MATEMÁTICA**

**São Paulo
2008**

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

DARICE LASCALA PADRÃO

A ORIGEM DO ZERO

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da Professora Dra. **BARBARA LUTAIF BIANCHINI**.*

São Paulo

2008

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus queridos e amados filhos Camila Lascale Martins Padrão e Hélio Lascale Martins Padrão que acreditaram e contribuíram para que eu realizasse este sonho.

As palavras “muito obrigada” não são suficientes para expressar o sentimento de gratidão que experimento pelo fato de vocês existirem na minha vida. Sempre presentes nas horas difíceis durante a trajetória deste trabalho, sempre apoiando e dando forças para que tudo desse certo.

Meus filhos, vocês participaram dos meus momentos de ansiedade, desespero e desânimo, sempre valorizando minha capacidade e fazendo com que eu acreditasse nos frutos do meu esforço, oferecendo carinho e amor.

Queridos filhos, agradeço a vocês pela força, consolo, ânimo. E, sobretudo, comprovarem que tudo vale a pena, desde que exista amor.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a DEUS por me conceder a vida e todas as oportunidades que surgiram ao longo desta trajetória, ensinando-me a confiar Nele.

Agradeço aos meus filhos Hélio e Camila pela paciência e compreensão durante os períodos em que estive ausente e por terem respeitado e acreditado neste sonho.

Ao meu marido Hélio que tanto me incentivou e colaborou para que eu pudesse realizar este trabalho.

Aos meus pais Dirce e Dario, oferecendo seus préstimos, me incentivando e rezando para que tudo desse certo.

Às minhas queridas irmãs Dilma, Dione e Débora pelo carinho e afeto. Em especial à Dione que colaborou para que este trabalho fosse realizado.

À minha orientadora e amiga, Professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini pela dedicação incondicional e confiança depositada em mim, sempre me incentivando e colaborando para que tudo fosse realizado da melhor maneira possível.

Ao Professor Doutor Benedito Antonio da Silva e Professora Doutora Leila Zardo Puga que aceitaram participar da Banca Examinadora, por suas orientações e contribuições para que este trabalho fosse finalizado.

Ao Professor Doutor Nílson José Machado pelas orientações.

Às minhas colegas de curso Carla, Adriana e Rosana, que sempre se mostraram amigas e, nos momentos difíceis, souberam expressar palavras de carinho e ânimo, além de colaborarem com inúmeras sugestões.

À Liana Sayuri Takagi Minsoni, pela sua paciência e contribuição.

Ao Thomas Wollan pela sua contribuição.

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo que concedeu a bolsa mestrado e tornou possível a realização desse sonho.

RESUMO

Este trabalho é uma pesquisa bibliográfica que tem como objetivo investigar as dificuldades que surgiram ao longo da história para que o zero fosse considerado um elemento integrante da matemática. Os trabalhos citados abordam, de alguma forma, o zero. São eles: *Sentidos Atribuídos ao zero por alunos da 6ª série*, artigo de Salvador e Nacarato (2003), apresentado na ANPED 2003; *Sentido do zero* de Guimarães, dissertação de Mestrado – PUCSP – 2008; *A História do Zero*, artigo de Pinedo e Sbardelotto – 2004, publicado no boletim eletrônico nº3 – Júnior do Grupo de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática – CEFET – Paraná unidade Sudoeste - Campus Pato Branco. Neste trabalho mostramos a importância do conhecimento da história da matemática para uma melhor compreensão do conceito a ser estudado. O desenvolvimento desta pesquisa se deu por meio de um levantamento histórico sobre as civilizações que introduziram o zero em seus sistemas de numeração, evidenciando as dificuldades encontradas, até que chegassem a uma denotação para o “vazio”. A civilização babilônica utilizou um sistema de numeração posicional sexagesimal e atribuiu um símbolo para indicar a ausência de uma ou mais ordens na representação de um número. O povo maia utilizou um sistema de numeração posicional de base vinte, com uma irregularidade no valor relativo à terceira ordem. Este povo representou a ausência de uma ou mais ordens com o símbolo de uma “concha”. O sistema de numeração criado pelos chineses foi baseado em um sistema híbrido, no qual foi atribuído um símbolo para indicar a ausência de ordens, que chamaram de *ling*. A civilização hindu desenvolveu um sistema de numeração posicional de base dez e usou um símbolo para representar a falta de uma ordem, associado ao “nada”. Mais tarde esse símbolo tornou-se um número, o zero. Assim foi possível descrever a trajetória da origem do zero nas civilizações citadas anteriormente, conhecendo as dificuldades enfrentadas pelos povos.

Palavras-Chave: origem do zero, zero algarismo, zero número.

ABSTRACT

The objective of this research paper is to study the origins of ZERO and the different challenges that have emerged throughout history before ZERO was considered an integral part of mathematics. The references below all show ZERO in different contexts: Sentidos Atribuídos ao Zero por alunos da 6ª série, article by Salvador and Nacarato (2003), presented at ANPED 2003; Sentido do Zero, by Guimarães, masters dissertation – PUCSP 2008; A História do Zero, by Pinedo and Sbardelotto (2004) published on electronic bulletin nº3 – Junior of Mathematics Education Knowledge and Research Group – CEFET – Paraná southwest unity – Pato Branco Campus. This study shows how significant studying the history of mathematics is for improving the understanding of the researched subject. The basis for this paper is a historical survey on earlier civilizations which introduced ZERO in their numerical system, furthermore analyzing the mathematical challenges they encountered before finally arriving at a definition for “nothing”. The Babylonian civilization developed a positional sexagesimal system where they assigned a symbol to indicate the absence of a value in a numerical sequence. The Mayan people invented a positional numerical system based on 20, with an irregularity in the value relative to the third order. The Mayans assigned a sign in the shape of a “shell” to symbolize the absence of a value (zero). The numerical system established by the Chinese was a hybrid system where a symbol called “ling” indicated the absence of a value (zero). The Hindu civilization developed a numerical positional system based on 10, and also used symbols to indicate the absence of a value (nothing). Later this symbol became a number, the zero as we know it today. Thus by studying the difficulties overcome by these civilizations, it was possible to describe the development of ZERO from its origins until it became an integral part of numerical system.

Keywords: *origin of zero, zero algarism, the number zero.*

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO II

Figura 2.1 Números egípcios (GUIMARÃES, 2008, p.35).....	27
Figura 2.2 Números gregos (GUIMARÃES, 2008, p.36).....	28
Figura 2.3 Números babilônicos (GUIMARÃES, 2008, p.37).....	29
Figura 2.4 Símbolos da numeração maia (GUIMARÃES, 2008, p.40).....	29
Figura 2.5 Representação do número 79, no sistema de numeração maia (GUIMARÃES, 2008, p.41).....	30

CAPÍTULO III

Figura 3.1 Mapa do atual Paquistão, antiga civilização indiana (BIANCHINI; PACCOLA, 2001, p. 44).....	42
Figura 3.2 Mapa do Império Babilônico (COTRIM, 1995, p. 50).....	44
Figura 3.3 Símbolos da numeração babilônica (adaptada IFRAH, 1997, p.295).....	45
Figura 3.4 Representação dos números 25, 615 e 4 305, no sistema de numeração babilônico (IFRAH, 1997, p.240).	45
Figura 3.5 Representação do número 10 804, no sistema de numeração babilônico (EVES, 2004, p.36).....	46
Figura 3.6 Mapa da região dos maias (BIANCHINI; PACCOLA, 2001, p. 32).....	47
Figura 3.7 Representação dos dezenove primeiros números do sistema de numeração dos maias (IFRAH, 1997, p.639).....	48
Figura 3.8 Representação do número 21, no sistema de numeração maia (adaptada IFRAH, 1997, p.640).....	48

Figura 3.9 Representação do número 4 399, no sistema de numeração maia (IFRAH, 1997, p.640).....	49
Figura 3.10 Representação do número 1 087 200, no sistema de numeração maia (IFRAH, 1997, p.641).....	50
Figura 3.11 Córdex de Dresden (IFRAH, 1997, p.642).....	51
Figura 3.12 Transcrição das menções numéricas que figuram no documento anterior (IFRAH, 1997, p.642).....	53
Figura 3.13 Mapa da China (BIANCHINI; PACCOLA, 2001, p. 37).....	54
Figura 3.14 Sinais numéricos do sistema de numeração chinês (IFRAH, 1997, p.551).....	55
Figura 3.15 Representação do número 9 564 no sistema de numeração chinês (adaptada IFRAH, 2001, p.236)...	56
Figura 3.16 Representação do número 504 no sistema de numeração chinês (adaptada IFRAH, 1997, p.556).....	56
Figura 3.17 Representação do número 504 no sistema de numeração chinês, com um símbolo para o zero (adaptada IFRAH, 1997, p.556).....	57
Figura 3.18 Mapa da região da Índia e Arábia Saudita (Disponível em www.webbusca.com.br/atlas/mapas/asia.gif . Acesso em 14 jul.2008).....	58
Figura 3.19 Representação do número 7 629 na numeração hindu (IFRAH, 2001, p.266).....	59
Figura 3.20 Representação do número 9100 na numeração hindu (IFRAH, 2001, p.285).....	60
Figura 3.21 Evolução da representação dos algarismos indo-arábicos (SILVEIRA, 2001, p.9).....	63
Figura 3.22 Linha do tempo dos principais acontecimentos relacionados à origem do zero.....	64

LISTA DE QUADROS

CAPÍTULO II

Quadro 2.1 Síntese dos diferentes significados do zero (adaptado SALVADOR; NACARATO, 2003, p. 3)...	22
Quadro 2.2 Sentidos atribuídos ao zero (SALVADOR; NACARATO, 2003, p. 5).....	23
Quadro 2.3 Escrita dos números hindus (Adaptada GUIMARÃES, 2008, p. 46).....	31

CAPÍTULO III

Quadro 3.1 Notação dos números da figura 3.11(IFRAH, 1997, p.643).....	53
Quadro 3.2 Cronologia dos acontecimentos relacionados ao zero (adaptado SILVEIRA, 2001, p. 5-10).....	65

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ANPED	= Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação
CEFET	= Centro Federal de Educação Tecnológica
EBRAPEM	= Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática
ENEM	= Encontro Nacional de Educação Matemática
GEPEM	= Grupo de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática
GPEA	= Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica
NCTM	= National Council of Teachers Mathematics
PCN	= Parâmetros Curriculares Nacionais
PUCSP	= Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
UNESP	= Universidade do Estado de São Paulo
UNICAMP	= Universidade de Campinas
USP	= Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

1. A PESQUISA.....	16
1.1 Introdução.....	16
1.2 Questão de pesquisa e objetivo.....	18
1.3 Desenvolvimento da pesquisa.....	19

CAPÍTULO II

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	20
2.1 Sentidos atribuídos ao zero, Salvador e Nacarato – 3 momentos.....	20
2.2 Sentido do zero, Guimarães.....	24
2.3 História do número zero, Pinedo e Sbardelotto.....	32
2.3.1 Antes de Cristo.....	33
2.3.1.1 Os Babilônios.....	33
2.3.1.2 Os Olmecas.....	33
2.3.1.3 Parmenides.....	33
2.3.1.4 Na China.....	33
2.3.1.5 Os gregos.....	34
2.3.2 Depois de Cristo.....	34
2.3.2.1 Ptolomeu.....	34
2.3.2.2 Os maias.....	34
2.3.2.3 Os indianos.....	35
2.3.2.3.1 Varahamihica.....	36

2.3.2.3.2 Brahmagupta.....	36
2.3.2.3.3 Mahavira.....	36
2.3.2.3.4 Al-khwarizmi.....	37
2.3.2.3.5 Gelberd' Aurillac.....	37
2.3.2.3.6 Ibz Ezra.....	37
2.3.2.3.7 Bhaskara.....	37
2.3.2.3.8 Fibonacci.....	38
2.3.2.3.9 Sacrobosco.....	38
2.4 Considerações sobre as pesquisa.....	39

CAPÍTULO III

3. A ORIGEM DO ZERO NA HISTÓRIA.....	40
3.1 Importância da história da matemática no ensino.....	40
3.2 A civilização babilônica.....	43
3.3 A civilização maia.....	47
3.4 A civilização chinesa.....	54
3.5 A civilização hindu.....	57
3.6 Linha do tempo relacionada à origem do zero.....	64
3.7 Cronologia.....	65
3.8 O número.....	68
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	70
REFERÊNCIAS.....	72

CAPÍTULO I

1 A PESQUISA

1.1. Introdução

A escolha inicial do tema de pesquisa surgiu quando percebemos as dificuldades que os alunos do Ensino Fundamental II e Ensino Médio apresentavam ao efetuar operações envolvendo o número zero.

Quando lecionávamos na 8ª série de uma escola particular da Zona Norte da cidade de São Paulo, ensinando equação do 2º grau, observamos que os alunos erravam no cálculo do discriminante (na resolução da equação do 2º grau, o aluno utilizava a seguinte fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$, em que $b^2 - 4.a.c$ é chamado de discriminante), quando o termo independente **c** era zero. Eles simplesmente desprezavam o zero, efetuando o produto entre o número quatro e o coeficiente **a**.

O fator que nos motivou a realizar esse trabalho foi o desejo de conhecer, esclarecer e aprender um pouco mais a respeito do zero.

Daí o interesse em investigar como e em que contexto o “zero” surgiu na história das civilizações. Esta pesquisa mostra quais foram as dificuldades apresentadas nos sistemas de numeração até que o conceito do zero foi instituído na matemática.

Durante as leituras sobre o tema, percebi a necessidade de aprofundar o estudo do zero para uma melhor compreensão de como tudo aconteceu ao longo da história da matemática.

Este trabalho está faz parte do projeto “**A Teoria Elementar dos Números no Ensino Básico e Licenciatura**”, que faz parte de outro maior intitulado “**Qual a Álgebra a Ser Ensinada na Formação de Professores?**”,

inserido linha de pesquisa ***“Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores”*** do Programa de Estudos de Pós-Graduados da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, subgrupo de pesquisa de Educação Algébrica conhecido como GPEA. Segundo a descrição do projeto de pesquisa:

Este grupo concebe a Teoria Elementar dos Números como parte integrante da Álgebra do Ensino Básico, conforme resultado de seus estudos. O objetivo das pesquisas desse projeto é investigar o estatuto que esse assunto tem no campo institucional (PCN, Programas, NCTM, etc.), no campo docente (professores do ensino superior, médio, fundamental e infantil) e no campo discente (alunos de todos os segmentos). Os resultados dessas pesquisas visam contribuir para a sensibilização sobre a contribuição dos estudos sobre o tema no desenvolvimento do fazer matemático como demonstrar, conjecturar, diversificar estratégias para resolução de problemas que envolvam números inteiros ¹.

¹Texto disponível em: <<http://www.pucsp.br/pos/edmat/>>. Acesso em 02 de jul.2008.

1.2 Questão de pesquisa e objetivo

Diante do interesse de investigar o zero, responderemos à seguinte questão de pesquisa:

- Quais foram as dificuldades encontradas pelas civilizações, ao longo da história, até instituírem o zero como um elemento integrante da matemática?

Certamente este trabalho não responderá à questão na sua íntegra, mas despertará o interesse pelo assunto, já que foram observadas poucas pesquisas sobre o tema.

Por meio da presente pesquisa foi feito um levantamento histórico da origem do zero, e relatado o surgimento desse algarismo e número nas civilizações babilônica, maia, chinesa e indiana.

1.3 Desenvolvimento da pesquisa

O desenvolvimento deste trabalho foi feito por meio de uma pesquisa bibliográfica, com a finalidade de conhecer as dificuldades enfrentadas pelas civilizações que surgiram na história da origem do zero.

A pesquisa bibliográfica é a modalidade de estudo que se propõe a realizar análises históricas de estudos ou processos tendo como material de análise documentos escritos e/ou produções culturais garimpados a partir de arquivos e acervos. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.71).

Segundo Köche (2001), o investigador faz um levantamento de trabalhos e livros que abordam o tema, com o objetivo de analisar e avaliar as principais teorias e assim compreender o desenvolvimento do processo do objeto de investigação.

O objetivo da pesquisa bibliográfica, portanto, é o de conhecer e analisar as principais contribuições teóricas existentes sobre um determinado tema [...] (2001, p. 122).

No capítulo 2, foi feita uma revisão bibliográfica sobre pesquisas que retratam a questão do zero. Entre elas, “Sentidos Atribuídos ao zero por alunos da 6ª série” de Nacarato e Salvador, apresentado na ANPED 2003; “Sentido do zero” de Guimarães, dissertação de Mestrado – PUCSP - 2008 e “A História do Zero” de Pinedo e Sbardelotto – 2004.

Finalmente, no capítulo 3, sistematizamos os acontecimentos relacionados à história do zero, encerrando o trabalho com nossas considerações finais.

CAPÍTULO II

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta pesquisa consta de um levantamento bibliográfico de artigos, dissertações e teses, referente a citações a respeito do “zero”, que contribuem para responder à questão de pesquisa proposta. Dissertações e teses foram pesquisadas em sites da PUC-SP, UNICAMP, UNESP, USP e universidades federais. Os artigos foram procurados em revistas científicas como: BOLEMA e Revista do Professor de Matemática; em anais de congressos como: ENEM, ANPED e EBRAPEM; e no Grupo de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática – GEPEM do CEFET – Paraná unidade Sudoeste-Campus Pato Branco.

Nessa busca, encontramos apenas três trabalhos que abordam a história da origem do zero.

Eis algumas pesquisas:

2.1 Sentidos Atribuídos ao zero por alunos da 6ª série (Salvador; Nacarato, 2003)

O artigo de Salvador e Nacarato (2003), apresentado na ANPED 2003, descreve uma pesquisa feita com 39 alunos de 6ª série, com idades entre 12 e 14 anos da Escola Pública Estadual de São Paulo, no período de fevereiro/2002 a abril/2002, quando as autoras (pesquisadoras) perceberam a dificuldade dos alunos em estudar os números inteiros relativos.

O referencial teórico dessa pesquisa foram os trabalhos de Caraça (1989) e Glaeser (1985). Caraça (1989 *apud* SALVADOR; NACARATO, 2003) que

foram essenciais para a compreensão do “Princípio das leis formais”, colaborando para o entendimento de aspectos epistemológicos dos campos numéricos e Glaeser (1985 *apud* SALVADOR; NACARATO, 2003) na compreensão dos obstáculos epistemológicos, em que as autoras destacam dois:

[...] dificuldade em unificar a reta numérica manifesta pela diferenciação qualitativa entre quantidades positivas e negativas, pela concepção da reta como mera justaposição de duas semi-retas opostas, ou, ainda, por desconsideração do caráter simultaneamente dinâmico e estático dos números; e ambigüidade dos dois zeros: zero absoluto e zero como origem. Estes obstáculos despertaram nosso interesse por envolverem a questão do zero no campo dos números relativos. (SALVADOR; NACARATO, 2003, p. 1).

O trabalho teve como objetivos:

- discutir as questões históricas e epistemológicas relacionadas ao zero;
- identificar os sentidos que os alunos atribuem ao zero e a transformação deles no decorrer da prática pedagógica.

Na investigação das autoras, a questão central foi “Quais sentidos são atribuídos ao zero pelos alunos de 6ª série ao iniciarem o estudo dos números relativos e quais contribuições a prática pedagógica traz a esse processo de elaboração conceitual?”

No “primeiro momento” da pesquisa, as autoras pediram que os alunos respondessem à questão “Qual o significado do zero para você?” e entregassem por escrito na aula seguinte. Esta fase refere-se à sondagem inicial e decorreu sem a interferência das pesquisadoras. Os alunos receberam explicações durante as aulas em que introduziram o estudo da reta numérica, destacando o zero como origem.

Durante duas semanas, os alunos tiveram contato com atividades e jogos relacionados com números negativos, com a história do zero, temperatura, transações comerciais e com a reta numérica. Após esse período, chamado de

“segundo momento” pelas autoras, foi feita a mesma pergunta para que os alunos respondessem em sala de aula. O objetivo desse momento era perceber se os alunos atribuíam novos sentidos ao zero.

Quando as pesquisadoras concluíram o estudo dos números relativos fizeram a mesma questão para que fosse respondida pelos alunos em sala de aula, chamando esta fase de “terceiro momento”. Esse momento teve como objetivo se os alunos atribuíam novos sentidos para o zero, após o estudo dos números relativos.

As pesquisadoras apresentaram um quadro com a síntese dos diferentes significados atribuído ao zero, o que as levou a uma reflexão dos aspectos pedagógicos relacionados a eles.

Quadro 2.1 – Síntese dos diferentes significados do zero (adaptado SALVADOR; NACARATO, 2003, p.3)

Significados do zero	Características
Zero como elemento de contagem	Cardinal de um conjunto vazio; nem sempre considerado um número natural; de natureza discreta; impregnado de ‘quantidade’.
Zero como valor posicional	Representa as ordens vazias, zero como algarismo; impregnado de ‘quantidade’.
Zero como dado operatório	Elemento neutro da adição; anula o produto em uma multiplicação; $a^0 = 1$; 0^0 é indeterminado; impregnado de ‘quantidade’.
Zero como origem	De natureza contínua; surge para unificação da reta numérica no campo dos reais; impregnado de ‘quantidade’.

A partir destes resultados, as pesquisadoras procuraram documentos oficiais a exemplo da Proposta Curricular para o Ensino de Matemática de 1º grau do Estado de São Paulo e os Parâmetros Curriculares Nacionais com o objetivo de verificar se esses documentos contemplavam os significados do zero apresentado na tabela.

Na análise desses documentos identificaram que na Proposta Curricular² são poucas as considerações pedagógicas em relação ao zero e nos PCN (1997) não conseguiram identificar citações ao conceito do zero.

Ao término dos três momentos da pesquisa, as pesquisadoras elaboraram uma tabela identificando os sentidos que os alunos atribuíram ao zero.

Quadro 2.2 - Sentidos atribuídos ao zero (SALVADOR; NACARATO, 2003, p.5)

Sentidos para o zero	1º momento	2º momento	3º momento
Zero absoluto (contagem)	62%	46%	33%
Zero como medida (origem)	38%	49%	46%
Zero como valor posicional	44%	31%	54%
Zero como dado operatório	21%	31%	38%

Analisando a tabela, as autoras atribuem esses resultados ao trabalho pedagógico. No primeiro momento, os alunos traziam apenas o conhecimento das séries anteriores, mas depois das intervenções feitas pelas pesquisadoras, acreditavam que um número significativo de alunos pudesse explicitar os sentidos do zero. A sistematização do conhecimento não aconteceu de maneira linear.

² A Proposta Curricular que as autoras se referem é **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática 1º grau**. São Paulo, 1988.

Para as autoras, Salvador e Nacarato:

Os conceitos têm história tanto para a área de conhecimento quanto para o próprio sujeito. Assim, o zero teve sua história no desenvolvimento da matemática e tem também sua história para cada um dos alunos envolvidos nesta pesquisa. O fato de, em cada um desses momentos, alguns sentidos para o zero terem emergidos mais que outros não significa, necessariamente, que tenham ou não sido incorporados pelos alunos. Provavelmente, o aluno explicitou, em cada um desses momentos, os sentidos que para ele eram significativos, aqueles que o marcaram mais, ou aqueles que estavam sendo abordados e, portanto, seriam de expectativa da pesquisadora. (2003, p. 5-6).

As autoras acreditam que os alunos não têm uma base de informações suficiente a respeito da conceituação do zero, pois as discussões entre docentes em relação ao tema são raras.

A inserção da trajetória histórica do zero possibilitou-nos compreender o quanto a sua criação pelas civilizações antigas foi complexa. Pensar no nada e ter que associar algo a esse nada deve ter sido provavelmente muito difícil para essas civilizações. Mas, mesmo com condições precárias e limitadas em termos tecnológicos, se comparadas às atuais, ousaram e conseguiram com êxito criar um símbolo para representar o nada, motivados por necessidades de ordem prática. Nesse sentido, a prática pedagógica poderia recuperar essa trajetória para problematizar o próprio conceito do zero. (SALVADOR; NACARATO, 2003, p. 15).

Neste artigo percebemos a importância de o aluno conhecer a trajetória histórica do zero para compreender melhor seu conceito. Além disso, traz para o meio acadêmico informações sobre a forma como os alunos atribuem sentidos ao zero.

2.2 Sentido do zero (Guimarães, 2008)

Na dissertação de Mestrado de Guimarães (2008), intitulada “Sentido do Zero” encontramos um estudo focado para os sentidos atribuídos ao zero por alunos de diferentes idades da escolaridade obrigatória.

A autora realizou entrevistas em escolas públicas da cidade de Taubaté – SP, formulando a seguinte questão “O que é para você o zero?”. As entrevistas com os alunos do Ensino Infantil ao Ensino Médio Regular e Educação de jovens e adultos, foram feitas oral, individualmente e em grupo. Foram também realizadas de forma coletiva e oral em 4 classes, de 20 alunos em média, da Educação Infantil (3 a 7 anos). E individualmente com 37 entrevistados do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Com o término desta etapa do trabalho, a autora leu a obra “Os zeros e os Infinitos” Vergani (1991 *apud* GUIMARÃES, 2008) que trabalhou a seguinte questão *Escreva com suas palavras o que é para você ‘zero’*. A questão foi formulada para 170 alunos de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, 1º e 3º anos do Ensino Médio Regular e 1º e 3º anos do Ensino Médio – Educação de Jovens e Adultos, de forma individual e escrita.

O fenômeno estudado por Guimarães (2008) foi o zero, e a partir de uma reflexão após a coleta de dados localizou as unidades de significados, apoiando-se em Garnica (1997 *apud* GUIMARÃES, 2008), por meio de discursos e descrições dos alunos. A autora criou quatro unidades de significados. São elas:

[...] os sentidos atribuídos ao zero pelos alunos: o zero como técnica matemática, o zero conceitual, o zero como uma técnica social e o zero como uma metáfora. (GUIMARÃES, 2008, p. 27).

Em suas análises, Guimarães (2008, p. 63-64) descreveu os critérios de cada unidade de significados.

Zero como técnica matemática: entrevistas referentes às técnicas para explicar o zero no contexto matemático acadêmico.

Zero conceitual: entrevistas em que os alunos procuram o conceito do zero, ou ainda buscam uma explicação para o zero, não só dentro como também fora do contexto matemático. Exemplos: “tem valor”, “vazio”, etc.

Zero como uma técnica social: entrevistas em que o zero aparece com uma técnica usada em vários momentos sociais. Um exemplo é o zero como nota em prova escolar.

Zero como metáfora: expressões idiomáticas que utilizam o zero como metáfora. Exemplos: “zero à esquerda” e “começar do zero”.

O Programa Etnomatemática de D’Ambrosio (2002 *apud* GUIMARÃES, 2008) foi utilizado como referencial teórico para analisar e localizar as unidades de significados.

Segundo Guimarães,

ETNOMATEMÁTICA – TICAS (maneiras, modos, técnicas) de MATEMA (explicar, conhecer, entender, lidar, conviver) em diversas ETNOS (realidade natural e sociocultural). Os alunos de diferentes idades, séries, crenças (ETNOS) utilizaram de diferentes maneiras, modos, técnicas (TICAS) para explicar, entender (MATEMA) o zero. (2008, p. 28).

A autora traz os depoimentos dos alunos que participaram da pesquisa, caracterizando-os de acordo com critérios destacados anteriormente.

Na Educação Infantil, foi realizada uma entrevista oral e em grupo com alunos entre 3 e 7 anos de idade. A pergunta realizada foi o que significava para eles o zero.

No primeiro momento a questão foi feita aos alunos de 3 anos e não se obteve resposta. A autora então insistiu, formulando de outra maneira a mesma questão: apontando para uma mesa vazia, perguntou quantos lápis havia sobre a referida mesa. Os alunos começaram falar vários números.

Para as crianças de 3 a 6 anos, a autora fez a mesma pergunta e as respostas variaram entre diferentes números, inclusive o zero. Já os alunos na faixa etária entre 6 e 7 anos, responderam com o zero, ou que não havia nada sobre a mesa.

No Ensino Fundamental, Guimarães (2008) descreve o depoimento de cada aluno e os caracteriza nas unidades de significados. Na entrevista com os estudantes de 1ª a 4ª séries ninguém se referiu ao zero como uma metáfora.

Ensino Médio, 1ª a 3ª séries, e ensino de jovens e adultos – EJA, o procedimento foi o mesmo do ensino fundamental.

No capítulo "O ZERO NA HISTÓRIA", Guimarães (2008) faz citações relacionadas aos "Sistemas de Numeração e o zero".

Os egípcios, há mais de 5 000 anos, tinham um sistema aditivo de numeração com inscrição para os seguintes números:








Símbolo egípcio	Descrição	Numeração decimal
	Bastão	1
	Calcanhar	10
	Rolo de corda	100
	Flor de lótus	1000
	Dedo apontando	10000
	Peixe	100000
	Homem	1000000

Figura 2.1 – Números egípcios (GUIMARÃES, 2008, p. 35)

Como esse sistema de numeração não era posicional não havia necessidade do algarismo zero.

Os gregos sofreram uma influência dos egípcios ao utilizar letras no lugar dos desenhos egípcios, desenvolvendo um sistema mais sofisticado. Como mostra a figura:



$\alpha = 1$	$\iota = 10$	$\rho = 100$
$\beta = 2$	$\kappa = 20$	$\sigma = 200$
$\gamma = 3$	$\lambda = 30$	$\tau = 300$
$\delta = 4$	$\mu = 40$	$\upsilon = 400$
$\varepsilon = 5$	$\nu = 50$	$\phi = 500$
$\varsigma = 6$	$\xi = 60$	$\chi = 600$
$\zeta = 7$	$\omicron = 70$	$\psi = 700$
$\eta = 8$	$\pi = 80$	$\omega = 800$
$\theta = 9$	 = 90	 = 900

Figura 2.2 – Números gregos (GUIMARÃES, 2008, p. 36)

Os gregos tiraram da representação do número sua característica de referência de quantidade e como utilizavam o princípio aditivo na escrita dos números, não era necessário a presença do zero algarismo. (GUIMARÃES, 2008, p. 37).

O sistema de numeração romana também utilizava o princípio aditivo e letras. Dessa forma não precisavam do algarismo zero.

A partir das citações feitas por Guimarães (2008) em relação aos sistemas de numeração e o zero nas civilizações babilônica, maia, hindu e chinesa, aprofundaremos a questão em capítulo posterior.

Os babilônios tinham um sistema posicional (o valor do algarismo dependia da posição ocupada por ele) de base sessenta e utilizavam apenas dois símbolos:

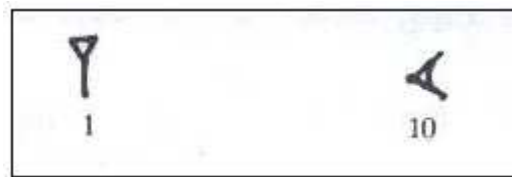


Figura 2.3 – Números babilônicos (GUIMARÃES 2008, p. 37)

Até o número 59, utilizavam o princípio aditivo e, a partir daí, era utilizado o sistema posicional. Quando faltava uma ordem, deixavam um espaço entre os símbolos, para indicar o algarismo “zero”. Para evitar dúvidas em relação a esses espaços, por volta de 300 a.C., os babilônios criaram um símbolo para o zero: duas cunhas inclinadas. Assim:



O sistema de numeração maia apresentava-se na base vinte e utilizava apenas três símbolos:

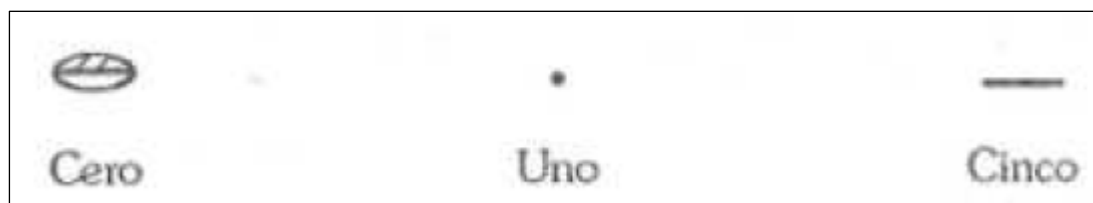


Figura 2.4 – Símbolos da numeração maia (GUIMARÃES, 2008, p. 40)

Até o número dezenove, usavam o princípio aditivo, com os símbolos acima. A partir do número vinte, representavam de maneira vertical, de cima para baixo. Conforme a figura:

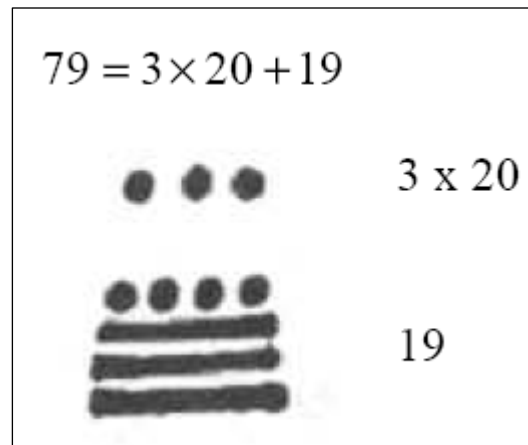


Figura 2.5 – Representação do número 79, no sistema de numeração maia (GUIMARÃES, 2008, p. 41)

O zero algarismo surge nos sistemas de numeração Babilônica e Maia. Os Maias utilizavam o zero algarismo em todas as posições, diferente dos Babilônios, que só o utilizaram nas posições intermediárias. Os indianos apropriaram-se das idéias babilônicas e as aperfeiçoaram, formando o nosso atual sistema de numeração decimal. (GUIMARÃES, 2008, p. 44).

O sistema de numeração hindu utilizava nove algarismos distintos, o princípio aditivo e a base que era dez. Como esse sistema era muito limitado, segundo Ifrah (1998) e os hindus tinham interesse pela astronomia, houve a necessidade de aprimorá-lo, atribuindo uma palavra para cada um dos nove números, da seguinte maneira:

Quadro 2.3 – Escrita dos números hindus (Adaptada GUIMARÃES, 2008, p. 46)

Número	Palavra
1	<i>eka</i>
2	<i>dvi</i>
3	<i>tri</i>
4	<i>catur</i>
5	<i>pañca</i>
6	<i>sat</i>
7	<i>sapta</i>
8	<i>asta</i>
9	<i>nava</i>

O número era escrito da esquerda para a direita, começando pela unidade simples, vindo em seguida as potências de dez. Para simplificar essa escrita, os indianos tiraram os nomes das classes e deixaram a localização dos algarismos. Então para representar o número 3 709, utilizavam a seguinte notação: *nava sapta sata ca tri sahasra* (nove, sete centos e três mil).

Ainda numa forma verbal, nasceu o sistema de posição indiano. Para a escrita de números como 301 não bastava dizer “Um Três”, facilmente os sábios indianos contornaram esta situação recorrendo a palavra *sūnya*, que significa vazio. (GUIMARÃES, 2008, p. 46).

Os números eram representados em um ábaco, agora da direita para a esquerda – como usamos atualmente – deixando um espaço vazio na ausência de uma ordem numérica, dando origem ao zero. O zero foi simbolizado por um ponto.

Algumas modificações ocorreram na representação dos algarismos indianos e estas foram introduzidas na imprensa no século XV.

Foram os árabes que divulgaram esse sistema de numeração, e por isso os algarismos hoje são conhecidos como “indo-arábicos”.

Em sua pesquisa, Guimarães (2008) aponta alguns aspectos da origem do zero ao longo da história, mas também categoriza os sentidos que alunos de diversas idades atribuem ao zero. A divulgação desses dados é importante para o meio acadêmico, pois assim é possível conhecer um pouco sobre como os alunos entendem o zero.

2.3 História do Número Zero (Pinedo e Sbardelotto, 2004)

Nesse artigo publicado no boletim do Grupo de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática – GEPEM em 2004, Pinedo e Sbardelotto discorrem sobre a origem da notação do zero nos diferentes momentos da história, nas diversas civilizações, entre outras a babilônica, a chinesa, a maia e a indiana.

Os autores concluíram que as civilizações babilônica, chinesa, maia e hindu descobriram o princípio de posição e foram as primeiras da história que puderam representar um número qualquer.

As civilizações babilônica e maia só utilizavam o zero para representar a ausência das unidades de uma ordem. Assim o zero foi instituído para representar a “quantidade nula”, só como algarismo.

Pinedo e Sbardelotto (2004) fazem uma retrospectiva do surgimento do zero desde os primórdios até os dias de hoje, para um melhor entendimento de sua importância ao longo dos tempos.

O trabalho é dividido em:

2.3.1 Antes de Cristo

2.3.1.1 Os Babilônios

Por volta de 1 200 a.C., os babilônios segundo Pinedo e Sbardelotto (2004) não conheciam o *conceito do zero* e utilizavam um sistema posicional cuneiforme, de base sessenta, conhecido na Mesopotâmia. Em aproximadamente 400 a.C., usavam ↑↑ no lugar vazio, ou seja, na falta de uma potência de sessenta. Outra notação que representava o vazio era 𐎶𐎶𐎶, em aproximadamente 700 a . C.

2.3.1.2 Os Olmecas

Em 1 000 a.C. essa civilização, considerada a mais antiga da Costa do Golfo do México e antecessora dos maias, inventou um sistema de numeração posicional, em que o zero estava incluído.

2.3.1.3 Parmênides (500 a.C.)

Foi um filósofo grego, que criou “O Paradoxo do Julgamento Negativo”, que diz: *“se uma afirmação declara que certa coisa existe então sua negativa indicará algo que não existe; ora, uma frase sobre algo que não existe é uma frase sobre nada e então impossível”*. Em seus diálogos, Platão utiliza esse paradoxo para concluir que é impossível existir grandeza nula.

2.3.1.4 Na China (400 a.C.)

Nessa época, os chineses usavam um ábaco para fazer cálculos e na ausência de dezena, deixavam “casa vazia” para indicar o zero. Mas esse

procedimento foi insuficiente, então incluíram alguns signos na numeração chinesa para representar potências de dez. Mais tarde, no século VII d.C., os sábios chineses instituíram o zero.

2.3.1.5 Os gregos

Ao que se sabe os gregos e romanos não conheciam o zero, portanto não havia um sistema de numeração posicional. O signo **0** (zero) era usado por matemáticos envolvidos com a astronomia, de uma forma simbólica. Esse fato é explicado por algumas teorias.

Uma dessas teorias explica que é *ômicron* a primeira letra da palavra grega *oudewn* (nada, a saber). Anteriormente a essa designação, o *ômicron* restringia-se a representar o número 70. (PINEDO; SBARDELOTTO, 2004, p. 4).

2.3.2 Depois de Cristo

2.3.2.1 Ptolomeu (150 d.C.)

Em seu livro “*Syntaxis Mathemática*” (*Almagesto* em árabe) usa o algarismo zero para representar os números de tabelas trigonométricas e astronômicas. No sistema sexagesimal, ele utiliza o zero medial e final (por exemplo: 205 e 250). Os registros desse livro são apenas cópias e por esse motivo há controvérsias sobre se o símbolo usado para representar o zero era a letra grega *ômicron* (nosso símbolo zero).

2.3.2.2 Os maias (250 – 900 d.C.)

Esse povo da América Central (hoje: México Meridional e Guatemala) desenvolveu um sistema de número de “posição” usando o algarismo zero. O *Uaxactun* é um artefato produzido pelos maias, considerado um dos documentos

mais antigos a apresentar um “zero”, para indicar a ausência de uma ou mais ordens do sistema de base vinte. Esse sistema era utilizado principalmente para o registro do tempo em calendários.

O *Pestac* é o mais antigo documento encontrado que relata o sistema de numeração posicional dos Maias usando o zero, este documento é datado de 665 d.C. Neste sistema usavam o desenho de uma concha ou de um caracol para representar simbolicamente o zero, que era chamado de “**xixim**”. (PINEDO; SBARDELOTTO, 2004, p. 5).

2.3.2.3 Os indianos

Esse povo foi o primeiro que reconheceu o sistema de posição com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e o elemento zero. Como utilizavam o ábaco para realizar cálculos, na ausência de uma ordem deixavam um sulco vazio. Assim surgiu a necessidade de um símbolo para representar esse espaço, que foi um ponto chamado de *sūnya*, no período entre os séculos III e IV, segundo o manuscrito de *Bakhshali*. A palavra *sūnya* significa vazio e indica “casa nula”.

Entrou para o árabe como *sifr*, que significa “vago”. E foi transliterado³ para o latim como *zephirum* ou *zephyrum* em meados de 1200, mantendo-se seu som, mas não seu sentido. A partir disso ocorreram mudanças sucessivas, e a palavra tornou-se *zeuero*, *zepiro* e *cifre*. (PINEDO; SBARDELOTTO, 2004, p. 6).

³Transliteração: em sentido estrito, é um mapeamento de um sistema de escrita em outro. Tenta ser sem perdas, isto é, o leitor informado deve poder reconstruir a ortografia original de palavras transliteradas que desconhece. Para consegui-lo, deve definir convenções complexas sobre como transliterar letras que não têm correspondência direta na escrita de destino.

Disponível em:< <http://pt.wikipedia.org/wiki/Translitera%C3%A7%C3%A3o>>. Acesso em 14 jul.2008.

Os autores citam nomes de pessoas famosas que, de alguma forma se referiram ao “zero”. São eles:

2.3.2.3.1 Varahamihica (505 - 587)

Matemático indiano que utilizou um círculo para indicar o algarismo zero, no seu livro *Panca Siddhantika*.

A matemática indiana começou a usar o zero em meados de 650. O zero foi concebido como número para representar a quantidade de nenhum objeto. Com o surgimento dos números negativos, a idéia do número zero ficou mais abstrata. Os matemáticos indianos *Brahmagupta*, *Mahavira* e *Bhaskara* escreveram seus livros, tentando buscar soluções para as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão entre os números negativos e o zero.

2.3.2.3.2 Brahmagupta (598 – 670)

Em seu livro *Brahmasphuta Siddhanta*, o matemático explica operações envolvendo o zero, através de regras para a adição, subtração, multiplicação e divisão. Em sua época, conseguiu perceber a relação que havia nos cálculos. Só não conseguiu explicar corretamente a divisão de um número por zero, afirmando que é $n/0$ e zero dividido por zero é zero.

2.3.2.3.3 Mahavira (800 – 870)

Por volta de 830 d.C., ele escreveu sua obra prima, “*Ganita Sara Samgraha*”, que foi uma atualização do livro de *Brahmagupta*. Mas ainda não conseguiu explicar de maneira correta a divisão de um número por zero, afirmando que: *Um número permanece inalterado quando é dividido por zero.*

2.3.2.3.4 Al-khwarizmi (790 – 850)

Esse matemático divulgou o sistema posicional decimal e suas técnicas de cálculo para o mundo Islâmico e o zero para o mundo árabe, através de seu livro *Al-khawarizmi on the Hindu*.

2.3.2.3.5 Gelbert d' Aurillac (950 – 1003)

Foi um monge francês, que mais tarde tornou-se Papa. Em 980 viajou pela Espanha Islâmica e conheceu o sistema de numeração indiano. Tentou transmitir para o Mundo Cristão as técnicas de cálculo no ábaco, mas talvez não entendesse bem, em particular, a importância do zero. Assim sua tentativa fracassou.

2.3.2.3.6 Ibn Ezra (1092 – 1167)

Foi um rabino que pela primeira vez tratou do problema do valor da posição, no ocidente. Destacou as vantagens dos “sinais indianos” e salientou a importância do zero. Escreveu três tratados que levaram os símbolos indianos e as idéias de frações para as pessoas instruídas da Europa. Em seu trabalho, “O livro do número”, aponta o sistema decimal para os inteiros, com valores de posição. O zero era chamado de “*galgal*” (roda o círculo).

2.3.2.3.7 Bhaskara (1114 – 1185)

Conseguiu expressar o problema da divisão de um número por zero, afirmando que: *Uma quantidade dividida por zero se torna uma fração com denominador igual a zero. Esta fração determina uma quantidade infinita.* (PINEDO; SBARDELOTTO, 2004, p.8).

Esta colocação não estava correta a de *Bhaskara*, pois ao afirmar que $\frac{n}{0} = \infty$, estaria correto dizer que zero multiplicado por infinito deveria ser igual a n , ou seja, qualquer número. O que seria um absurdo, pois todos os números seriam iguais. No entanto, ele revelou propriedades corretas envolvendo o zero. Como $0^2 = 0$ e $\sqrt{0} = 0$.

2.3.2.3.8 Fibonacci (1175 -1240)

Chamado Leonardo de Piza, Fibonacci foi um matemático que em uma de suas viagens pelo Islã, conheceu e aprendeu a utilizar o sistema indiano. Escreveu o livro *Líber Abaci* e junto com a obra de *al-khwarizmi on the Hindu Art of Reckoning*, o sistema indo-arábico foi introduzido no Mundo Cristão. Nessa época, o zero era visto com desconfiança e Fibonacci não lhe deu maior destaque. Simplesmente tratou-o como os outros algarismos. Esse matemático foi o responsável pela comunicação do sistema de numeração indo-arábico à Europa.

2.3.2.3.9 Sacrobosco (1200 – 1256)

Foi o responsável pela divulgação do sistema posicional decimal e de suas técnicas de cálculo na comunidade científica, através de sua obra *Algorismus Vulgaris*. A aceitação do sistema pelos comerciantes e pela população exigiu tempo. Houve uma resistência muito grande ao novo sistema, uma vez que por muitos séculos haviam recorrido aos números romanos e ao ábaco por muitos séculos.

Entre os séculos XII e XIII, os trabalhos deixados pelo matemático Jordano Nemorários, nas áreas de aritmética, álgebra, geometria e estatística, viabilizaram a divulgação da numeração árabe na Alemanha.

Pinedo e Sbardelotto (2004) concluem que os babilônios e os maias inventaram um signo para o zero com o objetivo de marcar a ausência de uma

ordem, mas não atribuíram o estatuto de um número para indicar a quantidade nula.

Com a introdução do conceito do número zero pelos hindus, foi possível verificar os vários aspectos do zero: número, numeral e algarismo.

Nesse artigo de Pinedo e Sbardelotto (2004), observando cada etapa do desenvolvimento da humanidade no sentido do conhecimento, pudemos constatar as dificuldades encontradas pelos matemáticos no estudo do zero. Os autores mostram, de maneira muito clara, os fatos que envolveram a descoberta do zero.

2.4 Considerações sobre as pesquisas

As pesquisas citadas contribuíram muito para este trabalho, pois a partir delas foi possível conhecer os fatos históricos que marcaram a trajetória da descoberta do zero nas antigas civilizações. Além disso, pudemos avaliar a importância do aluno ter acesso a essa história, para que ele tenha um melhor entendimento do conceito do zero.

Comparando os trabalhos apresentados por Salvador e Nacarato (2003) e os estudos de Guimarães (2008), observamos certa semelhança entre eles, já que Guimarães citou e de alguma forma se inspirou no trabalho de Salvador e Nacarato. Em seus trabalhos são investigados os sentidos que alunos de diversas faixas etárias atribuem ao zero.

A pesquisa de Pinedo e Sbardelotto (2004) foi utilizada como inspiração para este trabalho, pois retrata a história do zero.

CAPÍTULO III

3 A ORIGEM DO ZERO NA HISTÓRIA

3.1 Importância da história da matemática no ensino

Struik (1985 *apud* NAKAMURA, 2008, p. 19 -20) mostra em seu trabalho alguns aspectos que tornam a história da matemática mais atrativa. Entre esses aspectos, destacaremos alguns:

- As pesquisas dos autores clássicos, além de gratificante em si mesmo, podem ser um importante auxiliar no ensino e na pesquisa;
- Possibilitam um campo mais abrangente, em que especialistas da área de matemática e de outras áreas podem encontrar interesses em comum;
- Proporcionam uma melhor compreensão dos conceitos da educação matemática no passado e no presente;
- Tornam possível ilustrar e deixar mais interessante o ensino da matemática através de historietas.

Mendes (2001) considera importante o uso da História da Matemática como recurso de ensino e faz a seguinte reflexão:

[...] o professor poderá usá-la como fonte de enriquecimento pedagógico e conduzir suas atividades num caminhar crescente, em que o aluno investigue, discuta, sintetize e reconstrua as noções matemáticas anteriormente vistas como definitivas sem que o aspecto histórico tivesse sido usado para despertar o interesse de quem as aprende. (p. 32).

Após a análise dos trabalhos citados, percebemos que o conceito do “zero” é bastante complicado, pois a noção de algarismo é diferente da noção de número. Talvez só seja possível atingir a noção de zero, quando for possível quantificar o “nada”.

Neste capítulo, pretendemos fornecer uma visão geral da origem e evolução do conceito de algarismo e de número zero, desenvolvido nas antigas civilizações, fazendo uma análise sobre os fatos históricos relacionados ao zero.

O algarismo zero surgiu após os outros, de modo independente, nas várias civilizações. Essa invenção revolucionou a matemática, até que fosse reconhecido, como um elemento de grande importância.

Para Schenberg (2001), os gregos apresentavam dificuldades em aceitar o conceito do vácuo e a existência do vazio. Portanto os gregos não conseguiram criar o número zero, pois o zero é o “nada”.

Parece que os indianos tinham uma idéia do mundo muito diferente da dos gregos. A idéia indiana dos números era mais moderna. Eles consideravam os números como símbolos operacionais, além de serem coisas. Em particular eles já reconheciam a importância deste número zero, que é justamente a unidade do grupo aditivo dos inteiros. Além de suas características algébricas, a idéia do vazio era um elemento fundamental no deus hindu, pois no fundo o vazio era identificado como a divindade. (p. 30).

Apesar da invenção do zero ter sido atribuída aos hindus, pois foram eles que criaram o número e o algarismo, outros sistemas de numeração desenvolveram o conceito parcial do zero, ou seja, só do algarismo.

Provavelmente, segundo Kaplan (2001), o zero teria aparecido pela primeira vez entre os séculos IV e III a.C., na civilização fenícia, que instituiu a notação posicional. Essa notação necessitaria de um símbolo para representar a ausência da unidade de uma ordem.

Há evidências de que no Vale do Indo⁴ (*Mohenjo Daro Harappa*) era usado um símbolo circular representando o zero em réguas graduadas.



Figura 3.1 – Mapa do atual Paquistão, antiga civilização indiana (BIANCHINI; PACCOLA, 2001, p. 44)

⁴ A civilização do vale do Indo, fica no Paquistão atual. O nome que tem sido usado, desde a década de 80 é *Civilização Harappeana* (devido à cidade de Harappa), até porque essa foi uma cultura que se espalhou por uma área extensa e não apenas pelo vale do rio Indo. Em 1947, a Índia foi dividida em Índia e Paquistão. O Paquistão se formou em torno do vale do rio Indo, centro sul da Ásia. No oeste está limitado pelos montes Suliman, ao norte está o Himalaia. Nas divisas com a Índia e o Irã existem desertos. O Paquistão atual faz fronteiras com o Irã, Afeganistão, China e Índia. O rio Indo, nasce no Tibet e corta o país de norte a sul, escoar no Mar Arábico formando um imenso delta.

Disponível em:

<http://pt.wikibooks.org/wiki/Introdu%C3%A7%C3%A3o_%C3%A0_Hist%C3%B3ria_I:_Ci_viliza%C3%A7%C3%A3o_do_Vale_do_Indo/Ler>. Acesso em 1 abril 2008.

Segundo Dantzing (1970),

Vemos, portanto, que nenhum progresso era possível até que se inventasse um símbolo para uma classe *vazia*, um símbolo para o *nada*, o nosso zero moderno. A mentalidade concreta dos antigos gregos não podia conceber o vazio como um número, e não endossaram o vazio com um símbolo. (p.40).

Vejamos algumas civilizações que apresentaram avanços na trajetória da invenção do zero.

3.2 A civilização babilônica

A civilização babilônica apresentou um sistema de numeração admirável para a época, pois era a posição do algarismo que de fato determinava o seu valor.

A Babilônia está localizada na Mesopotâmia, a 80 km ao sul de Bagdáh. Fundada por volta de 2 000 a.C. pelo povo amorita, que veio do deserto da Arábia, chegou à Mesopotâmia e se instalou na Babilônia.

A Mesopotâmia é uma região do Oriente localizada entre os rios Eufrates e Tigre. O significado de Mesopotâmia na língua grega é “terra entre rios”, como mostra o mapa a seguir:

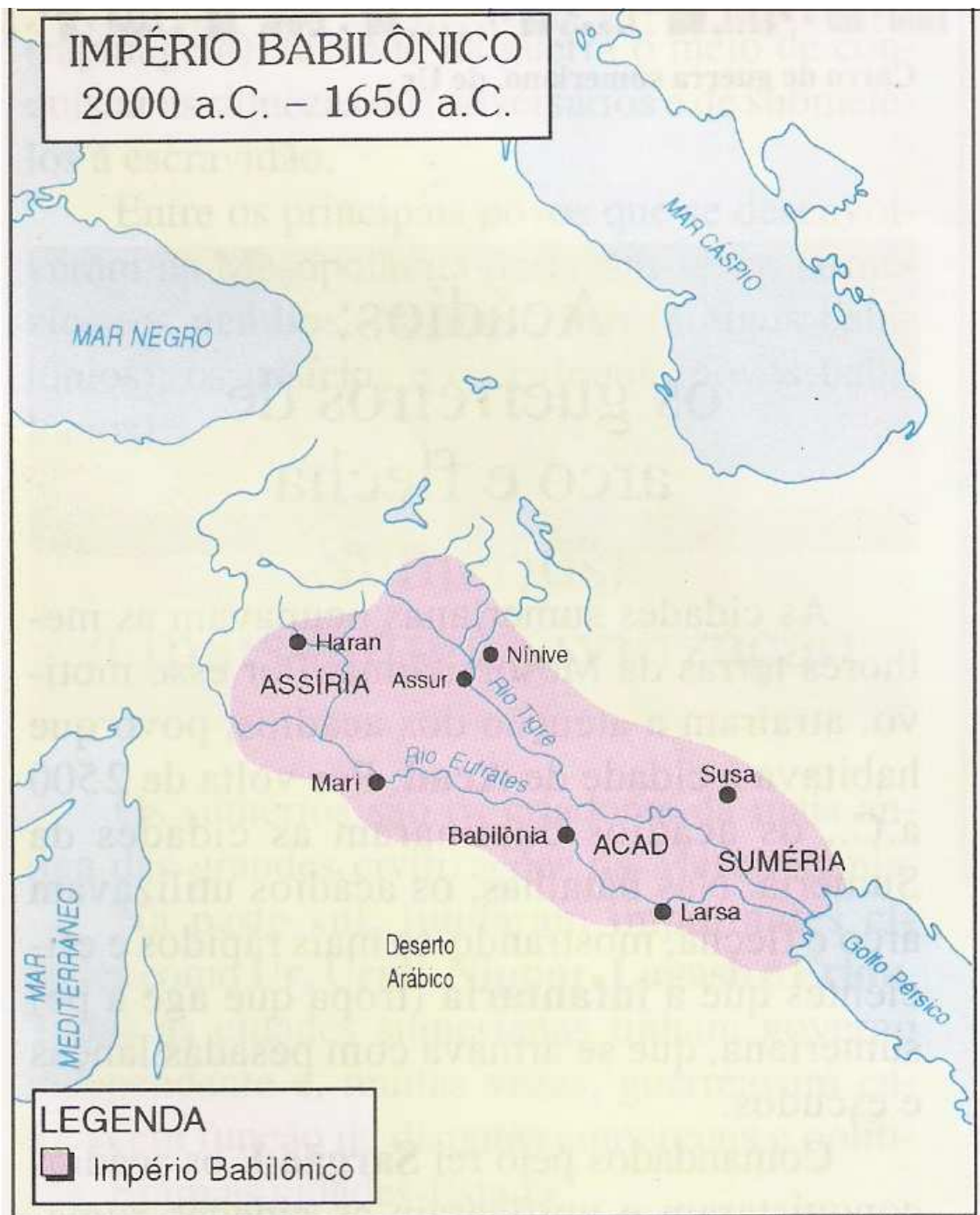


Figura 3.2 – Mapa do Império Babilônico. (COTRIM, 1995, p. 50)

Como a base do sistema babilônico era sexagesimal (base sessenta), os números de 1 até 59 eram representados de maneira aditiva, utilizando dois símbolos: um “cravo” vertical representando a unidade e uma “asna” representando 10 unidades. Conforme figura:



Figura 3.3 – Símbolos da numeração babilônica (Adaptada IFRAH, 1997, p.295)

Esses símbolos eram agrupados bem juntos, formando o equivalente a uma única cifra.

A partir do número 60, o sistema passava a ser posicional, ou seja, os valores dependiam da posição em que se encontravam e eram lidos da direita para a esquerda, deixando um espaço adequado entre os grupos de símbolos.

Em muitas representações numéricas, o contexto excluía a ambigüidade do valor, mas em alguns casos, como por exemplo, o número 25 poderia ser confundido com o 615 ou com o 4 305.

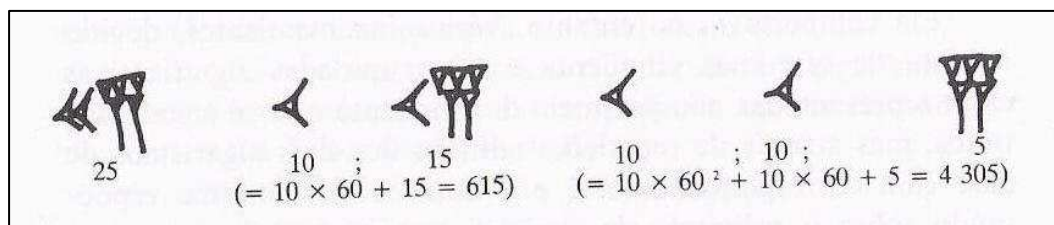



Figura 3.4 – Representações dos números 25, 615 e 4 305, no sistema de numeração babilônico (IFRAH, 2001, p.240)

Os escribas babilônios não tinham um símbolo para indicar a posição vazia, mas com a intenção de tentar solucionar esse problema e evitar confusões, deixaram um espaço vazio para indicar com clareza a passagem de uma ordem sexagesimal para a outra, pois essas notações eram muito parecidas.

Durante quinze séculos, os matemáticos e astrônomos babilônios ignoraram esse fato. Então houve a necessidade de usar um símbolo para representar esse espaço, que não poderia ser “nada”. Muitas vezes os escribas omitiam esse espaço. Era difícil simbolizar a ausência de duas ou mais ordens de

unidades consecutivas. No século III a.C., os matemáticos e astrônomos babilônios usaram o zero para representar a ausência de unidades sexagesimais.

Posteriormente este espaço foi substituído por um sinal cuneiforme (duplo prego oblíquo, ou dois pregos sobrepostos), para que não surgissem dúvidas. Criou-se um símbolo para indicar a ausência de uma potência de sessenta, representado pela notação .

Segundo Eves (2004),

Este símbolo era, portanto, apenas um zero parcial, pois um zero verdadeiro serve para indicar as potências ausentes da base tanto no meio como no final dos números, como é o caso de nossos 304 e 340. No sistema de numeração babilônico, então, 10 804 aparecia como: (p. 36).

$$10\ 804 = 3(60^2) + 0(60) + 4 = \nabla \nabla \nabla \triangle \nabla \nabla$$

Figura 3.5 – Representação do número 10 804 no sistema de numeração babilônico (EVES, 2004, p. 36)

O sentido dado ao zero pelos sábios da época foi de vazio (ausência de unidade de uma ordem), considerando-o, portanto, como algarismo. E não como número, resultado de uma subtração, como em “vinte menos vinte”. Julgavam desnecessária a representação dessa quantidade.

“Vazio e nada já eram concebidos, mas ainda não eram considerados sinônimos”. (IFRAH, 2001, p. 243).

3.3 A civilização maia

O povo maia habitou a América Central (atualmente o México Meridional e a Guatemala) durante mais de 1 000 anos, com início na era Cristã.



Figura 3.6 – Mapa da região dos maias (BIANCHINI; PACCOLA, 2001, p. 32)

Esse povo desenvolveu um sistema de numeração muito complexo que tinha como base a vintena e as potências de vinte, talvez pelo fato de os ancestrais contarem os dedos dos pés e das mãos.

Os únicos registros numéricos da civilização maia de que se tem notícia, referem-se à astronomia. Essa numeração foi estruturada por meio de símbolos, pontos e traços e não efetuavam operações aritméticas. Provavelmente os símbolos serviam para mostrar os cálculos já efetuados, com o emprego de um instrumento semelhante a um ábaco.

Os maias, para representarem os números de um até dezenove utilizavam pontos e traços, aos quais atribuíam o valor de um e de cinco,

respectivamente. Posicionavam os símbolos na vertical e na horizontal, de forma aditiva. Da seguinte maneira:

1	•	ou	•
2	••	ou	••
3	•••	ou	•••
4	••••	ou	••••
5	—	ou	
6	—•	ou	•
7	—••	ou	••
8	•••	ou	•••
9	••••	ou	••••
10	—	ou	
11	—•	ou	•
12	—••	ou	••
13	•••	ou	•••
14	••••	ou	••••
15	•••••	ou	•••••
16	•••••	ou	•••••
17	•••••	ou	•••••
18	•••••	ou	•••••
19	•••••	ou	•••••
Outras variantes gráficas			
	○ ● ⊙		☉ ☼ ☽
	1		5

Figura 3.7 – Representação dos dezenove primeiros números do sistema de numeração dos maias (IFRAH, 1997, p.639)

Os números superiores a vinte eram escritos verticalmente e as ordens eram somadas. Nos números compostos por duas ordens, o algarismo da primeira ordem ficava no patamar inferior e o da segunda ordem no patamar superior e era multiplicado por vinte.

Para a representação do número 21 ($1 \times 20 + 1$), usavam a seguinte notação:

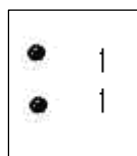


Figura 3.8 – Representação do número 21 no sistema de numeração maia (Adaptada IFRAH, 1997, p.640)

Não havendo essa regularidade, o algarismo da terceira ordem, era colocado no patamar superior ao da segunda ordem e representava múltiplos de 360.

A notação do número 4 399 era:

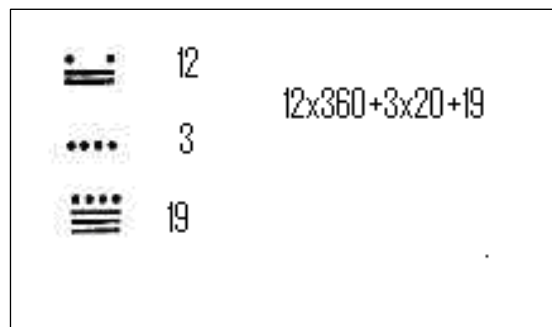


Figura 3.9 – Representação do número 4 399 no sistema de numeração maia
(Adaptada IFRAH, 1997, p.640)

Para as ordens seguintes, usavam a base vinte, ou seja, a quarta ordem vale vinte vezes a ordem inferior que é $20 \times 360 = 7\,200$, a quinta ordem vale $20 \times 7\,200 = 144\,000$ e assim por diante.

Devido a essa irregularidade, os sábios maias não puderam desfrutar da descoberta do sistema posicional nos campos do cálculo e da aritmética.

No caso da ausência de certa ordem, os maias atribuíram um símbolo, semelhante a uma concha ou caramujo, que representaria o algarismo zero. Assim o número 1 087 200, era indicado:

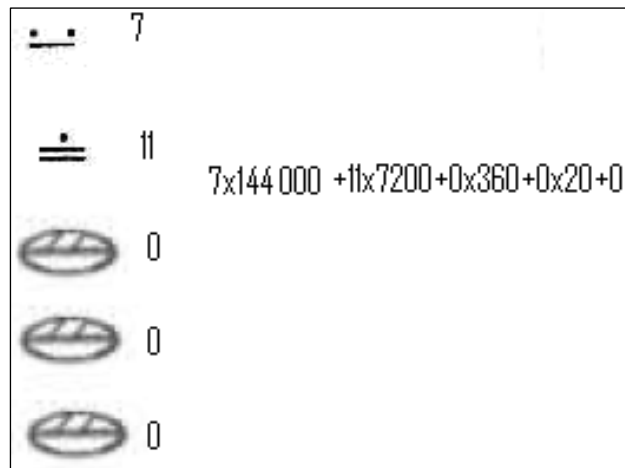


Figura 3.10 - Representação do número 1 087 200 na numeração maia
(Adaptada IFRAH, 1997, p.641)

Os manuscritos de *Códex de Dresden*⁵ mostram a existência do zero para indicar a falta de uma ordem.

⁵Tratado de astronomia e adivinhação copiada no século IX , redigido três ou quatro séculos antes. (IFRAH, 2001, p. 250).

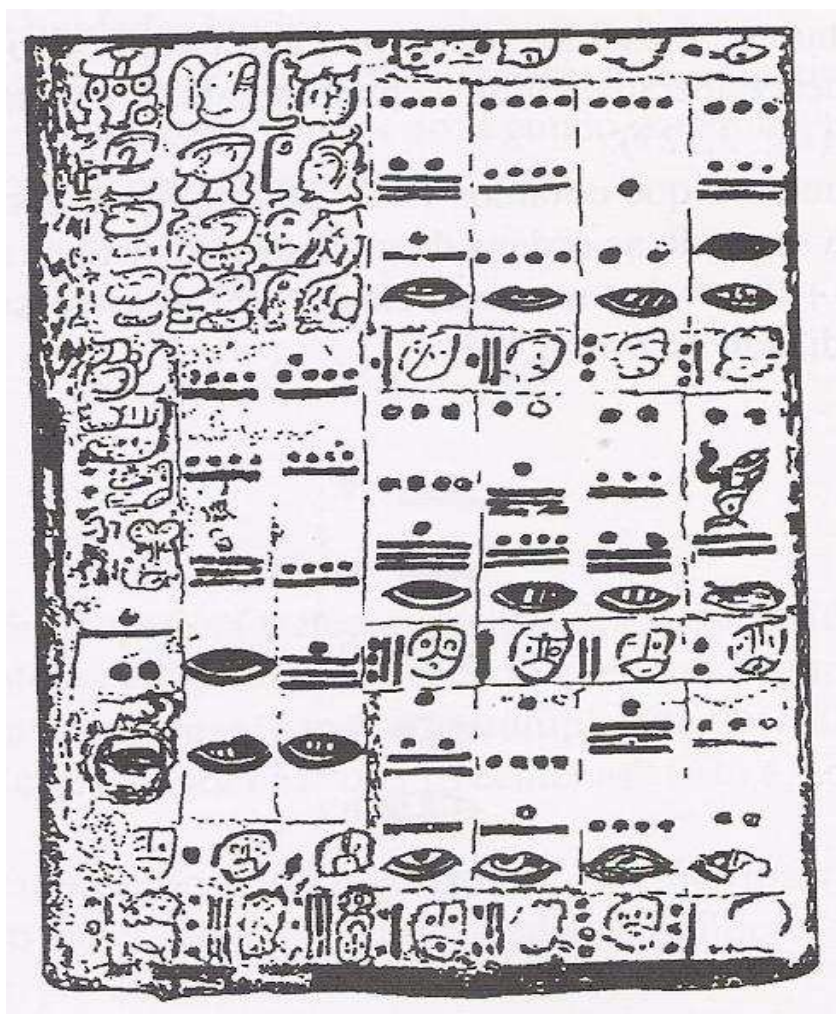
















































Figura 3.11 – Códex de Dresden (IFRAH, 1997, p. 642)

<div>L</div>  4  17  6  0	<div>K</div>  4  9  4  0	<div>J</div>  4  1  2  0	<div>I</div>  3  13  0  0
<div>H</div>  3  4  16  0	<div>G</div>  2  16  14  0	<div>F</div>  2  8  12  0	<div>E</div>  2  0  10  0
<div>D</div>  1  12  8 (*)  0	<div>C</div>  1  4  6  0	<div>B</div>  16  4  0	<div>A</div>  8  2  0

(*) Omissão dos três pontos da parte do escriba

Figura 3.12 – Transcrição das menções numéricas que figuram no documento anterior (IFRAH, 1997, p. 642)

Quadro 3.1- Notação dos números da figura 3. 11 (IFRAH, 1997, p.643)

A	=	[8;2;0]	=	2.920	=	1	×	2.920	=	5	×	584
B	=	[16;4;0]	=	5.840	=	2	×	2.920	=	10	×	584
C	=	[1;4;6;0]	=	8.760	=	3	×	2.920	=	15	×	584
D	=	[1;12;8;0]	=	11.680	=	4	×	2.920	=	20	×	584
E	=	[2;0;10;0]	=	14.600	=	5	×	2.920	=	25	×	584
F	=	[2;8;12;0]	=	17.520	=	6	×	2.920	=	30	×	584
G	=	[2;16;14;0]	=	20.440	=	7	×	2.920	=	35	×	584
H	=	[3;4;16;0]	=	23.360	=	8	×	2.920	=	40	×	584
I	=	[3;16;0;0]	=	26.260	=	9	×	2.920	=	45	×	584
J	=	[4;1;2;0]	=	29.200	=	10	×	2.920	=	50	×	584
K	=	[4;9;4;0]	=	32.120	=	11	×	2.920	=	55	×	584
L	=	[4;17;6;0]	=	35.040	=	12	×	2.920	=	60	×	584

Temos provas, por estes registros, de que os sábios maias descobriram o princípio posicional e inventaram o zero.

As descobertas não foram um fenômeno partilhado por todos os povos ao mesmo tempo. Este é o caso do conceito de zero, que os povos ocidentais precisaram esperar a Idade Média para que lhes fosse transmitido pelos árabes, que tinham, por sua vez, recebido dos sábios da Índia. (IFRAH, 1997, p. 643).

As descobertas mais importantes dos maias foram: utilização de um sistema de numeração vigesimal com notação posicional e um símbolo especial para o zero.

3.4 A civilização chinesa

O povo chinês há mais de três mil anos, já utilizava um sistema de numeração decimal.

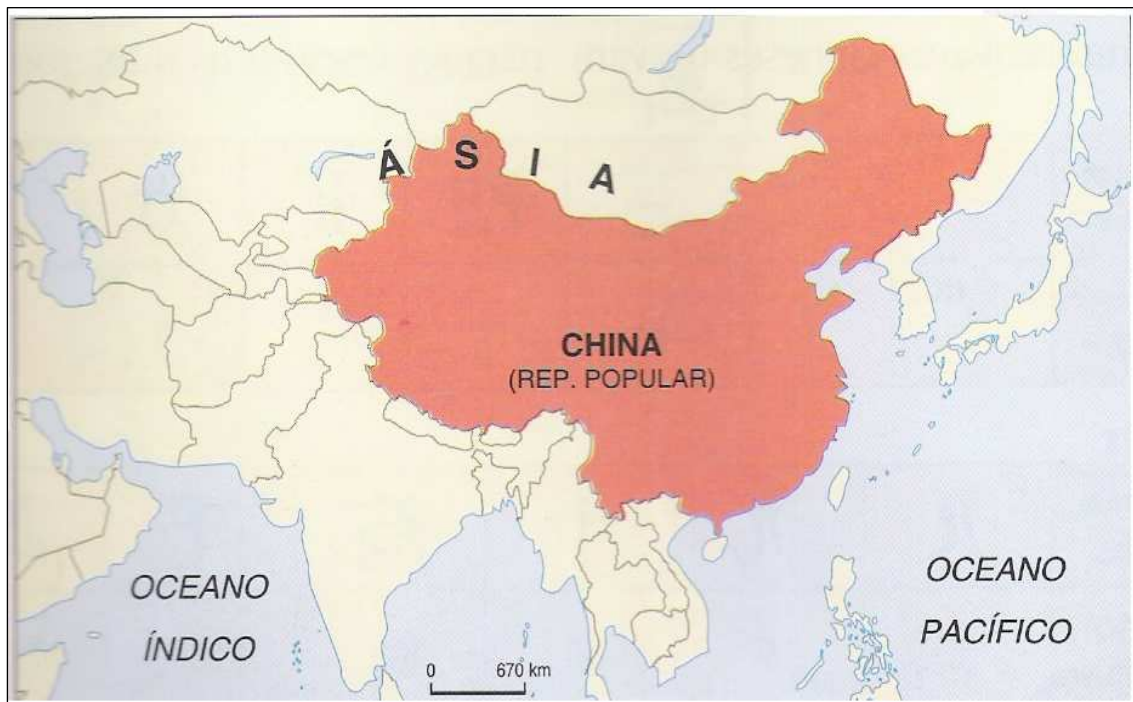


Figura 3.13 – Mapa da China (BIANCHINI; PACCOLA, 2001, p. 37)

Esse sistema era formado por treze sinais, sendo que nove correspondentes às unidades de um a nove, e quatro às potências de dez (dez, cem, mil e dez mil).

São eles:

1	一	10	十
2	二		
3	三	100	百
4	四		
5	五	1 000	千
6	六		
7	七	10 000	萬
8	八		
9	九		

Figura 3.14 – Sinais numéricos do sistema de numeração chinês (IFRAH, 1997, p. 551)

Esse sistema de numeração era baseado em um princípio “híbrido”, ou seja, aplicava-se o princípio multiplicativo para indicar as dezenas, centenas, milhares e dezenas de milhares (multiplicando-se o algarismo de um a nove pelas dezenas, centenas, etc.) e o princípio aditivo para somar as dezenas, centenas, milhares e dezenas de milhares indicadas. Assim, para representar o número 9 564, faziam a decomposição da seguinte forma:

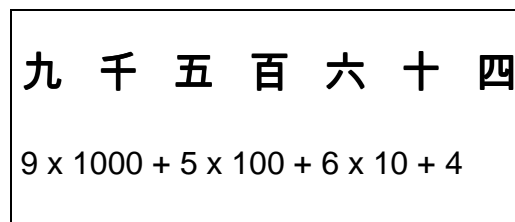


Figura 3.15 – Representação do número 9 564 no sistema de numeração chinês
(Adaptada IFRAH 2001, p.236)

Dessa maneira não era necessário um símbolo para representar o zero nesse sistema de numeração. Para representar o número 504, bastaria decompô-lo assim:

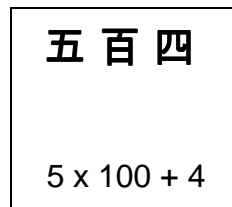


Figura 3.16 - Representação do número 504 no sistema de numeração chinês
(Adaptada IFRAH, 1997, p.556)

Só a partir do século VIII d.C., com a influência dos hindus, os sábios chineses passaram a utilizar um símbolo para representar o zero na falta de uma ou mais potências de dez, evitando, assim, qualquer erro de interpretação.

Utilizam até hoje a palavra *ling* e o signo 零 para indicar o zero chinês. Portanto o número 504 passou a ser representado desta maneira:

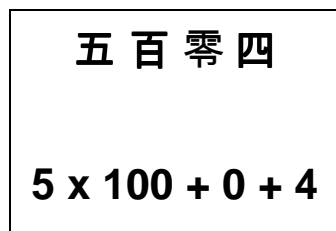


Figura 3.17 - Representação do número 504 no sistema de numeração chinês, com um símbolo para o zero (Adaptada IFRAH, 1997, p.556)

3.5 A civilização hindu

Segundo Ifrah (2001), os historiadores do início do século XX contam que o nosso sistema de numeração decimal teria tido sua origem no começo da era cristã, na Grécia antiga.

No século V d.C., no norte da Índia, surgiu o antecedente do nosso sistema moderno de numeração, com as bases de cálculo que são usadas até hoje. Documentos comprovam que esse fato foi proclamado pelos árabes, a quem foi atribuída esta descoberta, juntamente com a indiana.



Figura 3.18 – Mapa da região da Índia e Arábia Saudita⁶

O sistema de numeração dos indianos era constituído por nove algarismos distintos. Esses símbolos, mais tarde, originaram o que chamamos de “algarismos indo-arábicos”. Embora eles ainda não usassem a regra de posição, já consideravam a base dez e o princípio aditivo. Sendo assim, tinham uma representação diferente para cada número.

Para representar o número 7 629, era preciso colocar os algarismos nesta ordem 7 000, 600, 20 e 9, como vemos a seguir:

⁶Disponível em <www.webbusca.com.br/atlas/mapas/asia.gif>. Acesso em 14 jul. 2008

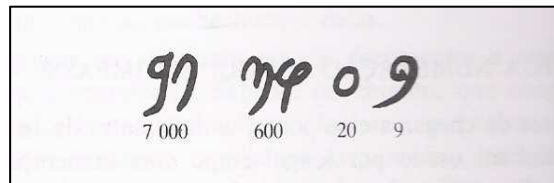


Figura 3.19 – Representação do número 7 629 na numeração hindu (IFRAH, 2001, p.266)

Esse sistema de numeração não podia representar números muito elevados, portanto não supria a necessidade dos astrônomos.

Para tentar resolver esse problema, os hindus representavam os números por meio da escrita, atribuindo-lhes um nome em sânscrito (língua hindu que vigorou durante muito tempo). Esse fato levaria à descoberta do princípio posicional e do zero.

Varahamihira (500 d.C.) foi um famoso sábio indiano que utilizou um pequeno círculo para representar o algarismo zero. Escreveu o livro *Panca-Siddhantika*. É provável que os indianos, desde 300 d.C., já estivessem usando um ponto, que era chamado de *puiyam*, para denotar o zero.

O povo hindu utilizava o ábaco, que eram meros sulcos feitos na areia, onde colocavam pedras, para realizar seus cálculos. Cada sulco era a representação de uma ordem decimal, da direita para a esquerda, ou seja, primeiro a ordem das unidades, depois dezenas e assim por diante.

Para representar o número 109, colocavam-se nove pedras no primeiro sulco das unidades, deixava-se o segundo sulco das dezenas vazio e colocava-se uma pedra no terceiro sulco das centenas.

Então surge a necessidade de se representar esse sulco vazio, que foi representado pelo desenho de um ponto em negrito que chamaram de “*sūnya*”, que significa vazio ou lacuna e era utilizado para indicar “casa nula”. Assim, o zero foi inventado.

Segundo Ifrah,

[...] nem tudo estava pronto. Os nove algarismos não estavam ainda submetidos ao princípio de posição, aplicando-se esta regra, por ora, apenas às palavras. Quanto ao zero, por enquanto ele era apenas oral. (2001, p. 270).

Assim, os calculadores da época perceberam que podiam representar os próprios símbolos dos algarismos no ábaco e não mais as pedras, aplicando a regra de posição, ou seja, o valor do algarismo dependeria da sua posição no ábaco. Mas nesse momento, os números eram representados da direita para a esquerda. Então o número 9 100 era representado assim:

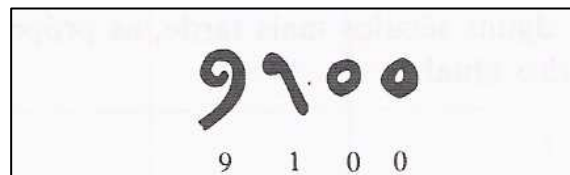


Figura 3.20 - Representação do número 9 100 na numeração hindu (IFRAH, 2001, p.285)

A maneira pela qual o “*sūnya*” indiano se transformou no zero atual constitui um dos capítulos mais interessantes na história da cultura. Quando os árabes do século X adotaram a numeração indiana, traduziram o “*sūnya*” indiano por sua própria palavra, *sifr*, que significa vazio, em árabe. Quando a numeração indo-arábica foi primeiramente introduzida na Itália, *sifr* foi latinizado para *zephhirum*. Isso aconteceu no início do século XIII, e durante os cem anos seguintes a palavra sofreu uma série de mudanças que culminaram no italiano zero. (DANTZING, 1970, p.40).

Brahmagupta (628 d.C.) foi um grande conhecedor indiano da matemática, considerado o pai da aritmética. Em seu livro *Brahmasphuta Siddhanta*, ele utiliza os numerais árabes inclusive o zero, nas operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e outras fundamentais. Além disso, popularizou o conceito do zero, categorizando-o como *samkhya*, ou seja, número. Nesse livro ele ainda definiu regras para os cálculos com o zero como: *número*

multiplicado por zero resulta em zero; a soma e a diferença de um número com zero resulta nesse número, entre outras.

Segundo Boyer (1996), [...] *Brahmagupta estragou um pouco as coisas afirmando que $0 \div 0 = 0$, e na delicada questão de $a \div 0$ para $a \neq 0$ ele não se comprometeu.* (p.150).

No século IX, *Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi*⁷, após ter aprendido a realizar cálculos com o livro *Brahmasphuta Siddhanta* de *Brahmagupta*, escreveu o livro *Cálculo com os Numerais Indianos (al arqan al hindu)*, adotando os numerais hindus na matemática muçulmana. Por meio desse livro, divulgou-se no mundo islâmico, o sistema posicional decimal, suas técnicas de cálculo e o zero.

O nome de *al-Khowarizmi*, após muitas transformações, deu origem a palavra algarismo.

Em 1202 d.C., Leonardo de Pisa, um comerciante italiano conhecido como *Fibonacci*, escreveu o livro *Liber Abaci* (Livro do Ábaco), após ter feito viagens pelo norte da África e tomado conhecimento do sistema de numeração hindu. Também reconheceu a superioridade dos algarismos árabes, comparados aos romanos.

⁷ ***al- Khowarizmi ou al-Khwarizmi***: Brilhante conhecedor da matemática e astrônomo persa-muçulmano nascido provavelmente na região de *Khwarizm*, sul do mar de Aral, na Ásia central, descobridor do *Sistema de Numeração Decimal* e dos dez símbolos, que hoje são conhecidos como algarismos indo-arábicos, e introdutor desses *numerais* e dos conceitos da álgebra na matemática européia. Disponível em: <http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/MohameMK.html>. Acesso em 12/07/2008.

Esse livro contém assuntos relacionados à Aritmética e à Álgebra e teve um papel importante na Europa, pois foi através dele, que os europeus conheceram os algarismos e o sistema indo-arábico.

Fibonacci demonstra certa desconfiança em relação ao zero quando faz uma distinção de nomenclatura, excluindo-o da categoria dos algarismos e considerando-o um sinal.

Sacrobosco era um mestre inglês e, baseado em *al-Khowarizmi* e *Fibonacci* escreveu, em 1 219, o livro *Algorismus vulgaris*, em que tratou de tópicos como adição, subtração, multiplicação, divisão. Este livro *Algorismus vulgaris* tornou-se o mais popular nas universidades medievais, pois por meio dele o sistema posicional decimal e suas técnicas de cálculo foram divulgados na comunidade científica ocidental.

Esse sistema foi sendo absorvido pelos comerciantes e pela população européia de uma forma lenta, pois a maioria das pessoas continuou utilizando os numerais romanos e o cálculo com ábacos ainda por vários séculos.

O símbolo do zero e a idéia de vazio, nulo, não-existente só foram levados para a Europa a partir do século VIII d.C. juntamente com os outros algarismos e após a aceitação dos algarismos arábicos. Difundiu-se esse termo, zero, como *sūnya*, que em árabe se tornou *shifr* e foi latinizado para *zephirum*, depois *zéfiro*, *zefro* e, por fim, zero.

A representação gráfica do zero demorou cerca de 400 anos para ser incorporado ao sistema decimal indo-arábico de numeração.

A evolução da representação dos algarismos desde os utilizados pelos indianos na época de *Brahmagupta*, até os usados hoje, apresenta-se da seguinte forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
ا	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	.
1	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	.
	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	.
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠

Figura 3.21 – Evolução da representação dos algarismos indo-árabicos (SILVEIRA, 2001, p.9)

Lendo de cima para baixo:

- Indo-árábico atual
- Algarismos indo-árabicos medievais
- Letras árabes eventualmente usadas como algarismos
- Algarismos árabes atuais
- Algarismos árabes de 800 d.C.
- Algarismos *Devanágari*⁸ primitivos, anteriores a *Brahmagupta*
- Algarismos *Devanágari* da época de *Brahmagupta*

⁸ *Devanágari*: Sistema de escrita utilizado para o registro da língua sânscrita. Disponível em: <<http://www.om.pro.br/devanagari.pdf>>. Acesso em 12 jul. 2008.

3.6 Linha do tempo relacionada à origem do zero

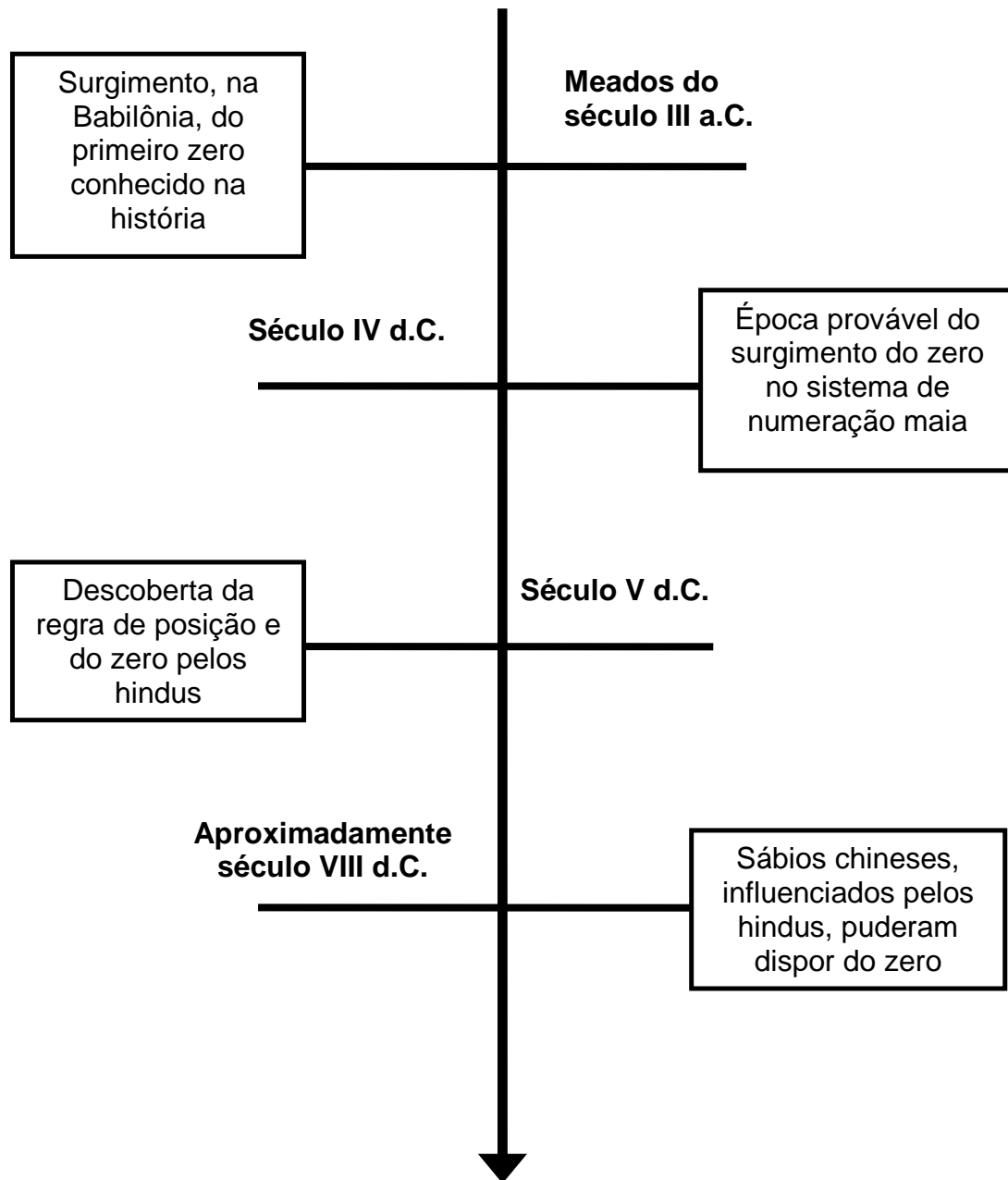


Figura 3.22 – Linha do tempo dos principais acontecimentos relacionados à origem do zero

3.7 Cronologia

O quadro a seguir, mostra os principais fatos relacionados ao zero no decorrer da história.

Quadro 3.2 – Cronologia dos acontecimentos relacionados ao zero (adaptada SIVEIRA, 2001, p. 5-10)

ANO	FATOS
3000 a. C.	Vale do Indo (<i>Mohenjo Daro e Harappa</i>): há evidência de aparente uso de símbolo circular indicando o valor zero em réguas graduadas. (Os documentos da Civilização do Vale do Indo têm resistido a dezenas de tentativas de decifração.
3 000 a.C.	O olho de Horus : sistema de representação e cálculo com frações inventado pelos egípcios e por muitos séculos usados pelos comerciantes da região mediterrânea; envolto em misticismo, trabalhava com frações binárias entre zero e um, sendo que um estava identificado com a pureza absoluta e zero à impureza absoluta.
2 000 a.C.	O Sistema cuneiforme foi inventado na Mesopotâmia, pelos babilônios; apesar de ser um sistema de numeração posicional, os mesopotâmicos ainda não tinham a noção de algarismo zero.
400 a.C.	Os chineses deixam casa vazia, em caso de zero, em seus ábacos de mesa.
300 a.C.	Os mesopotâmicos : os matemáticos e astrônomos passam a usar um algarismo <i>zero medial</i> zero para representar a ausência de unidades sexagesimais, (como 205 no nosso sistema decimal) em suas tabelas astronômicas, não usavam zero inicial ou final (como em 250 no sistema decimal).
200 a.C.	A palavra <i>sūnya</i> (significa vazio, em sânscrito) é usada para indicar casa nula na escrita de numerais. Mais tarde, as casas nulas passaram a ser indicadas por um ponto, o qual era chamado de <i>puiyam</i> .
350 d.C.	Os maias produzem um artefato, o <i>Uaxactun - Stela 18 e 19</i> , que é o documento mais antigo que deixaram contendo menção ao zero. Esse artefato não usa o sistema posicional; o mais antigo documento maia usando zero e o sistema posicional é o <i>Pestac - Stela 1</i> , datado de 665 d.C., conforme informou Michael Closs.

500 d.C.	Varahamihira , famoso matemático indiano, usa um pequeno círculo para denotar o algarismo zero em seu livro <i>Panca-siddhantika</i> . Especula-se que desde 300 d.C. os indianos vinham usando um ponto, o <i>pujyam</i> , para denotar o zero.
628 d.C.	Brahmagupta , matemático indiano, em seu livro <i>Brahma-sputa siddhanta</i> , eleva o zero à categoria dos samkhya (ou seja, dos números) ao dar as primeiras regras para se calcular com o zero: <i>um número multiplicado por zero resulta em zero; a soma e a diferença de um número com zero resulta neste número etc.</i>).
850 d.C.	Al-Khwarizmi , após ter aprendido a calcular ao estilo indiano com o <i>Siddhanta</i> de <i>Brahmagupta</i> , escreveu um livro de aritmética chamado (provavelmente) <i>Cálculo com os Numerais Indianos</i> (<i>al arqan al hindu</i>); esse livro foi quem fez a divulgação do sistema posicional decimal, e respectivas técnicas de cálculo, no mundo islâmico. Junto com isso veio a divulgação do zero no mundo entre os povos de língua árabe; dos nomes <i>sūnya</i> , <i>pujyam</i> e <i>sūbra</i> , usados no livro de <i>Brahmagupta</i> , <i>al-Khwarizmi</i> adotou o terceiro para denotar o zero e daí a evolução; <i>sūbra</i> ; <i>siphra</i> ou <i>sifr</i> (árabe); cifra e outras variantes nas línguas européias ; <i>zephirum</i> (pronúncia latina do <i>sifr</i>) e daí o termo moderno: zero.
1 200 d.C.	Fibonacci , que havia aprendido a calcular no sistema indiano em suas viagens de estudo pela África islâmica, escreve seu famoso livro, o <i>Liber abaci</i> , o qual, junto com a tradução latina da aritmética de <i>al-Khwarizmi</i> foram os grandes introdutores do sistema indo-arábico no Mundo Cristão e dois dos mais importantes livros da história da humanidade. Fibonacci ainda via o zero com desconfiança e isso pode ser percebido pelo modo que usava para se referir aos algarismos: <i>novem figure indorum</i> (os nove algarismos indianos) e o <i>hoc signum 0... quod arabice zephirum appellatur</i> (o sinal zero).

1 250 d.C.	<p>Sacrobosco, baseado em <i>al-Khwarizmi</i> e Fibonacci, escreve seu <i>Algorismus vulgaris</i> o qual tornou-se o livro de matemática mais popular nas universidades medievais e, assim, divulgou definitivamente o sistema posicional decimal e suas técnicas de cálculo na comunidade científica de então; a adoção desse sistema pelos comerciantes e resto da população foi bem mais lenta, e eles continuaram a usar os numerais romanos e o cálculo com ábacos ainda por vários séculos. Na figura temos alguns passos da evolução dos algarismos, desde os usados pelos indianos da época de <i>Brahmagupta</i>, passando pelos algarismos usados pelos povos árabes e chegando aos algarismos que usamos no Mundo Cristão.</p>
------------	--

3.8 O número

Relataremos segundo Mendes (2006), algumas noções de número apresentadas desde os tempos mais antigos e faremos algumas reflexões.

Os estudos arqueológicos mostram que os sistemas numéricos surgiram para que o homem pudesse representar de alguma forma, quantidades referentes a riquezas, bens, ou até mesmo para a realização de alguns cálculos. Para isso houve a necessidade da criação de códigos para identificar esses números e de estratégias para efetuar as operações aritméticas, pois a memória humana tinha dificuldade em calcular grandes quantidades.

Aqui faremos uma reflexão: o zero como número não representava nenhuma quantidade, assim podemos pensar que não haveria necessidade de representação, pois era uma situação que antecedia a aquisição do bem ou da riqueza, que seria representada pelo número 1. Em situações do dia-a-dia, dificilmente se utilizava o zero em uma operação.

A aritmética surgiu pela necessidade de medir, comparar, fazer equivalências etc., e mais uma vez não houve a necessidade de operações aritméticas com o número zero, pois não há medida representada por este número.

Nessas reflexões percebemos que a representação do zero não é comum em certas situações presentes no dia-a-dia de cada indivíduo, principalmente nos primeiros anos de vida. Talvez, em relação à humanidade, isso tenha acontecido de uma maneira semelhante: os povos primitivos, assim como não sentiram a necessidade de utilizar o número zero para representar a ausência de objetos. Nem mesmo na aritmética essa representação foi necessária as crianças.

Hoje sabemos que a invenção do zero revolucionou a humanidade e contribuiu para avanços tecnológicos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa bibliográfica tenta responder à seguinte questão:
Quais foram as dificuldades encontradas pelas civilizações, ao longo da história, até instituírem o zero como um elemento integrante da matemática?

Pelo levantamento histórico realizado, percebemos que, apesar das civilizações babilônica, maia e chinesa apresentarem dificuldades para dar uma representação ao “vazio”, elas conseguiram instituir um símbolo para o algarismo zero.

O povo hindu foi capaz de conceber em relação ao zero o conceito completo: como número – idéia de quantidade nula; e como algarismo – símbolo usado para representar a ausência de uma ordem numérica.

Nesta breve história, observamos que a invenção do zero foi muito difícil para as antigas civilizações. A princípio, o zero foi instituído como algarismo, pela necessidade de se representar o “vazio” em certa ordem do número.

Talvez por este fato, até hoje associamos a idéia do zero com o “nada”, o que muitas vezes gera uma má interpretação por parte das pessoas nas operações que envolvem o zero.

O povo que mais colaborou com o nosso sistema de numeração atual foi o hindu. Mas essa criação não foi de um só homem nem apenas dos povos indianos, pois com o decorrer dos séculos as idéias foram aperfeiçoadas e difundidas pelos árabes. Daí o nome do nosso sistema de numeração, indo-arábico.

A trajetória histórica do zero, segundo Salvador e Nacarato (2003), ajuda-nos a entender melhor como a idéia do “nada” foi associada a algo desse nada e como se criou um símbolo para representar o “nada”.

Guimarães (2008) mostra a importância do algarismo zero nas várias posições, começo, meio e fim, e na construção do sistema de numeração decimal.

O trabalho apresentado por Pinedo e Sbardelotto (2004) mostra a importância da descoberta do zero em um sistema posicional, proporcionando avanços na matemática.

As dificuldades apresentadas na conceituação do zero ao longo da história hoje proporcionam avanços em suas aplicações, mas ainda causam algumas dúvidas.

A invenção de zero tornou possível uma notação perfeita e coerente dos números, permitindo que qualquer pessoa efetuasse cálculos sem precisar das mãos ou de contadores mecânicos.

Atualmente o número e o algarismo zero são instrumentos poderosos e indispensáveis para cálculos e para o desenvolvimento da matemática e de outras ciências.

Deixamos como sugestão que mais trabalhos sejam desenvolvidos com os alunos, para que um dia o conceito do zero seja totalmente entendido por todos, não só no meio acadêmico da matemática. Assim, a história do zero será mais conhecida, e seu conceito melhor compreendido.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, E. ; PACCOLA, H. **Sistemas de Numeração ao longo da História**. São Paulo – Editora moderna – 2001.

BOYER, C. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide- 2ª Ed. - São Paulo: Editora: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática**. Brasília/DF, 1997, volume 3.

COTRIM, G. **História & Reflexão**. São Paulo - Editora Saraiva, 1995.

DANTZING, T. **NÚMERO: A Linguagem da Ciência**. Tradução de Sergio G. de Paula. Rio de Janeiro. Zahar Editores, 1970.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo. Editora da UNICAMP, 2004.

FIORENTINI, D. ; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**. Coleção: Formação de Professores. Campinas: Autores Associados, 2006. 226p.

GUIMARÃES, F. **Reflexões sobre o zero**. In: X - EBRAPEM, Belo Horizonte. Minas Gerais, 2006
Disponível em: <<http://www.fae.ufmg.br:8080/ebrapem/completos/07-02.pdf>>.
Acesso em 25 ago. 2007.

_____. **Zero: Das Manifestações Históricas a manifestações atuais**. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, Caxambu. Minas Gerais 2007.
Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/trabalhos_aceitos.html> .Acesso em 25 jul. 2007.

_____. **O Sentido do Zero**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática – São Paulo PUCSP – 2008.
Disponível em:< http://www.pucsp.br/pos/edmat/trabalhos_aceitos.html>. Acesso em 25 jun. 2008.

GUNDLACH, B. H., **Números e Numerais**. Trad. de Hygino H. Domingues – São Paulo. Editora Atual, 1992.

IFRAH, G. **História Universal dos Algarismos**: Tomo 1 e 2. 1 ed. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 2 v, 1997.

_____. **Os Números. A história de uma grande invenção**. 9 ed. São Paulo: Editora Globo, 2001.

IMENES, L. M.; LELLIS M. **Os números na história da civilização**. São Paulo – SP: Editora Scipione, 2000.

KAPLAN, R. **O Nada que existe: Uma história natural do Zero**. 1 ed. Rio de Janeiro. Editora Rocco, 2001, 208 p.

KARLSON, P. **A Magia dos Números**. Tradução de Henrique Carlos Pfeifer. Porto alegre - Rio Grande do Sul. Editora Globo, 1961.

KÖCHE, J. C. **Fundamentos de Metodologia Científica: Teoria da Ciência e Prática da Pesquisa**. Ed. Vozes 19ª edição. Petrópolis – Rio de Janeiro, 2001.

MENDES, I. A. **Uso da História no Ensino da Matemática: reflexões teóricas e experiências**. Belém: EDUEPA. 90p. Série Educação; n.1, 2001.

_____. **Números o simbólico e o racional na história**. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

NAKAMURA, K. **CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS: A TRAJETÓRIA DE UM CONTEÚDO NÃO INCORPORADO ÀS PRÁTICAS ESCOLARES**. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – São Paulo PUCSP – 2008.

PESCUNA, D.; CASTILHO A.P.F de. **Projeto de Pesquisa. O que é? Como fazer?** Um guia para sua elaboração. São Paulo: Olho d'Água, 2006.

PINEDO, C. J. Q.; SBARDELOTTO, A. **História do Número Zero**. 2004.

Disponível em:

<<http://www.br.geocities.com/gepem2002/boletim03/junior/zero.doc>>. Acesso em 23 ago. 2007.

RONAN, C. A. **História ilustrada da ciência 2 – Oriente, Roma e Idade média**. Tradução de Jorge Enéas Fortes – Rio de Janeiro. Jorge Zahar Editor, 2001.

SALVADOR, C. M. A.; NACARATO, A. M. **Sentidos atribuídos ao zero por alunos da 6ª série**. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 26, Poços de Caldas. Minas Gerais. 2003.

Disponível em:

<<http://www.anped.org.br/26/trabalhos/celiamariaananiassalvador.rtf>> Acesso em 02 jul 2007.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática 1º grau**. São Paulo, 1988.

SCHENBERG, M. **Pensando a Física**. 5ª Ed. São Paulo: Landy Editora, 2001.

SILVEIRA, J. F. Porto da, **Origens do Zero**, 2001. Disponível em: <<http://www.athena.mat.ufrgs.br/~portosil/passa7a.html>>. Acesso em 25 jun. 2008.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Trad. De João Cosmo Santos Guerreiro. Portugal. Lisboa. Editora Gradiva, 1985.

Sites Consultados

Disponível em:

<<http://pt.wikipedia.org/wiki/Zero>>. Acesso em 10 jul. 2008.

Disponível em:

<<http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/MohameMK.html>>. Acesso em 12 jul. 2008.

Disponível em:

<http://pt.wikibooks.org/wiki/Introdu%C3%A7%C3%A3o_%C3%A0_Hist%C3%B3ria_I:_Civiliza%C3%A7%C3%A3o_do_Vale_do_Indo/Ler>. Acesso em 01 abr. 2008.

Disponível em:

< <http://www.om.pro.br/devanagari.pdf>>. Acesso em 12 jul. 2008.

Disponível em

<<http://pt.wikipedia.org/wiki/Translitera%C3%A7%C3%A3o>>. Acesso em 14 jul. 2008.

Disponível em

<<http://www.pucsp.br/pos/edmat/>>. Acesso em 02 de jul.2008. Acesso em 14 jul. 2008.

Disponível em

<<http://www.webbusca.com.br/atlas/mapas/asia.gif> >. Acesso em 14 jul. 2008.