Lógica para computação

Técnicas de demonstração

Algumas leis interessantes

Leis da contraposição

$$(((A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A)))$$

$$((A \rightarrow (\neg B)) \leftrightarrow (B \rightarrow (\neg A))$$

Leis de De Morgan

$$((\neg(A \vee B)) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B)))$$

$$((\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B)))$$

Lei de equivalência para a implicação e disjunção

$$((A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B))$$

Técnicas de demonstração: Contraposição

$$(((A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A)))$$

Técnicas de demonstração: Contraposição

$$(((A \to B) \leftrightarrow ((\neg B) \to (\neg A)))$$

Exemplo: Provar que se x^2 é par, então x é par

Técnicas de demonstração: Redução ao absurdo

$$(P \Rightarrow Q) \iff (P \wedge \neg Q \Rightarrow 0)$$

Técnicas de demonstração: Redução ao absurdo

$$(P \Rightarrow Q) \iff (P \land \neg Q \Rightarrow 0)$$

Exemplo: Provar que se x = raiz de 2, então x é irracional.

Árvores de refutação

Verifiquemos se a fórmula $[(A \wedge B) \to A)]$ é tautologia.

[(A	$\wedge$	B)	$\to$	A)]	Justificativa

Árvores de refutação

Verifiquemos se a fórmula $[(A \wedge B) \rightarrow A)]$ é tautologia.

[(A	$\wedge$	B)	$\rightarrow$	A)]	Justificativa
			0		Falseamento

Árvores de refutação

Verifiquemos se a fórmula $[(A \wedge B) \rightarrow A)]$ é tautologia.

[(A	$\wedge$	B)	$\rightarrow$	A)]	Justificativa
			0		Falseamento
	1			0	Tab. $\rightarrow$

Árvores de refutação

Verifiquemos se a fórmula $[(A \wedge B) \rightarrow A)]$ é tautologia.

[(A	$\wedge$	B)	$\rightarrow$	A)]	Justificativa
			0		Falseamento
	1			0	Tab. $\rightarrow$
1		1			Tab. $\wedge$

Exemplos

$$((A \vee A) \leftrightarrow A)$$

Exemplos

$$((A \vee A) \leftrightarrow A)$$

$$(A \vee (\neg A))$$

Exemplos

$$((A \vee A) \leftrightarrow A) \qquad (A \vee (\neg A))$$

$$((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)))$$

Exemplos

$$((A \vee A) \leftrightarrow A) \qquad (A \vee (\neg A))$$

$$((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)))$$

Leis de absorção

$$((A \vee (A \wedge B)) \leftrightarrow A)$$
$$((A \wedge (A \vee B)) \leftrightarrow A)$$

Exemplos

$$((A \vee A) \leftrightarrow A)$$

$$(A \vee (\neg A))$$

$$((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)))$$

Leis de absorção

$$((A \vee (A \wedge B)) \leftrightarrow A)$$

$$((A \wedge (A \vee B)) \leftrightarrow A)$$

Modus Ponens

$$((A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B)$$

Exemplos

$$((A \vee A) \leftrightarrow A) \qquad (A \vee (\neg A))$$

$$((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)))$$

Leis de absorção

$$((A \vee (A \wedge B)) \leftrightarrow A)$$
$$((A \wedge (A \vee B)) \leftrightarrow A)$$

Modus Ponens

$$((A \wedge (A \to B)) \to B)$$

Modus Tollens

$$(((\neg B) \wedge (A \to B)) \to (\neg A))$$

Inferência lógica

Uma inferência se expressa por um conjunto ordenado de sentenças que partem de uma premissa em direção a uma conclusão. Os passos lógicos usados para chegar a uma conclusão constituem uma dedução.

1. Premissa: Se chove, então o céu está encoberto.
2. Premissa: Chove
3. Conclusão: O céu está encoberto.

Inferência lógica

Uma inferência se expressa por um conjunto ordenado de sentenças que partem de uma premissa em direção a uma conclusão. Os passos lógicos usados para chegar a uma conclusão constituem uma dedução.

Inferência lógica

Uma inferência se expressa por um conjunto ordenado de sentenças que partem de uma premissa em direção a uma conclusão. Os passos lógicos usados para chegar a uma conclusão constituem uma dedução.

1. Premissa: Se chove, então o céu está encoberto.
2. Premissa: Chove
3. Conclusão: O céu está encoberto.

Regras de inferência: Modus Ponens

$$\frac{A, (A \rightarrow B)}{B}$$

Regras de inferência: Modus Ponens

$$\frac{A, (A \rightarrow B)}{B}$$

$$(A \rightarrow B)$$

$$\frac{A}{\quad B}$$

Regras de inferência: Modus Tollens

$$\frac{\begin{array}{l}(A \rightarrow B) \\ (\neg \mathrm{B})\end{array}}{(\neg \mathrm{A})}$$

Regras de inferência: Modus Tollens

$$\frac{\begin{array}{l}(A \to B) \\ (\neg B)\end{array}}{(\neg A)}$$

1. $(A \to B)$	Premissa
2. $(\neg B)$	Premissa
3. $(\neg A)$	Conclusão

Regra de inferência: Dupla negação

1. $(\neg(\neg A))$	Premissa
2. A	Conclusão

1. A	Premissa
2. $(\neg(\neg A))$	Conclusão

Regra de inferência: Dupla negação

1. $(\neg(\neg A))$	Premissa
2. A	Conclusão

1. A	Premissa
2. $(\neg(\neg A))$	Conclusão

Regra de inferência: Dupla negação

Temos então:

1. Não é o caso que Bianca não estuda.	Premissa
2. Bianca estuda.	Conclusão

1. A	Premissa
2. $(\neg(\neg A))$	Conclusão

Regra de inferência: Dupla negação

Temos então:
1. Não é o caso que Bianca não estuda. Premissa
2. Bianca estuda. Conclusão

Temos então:
1. Johnny Mathis interpreta com maestria. Premissa
2. Não é o caso que Johnny Mathis não interpreta com maestria.
Conclusão

Fazendo deduções

1. $(A \to B)$	Premissa
2. A	Premissa
3. B	1, 2, Modus Ponens
4. $(\neg(\neg B))$	3, Dupla negação

Constitui uma dedução. Diz-se que $(\neg(\neg B))$ foi deduzida a partir das premissas

Mais algumas regras

Regra de Simplificação:

1. Premissa: $(A \wedge B)$
2. Conclusão: A

1. Premissa: $(A \wedge B)$
2. Conclusão: B

Mais algumas regras

Regra de Simplificação:

1. Premissa: $(A \wedge B)$
2. Conclusão: A

1. Premissa: $(A \wedge B)$
2. Conclusão: B

Regra de Adjunção

1. Premissa: A
2. Premissa: B
3. Conclusão: $(A \wedge B)$

Mais algumas regras

Regra de Simplificação:

1. Premissa: $(A \wedge B)$
2. Conclusão: A

1. Premissa: $(A \wedge B)$
2. Conclusão: B

Regra de Adjunção

1. Premissa: A
2. Premissa: B
3. Conclusão: $(A \wedge B)$

Lei de Adição

1. Premissa: A
2. Conclusão: $(A \vee B)$

Lei do Silogismo Hipotético

1. Premissa: $(A \to B)$
2. Premissa: $(B \to C)$
3. Conclusão: $(A \to C)$

Modus Tollendo Ponens ou Silogismo disjuntivo

1. Premissa: $(A \vee B)$
2. Premissa: $(\neg A)$
3. Conclusão: B

Exemplo

Se a emenda não for aprovada, então a Constituição fica como está. Se a Constituição fica como está, então não incorporamos novos membros ao comitê. Ou incorporamos novos membros ao comitê ou o informe se atrasará em um mês. Porém, o informe não se atrasará em um mês.

Exemplo

Se o presidente da escola de samba for correto ou for forte ou for íntegro, então a escola progride sem problemas. Se a escola progride sem problemas, então todos os sócios estão satisfeitos. Se os sócios estão satisfeitos, então não há descontentamento com o presidente, nem o presidente é anti-ético, nem o presidente toma atitudes imorais, nem o presidente vacila e nem o presidente esconde informações. Acontece que há descontentamento com o presidente, além disso o presidente é anti-ético, toma atitudes imorais, vacila e esconde informações.

Aplicação de regras de DeMorgan

$$\frac{(A \wedge B)}{\{\neg[(\neg A) \vee (\neg B)]\}} \qquad \frac{[(\neg A) \vee (\neg B)]}{[\ \neg(A \wedge B)} \qquad \frac{\{\neg[(\neg A) \vee (\neg B)]\}}{(A \wedge B)}$$

$$\frac{(A \wedge B)}{\{\neg[(\neg A) \vee (\neg B)]\}} \qquad \frac{[(\neg A) \wedge (\neg B)]}{[\ \neg(A \vee B)} \qquad \frac{\{\neg[(\neg A) \vee (\neg B)]\}}{(A \vee B)}$$

Eliminação de parênteses

R_1) Inicialmente omitimos os parênteses ‘mais externos’ de uma fórmula. É claro que se a fórmula for uma fórmula atômica, não há parênteses a omitir.

Exemplo 1. $(A \wedge B) \rightarrow C$ abrevia $((A \wedge B) \rightarrow C)$

Eliminação de parênteses

R_1) Inicialmente omitimos os parênteses 'mais externos' de uma fórmula. É claro que se a fórmula for uma fórmula atômica, não há parênteses a omitir.

Exemplo 1. $(A \wedge B) \to C$ abrevia $((A \wedge B) \to C)$

R_2) Se a fórmula contiver apenas ocorrências de um só conectivo binário (isto é, $\wedge$, $\vee$, $\to$ ou $\leftrightarrow$), os parênteses são omitidos por associação à esquerda.

Exemplo 2. Exemplos de forma simplificada.

1. $A \to D \to C \to B$ abrevia $((A \to D) \to C) \to B)$
2. $B \wedge B \wedge C$ abrevia $((B \wedge B) \wedge C)$.

Eliminação de parênteses

R_3) quando uma fórmula apresentar ocorrências de mais de um conectivo, ponha-se a seguinte ordenação entre os conectivos:

1º $\neg$
2º $\wedge$
3º $\vee$
4º $\rightarrow$
5º $\leftrightarrow$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee \neg A \rightarrow D$$

Eliminação de parênteses

R_3) quando uma fórmula apresentar ocorrências de mais de um conectivo, ponha-se a seguinte ordenação entre os conectivos:

1º $\neg$
2º $\wedge$
3º $\vee$
4º $\rightarrow$
5º $\leftrightarrow$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee \neg A \rightarrow D$$

Eliminação de parênteses

R_3) quando uma fórmula apresentar ocorrências de mais de um conectivo, ponha-se a seguinte ordenação entre os conectivos:

1º $\neg$
2º $\wedge$
3º $\vee$
4º $\rightarrow$
5º $\leftrightarrow$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee \neg A \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee (\neg A) \rightarrow D$$

Eliminação de parênteses

R_3) quando uma fórmula apresentar ocorrências de mais de um conectivo, ponha-se a seguinte ordenação entre os conectivos:

1º $\neg$
2º $\wedge$
3º $\vee$
4º $\rightarrow$
5º $\leftrightarrow$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee \neg A \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee (\neg A) \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow (C \wedge D) \wedge A \vee (\neg A) \rightarrow D$$

Eliminação de parênteses

R_3) quando uma fórmula apresentar ocorrências de mais de um conectivo, ponha-se a seguinte ordenação entre os conectivos:

1º $\neg$
2º $\wedge$
3º $\vee$
4º $\rightarrow$
5º $\leftrightarrow$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee \neg A \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee (\neg A) \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow (C \wedge D) \wedge A \vee (\neg A) \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow ((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A) \rightarrow D$$

Eliminação de parênteses

R_3) quando uma fórmula apresentar ocorrências de mais de um conectivo, ponha-se a seguinte ordenação entre os conectivos:

1º $\neg$
2º $\wedge$
3º $\vee$
4º $\rightarrow$
5º $\leftrightarrow$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee \neg A \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee (\neg A) \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow (C \wedge D) \wedge A \vee (\neg A) \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow ((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A) \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow (((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A)) \rightarrow D$$

Eliminação de parênteses

R_3) quando uma fórmula apresentar ocorrências de mais de um conectivo, ponha-se a seguinte ordenação entre os conectivos:

1º $\neg$
2º $\wedge$
3º $\vee$
4º $\rightarrow$
5º $\leftrightarrow$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee \neg A \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee (\neg A) \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow (C \wedge D) \wedge A \vee (\neg A) \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow ((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A) \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow (((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A)) \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow ((((\mathrm{C} \wedge D \wedge A) \vee (\neg A)) \rightarrow D)$$

Eliminação de parênteses

R_3) quando uma fórmula apresentar ocorrências de mais de um conectivo, ponha-se a seguinte ordenação entre os conectivos:

1º $\neg$
2º $\wedge$
3º $\vee$
4º $\rightarrow$
5º $\leftrightarrow$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee \neg A \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee (\neg A) \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow (C \wedge D) \wedge A \vee (\neg A) \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow ((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A) \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow (((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A)) \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow ((((\mathrm{C} \wedge D \wedge A) \vee (\neg A)) \rightarrow D)$$

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A)) \rightarrow D)$$

Eliminação de parênteses

R_3) quando uma fórmula apresentar ocorrências de mais de um conectivo, ponha-se a seguinte ordenação entre os conectivos:

1º $\neg$
2º $\wedge$
3º $\vee$
4º $\rightarrow$
5º $\leftrightarrow$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee \neg A \rightarrow D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee (\neg A) \rightarrow D$$
$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow (C \wedge D) \wedge A \vee (\neg A) \rightarrow D$$
$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow ((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A) \rightarrow D$$
$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow (((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A)) \rightarrow D$$
$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow ((((\mathrm{C} \wedge D \wedge A) \vee (\neg A)) \rightarrow D)$$
$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A)) \rightarrow D)$$
$$((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A)) \rightarrow D))$$

Eliminação de parênteses

R_3) quando uma fórmula apresentar ocorrências de mais de um conectivo, ponha-se a seguinte ordenação entre os conectivos:

1º $\neg$
2º $\wedge$
3º $\vee$
4º $\to$
5º $\leftrightarrow$

$$(A \vee (B \to A))$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee \neg A \to D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee (\neg A) \to D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow (C \wedge D) \wedge A \vee (\neg A) \to D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow ((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A) \to D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow (((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A)) \to D$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow ((((\mathrm{C} \wedge D \wedge A) \vee (\neg A)) \to D)$$

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A)) \to D)$$

$$((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A)) \to D))$$

Eliminação de parênteses

R_3) quando uma fórmula apresentar ocorrências de mais de um conectivo, ponha-se a seguinte ordenação entre os conectivos:

1º $\neg$
2º $\wedge$
3º $\vee$
4º $\rightarrow$
5º $\leftrightarrow$

$$(A \vee (B \rightarrow A))$$
$$A \vee (B \rightarrow A)$$

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee \neg A \rightarrow D$$
$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \wedge D \wedge A \vee (\neg A) \rightarrow D$$
$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow (C \wedge D) \wedge A \vee (\neg A) \rightarrow D$$
$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow ((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A) \rightarrow D$$
$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow (((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A)) \rightarrow D$$
$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow ((((\mathrm{C} \wedge D \wedge A) \vee (\neg A)) \rightarrow D)$$
$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A)) \rightarrow D)$$
$$((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((((C \wedge D) \wedge A) \vee (\neg A)) \rightarrow D))$$

Forma normal disjuntiva

Definição 1 [Literal]. Qualquer fórmula atômica ou sua negação chama-se *literal*.

Forma normal disjuntiva

Definição 1 [Literal]. Qualquer fórmula atômica ou sua negação chama-se *literal*.

Definição 2 [Conjunção fundamental]. Uma fórmula diz-se *conjuntiva fundamental* se:

1. ou é um literal
2. ou é uma conjunção de dois ou mais literais, desde que não há repetição de variáveis proposicionais.

Forma normal disjuntiva

Definição 1 [Literal]. Qualquer fórmula atômica ou sua negação chama-se *literal*.

Definição 2 [Conjunção fundamental]. Uma fórmula diz-se *conjuntiva fundamental* se:

1. ou é um literal
2. ou é uma conjunção de dois ou mais literais, desde que não há repetição de variáveis proposicionais.

Definição 3. Diz-se que uma conjuntiva fundamental A *está contida* na conjuntiva fundamental B se todos os literais de A são também literais de B.

Forma normal disjuntiva

Definição 4. Diz-se que uma fórmula A está na *forma disjuntiva normal* se:

1. ou A é uma conjunção fundamental
2. ou A é uma disjunção de duas ou mais conjunções fundamentais, sendo que nenhuma delas está contida nas demais.

$\{B \wedge [C \wedge (\neg A)]\}$	$(A \wedge B)$
A	$[(\neg A) \vee A]$
$(\neg A)$	$\{[D \wedge (\neg A)] \vee [B \wedge [C \wedge (\neg A)]]\}$
$\{[(\neg C) \wedge (\neg B)] \wedge (\neg A)\}$	$\{\{[D \wedge (\neg A)] \vee [B \wedge [C \wedge (\neg A)]]\} \vee [(D \wedge C) \vee A]\}$

Tabela verdade -> Forma normal disjuntiva

A	B	S
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Tabela verdade -> Forma normal disjuntiva

A	B	S
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

$$\{[A \wedge (\neg B)] \vee [(\neg A) \wedge B] \vee [(\neg A) \wedge (\neg B)]\}$$