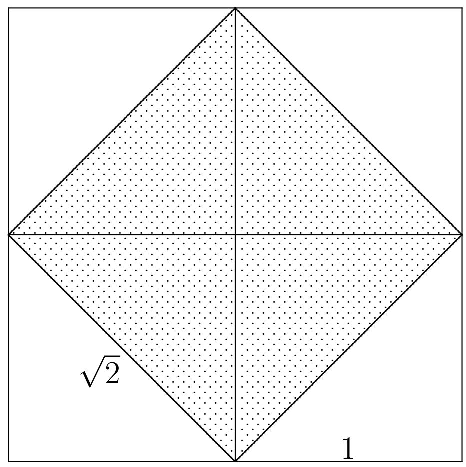
Aritmética dos números reais



A presente versão está disponível em minha página pessoal em formato .pdf O nosso endereço é http://www.dm.ufscar.br/profs/ptlini/ Nesta página mantemos seções como *Errata*, *Comentários* e *Atualizações*. Também está disponível no Arquivo Escolar `http://arquivoescolar.org/`

Esta versão foi testada em sala de aula várias vezes, por mim e por colegas professores, e já foram feitas muitas correções, de modo que pensamos que está adequada para uso em cursos de formação inicial e continuada de professores de Matemática. Para sugestões ou perguntas favor se comunicar com o autor através do endereço roberto@dm.ufscar.br

Figura da capa: Representação de uma antiga construção geométrica do número irracional $\sqrt{2}$. Dado um quadrado de lado 1, portanto de área 1, tomamos quatro cópias, dispostas como na figura. Em cada cópia tomamos uma diagonal. Obtemos um novo quadrado, de área 2, portanto de lado $\sqrt{2}$. Fizemos isso sem usar o Teorema de Pitágoras. Para mais detalhes, confira a seção 3.2 do Capítulo 3.

Este texto foi editado em $\LaTeX\,2_\varepsilon$ pelo autor, que agradece à comunidade $\TeX$ pelos meios disponibilizados.

Roberto Ribeiro Paterlini

Aritmética dos números reais

um texto para licenciandos e professores de Matemática

Departamento de Matemática, UFSCar

São Carlos, Brasil

Data desta versão: 02 de julho de 2012

Sumário

Apresentação

O Cosmos é construído por duas energias paralelas: o ensinar e o aprender.

Sobre este texto

Este texto aborda os principais assuntos do ensino básico que necessitam de conceitos e técnicas da Análise Matemática para sua correta compreensão. Nosso olhar é o da Matemática Superior, mas a matéria é a Matemática Elementar estudada nas escolas de ensino fundamental e médio.

O principal assunto aqui tratado é o modelo dos números reais. Inclui estudo dos números racionais, gênese e história dos números irracionais e suas representações, sequências numéricas, o número π, gênese, história e aplicações das funções exponenciais e logarítmicas, o número e, e, por último, tópicos sobre áreas e volumes.

Escrevemos este texto com a intenção de apoiar o estudo desses assuntos em cursos de formação inicial de professores de Matemática, particularmente licenciatura. Versões iniciais foram utilizadas em cursos de formação inicial de professores e no Mestrado Profissional de Matemática da UFSCar, e parte desse texto foi usado também em atividades de atualização com professores do ensino básico.

Supomos que nosso estudante já participou de cursos básicos sobre números inteiros, Geometria Euclidiana e Cálculo Diferencial e Integral. Imaginamos um texto para uso em semestres finais dos nossos cursos de Licenciatura em Matemática.

Nosso método

Ao compor esse material acompanhamos as orientações do *método genético* e parcialmente do método *ensino da Matemática através de problemas.*

O uso de problemas como recurso didático está bem estabelecido na tradição matemática, e particularmente apreciamos a aplicação do método com o objetivo de desenvolver a arte de investigar em Matemática. Assim como aquele que investiga aprende, o que aprende deve fazê-lo praticando a arte de investigar, sem o que não é possível obter um conhecimento significativo. Para facilitar esse caminho ao estudante apresentamos um texto com muitos problemas, e de estilos variados. Observamos, em nossos trabalhos com estudantes, que particularmente interessantes são as seções "temas para investigação", dispostas no final de cada capítulo.

Por outro lado, o ensino da Matemática depende também da apresentação de conceitos e ideias elaboradas ao longo da história. Aqui o nosso formato preferencial é o que se chama de *método genético.* No meio matemático a expressão *método genético* parece ter sido utilizada pela primeira vez por Otto Toeplitz em 1926. Autor de um livro didático [92] de Cálculo Diferencial e Integral, onde usou esse método, Toeplitz estava convencido de que os estudantes adquirem compreensão dos conceitos e métodos do Cálculo apenas quando se lhes apresenta sua gênese e desenvolvimento. Harold M. Edwards também utilizou o método genético em sua apresentação [25] do Último Teorema de Fermat. Segundo este autor, a melhor maneira de superar a dificuldade em aprender uma teoria matemática abstrata é ignorar os tratados modernos até que se tenha estudado sua gênese.

Dessa forma, neste livro, a sequencialização dos assuntos tem como fio condutor a gênese psicológica dos conceitos e técnicas, e a História da Matemática é a nossa principal inspiração.

Optamos por um estilo razoavelmente detalhado e dialógico, com ampla explicação das ideias. Pensamos que dessa forma o texto poderá ser utilizado em diversas situações de ensino e aprendizagem, e o professor fica com liberdade de adotar diferentes estratégias. Particularmente apreciamos estratégias que incentivam o estudante a realizar um trabalho relativamente autônomo, mais dirigido à prática da pesquisa. De qualquer forma, o que irá realmente atrair o estudante é o impulso para investigar as propriedades quantitativas dos números e das formas.

Agradecimentos

Todo o material aqui disposto foi construído através de consultas a inúmeras fontes, acreditamos que todas estão citadas na bibliografia (página 213). Constatamos assim que participamos de uma construção coletiva. Optamos por referir no texto uma pequena parte das fontes, de outra forma iríamos sobrecarregar o estilo. Acompanhamos o costume em nossa área de não mencionar as fontes dos problemas em livros textos para estudantes.

Muito importante foi a participação dos estudantes dos cursos de Matemática da UFSCar, os quais deram o tom necessário para que este trabalho efetivamente atenda a uma necessidade. Desta forma agradecemos a atenção e envolvimento das turmas de 2003 a 2009 com as quais trabalhamos os assuntos aqui estudados. Agradecemos também às diversas turmas de professores que participaram de nossos cursos de formação continuada, assim como dos professores que participam do nosso mestrado profissional. Sentimo-nos verdadeiramente agraciados com as oportunidades que tivemos de contar com esses colaboradores.

Nossos agradecimentos se estendem aos colegas professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFSCar, particularmente ao grupo de ensino da Matemática, que nos proporcionou a oportunidade de desenvolver uma clareza sobre essa importante atividade.

Pensamos ser adequado citar nomes, mesmo correndo o risco de omitir alguns: Yuriko Y. Baldin, Pedro L. A. Malagutti, Luiz J. Bettini, Yolanda K. S. Furuya, Waldeck Schützer, João C. V. Sampaio, Paulo A. S. Caetano, Sadao Massago, Jean Piton, Marcus Vinicius de A. Lima, Fabio Gomes Figueira, Marcelo J. Botta, Maurizio Marchetti, Guillermo A. L. Villagra e Ivo Machado da Costa.

Finalmente dedico esse livro aos meus professores de Matemática, com muita gratidão.

São Carlos, 03 de janeiro de 2011.
Roberto Ribeiro Paterlini.

Observação sobre a edição de 02 de julho de 2012

Foram feitas pequenas correções ortográficas e de conteúdo e pequenos acréscimos, sugeridos por professores e estudantes da UFSCar. Somos gratos.

São Carlos, 02 de julho de 2012. O autor.

Capítulo 1

Os números inteiros

1.1 Introdução

Apresentamos neste Capítulo uma síntese da história da invenção dos números inteiros, e de como essa história participou do início do desenvolvimento da Matemática. Apresentamos também os resultados básicos da Teoria dos Números que são necessários para o estudo dos capítulos posteriores deste livro. Essa apresentação é um resumo de [74].

1.2 Gênese dos números naturais

Da grande sinfonia natural que se desdobra perante seus sentidos, o homem, no início de seu desenvolvimento mental, percebeu um ritmo básico, discreto, uniforme, sequencial, que traduziu no que hoje denominamos números naturais: 1, 2, 3, 4, ...

Construiu primeiro o conceito de *unidade*, um segredo que se desvela aos poucos. Aquele que designamos *número um* é um representante dessa essência, trazendo a ideia de começo. É o que inicia e dá ritmo. Revela-se, desdobrando-se, dando origem a todos os outros números, em infinitas combinações. É, ao mesmo tempo, o todo e a parte.

Reconhecendo, em seguida, a diversidade das coisas, o homem construiu o conceito dos números naturais subsequentes. Observando essa construção do ponto de vista quantitativo, percebemos que cada número natural é a reunião de uma quantidade precisa de unidades. Os números são construídos em uma ordem. Designando com o símbolo 1 a unidade e com $+$ o ajuntamento de unidades, vemos que 1 é o primeiro número, $1+1$ é o segundo, $1+1+1$ é o terceiro, e assim sucessivamente. Observamos que, dado um número, o único número que lhe segue nessa ordem é obtido acrescentando-se uma unidade às unidades do número dado. Considerando o número dois e os seguintes, observamos que, dado um desses números, o número que lhe antecede nessa ordem é único.

Obtemos dessa forma as ideias de sucessor e de antecessor. Dado um número natural a, seu *sucessor* é indicado por $a+1$, e é o número construído adicionando-se uma unidade às unidades de a. Dado um número natural $a \neq 1$, seu *antecessor* é indicado por $a-1$, e é o número cujo sucessor é a.

O conjunto dos números naturais é, portanto, o constituído pelos números 1, $1+1$, $1+1+1$, $1+1+1+1$, ...

Para utilizar o conceito de número natural o homem construiu muitos métodos de contagem. Para contar necessitamos de um sistema de numeração e de uma linguagem.

Um sistema de numeração proporciona um algoritmo para contagem. Uma função básica de qualquer sistema de numeração é que ele deve determinar, implícita ou explicitamente, uma regra para o sucessor de qualquer número natural. Também são desejáveis em um sistema de numeração as seguintes qualidades: i) todo número natural tem representação no sistema; ii) a representação de qualquer número natural no sistema é única.

Um sistema de numeração, para ser usado, necessita de uma linguagem para representar os números. A linguagem associa a cada número um vocábulo, um símbolo, um ícone ou um sinal. O homem inventou os mais diferentes métodos para representar os números utilizando as mais diversas linguagens, levando em conta suas necessidades de comunicação e os meios técnicos disponíveis.

Registros arqueológicos nos sugerem qual deve ter sido o mais antigo sistema de numeração utilizado pelo homem:

$$\mathsf{I} \quad \mathsf{II} \quad \mathsf{III} \quad \ldots$$

Trata-se de um sistema de numeração com um único símbolo, a saber, I, representando a unidade. Dada a representação de um número, para se obter a representação do sucessor basta acrescentar um símbolo I.

Estudando a cultura dos povos naturais os antropólogos descobriram os mais variados sistemas de numeração. Indígenas da Ilhas Murray, situadas no estreito de Torres, entre a Austrália e a Nova Guiné, utilizavam os seguintes vocábulos para contar:

netat	(um)
neis	(dois)
neis netat	(três)
neis neis	(quatro)

Vemos aqui um sistema de numeração que utiliza basicamente os vocábulos *netat* e *neis*. Aparentemente os indígenas que inventaram esse sistema não precisavam de nomes para números maiores do que quatro. Mas se precisassem poderiam obtê-los seguindo sempre o mesmo método. O número cinco seria decomposto na forma $5 = 2 + 2 + 1$, e receberia o nome *neis neis netat*. O número seis seria decomposto na forma $6 = 2 + 2 + 2$, e receberia o nome *neis neis neis*. Em geral, dado um número natural qualquer a, podemos escrever $a = 2 + 2 + \ldots + 2$ ou $a = 2 + 2 + \ldots + 2 + 1$, e a denominação de a nesse sistema seria *neis neis...neis* ou *neis neis...neis netat*.

Vemos que aqueles indígenas inventaram um sistema de numeração perfeitamente coerente. A regra do sucessor pode ser descrita da seguinte forma. Se o nome de um número termina com o vocábulo *neis*, o nome de seu sucessor se obtém repetindo-se todos os vocábulos *neis* e acrescentando-se o vocábulo *netat*. Se o nome de um número termina com o vocábulo *netat*, o nome de seu sucessor se obtém substituindo-se esse vocábulo por *neis*.

Esses sistemas de numeração fazem parte de uma família mais geral, a dos sistemas aditivos. Seja β um número natural. Um *sistema aditivo de base* β consiste de :

a) β símbolos ou vocábulos a_1, a_2, ..., a_β para representar os números de um a β, em ordem crescente. Os símbolos ou vocábulos escolhidos chamam-se *algarismos*.

b) regra do sucessor: se a representação de um número termina em a_i, sendo $i \neq \beta$, a representação do sucessor se obtém substituindo-se a_i por a_{i+1}; se a representação de um número termina em a_β, a representação do sucessor se obtém acrescentando-se a_1 à representação dada.

Portanto, as representações de um sistema aditivo de base β são da forma $a_\beta a_\beta \ldots a_\beta a_i$, com $i = 1, \ldots, \beta$. A contagem neste sistema, a partir de um, é:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_\beta,\ a_\beta a_1,\ a_\beta a_2, \ldots, a_\beta a_\beta,\ a_\beta a_\beta a_1, \ldots$$

Os sistemas de numeração aditivos têm uma concepção simples, e serviram de modelo para a construção de muitos sistemas utilizados por povos, como o sistema hieroglífico dos antigos egípcios, os sistemas ático e jônico, dos antigos gregos, e o sistema romano. Entretanto o uso de um sistema aditivo em uma civilização como a nossa traria sérios inconvenientes. Nesses sistemas o nome de um número necessita da repetição de vocábulos, mesmo se considerarmos valores numéricos baixos, dificultando o entendimento. Na escrita, o símbolo principal deve ser repetido muitas vezes, dificultando o reconhecimento visual, e ocupando muito espaço. O sistema aditivo também dificulta o desenvolvimento de algoritmos compactos para implementação das operações aritméticas.

Devido a essas limitações, nossa civilização prefere utilizar os sistemas de numeração posicionais. Com a invenção desses sistemas a Arte de Contar atinge seu ápice histórico, científico e social. O sistema posicional mais importante é o decimal, que pode ser considerado uma das maiores invenções da humanidade. Está hoje difundido em todo o planeta, e é utilizado nos mais diversos setores da organização social, assim como na maior parte das aplicações científicas.

A construção de um sistema posicional com uso constante em ambientes sociais e científicos foi realizada no mundo antigo por apenas três povos: os sumérios, os maias e os hindus. Essa construção certamente exigiu a liderança de uma inteligência científica e uma decisão coletiva, ou pelo menos governamental, em adotar o sistema.

O método hindu foi o que trouxe resultados mais convenientes para nossa civilização. Primeiramente devido ao fato do sistema usar a base dez, uma escolha bastante prática e adequada. Em segundo lugar por que os hindus se preocuparam em criar um sistema adaptado à escrita em papel. Embora não tenhamos registros históricos detalhados do trabalho dos hindus, podemos presumir que inicialmente utilizavam o ábaco para representar números, e criaram algoritmos para implementar as operações aritméticas nesse instrumento. O ábaco era, de fato, o método mais barato e disponível para a prática de qualquer aritmética. Entretanto, o ábaco tem um sério inconveniente, que é o de nada deixar registrado. Daí a necessidade de se criar um método de registro durável, e os hindus tiveram a feliz ideia de transpor sua aritmética do ábaco para a escrita em papel.

A construção de um sistema de numeração posicional decimal para registro em papel exige o reconhecimento de que devem ser usados exatamente dez símbolos, nove para representar os números de um a nove, e mais um para representar a casa vazia.

Adotamos os símbolos

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

que são chamados *algarismos decimais*. O símbolo 0 chama-se zero e os símbolos 1, 2, 3,..., 9 designam os números de um a nove, nessa ordem.

Cada número natural é indicado por uma sequência de algarismos escritos em linha horizontal um em seguida do outro, lidos da esquerda para a direita, tendo como *regra do sucessor* o seguinte:

i) se a representação de um número termina com um dos algarismos 0, 1, ..., 8, então a representação do sucessor se obtém substituindo-se esse algarismo pelo seu sucessor na ordem natural dos algarismos;

ii) se a representação de um número termina em 9, então a representação do sucessor se obtém substituindo-se esse algarismo 9 por 0 e em seguida aplicando-se recorrentemente os itens *i)* e *ii)* dessa regra ao algarismo anterior. Se não existir o algarismo anterior considera-se como se ele fosse o zero.

Assim, contando os números um a um, obtemos a representação dos números naturais no sistema decimal. A forma geral dessa representação é

$$d_n \ldots d_2 d_1 d_0 \tag{1.1}$$

em que cada d_i é um algarismo decimal, sendo $d_n \neq 0$, e $n = 0$, 1, 2, ... Portanto os números naturais representados no sistema decimal são

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ..., 19, 20, 21, ..., 98, 99, 100, 101, ...

Existe outra forma de obter a representação decimal de um número natural. Seja m um número natural. Agrupamos as unidades de m em grupos de dez. Sobram d_0 unidades, sendo d_0 um dos algarismos decimais. Escrevemos $m = q_1 10 + d_0$. Tomamos q_1 e o agrupamos em grupos de dez. Seja q_2 a quantidade de grupos de dez assim formados e seja d_1 o que restou, sendo d_1 um dos algarismos decimais. Podemos escrever $q_1 = q_2 10 + d_1$. Prosseguimos até encontrar um valor q_n entre 1 e 9. Temos

$$\begin{aligned} m &= q_1 10 + d_0 \\ q_1 &= q_2 10 + d_1 \\ q_2 &= q_3 10 + d_2 \\ &\vdots \\ q_{n-1} &= q_n 10 + d_{n-1} \end{aligned}$$

Recompondo as relações acima com $q_n = d_n$ vem

$$\begin{aligned} m &= q_1 10 + d_0 \\ &= (q_2 10 + d_1)10 + d_0 \\ &= q_2 10^2 + d_1 10 + d_0 \\ &\vdots \\ &= d_n 10^n + d_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + d_1 10 + d_0 \end{aligned}$$

A forma $d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1 d_0$ chama-se *forma compacta da representação decimal de* m, ou simplesmente *representação decimal de* m. A forma $d_n 10^n + d_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + d_1 10 + d_0$ chama-se *forma expandida da representação decimal de* m. Para dirimir possíveis confusões a representação compacta pode vir escrita como $(d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1 d_0)_{dez}$.

Dada uma representação $d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1 d_0$, os valores d_i chamam-se *dígitos* do número.

Outro sistema posicional, o binário, assumiu grande importância nos dias de hoje, pois tornou viável a implementação de uma linguagem para uso na computação digital. Mais geralmente, todo número natural $\beta \neq 1$ pode servir de base para a construção de um sistema posicional. Dado um número natural $\beta \neq 1$, escolhemos β símbolos, um para indicar a casa vazia e $\beta - 1$ para indicar os números de 1 a $\beta - 1$. Esses símbolos são chamados β-*algarismos*.

A representação dos números naturais no sistema posicional de base β segue as mesmas convenções do sistema decimal, adaptando-se a regra do sucessor conforme segue:

i) se a representação de um número termina com um dos algarismos que representam 0, 1, ..., $\beta - 2$, então a representação do sucessor se obtém substituindo-se esse algarismo pelo seu sucessor na ordem natural dos algarismos. $\beta - 2$ é o antecessor de $\beta - 1$.

ii) se a representação de um número termina com o algarismo que representa $\beta - 1$, então a representação do sucessor se obtém substituindo-se esse algarismo por zero e em seguida aplicando-se recorrentemente os itens *i)* e *ii)* dessa regra ao algarismo anterior. Se não existir o algarismo anterior considera-se como se ele fosse o zero.

Dado um número natural m, podemos obter sua representação na base β por contagem ou por agrupamento. Dessa forma m tem duas formas de representação, a compacta e a expandida:

$$m = d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 d_0 = d_n \beta^n + d_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + d_1\beta + d_0 \tag{1.2}$$

em que cada d_i é um β-algarismo.

Costuma-se escolher como algarismos para as bases de dois a dez os símbolos correspondentes utilizados no sistema decimal. Para as bases maiores costuma-se considerar a partir de 9 a sequência de letras do alfabeto na forma capital: A, B, C, etc. Por exemplo, para o sistema duodecimal (base doze) os algarismos são

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad A \quad B$$

Exemplo de número representado no sistema duodecimal: $(A0B)_{doze}$. Seu valor no sistema decimal pode ser assim calculado:

$$(A0B)_{doze} = A \times 12^2 + 0 \times 12 + B = 10 \times 12^2 + 0 \times 12 + 11 = 1451$$

No sistema binário (base dois) os algarismos são: 0 e 1. Exemplo de número representado no sistema binário: $(11011)_{dois}$. Seu valor no sistema decimal pode ser assim calculado:

$$(11011)_{dois} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 27$$

Podemos verificar que a representação de um número natural qualquer em um sistema posicional de base β sempre existe e é única. A verificação formal dessa afirmação necessita do Teorema do Algoritmo da Divisão, que veremos na Seção 1.5.

1.3 Operações fundamentais

As quatro operações fundamentais da Aritmética são: *adição*, *subtração*, *multiplicação* e *divisão*. A adição é a primeira operação fundamental da Aritmética, e dela derivam todas as outras.

Vimos na página 1 que todo número natural a tem um único sucessor, indicado por $a + 1$. Definimos a adição de um número natural a com a unidade como a operação da qual resulta o sucessor de a. Podemos estender este conceito, e definir a adição de um número natural a com um número natural qualquer b: ao número a adicionamos tantas unidades quantas são as unidades do número b. Mais exatamente, a adição de a e b é a operação da qual resulta um número natural definido da seguinte forma: tomamos o sucessor $a + 1$ de a, em seguida o sucessor de $a+1$, e assim por diante, realizamos a ação "tomar o sucessor" tantas vezes quantas são as unidades de b. Por exemplo, para adicionar dois a três, fazemos, sucessivamente,

$$(1+1+1)+1 = 1+1+1+1 \quad \text{e} \quad (1+1+1+1)+1 = 1+1+1+1+1$$

e o resultado é cinco.

Fica assim determinada a *adição*, que associa aos números naturais a e b o número natural c, chamado *soma* de a e b. Indicamos a soma de a e b por $a + b$ (lê-se: a mais b).

Observemos que a operação de adição satisfaz duas importantes propriedades: comutatividade e associatividade.

A *propriedade comutativa da adição* significa que dados quaisquer números naturais a e b se tem $a + b = b + a$. Dessa forma para encontrar a soma $a + b$ podemos proceder de duas maneiras: começar com a e tomar os sucessores $a + 1$, $a + 1 + 1$, ... (b vezes), ou começar com b e tomar os sucessores $b + 1$, $b + 1 + 1$, ... (a vezes).

A *propriedade associativa da adição* significa que dados quaisquer números naturais a, b e c se tem $(a+b)+c = a+(b+c)$. Isto significa que para adicionar três números a, b e c podemos proceder de duas maneiras: primeiro adicionar a com b, tomar o resultado e adicionar a c; ou então primeiro adicionar b com c, tomar o resultado e adicionar a a. O número resultante é o mesmo.

A subtração é uma ação inversa da adição. Enquanto a adição está relacionada com os conceitos de *acrescentar* e *juntar*, a subtração corresponde a *retirar* e *completar*.

Se a e b são dois números naturais tais que a tem mais unidades do que b, podemos *subtrair b de a* retirando de a tantas unidades quantas as de b. Por exemplo, para subtrair cinco de doze, consideramos as unidades de doze,

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

das quais retiramos cinco, e ficamos com

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

que é sete. Portanto, subtraindo-se cinco de doze, resulta sete. Representamos esse fato com a notação

$$12 - 5 = 7$$

Mais geralmente, o resultado de subtrair b de a é indicado por $a - b$ (lê-se: a menos b), e é chamado *diferença* entre a e b.

Dessa forma, dados números naturais a e b tais que a tem mais unidades do que b, a diferença $a - b$ é o número natural que somado com b resulta a, ou seja,

$$b + (a - b) = a$$

Fica assim determinada a *subtração*. Deixamos claro também que a subtração é o inverso da adição. Isto significa que se subtrairmos b de a e depois, ao resultado, adicionarmos b, obtemos novamente a. Em outros termos,

$$(a - b) + b = a$$

Do mesmo modo, se adicionarmos a e b, e da soma subtrairmos b, o resultado é a:

$$(a + b) - b = a$$

Vimos que existe uma ordem natural no conjunto dos números naturais. Assim, dados números naturais a e b, podemos compará-los e verificar se têm a mesma quantidade de unidades, ou se um deles tem uma quantidade maior do que a do outro.

Escrevemos $a = b$ para indicar que os números naturais têm a mesma quantidade de unidades. Neste caso dizemos *a igual a b*.

Se a tem mais unidades do que b, escrevemos $b < a$, ou $a > b$, e dizemos *b menor do que a*, ou, respectivamente, *a maior do que b*.

No conjunto dos números naturais vale a *propriedade transitiva*: se a, b e c são números naturais tais que $a < b$ e $b < c$, então $a < c$. De fato, se a tem menos unidades do que b e se este tem menos unidades do que c, então a tem menos unidades do que c. É fácil ver que vale também a *Lei da Tricotomia*: dados os números naturais a e b, uma e apenas uma das seguintes condições é verdadeira: *i)* $a = b$; *ii)* $a < b$; *iii)* $a > b$.

São muito úteis as seguintes notações. Sejam a e b números naturais. Anotamos $a \leq b$ quando $a < b$ ou $a = b$. Da mesma forma, anotamos $a \geq b$ quando $a > b$ ou $a = b$.

No conjunto dos números naturais vale ainda o *princípio do menor número natural*: se A é um subconjunto não vazio do conjunto dos números naturais, então A tem um menor elemento. Isto significa que existe a em A tal que $a \leq b$ para todo b em A.

Observamos a seguinte propriedade de compatibilidade entre a ordem dos números naturais e a operação de adição.

compatibilidade entre a ordem e a adição: quaisquer que sejam os números naturais a, b e c, se $a < b$ então $a + c < b + c$.

De fato, se b tem mais unidades do que a, e se adicionarmos a cada um a mesma quantidade c de unidades, então $b + c$ tem mais unidades do que $a + c$.

Esta propriedade implica a seguinte: quaisquer que sejam os números naturais a, b e c, se $a \leq b$ então $a + c \leq b + c$. De fato, sendo $a \leq b$, temos dois casos a examinar: $a = b$ ou $a < b$. Se $a = b$ então $a + c = b + c$, pois estamos somando c ao mesmo número. Se $a < b$, temos $a + c < b + c$, em virtude da propriedade da compatibilidade entre a ordem e a adição. Em qualquer caso temos $a + c \leq b + c$.

Vejamos agora que quaisquer que sejam os números naturais a, b, c e d, se $a \leq b$ e $c \leq d$, então $a + c \leq b + d$. Para deduzir esse fato aplicamos a propriedade anterior duas vezes. De $a \leq b$ vem $a + c \leq b + c$. De $c \leq d$ vem $c + b \leq d + b$. Em virtude da transitividade da ordem segue que $a + c \leq b + d$.

Utilizando a Lei da Tricotomia, podemos demonstrar as seguintes leis de cancelamento:
i) Sejam a, b e c números naturais tais que $a + c = b + c$. Então $a = b$;
ii) Sejam a, b e c números naturais tais que $a + c < b + c$. Então $a < b$.

A multiplicação é uma potencialização da adição. *Duplicar* um número natural a significa tomar $a + a$. *Triplicar* a significa tomar $a + a + a$. E assim por diante, temos *quadruplicar*, *quintuplicar*, em geral, *multiplicar*.

Multiplicar um número natural n por um número natural a significa adicionar n parcelas iguais a a. O resultado se chama *produto de n por a*. O produto de n por a é indicado com uma das seguintes notações:

$$na, \qquad n \cdot a \qquad \text{ou} \qquad n \times a$$

(lê-se: n vezes a, ou n multiplicado por a).

Formalmente, podemos definir a multiplicação por recorrência da seguinte maneira. Seja a um número natural qualquer. Então

$$\begin{cases} 1 \cdot a &= a \\ n \cdot a &= (n-1) \cdot a + a \quad \text{para todo } n \geq 2. \end{cases}$$

A multiplicação ocorre em inúmeras situações. Além do uso direto da definição como soma de parcelas repetidas, vemos que aparece em outras situações como contagem de objetos colocados em um arranjo retangular ou como medida da área de um retângulo de base n e altura m, sendo n e m números naturais.

Para contar os pontos da Figura 1.1 basta calcular $3 \cdot 8 = 8 + 8 + 8 = 24$, ou $8 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 24$.

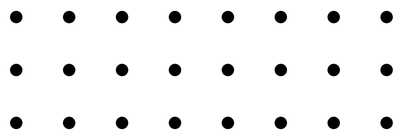


Figura 1.1: Ilustração da multiplicação de números naturais

Por outro lado, para calcular a área do retângulo de medidas 7 e 4, fazemos o produto $4 \cdot 7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28$, ou $7 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28$.

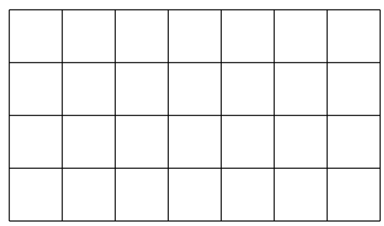


Figura 1.2: Ilustração da propriedade comutativa

Observamos que a contagem de objetos em um arranjo retangular pode ser feita de duas maneiras, primeiro tomando a quantidade de linhas e multiplicando-a pela quantidade de colunas, ou o contrário. Naturalmente o resultado é o mesmo. Temos assim a *propriedade comutativa da multiplicação*:

$$ab = ba, \quad \text{quaisquer que sejam os números naturais } a \text{ e } b.$$

Dados números naturais a, b e c, consideremos dois arranjos retangulares, como na Figura 1.3, o primeiro com a colunas, o segundo com b colunas, e ambos com c linhas. O primeiro tem ac elementos, o segundo, bc, e juntos perfazem $ac + bc$ elementos.

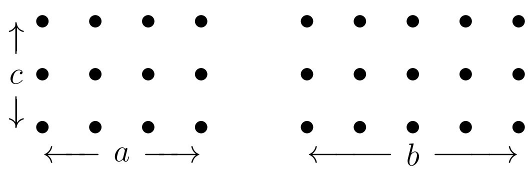


Figura 1.3: Ilustração da propriedade distributiva

Juntando agora os dois arranjos para formar um único retângulo, contamos $(a+b)c$ elementos.

Novamente a quantidade de elementos contados em ambas as situações é a mesma. Dessa forma podemos admitir a *propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição*:

$$(a + b)c = ac + bc, \quad \text{quaisquer que sejam os números naturais } a \text{ e } b.$$

Sejam a, b e c números naturais quaisquer. Consideremos um arranjo de objetos em forma de paralelepípedo, com dimensões a, b e c. Podemos contar os objetos desse arranjo de várias

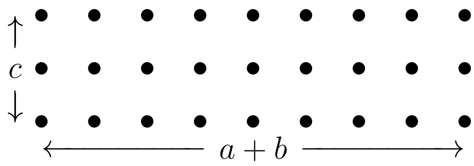


Figura 1.4: Ilustração da propriedade distributiva - cont.

formas, começando com uma das faces (multiplicando as dimensões da face) e depois multiplicando pela altura relativa a essa face. Por exemplo, $(ab)c$, ou $a(bc)$. Naturalmente o resultado é o mesmo. Temos assim a *propriedade associativa da multiplicação*:

$$(ab)c = a(bc), \quad \text{quaisquer que sejam os números naturais } a,\ b \text{ e } c.$$

Sejam a e b números naturais tais que $a \leq b$. Aplicando a compatibilidade entre a ordem e a adição a $a \leq b$ e a $a \leq b$ vem $a + a \leq b + b$, ou $2a \leq 2b$. Juntando esta última com $a \leq b$ vem $2a + a \leq 2b + b$, ou $3a \leq 3b$. E assim sucessivamente, se $a \leq b$ então $na \leq nb$ qualquer que seja o número natural n. Da mesma forma podemos ver que se $a < b$ então $na < nb$ qualquer que seja o número natural n. Assim obtemos a

compatibilidade entre a ordem e a multiplicação: quaisquer que sejam os números naturais a, b e n, se $a < b$ então $an < bn$. Ou, se $a \leq b$ então $an \leq bn$.

A divisão amplia o potencial da subtração, e é a operação inversa da multiplicação. Responde basicamente a dois conceitos: repartir e comparar.

A divisão, vista como repartir, ocorre quando particionamos um conjunto de objetos em grupos com o mesmo número de objetos cada um, sendo que sabemos a quantidade de grupos e queremos saber quantos objetos compõem cada grupo.

A divisão, vista como comparar, ocorre quando temos dois números e os comparamos. Queremos saber quantas vezes um número "cabe" no outro. Dizendo de outra forma, dado um conjunto de objetos queremos dividi-lo em grupos com o mesmo número de objetos cada um, sendo que sabemos a quantidade de objetos de cada grupo e queremos saber quantos são os grupos.

Dado um número natural a, suponhamos que a foi dividido em q grupos com b elementos cada um, e que restaram r elementos. Temos a equação fundamental da *divisão*:

$$a = bq + r \tag{1.3}$$

Se da divisão não existir resto, dizemos que o resto é zero e que a divisão é *exata*, e escrevemos

$$a = bq \tag{1.4}$$

Nas relações 1.3 e 1.4, q é denominado *quociente* e r, *resto* da divisão inteira de a por b, ou simplesmente da divisão de a por b.

O resto da divisão de a por b não é único. Por exemplo, ao dividir 19 por 3 temos as possibilidades, dentre outras: $19 = 3 \cdot 6 + 1 = 3 \cdot 5 + 4 = 3 \cdot 4 + 7$. Portanto 1, 4 e 7 são restos. Mas existe o menor resto, que no exemplo dado é 1.

Dividir um número natural a por um número natural b tal que $b \leq a$ significa encontrar um quociente q tal que $a = bq$ ou um quociente q e o menor resto r tais que $a = bq + r$.

De acordo com o que comentamos acima sobre o significado da divisão, existem duas maneiras fundamentais de calcular q e r.

A primeira é perfazer subtrações sucessivas. Assim, para dividir a por b, com $b < a$, calculamos $a - b$, $a - 2b$, $a - 3b$,... Notemos que os valores $a - qb$, para $q = 1$, 2, 3,... diminuem à medida que q cresce. Assim existe o maior q tal que a subtração $a - qb$ pode ser feita mas $a - (q + 1)b$ não. Se encontrarmos q tal que $a = qb$, a divisão é exata e terminamos. Caso contrário, chamando $r = a - qb$ temos $a = qb + r$, e a divisão terminou. Para dividir a por b, com $b = a$, basta tomar $q = 1$, e a divisão é exata.

A segunda maneira de dividir a por $b \leq a$ consiste em calcular $1 \cdot b$, $2b$, $3b$,... até atingir o valor a ou ultrapassá-lo. Se o valor a for atingido, significa que encontramos q tal que $a = qb$, e a divisão é exata. Se o valor a não for atingido, seja qb o maior elemento da sequência antes de a, de modo que $qb < a < (q + 1)b$. Chamando $r = a - qb$ temos $a = qb + r$, e a divisão terminou.

Observemos que em ambos os casos r é o menor resto possível. De fato, sejam t e s números naturais tais que $a = tb + s$, e suponhamos que $s < r$. Então $a - tb < a - qb$, o que implica $qb < tb$. Disto segue $q < t$, o que contraria a hipótese de ser q o maior número natural tal que $qb < a$. Portanto $r \leq s$.

Na seção anterior estudamos os números naturais 1, 2, 3, 4, ... e consideramos zero um algarismo do sistema decimal, definido para designar a casa vazia em representações de números. Agora convém incluirmos zero como um número natural, de modo que possamos estender as propriedades desse conjunto. Considerar zero como um número natural também facilita o desenvolvimento de fórmulas e definições.

A ideia de conjunto vazio surge quando fazemos certas operações com conjuntos. Por exemplo, dado um conjunto, retiramos dele todos os seus elementos, do que resulta um conjunto vazio. Fazendo a interseção de dois conjuntos que não têm elementos em comum, vemos que essa interseção é um conjunto vazio.

Isto nos sugere estender os números utilizados para contagem, designando por *zero* a quantidade de elementos em um conjunto vazio. Indicamos o número zero com o símbolo 0. Dessa forma zero faz parte dos números utilizados para contagem, que passam a ser: 0, 1, 2, 3, ...

Se em um conjunto vazio colocamos um objeto, temos um conjunto com um elemento. Assim $1 + 0 = 1$ ou $0 + 1 = 1$. Vemos que 1 é o sucessor de zero. Mais geralmente, se em um conjunto vazio colocamos n elementos, ficamos com n elementos no conjunto, ou seja, $0 + n = n$. Por outro lado, se em um conjunto com n elementos acrescentamos elemento nenhum, continuamos com um conjunto com n elementos. Portanto $n + 0 = n$. Em síntese,

$$n + 0 = n = 0 + n \quad \text{para todo número natural } n. \tag{1.5}$$

Em particular, $0 + 0 = 0$. Vemos também que se de um conjunto com n elementos retiramos n elementos, ficamos com um conjunto com 0 elementos, isto é,

$$n - n = 0 \quad \text{para todo número natural } n. \tag{1.6}$$

Em particular, $0 - 0 = 0$.

Vimos anteriomente que $1 \times n$ significa tomar n uma vez, $2 \times n$ significa tomar $n + n$, etc. Assim $0 \times n$ significa tomar n nenhuma vez, e o mais lógico parece ser definir $0 \times n = 0$ para todo n. Por outro lado $n \times 0$ é $0 + 0 + \ldots + 0$, resultando novamente 0. Temos assim

$$n \times 0 = 0 = 0 \times n \quad \text{para todo número natural } n. \tag{1.7}$$

Em particular, $0 \times 0 = 0$.

Indicamos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, incluindo o zero. Portanto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Vimos que a propriedade comutativa da adição se estende para esse novo conjunto dos números naturais, e examinando as considerações feitas acima vemos que a propriedade associativa da adição também se estende para esse novo conjunto. O mesmo ocorre para as propriedades comutativa e associativa da multiplicação e para a propriedade distributiva. Vemos também que $0 < 1$ e que as propriedades de ordem se estendem para o conjunto $\mathbb{N}$.

Indicamos por $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais excluído o zero, denominados *números naturais positivos*. Portanto

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Destacamos ainda a seguinte propriedade, denominada *Lei da Integridade*: Se a e b são números naturais tais que $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. De fato, vimos, na definição de multiplicação, que o produto de inteiros positivos é positivo. Portanto se a é positivo e se b é positivo, então ab é positivo. Isto implica que se $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

Problema resolvido 1.1. Demonstre que se a e b são números naturais tais que $ab = 1$ então $a = b = 1$.

Solução. Em virtude da Lei de Integridade temos $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Portanto $a \geq 1$ e $b \geq 1$. Se fosse $a > 1$ aplicaríamos a propriedade da compatibilidade entre a ordem e a multiplicação e teríamos $a \cdot b > 1 \cdot b$. Isto implicaria $ab > 1$, o que não é possível. Portanto $a = 1$. Substituindo $a = 1$ em $ab = 1$ temos $b = 1$. Isto termina a demonstração. □

1.4 Gênese dos números inteiros

Todo número natural tem um aspecto quantitativo, pois mede a quantidade de elementos de um conjunto. Mas esse número também traz uma idéia qualitativa, que é a positividade. Assim, ao dizer "5 livros", traduzimos uma afirmação positiva sobre essa específica quantidade de livros. Mas a experiência nos leva à necessidade de considerar números naturais com a qualidade de negativo. Podemos fazer isso com uma construção do tipo "faltam-me 5 livros", ou então "a temperatura está 8 graus abaixo de zero". A Álgebra também apresenta situações em que se faz necessário considerar os números naturais com a qualidade de negatividade. Por exemplo, ao procurar uma possível solução x da equação $7 + x = 3$, vemos que nenhum número natural pode exercer esse papel. Percebemos que o valor quantitativo de x deve ser 4, mas x deve agir na operação $7 + x$ de forma oposta à adição usual. É necessário que $+x$ opere retirando quatro unidades de 7, para resultar 3.

Essas observações nos trazem a ideia de considerar, para cada número natural $n \neq 0$, um outro número, quantitativamente igual a n mas de qualidade oposta. Chamaremos de *negativos* a esses números.

Convém criar uma notação para esse novo número, por exemplo, $\tilde{n}$. Vemos que $\tilde{n}$ deve ser caracterizado pelas relações

$$n + \tilde{n} = 0 = \tilde{n} + n \tag{1.8}$$

para todo número natural $n \in \mathbb{N}$.

Em particular, com a construção desses números, poderemos dizer que a solução da equação $7 + x = 3$ dada acima passaria a ser $x = \tilde{4}$, pois $7 + \tilde{4} = 3 + 4 + \tilde{4} = 3 + 0 = 3$.

O estudante bem sabe que a Matemática consagrou a notação $-n$ para o número negativo correspondente a n. Diremos que $-n$ é o *oposto* de n.

Existem razões práticas para a escolha da notação $-n$ para o oposto de n. Ela simplifica a manipulação de expressões algébricas, combinando a notação de subtração com a de oposto.

Por exemplo, a adição de 8 com -5, a ser representada por $8 + (-5)$, poderá ser simplificada para $8 - 5$, pois ambas as expressões têm o mesmo significado: estão sendo retiradas 5 unidades de 8.

Observamos que a consideração dos números negativos não constituem uma mera substituição da subtração. No contexto dos números naturais a subtração $a - b$ só tem sentido quando $a \geq b$. No novo contexto, com o acréscimo dos números negativos, poderemos processar a subtração $a - b$ quaisquer que sejam o números naturais a e b. Se $b > a$ o valor de $a - b$ será um desses números negativos, mais exatamente, o oposto de $b - a$.

Poderíamos continuar a construção dos números inteiros usando os métodos com os quais os professores os ensinam para os estudantes da escola básica. Mas neste curso, como já estamos em uma fase mais adiantada em nosso caminho para a álgebra abstrata, preferimos proceder com um grau maior de formalidade.

Dado o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, para todo número natural $n \neq 0$ consideramos o símbolo $-n$. Definimos

Definição 1.2. O *conjunto dos números inteiros* é

$$\mathbb{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \tag{1.9}$$

Em outros termos, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{\ldots - 3, -2, -1\}$. Conforme já mencionamos, para todo número natural $n \neq 0$ o número $-n$ é denominado *oposto* de n. O elementos do conjunto $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ serão denominados *inteiros positivos*, e os do conjunto $\mathbb{Z}_- = \{\ldots -3, -2, -1\}$, *inteiros negativos*.

Obtivemos assim um novo conjunto de números que inclui os números naturais. Esperamos que esse novo conjunto tenha maiores possibilidades do que o antigo conjunto $\mathbb{N}$.

Nossa primeira providência é estender para $\mathbb{Z}$ os conceitos de adição e multiplicação já definidos em $\mathbb{N}$. A subtração também é definida mais abaixo, e a divisão será estudada na Seção 1.5.

A adição e a multiplicação de inteiros podem ser definidas pela lista de condições apresentadas a seguir, levando-se em conta que já estão definidas para números naturais. O símbolo -0 pode eventualmente aparecer. Nesse caso entendemos que $-0 = 0$.

Definição 1.3. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $m \geq n$. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + k$. Definimos:

(i) $m + (-n) = (-n) + m = k$;

(ii) $(-m) + n = n + (-m) = -k$;

(iii) $(-m) + (-n) = -(m + n) = (-n) + (-m)$;

(iv) $(-m)n = n(-m) = -(mn)$;

(v) $(-m)(-n) = mn = (-n)(-m)$.

O estudante está convidado a verificar que as condições (i), (ii) e (iii) definem a soma $a + b$ para os casos em que a ou b não são números naturais, e também que as condições (iv) e (v) definem o produto ab para os casos em que a ou b não são números naturais. Pode ser útil fazer alguns exemplos. Para ver o que é $4 + (-7)$, escrevemos $m = 7$ e $n = 4$. Então $k = m - n = 7 - 4 = 3$. Usando a segunda identidade do item (ii) da Definição temos $4 + (-7) = n + (-m) = -k = -3$.

As propriedades comutativa da adição e da multiplicação em $\mathbb{Z}$ podem ser facilmente verificadas. Como exemplo vamos provar que $a + b = b + a$ para o caso em que a é positivo e b negativo. Seja $b = -t$, para t positivo. Se $a \geq t$ escrevemos $a = m$ e $t = n$. Usando a condição

(i) acima vem $a + b = m + (-n) = (-n) + m = b + a$. Se $t > a$ escrevemos $t = m$ e $a = n$. Usando a condição (ii) acima vem $a + b = n + (-m) = (-m) + n = b + a$.

O estudante está convidado a verificar a propriedade associativa da adição em $\mathbb{Z}$, assim como a propriedade associativa da multiplicação e a distributiva.

O símbolo $-n$ foi definido para o caso em que n é um número natural. Completamos nossa definição escrevendo $-(-n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que o símbolo $-n$ agora fica definido também para o caso em que n é inteiro negativo. Assim dizemos também que n é o oposto de $-n$.

Valem as relações

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a \tag{1.10}$$

para todo número inteiro $a \in \mathbb{Z}$.

A relação de ordem natural já considerada em $\mathbb{N}$ pode se estender para $\mathbb{Z}$ da seguinte forma:

Definição 1.4. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, escrevemos $a < b$ quando $b + (-a) \in \mathbb{Z}_+$.

Os símbolos $>$ $\leq$ $\geq$ são definidos de modo análogo ao que foi feito para números naturais.

A seguir definimos a operação de subtração em $\mathbb{Z}$:

Definição 1.5. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, a *diferença* $a - b$ é definida por $a - b = a + (-b)$.

Todo $n \in \mathbb{Z}$ e seu oposto $-n$ têm o mesmo valor quantitativo. A esse valor comum denominamos *valor absoluto*. Mais exatamente, temos a

Definição 1.6. Dado $m \in \mathbb{Z}$, seu *valor absoluto* é anotado por $|m|$ e definido por

$$|m| = \begin{cases} m & \text{se } m \geq 0 \\ -m & \text{se } m < 0. \end{cases}$$

Quanto às leis de compatibilidade e de cancelamento, temos: *i)* $a < b \iff a + c < b + c$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *ii)* $a = b \iff a + c = b + c$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *iii)* $a < b \iff ac < bc$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com $c > 0$. *iv)* $a < b \iff bc < ac$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com $c < 0$. *v)* $a = b \iff ac = bc$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com $c \neq 0$.

1.5 Resultados básicos da Teoria dos Números

Apresentamos um resumo dos principais conceitos e resultados da Teoria dos Números, alguns dos quais iremos utilizar neste livro. Esses resultados estão expostos com mais detalhes em [74], principalmente nos Capítulos 4, 5, 6, 7 e 9.

A construção dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ obedece a alguns princípios fundamentais, psicologicamente construídos, e que, em linguagem matemática, podem ser sintetizados nos chamados Axiomas de Peano, propostos por Giuseppe Peano em 1889:

P1 Todo número natural n tem um sucessor e esse sucessor é único.

P2 Todo número natural $n \neq 0$ tem um antecessor e esse antecessor é único. O número 0 não tem antecessor em $\mathbb{N}$.

P3 Seja $S \subset \mathbb{N}$ um subconjunto com as seguintes propriedades: (i) $0 \in S$; (ii) se $n \in S$ então o sucessor de n também está em S. Nestas condições $S = \mathbb{N}$.

O princípio **P3** estabelece a unicidade de $\mathbb{N}$. Desejamos destacá-lo da seguinte forma:

Princípio de Indução Seja $S \subset \mathbb{N}$ um subconjunto com as seguintes propriedades: (i) $0 \in S$; (ii) se $n \in S$ então $n+1 \in S$. Nestas condições $S = \mathbb{N}$.

Uma consequência é o

Princípio do Menor Número Natural Se A é um subconjunto não vazio do conjunto dos números naturais, então A tem um menor elemento.

Isto significa que existe $a \in A$ tal que $a \leq b$ para todo $b \in A$. O Princípio de Indução e o Princípio do Menor Número Natural são equivalentes.

O Princípio do Menor Número Natural pode ser estendido para subconjuntos de $\mathbb{Z}$. Dado um subconjunto não vazio A de $\mathbb{Z}$, dizemos que A é *limitado inferiormente* se existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq a$ para todo $a \in A$. Neste caso chamamos m de *limitante inferior*. Por outro lado, A se diz *limitado superiormente* se existe $M \in \mathbb{Z}$ tal que $a \leq M$ para todo $a \in A$. Neste caso chamamos M de *limitante superior*. Dizemos que A tem *máximo* se existir $M \in A$ tal que $a \leq M$ para todo $a \in A$. Dizemos que A tem *mínimo* se existir $m \in A$ tal que $m \leq a$ para todo $a \in A$.

Teorema 1.7 (Princípio do Menor Número Inteiro)**.** *Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ limitado inferiormente tem mínimo. Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ limitado superiormente tem máximo.*

Como consequência temos:

Primeiro Princípio da Indução Completa. Seja n_0 um número inteiro e seja $A(n)$ uma afirmação associada a todo número inteiro $n \geq n_0$. Suponhamos que sejam válidas as seguintes propriedades:
i) $A(n_0)$ é verdadeira;
ii) para todo número inteiro $n \geq n_0$, se $A(n)$ é verdadeira então $A(n+1)$ é verdadeira.

Nestas condições, $A(n)$ é verdadeira para todo número inteiro $n \geq n_0$.

Segundo Princípio da Indução Completa. Seja n_0 um número inteiro e seja $A(n)$ uma afirmação associada a todo número inteiro $n \geq n_0$. Suponhamos que sejam válidas as seguintes propriedades:
i) $A(n_0)$ é verdadeira;
ii) para todo número inteiro $n \geq n_0$, se $A(r)$ é verdadeira para todo número inteiro r tal que $n_0 \leq r \leq n$ então $A(n+1)$ é verdadeira.

Nestas condições, $A(n)$ é verdadeira para todo número inteiro $n \geq n_0$.

O principal instrumento para o estudo dos números inteiros é o

Teorema 1.8 (Algoritmo da Divisão)**.** *Dados números inteiros a e $b \neq 0$, existe e é único o par de números inteiros q e r tal que*

$$a = bq + r, \quad \text{com } 0 \leq r < |b|.$$

Dados números inteiros a e $b \neq 0$, os números inteiros q e r tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$ são denominados, respectivamente, *quociente* e *resto* da divisão euclidiana de a por b.

Um número inteiro a se diz *múltiplo* de um número inteiro b se existir um número inteiro q tal que $a = bq$. Nesse caso, e se $b \neq 0$, dizemos também que b *divide* a ou que b é *divisor* ou *fator* de a.

Se a e $b \neq 0$ são inteiros tais que $a = bq$ para algum número inteiro q, anotamos $b \mid a$. Por outro lado, se não existir tal inteiro q, anotamos $b \nmid a$. Observe que, de acordo com o Teorema do Algoritmo da Divisão, existem inteiros q e r tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$. Dessa forma, se $r = 0$ temos $b \mid a$, e se $r > 0$, temos $b \nmid a$.

Dados números inteiros a e b não simultaneamente nulos, o maior divisor comum de a e b chama-se *máximo divisor comum* de a e b, e é indicado por $\mathrm{mdc}(a, b)$. Se $a = 0$ e $b = 0$ convém definir $\mathrm{mdc}(0, 0) = 0$. Dados inteiros a e b, definimos $\mathrm{mmc}(a, b)$ como o menor dentre os múltiplos comuns positivos de a e b. Se $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, os números a e b dizem-se *relativamente primos*, ou *coprimos*.

Denominamos *primo* a todo número inteiro > 1 que não tem divisor positivo diferente de 1 e dele mesmo. Chamamos de *composto* a todo número inteiro > 1 que tem divisor positivo diferente de 1 e dele mesmo.

Teorema 1.9. *Todo número inteiro ≥ 2 é primo ou se escreve como produto de primos.*

Demonstração 1. Seja $n \geq 2$ um número natural e seja p_1 o menor dos divisores $\neq 1$ de n. Então p_1 é primo, por que, se não o fosse, p_1 teria um divisor q com $1 < q < p_1$, e q seria também um divisor $\neq 1$ de n, contrariando o fato de ser p_1 o menor deles. Ponhamos $n = p_1 n_1$, e notemos que $1 \leq n_1 < n$. Se $n_1 = 1$, terminamos. Se $n_1 > 1$, decompomos n_1 de forma análoga, e escrevemos $n_1 = p_2 n_2$, com p_2 primo e $1 \leq n_2 < n_1$. Temos $n = p_1 p_2 n_2$. Se $n_2 = 1$, terminamos. Se $n_2 > 1$, repetimos o procedimento decompondo-o de forma análoga. Prosseguindo, obtemos números primos $p_1, p_2, ..., p_i, ...$ e uma sequência decrescente de números naturais $n > n_1 > n_2 > \ldots > n_i > \ldots \geq 1$ tais que $n = p_1 p_2 \ldots p_i n_i$, prosseguindo com a decomposição sempre que $n_i > 1$. Como de 1 a n existe uma quantidade finita de números naturais, o procedimento acima tem um último passo no qual se obtém $n_k = 1$, e ficamos com um produto $n = p_1 p_2 p_3 \ldots p_k$, em que cada p_i é primo. □

Demonstração 2. Usamos o Segundo Princípio da Indução Completa. Observemos que a afirmação é verdadeira para $n = 2$, pois 2 é primo. Seja $n \geq 2$ um inteiro e suponhamos que a afirmação seja verdadeira para todo r tal que $2 \leq r \leq n$. Vamos provar que a afirmação é verdadeira para $n + 1$. Se $n + 1$ é primo, terminamos. Suponhamos que $n + 1$ não seja primo. Então existem inteiros positivos a e b tais que $n+1 = ab$, $2 \leq a < n+1$ e $2 \leq b < n+1$. Então a afirmação é verdadeira para a e b, que são primos ou produtos de primos. Portanto $n + 1$ é um produto de primos. Assim a afirmação é verdadeira para $n + 1$. Em virtude do Segundo Princípio da Indução Completa a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 2$. □

Usaremos a notação exponencial

$$a^0 = 1 \quad \text{e} \quad a^n = a \cdot a \ldots a \, (n \text{ vezes })$$

quaisquer que sejam o números inteiros a e $n \geq 1$.

Corolário 1.10. *Todo número inteiro $n \geq 2$ se escreve na forma $n = 2^t q$, em que $t \geq 0$ é um número inteiro e q é inteiro ímpar.*

Teorema 1.11. *Para todo número inteiro $t \geq 0$ vale $\mathrm{mdc}(ta, tb) = t\,\mathrm{mdc}(a, b)$, quaisquer que sejam os números inteiros a e b.*

Corolário 1.12. *Sejam a e b números inteiros não simultaneamente nulos. Seja $\mathrm{mdc}(a, b) = d$ e sejam a_1 e b_1 tais que $a = da_1$ e $b = db_1$. Então $\mathrm{mdc}(a_1, b_1) = 1$.*

Teorema 1.13. *Se* $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$ *e se* b *é divisor de* ac *então* b *é divisor de* c*, quaisquer que sejam os números inteiros* a*,* $b \neq 0$ *e* c*.*

Corolário 1.14. *Se* p*,* a_1*,* a_2*, ...,* a_s *são números inteiros com* p *primo e se* p *é divisor do produto* $a_1 a_2 \cdots a_s$ *então existe* i *tal que* p *é divisor de* a_i*.*

O Teorema Fundamental da Aritmética é:

Teorema 1.15. *Todo número inteiro* ≥ 2 *é primo ou pode ser decomposto como um produto de números primos, e essa decomposição é única a menos da ordem dos fatores.*

Seguem mais dois resultados importantes. Um inteiro $n \geq 0$ se diz *quadrado perfeito* quando existe um inteiro m tal que $n = m^2$.

Teorema 1.16. *Se* a *e* b *são números inteiros positivos relativamente primos e se* ab *é quadrado perfeito então* a *e* b *são quadrados perfeitos.*

Teorema 1.17. *Se* a *e* b *são inteiros, então existem inteiros* m *e* n *tais que* $\mathrm{mdc}(a, b) = an + bm$*. Ainda* a *e* b *são relativamente primos se e somente se existem inteiros* m *e* n *tais que* $an + bm = 1$*.*

1.6 Problemas

Problema 1.6.1. Na história do gigante do feijoeiro, Joãozinho o escutou contando seus ovos de ouro: fee, fie, foe, fum, fot, feefot, fiefot, foefot, fumfot, fotfot, feefotfot,...

Continue a contagem. Que sistema de numeração é este? Descreva as limitações desse sistema.

Problema 1.6.2. O Siríaco é uma linguagem derivada do Aramaico, e foi utilizada por pequenos grupos humanos na Europa Oriental nos primeiros séculos da Era Cristã. Em uma forma antiga do alfabeto siríaco era utilizado o símbolo $|$ para indicar a unidade, e o símbolo μ para o número dois. O sistema de numeração era aditivo de base dois:

$$|,\ \mu,\ \mu|,\ \mu\mu,\ \mu\mu|, ...$$

a) Continue a contagem do sistema siríaco até vinte; **b)** dê a regra do sucessor; **c)** seria viável para nossa civilização utilizar o sistema siríaco?

Problema 1.6.3. Demonstre que todo sistema de numeração aditivo de base β satisfaz às propriedades fundamentais de existência e unicidade.

Problema 1.6.4. Você sabe contar em outras bases que não a base dez? Encontre o sucessor de cada um dos números abaixo, na base indicada:

$$(78)_{nove} \quad (65)_{sete} \quad (16)_{sete} \quad (1011)_{dois} \quad (53AF)_{dezesseis}$$

Problema 1.6.5. Dado um número natural a e uma base $\beta \geq 2$, encontre uma fórmula que forneça, em função de a e β, a quantidade de dígitos da representação de a na base β.

Problema 1.6.6. Usando exclusivamente os conceitos e fórmulas da Seção 1.3, demonstre que, se a, b e c são números naturais tais que $a - b = c$, então $c < a$ e $a - c = b$. Temos ainda $a = b + c$.

Problema 1.6.7. Usando exclusivamente os conceitos e fórmulas da Seção 1.3, demonstre que, se a, b e c são números naturais tais que $b < a$, então

$$(a + c) - (b + c) = a - b.$$

Problema 1.6.8. Sejam $a = (a_m \dots a_1 a_0)_\beta$ e $b = (b_n \dots b_1 b_0)_\beta$ números naturais representados na base $\beta \geq 2$, com $a_m \neq 0$ e $b_n \neq 0$. Descreva condições suficientes sobre os dígitos de a e b para que $a > b$.

Problema 1.6.9. Demonstre a seguinte mágica com o número 1089. Tome um número com três dígitos, de modo que a diferença entre os dígitos dos extremos seja ≥ 2. Tome o reverso deste número e faça a diferença (do maior subtrai-se o menor). Tome o reverso da diferença. A soma do terceiro número com o quarto é 1089.

Problema 1.6.10. a) Uma jarra contém bolas vermelhas e bolas amarelas. Fora da jarra estão à disposição uma quantidade suficiente de bolas de ambas as cores. O seguinte procedimento é executado sempre que a quantidade de bolas na jarra for ≥ 2: são retiradas duas bolas da jarra; se as duas tiverem a mesma cor, é colocada uma bola vermelha na jarra; se as duas tiverem cores diferentes, é colocada uma bola amarela na jarra. Qual o resultado final dessa brincadeira? **b)** Invente um problema similar envolvendo bolas de três cores.

Problema 1.6.11. Se p é primo então p divide $\binom{p}{i}$ para todo número inteiro i tal que $0 < i < p$.

Problema 1.6.12. Prove, usando o Primeiro Princípio da Indução Completa, o Pequeno Teorema de Fermat: se p é primo e a é inteiro então $p|(a^p - a)$.

Problema 1.6.13. Prove que dentre dez inteiros consecutivos quaisquer pelo menos um deles é relativamente primo com cada um dos outros.

1.7 Temas para investigação

Tema 1.7.1. a) Divida por 8 os números 3^2, 5^2 e 7^2. Que regularidades você observa? Faça mais alguns testes para constatar se as regularidades permanecem com outros valores. **b)** Transforme as regularidades em conjecturas gerais. Use algum método considerado válido pela Matemática para verificar se as conjecturas são verdadeiras ou falsas. Investigue as recíprocas de suas conjecturas. **c)** Que regularidades e conjecturas similares podem ser obtidas da sequência 2^2, 4^2, 6^2,...?

Tema 1.7.2. Observe os seguintes eventos:

$$2^5 = 32; \quad 3^5 = 243; \quad 4^5 = 1024$$

Que regularidade pode ser observada? Alguma justificativa? Alguma generalização com outras potências ou outras bases?

Tema 1.7.3. a) Verifique que $n^2 < n!$ para todo $n \geq 4$ e que $n^3 < n!$ para todo $n \geq 6$. Verifique se existe um número inteiro positivo n_0 tal que $n^4 < n!$ para todo $n \geq n_0$. Investigue alguma possível generalização. **b)** Demonstre que $2^n < n!$ para todo $n \geq 4$ e que $3^n < n!$ para todo $n \geq 7$. Verifique se existe um número inteiro positivo n_0 tal que $4^n < n!$ para todo $n \geq n_0$. Investigue alguma possível generalização. **c)** Verifique que $n^2 < 2^n$ para todo $n \geq 5$. Investigue alguma possível generalização.

Tema 1.7.4. **a)** Um sapo sobe uma escada com degraus numerados a partir de 1. O sapo só dá saltos de 5 ou 7 degraus de cada vez. Por exemplo, partindo do chão, o sapo pode chegar ao 17º degrau dando dois saltos de 5 e um de 7. Poderá o sapo chegar ao 23º degrau? Quais são os degraus que o sapo pode atingir? Estude a seguinte generalização. Sejam a e b números inteiros positivos. Encontre a estrutura do conjunto $S = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}, x \geq 0, y \geq 0\}$. Alguma demonstração? **b)** Outro sapo dá saltos de 5 ou 7 ou 11 degraus de cada vez. Estude a estrutura do conjunto $S = \{5x + 7y + 11z \mid x, y, z \in \mathbb{Z}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

1.8 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 1.8.1. Em um livro de Matemática para professores pode-se ler a frase (adaptada): "As principais motivações para o desenvolvimento da Matemática são as necessidades práticas e operacionais". Faça uma análise desse discurso.

Atividade 1.8.2. Em (outro) livro de Matemática para professores pode-se ler o seguinte (adaptado): "O sistema de numeração que utilizamos demorou séculos para ser desenvolvido. Isso nos dá uma ideia de que esse sistema de numeração não é simples, e que sua compreensão pelas crianças deve ser cuidadosamente desenvolvida".

Faça uma análise do que ocorre no ensino do sistema decimal nas escolas, pesquisando na literatura especializada ou fazendo suas próprias investigações.

Atividade 1.8.3. Neste texto de Matemática Superior introduzimos as chamadas "regras de sinais" das operações em $\mathbb{Z}$ por definição (Definição 1.3 na página 12). As propriedades dessas operações, como a distributiva, seguem como consequência. Estude as formas com que esse assunto pode ser abordado na escola. Colecione justificativas práticas para as regras de sinais. Uma sugestão para começar é [53].

Atividade 1.8.4. Construa uma atividade investigativa para estudantes com base na tabela abaixo. Nessa tabela vemos primos da forma $4n + 1$ que podem ser escritos como soma de dois quadrados perfeitos, e primos da forma $4n + 3$ que não podem.

3	5	7	11	13	17	19	23	29	
	$1+4$			$4+9$	$1+16$				
não	sim	não	não	sim	sim				

Capítulo 2

Os números racionais

2.1 Introdução

Apresentamos neste Capítulo a gênese dos números racionais e as três principais formas que utilizamos para representá-los, as frações de inteiros, a expansão decimal e as frações contínuas. Estudamos, mediante o uso dessas representações, as propriedades básicas dos números racionais.

2.2 Gênese dos números racionais

A necessidade de dividir quantidades e números faz parte do quotidiano da vida do homem. Ele precisa medir objetos, calcular peso, quantificar o tempo. Frequentemente ocorre que essas medidas são partes de inteiros. A representação dessa ideia certamente surgiu primeiro na linguagem falada, e temos muitos vocábulos destinados a isso. Existe, na língua portuguesa, um conjunto de palavras que traduzem a parte resultante da divisão de uma grandeza por um número inteiro ≥ 2. São os numerais fracionários. Por exemplo, meio, um terço, um vigésimo, cinco onze avos, um centésimo. Cada um desses numerais tem seu significado preciso, como cinco onze avos, que indica que a unidade foi dividida em onze partes iguais, e foram tomadas cinco dessas partes.

Dessa forma o homem construiu, a partir dos números inteiros positivos, uma nova classe de números, que hoje denominamos *números racionais positivos*. Dados números inteiros positivos a e b, dividimos a unidade em b partes, e tomamos a dessas partes, ou, de forma equivalente, dividimos a em b partes iguais e tomamos uma parte. A mais difundida forma de representação dessa quantidade é $\dfrac{a}{b}$, ou a/b.

As grandes civilizações do passado, com o aumento da comercialização de bens e com a necessidade de organizar as atividades sociais, criaram métodos para lidar com os números racionais, inventando símbolos para representá-los e algoritmos para operá-los. O método que hoje chama mais nossa atenção é o dos antigos egípcios, devido à sua complexidade. Para simplificar as operações com frações reduziam todas elas a frações unitárias (frações da forma $1/b$). Como a aritmética egípcia utilizava muito a duplicação, eles tinham tábuas relacionando as frações da forma $2/b$ com somas de frações unitárias. Um antigo papiro, conhecido como papiro Rhind, traz uma lista decompondo todos os números $2/b$, com $5 \leq b \leq 101$ e b ímpar. Algumas dessas decomposições são:

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104} \qquad\qquad \frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$$

Para estudar detalhes sobre esse antigo método egípcio consulte, por exemplo, [17], [19] ou [27].

Os sumérios, que tinham o privilégio de utilizar um sistema posicional para representar números, encontraram mais facilidade para lidar com números racionais, pois os representavam na forma de expansões sexagesimais.

2.3 Números racionais e frações

Vimos que o homem construiu os números racionais positivos para atender necessidades práticas, e que a forma de representação mais difundida é

$$\frac{a}{b}$$

em que a e b são números inteiros positivos, chamada *fração de inteiros* ou *fração ordinária.*[1] Esse método de representação deriva da forma original construída com o aparecimento dos números racionais na tela mental humana, e é o formato próximo da compreensão mais concreta desses números. Uma variação dessa forma é a/b.

Em uma fração ordinária $\frac{a}{b}$ ou a/b, o número a chama-se *numerador* e b, *denominador*. Quando estiver claro que a/b é uma fração de inteiros, chamá-la-emos simplesmente de fração.

Nosso objetivo nessa seção é estudar mais detalhadamente o significado de número racional e obter uma metodologia para o uso desses números, incluindo a construção das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Faremos isso com o auxílio de sua representação por frações de inteiros.

A forma a/b indica que estamos considerando a grandeza obtida com a divisão da unidade em b partes iguais, e são tomadas a dessas partes. De maneira equivalente, o número a é dividido em b partes iguais, e é tomada uma dessas partes. Representamos essa equivalência com a identidade algébrica

$$a\,\frac{1}{b} = \frac{a}{b} \tag{2.1}$$

em que $a\,\frac{1}{b}$ significa que estamos tomando a vezes a fração $\frac{1}{b}$, isto é,

$$a\,\frac{1}{b} = \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b} \quad (a \text{ vezes})$$

Para compreender melhor essa ideia façamos uma imagem geométrica. Representamos a unidade com um segmento de reta com extremos indicados por 0 e 1, conforme a Figura 2.1, à esquerda. Na mesma Figura, à direita, representamos 1/3, repartindo o segmento em três partes iguais e tomando uma dessas partes (a que está destacada pela linha mais grossa, ou outra qualquer das partes).

Figura 2.1: Ilustração geométrica de fração

Ilustramos agora a relação (2.1) acima com a representação de 2/3, primeiro dividindo a unidade em três partes iguais e tomando duas dessas partes, e depois dividindo 2 unidades em três partes iguais e tomando uma das partes. Vê-se que o resultado é o mesmo.

Investigando dessa forma os números a/b, vemos que o mesmo valor pode ser representado de várias maneiras, por exemplo, $3/5 = 6/10$, conforme está ilustrado na Figura 2.3.

[1]“ordinária” aqui significa “comum”.

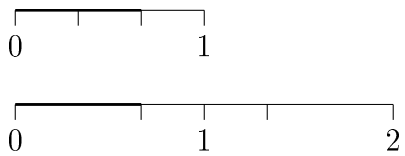


Figura 2.2: Ilustração geométrica da fração 2/3

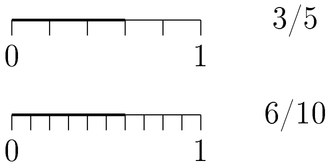


Figura 2.3: Ilustração de frações equivalentes

Duas frações a/b e c/d tais que $a/b = c/d$ são chamadas *frações equivalentes*. É importante obter uma caracterização algébrica que nos indique condições sobre a, b, c e d para que $a/b = c/d$. Investigando a questão percebemos logo que é fácil comparar duas frações com o mesmo denominador. Por exemplo, 3/7 é menor do que 4/7, pois estamos dividindo a unidade em sete partes iguais, e com 3/7 estamos tomando três dessas partes, e com 4/7 estamos tomando quatro dessas partes. Vemos que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b} \iff a = c$$

quaisquer que sejam os inteiros positivos a, b e c.

Isto nos dá a seguinte ideia: para comparar duas frações a/b e c/d devemos primeiro transformá-las em duas frações com mesmo denominador. Mas, como fazer isso?

Nesse ponto precisamos observar um caso particular de equivalência de frações. Dada uma fração a/b e dado um inteiro positivo n, a fração na/nb é equivalente à primeira. De fato, com a/b estamos dividindo a unidade em b partes iguais e tomando a dessas partes. Agora, se cada uma dessas b partes for subdividida em n partes iguais, significa que estamos dividindo a unidade em nb partes iguais. Por outro lado, tomar an dessas partes menores é o mesmo que tomar a das partes maiores. Isto está ilustrado na Figura 2.3, em que $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$. Em resumo, temos a seguinte relação algébrica:

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} \tag{2.2}$$

quaisquer que sejam os inteiros positivos a, b e n.

Sejam agora a/b e c/d. Para escrevê-las como frações com o mesmo denominador fazemos

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \qquad \text{e} \qquad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$$

Vemos portanto que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \iff ad = bc \tag{2.3}$$

quaisquer que sejam os inteiros positivos a, b, c e d.

Obtivemos assim uma caracterização algébrica para a equivalência de duas frações. Mas a Álgebra frequentemente nos dá mais do que pedimos. As considerações acima nos permitem perceber que o conjunto dos números racionais positivos é ordenado, e que podemos definir uma relação de ordem por

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc \tag{2.4}$$

quaisquer que sejam os inteiros positivos a, b, c e d. Os símbolos $>$ ou $\leq$ ou $\geq$ também podem ser utilizados em (2.4) com os significados costumeiros.

Algumas observações simples. Se tomamos um inteiro positivo e o repartimos em uma única parte, ficamos ainda com esse inteiro. Portanto

$$\frac{a}{1} = a$$

para todo inteiro positivo a. Dessa forma todo inteiro positivo pode ser visto como um número racional. Por outro lado, a fração a/a significa que dividimos a unidade em a partes iguais e tomamos essas a partes, isto é, tomamos a unidade. Portanto

$$\frac{a}{a} = 1$$

para todo inteiro positivo a.

Notamos também que não temos como repartir um inteiro positivo a em zero partes. Isto é, não faz sentido uma fração com zero no denominador. Mas podemos repartir zero em b partes, do que resulta parte nenhuma. Portanto

$$\frac{0}{b} = 0$$

para todo inteiro positivo b.

Nossa providência agora é definir as operações aritméticas no conjunto dos números racionais positivos. Começaremos com a adição.

Observamos primeiro que é fácil entender como somar frações com mesmo denominador: basta somar os numeradores e conservar o denominador. Por exemplo,

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$$

Dessa forma, seguindo a mesma ideia já usada antes, para somar duas frações a/b e c/d, primeiro as colocamos no mesmo denominador. Temos

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Se $a/b > c/d$ temos $ad > bc$ e podemos considerar a subtração

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$$

A adição e a subtração de racionais positivos nos dá a ideia de considerar números racionais com a qualidade de negativo. Dada uma fração de inteiros positivos a/b, queremos uma fração c/d tal que $a/b + c/d = 0$. Essa fração é naturalmente $(-a)/b$, pois

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a - a}{b} = \frac{0}{b} = 0$$

e aumentamos nossa coleção de números racionais considerando as frações a/b com a um inteiro qualquer e b um inteiro positivo. Com isso já temos todos os números racionais que queremos.

Mas formalmente podemos também considerar as expressões fracionárias a/b com b negativo, definindo

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

quaisquer que sejam os inteiros a e b, com $b \neq 0$. Isso não aumenta o conjunto dos números racionais, mas nos dá mais liberdade para operar com esses números.

O conjunto dos números racionais é usualmente representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$. Portanto

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

Para esse conjunto consideramos (2.3) como uma caracterização fundamental das frações de inteiros equivalentes. Assim

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \tag{2.5}$$

quaisquer que sejam os inteiros a, $b \neq 0$, c e $d \neq 0$. Por outro lado, para estender a definição de ordem (2.4) para todo o conjunto $\mathbb{Q}$ nos restringimos às frações de inteiros com denominador positivo. Assim

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc \tag{2.6}$$

quaisquer que sejam os inteiros a, $b > 0$, c e $d > 0$.

Também definimos as operações de adição e de subtração como já era esperado: quaisquer que sejam os números inteiros a, $b \neq 0$, c e $d \neq 0$ temos

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \tag{2.7}$$

Observemos que $\mathbb{Z}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$, pois $\dfrac{a}{1} = a$ para todo a em $\mathbb{Z}$. Assim é importante ver que essas definições são compatíveis com as respectivas operações em $\mathbb{Z}$:

$$\frac{a}{1} \pm \frac{b}{1} = \frac{a \cdot 1 \pm b \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{a \pm b}{1} = a \pm b$$

Como deve ser definida a multiplicação de números racionais? Uma condição é que ela deve preservar a multiplicação de inteiros. Portanto devemos ter

$$\frac{a}{1}\,\frac{b}{1} = ab$$

Por outro lado, essa definição deve preservar o significado de número racional. Por exemplo, entendemos que $\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}$ deve ser a metade de $1/3$. Para obter essa metade podemos dividir cada terça parte da unidade em duas partes iguais, o que equivale a dividir a unidade em seis partes iguais, e tomar uma parte. Portanto queremos

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Mais geralmente, se a/b e c/d são frações de inteiros positivos, entendemos que o produto $\frac{a}{b}\,\frac{c}{d}$ significa que primeiro dividimos a unidade em d partes iguais, e tomamos c dessas partes. Depois dividimos cada uma das d partes em b partes iguais, e tomamos a vezes as partes antes consideradas. Dessa forma a unidade é dividida em bd partes e são tomadas ac dessas partes. Portanto adotamos como definição de multiplicação

$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{2.8}$$

definição esta válida quaisquer que sejam os números racionais a/b e c/d.

Para definir a divisão de a/b por c/d queremos encontrar uma fração x/y tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\,\frac{x}{y}$. Mas

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\,\frac{x}{y} \iff \frac{a}{b} = \frac{cx}{dy} \iff bcx = ady \iff \frac{x}{y} = \frac{ad}{bc}$$

Dessa forma adotamos como definição de divisão

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \tag{2.9}$$

quaisquer que sejam os números inteiros a, $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$.

Usando a representação fracionária podemos demonstrar as propriedades usuais dessas operações. Por exemplo, a distributiva da multiplicação em relação à adição pode ser assim verificada:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b}\,\frac{cf + de}{df} = \frac{acf + ade}{bdf} = \frac{acf}{bdf} + \frac{ade}{bdf} = \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf}$$

quaisquer que sejam os números racionais a/b, c/d e e/f.

As demais propriedades podem ser demonstradas pelo estudante. Para registro e facilidade de uso resumimos as principais propriedades:

Quaisquer que seja os números racionais r, s e t, temos:

Associatividade da adição: $(r + s) + t = r + (s + t)$.

Comutatividade da adição: $r + s = s + r$.

Associatividade da multiplicação: $(rs)t = r(st)$.

Comutatividade da multiplicação: $rs = sr$.

Distributividade: $r(s + t) = rs + rt$.

Transitividade da ordem: se $r < s$ e $s < t$, então $r < t$.

Tricotomia: ocorre uma e apenas uma das alternativas seguintes: $r = s$, ou $r < s$ ou $r > s$.

Monotonicidade da adição: se $r < s$ então $r + t < s + t$.

Monotonicidade da multiplicação: se $r < s$ e se $t > 0$ então $rt < st$. Se $r < s$ e se $t < 0$ então $rt > st$.

A monotonicidade da adição também é denominada *compatibilidade entre a ordem e a adição*. Analogamente para a multiplicação.

Para uso posterior vamos demonstrar agora o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Todo número racional tem uma única representação na forma a/b, sendo a e b inteiros relativamente primos e $b > 0$.*

Demonstração. Dado um racional a/b, sejam a_1 e b_1 inteiros tais que $a = \text{mdc}(a,b)a_1$ e $b = \text{mdc}(a,b)b_1$. Sabemos que a_1 e b_1 são relativamente primos (e também $-a_1$ e $-b_1$). Ainda

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{mdc}(a,b)a_1}{\text{mdc}(a,b)b_1} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{-a_1}{-b_1}$$

sendo $b_1 > 0$ ou $-b_1 > 0$. Assim vemos que a/b tem uma representação na forma requerida.

Vejamos agora a unicidade. Suponhamos que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ são representações como frações inteiras do mesmo número racional, com $\text{mdc}(a,b) = 1$ e $\text{mdc}(c,d) = 1$ e $b > 0$ e $d > 0$. Temos $ad = bc$, do que segue que d divide bc. Como $\text{mdc}(c,d) = 1$ vem que d divide b (Teorema 1.13, página

16). Novamente de $ad = bc$ segue que b divide ad, e como $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$ vem que b divide d. Daí $b = \pm d$, e, como $b > 0$ e $d > 0$, concluímos que $b = d$. Introduzindo essa informação em $ad = bc$ segue $a = c$. Portanto a representação é única, e isto termina a demonstração do Teorema. □

A representação de um número racional na forma a/b, sendo a e b inteiros relativamente primos e $b > 0$, chama-se *representação irredutível* do número racional dado. Portanto o Teorema 2.1 diz que toda fração de inteiros é equivalente a uma única fração irredutível.

2.4 Expansão decimal de números racionais

Nesta seção estudamos outro tipo de representação dos números racionais, denominada *expansão decimal*, que consiste em representar os números racionais no sistema posicional decimal.

O surgimento da representação dos números racionais no sistema de numeração decimal contribuiu para o estreitamento da cooperação entre a Matemática e outras ciências, como a Astronomia. Na História da Matemática vemos que um grande incentivo para o aparecimento dessa representação foi a dificuldade que os astrônomos europeus tinham na aplicação da trigonometria. A representação decimal trouxe maior facilidade na implementação de cálculos aritméticos, permitindo o uso mais eficiente da trigonometria na medição das posições dos astros. Essa técnica de representação também induziu a criação dos logaritmos, uma das ideias mais fecundas da Matemática Elementar.

Notemos que, dada uma fração de inteiros a/b, com $b > 0$, podemos escrever $a = bz + s$, sendo z e s números inteiros e $0 \leq s < b$. Portanto

$$\frac{a}{b} = z + \frac{s}{b}$$

e toda fração ordinária é a soma de um inteiro e de uma fração ordinária ≥ 0 e < 1. Por exemplo,

$$\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7}$$

Com essa ideia podemos localizar facilmente o número a/b em um eixo numérico. Escrevendo $a/b = z + (s/b)$ com $0 \leq s < b$, para localizar a/b dividimos o intervalo $[z, z+1]$ em b subintervalos iguais e tomamos s desses subintervalos a partir de z, na direção positiva. A extremidade de maior valor do último subintervalo corresponde ao número a/b.

Vemos na Figura 2.4 como localizar o número $25/7 = 3 + 4/7$ em um eixo numérico.

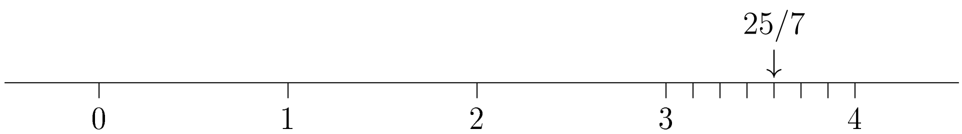


Figura 2.4: Localização de fração em um eixo numérico

Com essa ideia aceitamos que todo número racional corresponde a um ponto do eixo numérico. Mas essa forma de identificação não é nada prática, pois cada número racional tem um denominador, e não é viável a cada vez subdividir os intervalos unitários da reta em uma quantidade diferente de partes. Buscando a uniformização, escolhemos fazer subdivisões por 10, o que permite uma sincronia com a representação decimal que utilizamos para os inteiros.

Vejamos como exemplo o número $q = 35/98$. Como $0 < q < 1$, dividimos o intervalo $[0, 1]$ em 10 partes iguais. Em qual desses subintervalos está q? Vemos que $3/10 < q$, pois

$3 \cdot 98 = 294 < 350 = 35 \cdot 10$. Por outro lado, $q < 4/10$, pois $10 \cdot 35 = 350 < 392 = 4 \cdot 98$. Dessa forma localizamos q no intervalo $\left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right]$, conforme a Figura 2.5.

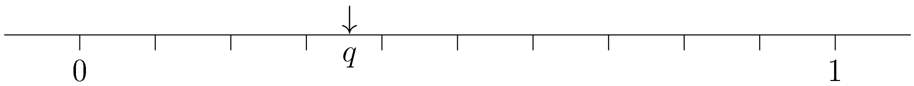


Figura 2.5: Determinação de dígito decimal

Em seguida subdividimos $\left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right]$ em dez subintervalos iguais, cada um de comprimento $\frac{1}{100}$. Os extremos desses subintervalos são os pontos de coordenadas $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{10} + \frac{1}{100}$, $\frac{3}{10} + \frac{2}{100}$, ..., $\frac{3}{10} + \frac{10}{100} = \frac{4}{10}$. Localizamos q em um desses subintervalos:

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{10^2} < q < \frac{3}{10} + \frac{6}{10^2}$$

A Figura 2.6 ilustra a situação.

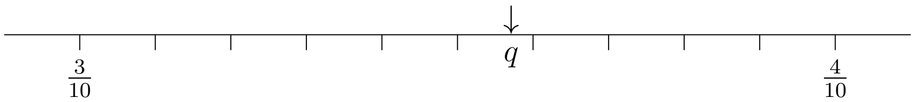


Figura 2.6: Determinação de dígito decimal - cont.

Continuamos, subdividindo $\left[\frac{3}{10} + \frac{5}{10^2}, \frac{3}{10} + \frac{6}{10^2}\right]$ em dez subintervalos iguais e verificamos em qual desses se encontra q, e assim por diante. Portanto

$$q = \frac{3}{10} + \frac{5}{10^2} + \dots$$

Estas considerações motivam o

Teorema 2.2. *Todo número racional $r \in [0, 1)$ se escreve na forma*

$$r = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \dots \tag{2.10}$$

sendo cada b_i um dos algarismos decimais 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *ou* 9 *para todo i.*

Veremos uma demonstração formal deste Teorema no Capítulo 8 (Teorema 8.15, página 148), em que estudaremos um significado para somas infinitas e verificaremos algebricamente a existência desta representação. O Teorema 8.15 também prova que toda expressão da forma (2.10) representa um número real do intervalo $[0, 1)$.

Mas o estudante poderá se convencer da validade do Teorema 2.2 observando que podemos aplicar o procedimento descrito acima para todo número racional $r \in [0, 1)$. De fato, dividimos o intervalo $[0, 1]$ em 10 partes iguais. As coordenadas dos extremos desses intervalos são 0, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, ..., $\frac{10}{10} = 1$. Seja b_1 o inteiro $0 \leq b_1 \leq 9$ tal que $\frac{b_1}{10} \leq r < \frac{b_1+1}{10}$. Em seguida dividimos o intervalo $\left[\frac{b_1}{10}, \frac{b_1+1}{10}\right]$ em dez subintervalos iguais, cada um de comprimento $\frac{1}{100}$. Os extremos desses subintervalos são os pontos de coordenadas $\frac{b_1}{10}$, $\frac{b_1}{10} + \frac{1}{100}$, $\frac{b_1}{10} + \frac{2}{100}$, ..., $\frac{b_1}{10} + \frac{10}{100} = \frac{b_1+1}{10}$. Localizamos q em um desses subintervalos, e encontramos b_2 tal que $0 \leq b_2 \leq 9$ e

$$\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} \leq q < \frac{b_1}{10} + \frac{b_2 + 1}{10^2}$$

Prosseguindo, determinamos a representação de r

$$r = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \ldots$$

A representação (2.10) chama-se *expansão decimal* de r. Essa representação é mais utilizada em notação compacta na forma

$$r = 0{,}b_1 b_2 b_3 ...$$

Vimos que todo número racional q se escreve na forma $q = z + r$, em que z é um número inteiro e $0 \leq r < 1$ é um número racional. Lembrando que todo inteiro z tem uma representação no sistema decimal da forma $z = \pm a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0$, em que cada a_i é um algarismo decimal, temos o

Teorema 2.3. *Todo número racional r se escreve na forma*

$$\begin{aligned} r &= \pm a_m \ldots a_1 a_0{,}b_1 b_2 b_3 \ldots \\ &= \pm \left(a_m 10^m + \cdots + a_1 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \ldots \right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

sendo cada a_i e cada b_i um algarismo decimal, para todo i.

Por exemplo,

$$274{,}3658 = 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 4 + \frac{3}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{8}{10^4}$$

Dada uma representação (2.11), os números a_i chamam-se *dígitos da parte inteira de r*, e os números b_i chamam-se *dígitos da parte não inteira de r*. Observe que na representação compacta $r = \pm a_m \ldots a_1 a_0{,}b_1 b_2 b_3 \ldots$ utilizamos uma vírgula para separar os dígitos da parte inteira dos da parte não inteira, de acordo com a legislação brasileira determinada em [20].

Precisamos compreender melhor o significado de uma soma do tipo

$$\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \ldots \tag{2.12}$$

Em particular, na apresentação que fizemos acima os três pontinhos ... significam "prosseguindo com os cálculos". Mas prosseguindo até quando? Será (2.12) uma soma infinita? Até agora só definimos somas de quantidades finitas de números.

Uma forma de iniciarmos esse estudo consiste em examinar vários exemplos de expansão decimal e tentar perceber alguma regularidade. Mas antes lembremos que a expansão decimal de uma fração a/b também pode ser calculada através do algoritmo da divisão continuada. Por exemplo, para encontrar a expansão decimal de $3/7$ fazemos

$$\begin{array}{llll|l} 3 & 0 & & & \quad 7 \\ \cline{5-5} & 2 & 0 & & 0,\ 4\ \ 2\ \ 8\ldots \\ & & 6 & 0 & \\ & & & 4 \ddots & \end{array}$$

e vemos que

$$\frac{3}{7} = \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \ldots \tag{2.13}$$

De fato, de acordo com a explicação anterior, para encontrar a expansão decimal de $3/7$ primeiro devemos determinar o algarismo b_1 tal que $\frac{b_1}{10} \leq \frac{3}{7} < \frac{b_1+1}{10}$. Isso é o mesmo que encontrar o maior algarismo b_1 tal que $\frac{b_1}{10} \leq \frac{3}{7}$, ou tal que $7b_1 \leq 30$. Mas então b_1 é o quociente da divisão de 30 por 7, e o algoritmo da divisão continuada nos diz que $b_1 = 4$. O estudante pode prosseguir com os cálculos e verificar que cada um dos dígitos seguintes do quociente da divisão continuada corresponde a um dígito da expansão decimal de $30/7$.

Vamos observar o que acontece quando prosseguimos com a divisão continuada:

$$
\begin{array}{lllllll|l}
3 & 0 & & & & & & \quad 7 \\ \cline{8-8}
 & 2 & 0 & & & & & 0,\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7\ 1\ldots \\
 & & 6 & 0 & & & & \\
 & & & 4 & 0 & & & \\
 & & & & 5 & 0 & & \\
 & & & & & 1 & 0 & \\
 & & & & & & 3 \ddots &
\end{array}
$$

A divisão continua, mas a partir desse ponto os dígitos se repetem. Portanto

$$\frac{3}{7} = 0{,}428571428571428571\ldots$$

Sabemos também que a divisão pára quando encontramos um resto zero, como no exemplo

$$
\begin{array}{lll|l}
3 & 0 & & 2\ 5 \\ \cline{4-4}
 & 5 & 0 & 0,\ 1\ 2 \\
 & & 0 &
\end{array}
$$

portanto

$$\frac{3}{25} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2}$$

e nesse caso a soma é finita.

Se uma expansão decimal apresenta um agrupamento de dígitos que se repete infinitas vezes sem interrupção dizemos que a expansão é *periódica*. O agrupamento que se repete chama-se *período*, e a quantidade de dígitos do período chama-se *comprimento* do período. A parte não inteira de $3/7$ tem como período o agrupamento 428571. Pode ocorrer um agrupamento de dígitos, logo no início da parte não inteira, que não faz parte do período, como em

$$\frac{13}{55} = 0{,}23636363\ldots$$

O agrupamento de dígitos que aparece logo após a vírgula até a primeira ocorrência do período chama-se *pré-período*, e a quantidade de dígitos do pré-período é seu comprimento. Vemos que a expansão de $13/55$ tem como pré-período o agrupamento 2 e como período o agrupamento 36.

Ao dividir um inteiro a por um inteiro $b \neq 0$, duas possibilidades podem ocorrer: ou a divisão termina, e temos uma representação decimal finita, ou a divisão continua infinitamente, e nesse caso a representação é periódica. De fato, ao dividir a por b, em cada etapa da divisão obtemos um resto ≥ 0 e $< b$. Se o resto for zero em algum momento, a divisão termina. Se o resto nunca for zero, então a divisão nunca termina, e em algum momento haverá repetição de um resto, pois temos $b - 1$ valores possíveis para os restos $\neq 0$. Assim, no máximo depois de $b - 1$ divisões haverá a repetição de um resto s já ocorrido anteriormente. A partir desse ponto os restos se repetem periodicamente, gerando, no quociente, um agrupamento de dígitos que se repetem periodicamente. O dígito do quociente que corresponde à primeira aparição do resto s é o primeiro dígito da primeira ocorrência do período. Os dígitos do quociente que correspondem aos restos obtidos antes da primeira aparição do resto s formam o pré-período.

Temos portanto o seguinte

Teorema 2.4. *A expansão decimal de qualquer número racional é finita ou periódica.*

Uma forma de resumir a representação de uma expansão decimal periódica consiste em colocar uma linha sobre o agrupamento do período, significando que ele deve ser repetido seguidamente. Por exemplo,

$$\frac{13}{55} = 0{,}2\overline{36}$$

que significa

$$\frac{13}{55} = 0{,}23636363\ldots$$

Mas precisamos prosseguir em nosso estudo da soma (2.12). Já descobrimos que se ela tiver infinitos termos então é periódica. Mas nesse caso o que significa? Vamos estudar mais de perto a estrutura de uma soma desse tipo através de um exemplo.

$$0{,}\overline{13} = 0{,}131313\ldots = \frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{3}{10^6} \cdots$$

Uma ideia para manipular essa soma é adicionar seus termos de dois em dois. Temos

$$\begin{aligned} 0{,}\overline{13} &= \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10^2}\right) + \left(\frac{1}{10^3} + \frac{3}{10^4}\right) + \left(\frac{1}{10^5} + \frac{3}{10^6}\right) + \cdots \\ &= \frac{13}{10^2} + \frac{13}{10^4} + \frac{13}{10^6} \cdots \end{aligned} \tag{2.14}$$

Percebemos que temos aqui a soma dos termos de uma progressão geométrica de primeiro termo $a = \frac{13}{10^2}$ e razão $r = \frac{1}{10^2}$. Assim

$$0{,}\overline{13} = \frac{13}{10^2} + \frac{13}{10^2}\frac{1}{10^2} + \frac{13}{10^2}\left(\frac{1}{10^2}\right)^2 + \cdots$$

$$= a + ar + ar^2 + \cdots$$

O que sabemos sobre somas de termos de uma progressão geométrica? Conhecemos uma fórmula para a soma dos seus n primeiros termos:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

No Capítulo 7 veremos que a soma infinita $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ é o limite da soma finita $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ para $n \to \infty$. Portanto

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \lim_{n\to\infty} a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Quando transformamos uma soma (2.12), que seja resultado de uma divisão continuada de inteiros, em uma soma infinita de termos de uma progressão geométrica, a razão sempre vai ser da forma $r = \frac{1}{10^m}$. Portanto teremos sempre $0 < r < 1$, e nesse caso as potências r^n tendem para zero quando $n \to \infty$. Assim

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} \tag{2.15}$$

Todos esses cálculos serão feitos com mais detalhes nos Capítulos 5 e 7, particularmente no Teorema 7.7.

Estamos agora em condições de terminar os cálculos iniciados em (2.14). Temos

$$\begin{aligned} 0{,}\overline{13} &= \frac{13}{10^2} + \frac{13}{10^4} + \frac{13}{10^6} \cdots = \frac{13}{10^2} + \frac{13}{10^2}\frac{1}{10^2} + \frac{13}{10^2}\left(\frac{1}{10^2}\right)^2 + \cdots \\ &= \frac{13}{10^2}\,\frac{1}{1-(1/10^2)} = \frac{13}{99} \end{aligned}$$

Com isso aprendemos duas coisas. A primeira é que compreendemos melhor que tipo de soma é (2.10), e a segunda é como podemos transformar uma representação periódica infinita em uma fração de inteiros.

Por outro lado, se uma expansão decimal é finita, um simples cálculo nos dá a fração de inteiros correspondente. Por exemplo,

$$0{,}235 = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{5}{10^3} = \frac{235}{10^3} = \frac{47}{200}$$

De tudo isso vemos que a recíproca do Teorema 2.4 é verdadeira: toda expansão decimal finita ou periódica representa um número racional.

Podemos resumir nossas conclusões no seguinte

Teorema 2.5. *A expansão decimal de qualquer número racional é finita ou periódica. Reciprocamente, toda expansão decimal finita ou periódica representa um número racional.*

O estudante já deve ter visto que existe uma forma mais prática de encontrar a representação de $0{,}\overline{13}$ como fração de inteiros. Seja $x = 0{,}\overline{13}$. Temos $100x = 13{,}\overline{13}$, portanto $100x - x = 13{,}\overline{13} - 0{,}\overline{13} = 13$, ou $99x = 13$. Assim $x = 13/99$.

Vejamos outro exemplo: encontrar a representação de $0{,}17\overline{138}$ como fração de inteiros. Seja $x = 0{,}17\overline{138}$. Temos $100x = 17{,}\overline{138}$ e $100000x = 17138{,}\overline{138}$, portanto $100000x - 100x = 17138,\overline{138} - 17{,}\overline{138} = 17138 - 17 = 17121$, ou $99900x = 17121$. Assim $x = 17121/99900 = 5707/33300$.

Nos últimos parágrafos temos feito manipulações com somas infinitas, o que exige uma atenção mais detalhada. Por exemplo, se $x = 0{,}\overline{13}$, ao escrever $100x = 13{,}\overline{13}$ estamos usando a propriedade distributiva para somas infinitas, e ao fazer $100x - x = 13$ estamos implementando a subtração entre duas somas infinitas. O estudante está convidado a verificar esses detalhes no Problema 2.6.25. Em (2.14) usamos um caso particular da propriedade associativa para somas infinitas. Confira os Problemas 2.6.25 e 7.6.21.

Encerramos esta seção observando que a expansão decimal dada pelo Teorema 2.3 pode não ser única. Por exemplo, o número racional 1 tem duas representações, 1 e $0{,}99999\ldots$ De fato,

$$\begin{aligned} 0{,}99999\ldots &= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots \\ &= \frac{9}{10}\,\frac{1}{1-(1/10)} = 1 \end{aligned}$$

Conforme veremos no Teorema 8.15, página 148, para valer a unicidade na expansão decimal é necessário impor sobre $0{,}b_1b_2b_3\ldots$ a condição de que existem infinitos dígitos $\neq 9$.

2.5 Números racionais e frações contínuas

Sobre a representação dos números racionais através de frações contínuas comentaremos, de início, que é a preferida dos matemáticos, desde o tempo dos antigos gregos.

Uma *fração contínua finita simples* é uma expressão da forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \tag{2.16}$$

sendo a_0, a_1, a_2,..., a_n números inteiros com a_1, a_2,..., a_n positivos. Os números a_1, a_2,..., a_n são chamados *quocientes parciais* da fração contínua.

Todo número racional se exprime na forma de uma fração contínua simples. Vejamos, por exemplo, 123/71. Inicialmente aplicamos o algoritmo euclidiano:

$$\begin{aligned} 123 &= 1 \times 71 + 52 \\ 71 &= 1 \times 52 + 19 \\ 52 &= 2 \times 19 + 14 \\ 19 &= 1 \times 14 + 5 \\ 14 &= 2 \times 5 + 4 \\ 5 &= 1 \times 4 + 1 \\ 4 &= 3 \times 1 + 1 \\ 1 &= 1 \times 1 + 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Usando a primeira relação de (2.17) vem

$$\frac{123}{71} = 1 + \frac{52}{71} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{71}{52}}$$

Usando a segunda relação de (2.17) vem

$$\frac{71}{52} = 1 + \frac{19}{52} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{52}{19}}$$

que, substituído na expressão acima, fica

$$\frac{123}{71} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{52}{19}}}$$

E assim por diante, usando todas as relações de (2.17) temos

$$\frac{123}{71} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}} \text{ ou } = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}}}}}}$$

Utilizamos (2.17) até que todos os numeradores sejam 1. Desse exemplo fica claro o

Teorema 2.6. *Todo número racional se exprime na forma de uma fração contínua finita simples. Reciprocamente, toda fração contínua finita simples é um número racional.*

A fração contínua (2.16) é usualmente indicada com a notação

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

A representação de um número racional como fração contínua não é única. O estudante pode verificar que

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n - 1, 1]$$

desde que $a_n > 1$.

O estudante pode também verificar que todo número racional pode ser representado como fração contínua em exatamente duas formas, uma com um número ímpar de termos, e outra com um número par.

2.6 Problemas

Problema 2.6.1. Um papiro egípcio, escrito provavelmente entre os anos de 500 e 800, traz a seguinte regra para decomposição de frações:

$$\frac{a}{bc} = \frac{1}{bs} + \frac{1}{cs}$$

em que $s = (b+c)/a$. Confira, e como caso particular obtenha que $1/b = 1/(b+1) + 1/b(b+1)$. Use isto para escrever $2/b$ como soma de duas frações unitárias diferentes quando b é ímpar.

Problema 2.6.2. Verifique que se b é múltiplo de três, $2/b$ pode ser escrito como a soma de duas frações unitárias, sendo uma delas a metade de $1/b$.

Problema 2.6.3. Escreva a fração abaixo na forma irredutível:

$$\frac{4182221}{-4674247}$$

Problema 2.6.4. a) Foi pedido a um estudante que determinasse as frações de inteiros equivalentes a 6/9. Ele respondeu que eram

$$\pm\frac{6}{9}, \quad \pm\frac{12}{18}, \quad \pm\frac{18}{27}, \ldots$$

Está correto?
b) Sejam a e $b \neq 0$ números inteiros. Investigue em que condições as representações de a/b como fração de inteiros são

$$\pm\frac{a}{b}, \quad \pm\frac{2a}{2b}, \quad \pm\frac{3a}{3b}, \ldots$$

c) Verifique que toda fração de inteiros é da forma $\dfrac{tm}{tn}$, em que t, m e n são inteiros tais que $n > 0$ e $\text{mdc}(m, n) = 1$.

Problema 2.6.5. É $\dfrac{\sqrt{12}}{3\sqrt{3}}$ uma fração ordinária? É um número racional?

Problema 2.6.6. Encontre (e justifique) condições necessárias e suficientes sobre os inteiros a e $b \neq 0$ para que o número racional a/b seja um inteiro.

Problema 2.6.7. Encontre (e justifique) condições necessárias e suficientes sobre os inteiros a e $b \neq 0$ para que o número racional a/b seja zero.

Problema 2.6.8. Prove que as frações irredutíveis a/b e c/d são iguais se e somente se $a = c$ e $b = d$, ou se $a = -c$ e $b = -d$.

Problema 2.6.9. Demonstre a *Lei da Tricotomia*: quaisquer que sejam os números racionais r e s, ocorre uma e apenas uma das alternativas seguintes: $r = s$, ou $r < s$ ou $r > s$.

Problema 2.6.10. Demonstre a *Lei da Integridade*: quaisquer que sejam os números racionais r e s, se $rs = 0$, então $r = 0$ ou $s = 0$.

Problema 2.6.11. Para que números $x \in \mathbb{Z}$ a fração $17/x$ é uma representação irredutível de algum número racional?

Problema 2.6.12. Sejam a e b inteiros não nulos e relativamente primos. Prove que existem inteiros c e d tais que a fração $1/ab$ pode ser escrita na forma $\frac{1}{ab} = \frac{c}{a} + \frac{d}{b}$

Problema 2.6.13. Demonstre que as definições das operações aritméticas em $\mathbb{Q}$ não dependem dos particulares representantes tomados em um conjunto de frações equivalentes. Mais exatamente, prove que

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{ad + bc}{bd} = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'}$$

o mesmo para as outras operações.

Problema 2.6.14. Localize o número $-25/7$ em um eixo numérico.

Problema 2.6.15. Localize o número $5/3$ em um eixo numérico. Sabemos que $5/3 = 10/6$. Será que, ao localizarmos $10/6$ na reta numérica, obtemos o mesmo ponto anterior?

Problema 2.6.16. Escreva $-4,87$ na forma $n + r$, sendo $n \in \mathbb{Z}$ e $r \in [0, 1)$ racional. Sua representação é única?

Problema 2.6.17. a) Encontre a expansão decimal de $1/6$. **b)** Encontre a expansão decimal de $8/17$.

Problema 2.6.18. Encontre a expansão decimal de $0{,}666\ldots + (0{,}666\ldots)^2$.

Problema 2.6.19. Represente os seguintes números racionais como fração irredutível de inteiros usando, em cada caso, os dois métodos explicados no texto: **a)** $0{,}0\overline{13}$; **b)** $0{,}3\overline{256}$

Problema 2.6.20. Um professor afirmou: "Dois terços dos estudantes universitários cometem erros de português". Outro professor disse: "Que desastre! Então, de cada 100 estudantes, quase 70 cometem erros de português". Está certo?

Problema 2.6.21. O período de uma expansão decimal periódica pode ter o algarismo zero? Quando isso ocorre? Pode ter algarismos repetidos? E quanto ao pré-período?

Problema 2.6.22. Existe um número racional cuja expansão decimal tem período de comprimento 19?

Problema 2.6.23. Mostre que a quantidade de dígitos do período da expansão decimal periódica da fração de inteiros a/b é $\leq b-1$.

Problema 2.6.24. Determine condições necessárias e suficientes sobre os inteiros a e $b \neq 0$ para que a expansão decimal de a/b seja finita.

Problema 2.6.25. Na Seção 2.4 utilizamos alguns resultados que podem ser demonstrados pelo estudante. **a)** Todo número racional q se escreve de maneira única na forma $q = n + r$, em que n é um inteiro e r é um racional tal que $0 \leq r < 1$. **b)** Usando (2.15) demonstre a seguinte versão da propriedade distributiva para somas infinitas: $a(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots) = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ para todo a e todo r tal que $0 \leq r < 1$. **c)** Usando (2.15) prove diretamente que $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = (a + ar) + (ar^2 + ar^3) + \cdots$ para todo a e todo r tal que $0 \leq r < 1$. **d)** Usando (2.15) prove que se $x = 0{,}\overline{13}$ então $100x = 13{,}\overline{13}$. **e)** Prove que $13{,}\overline{13} - 0,\overline{13} = 13$.

Problema 2.6.26. Verifique que $7/11 = [0; 1{,}1{,}1{,}3] = [0; 1{,}1{,}1{,}2{,}1]$.

Problema 2.6.27. Encontre representações de $22/7$ e de $179/19$ como frações contínuas.

Problema 2.6.28. Considere a sequência de Fibonacci $(a_n)_{n\geq 1}$, definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ se $n \geq 3$. Encontre a representação de a_{n+1}/a_n na forma da fração contínua que termina com 1.

Problema 2.6.29. Prove que, dados números racionais $r < s$, existem infinitos números racionais t tais que $r < t < s$.

Problema 2.6.30. Assim como fizemos para subconjuntos de $\mathbb{Z}$ na página 14, podemos definir subconjunto de $\mathbb{Q}$ limitado inferiormente, limitado superiormente, assim como os conceitos de limitante inferior, limitante superior, máximo e mínimo. Prove, através de exemplo, que não existe uma versão para $\mathbb{Q}$ do Princípio do Menor Número Inteiro, demonstrado no Teorema 1.7, na página 14.

Problema 2.6.31. Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável, isto é, existe uma sequência r_1, r_2, r_3, ... de números racionais tal que todo número racional faz parte uma única vez dessa sequência.

2.7 Temas para investigação

Tema 2.7.1. Já que porcentagens são frações, por que em muitas situações preferimos usá-las em vez de frações? Investigue ainda o seguinte: o que é melhor, representar os racionais por frações, no sistema decimal ou por frações contínuas? Por que?

Tema 2.7.2. Adaptamos de [27], página 82, o seguinte algoritmo proposto por James J. Sylvester para decompor uma fração de inteiros $0 < n/m < 1$ como soma de frações unitárias. Para $i = 2$, 3, ... faça: (1) Ache a menor fração unitária menor do que n/m, tomando como denominador o sucessor do quociente de m por n; (i) reaplique essa regra à diferença das duas últimas frações enquanto essa diferença não for uma fração unitária.

Aplique o algoritmo à fração 2/97. Mostre que o algoritmo funciona para qualquer fração de inteiros $0 < n/m < 1$ e sempre termina.

Tema 2.7.3. Observe e explique comportamentos recorrentes nas expansões decimais de 1/9, 2/9, 3/9, ... Investigue outras situações, como 1/7, 2/7, 3/7, ...

Tema 2.7.4. Neste Capítulo definimos as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão no conjunto $\mathcal{Q}$ utilizando a representação em forma de frações de inteiros. Como ficam essas operações quando os números racionais estão representados pelas suas expansões decimais?

Tema 2.7.5. Considere a expansão decimal $0{,}131133111333\ldots$, ou seja, os dígitos decimais que comparecem após a vírgula são definidos da seguinte forma: o primeiro grupo de dígitos tem dois dígitos, a saber, 1 e 3; o segundo grupo de dígitos tem quatro dígitos, a saber, dois 1 e dois 3, e assim sucessivamente. **a)** Verifique que essa expansão não representa um número racional. **b)** Construa outros exemplos com a mesma propriedade. **c)** Investigue se é possível que a expansão $0{,}131133111333\ldots$ corresponda a um ponto da reta em harmonia com os racionais. Isto é, se podemos corresponder a $0{,}131133111333\ldots$ um ponto C tal que se r e s são racionais tais que $r < 0{,}131133111333\ldots < s$ e se A e B são os pontos da reta correspondentes a r e s, respectivamente, então C está entre A e B.

Tema 2.7.6. Investigue se existe uma versão do Teorema 1.8, página 14, com a e b racionais, com quociente q e resto r também racionais.

Tema 2.7.7. **a)** Se p é primo com $p \neq 2$ e $p \neq 5$, qual é a relação entre p e o comprimento do seu período e do seu pré-período? **b)** Se a e $b \neq 0$ são inteiros e se a/b é irredutível e tem expansão decimal infinita, qual é a relação entre a e b e o comprimento do seu período e do seu pré-período? **c)** Investigue se vale o seguinte resultado: para todo inteiro positivo k, existe um número racional cujo período tem comprimento $\geq k$.

2.8 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 2.8.1. Neste texto de Matemática Superior introduzimos a divisão de frações de inteiros como uma operação inversa da multiplicação. Assim para dividir a/b por c/d encontramos a fração x/y tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\,\frac{x}{y}$. Isso nos levou à definição 2.9 da página 24.

No ensino de frações na escola fundamental pode ocorrer a necessidade de uma justificativa menos abstrata. Colecione essas justificativas. Uma sugestão para consulta é [39] e [52]. Estude também as possibilidades pedagógicas do seguinte truque:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}} = \frac{\frac{ad}{bc}}{1} = \frac{ad}{bc}$$

Atividade 2.8.2. Em [18], página 105, vemos uma interpretação para a divisão de frações. Essa interpretação é uma extensão da ideia da divisão de inteiros. Assim, quando fazemos $8 \div 2$, queremos saber quantas vezes 2 "cabe" em 8. De modo análogo para obter $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ calculamos quantas vezes $\frac{1}{3}$ cabe em $\frac{1}{2}$.

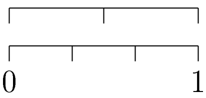


Figura 2.7: Ilustração de divisão de frações

Na Figura 2.7 vemos que $\frac{1}{3}$ cabe uma vez e meia em $\frac{1}{2}$. Portanto

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Explore essa ideia.

Atividade 2.8.3. (INEP- ENC 98, adaptado) Ao perceber que um estudante efetuou uma adição de duas frações adicionando numerador a numerador e denominador a denominador, dois professores agiram da seguinte forma: O professor A corrigiu a tarefa cuidadosamente no quadro, usando redução ao mesmo denominador. O professor B, inicialmente, propôs a esse aluno que efetuasse $1/2 + 1/2$ e examinasse o resultado. Analise os procedimentos dos professores A e B sob o ponto de vista da Pedagogia.

Atividade 2.8.4. Explique por que é importante que o estudante descubra propriedades, mesmo quando não são muito gerais. Como o professor deve proceder quando isso ocorre? Como o professor pode incentivar essas descobertas? Analise a seguinte descoberta de um estudante (confira [33]): "Para dividir um número por 5 somo o número com ele mesmo e coloco a vírgula antes do último algarismo".

Atividade 2.8.5. Colecione desafios e pegadinhas com frações para usar nas suas aulas. Por exemplo, "uma pessoa fez uma pesquisa e concluiu que $2/3 + 1/2$ da população não sabe somar frações. O que você acha?" Tem essa que me foi contada pelo colega João Sampaio: "Um padre sai da Igreja e caminha pela rua. Avista o quitandeiro carregando dois cestos de verduras. O padre volta à Igreja para pegar algo que esqueceu. O que ele esqueceu?"

Atividade 2.8.6. Bole um problema com frações usando a seguinte ideia:

Para qualquer número positivo x, dizemos que os números $x+1$ e $\dfrac{x}{x+1}$ são *filhos* de x.

Atividade 2.8.7. Um professor explicou a seus estudantes como fazer divisões com números não inteiros. Usou o método tradicional, e deu um exemplo.

$$\begin{array}{ll|l} 7 & 8 & 5,2 \\ \cline{3-3} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|cc} 7 & 8 & 0 & 5 & 2 \\ \cline{4-5} 2 & 6 & 0 & 1 & 5 \\ & & 0 & & \end{array}$$

Resposta: $78 \div 5{,}2 = 15$.

Na aula seguinte da mesma classe o professor propôs aos estudantes a conta $84 \div 5{,}25$ esperando que eles iriam aplicar o método que havia explicado. Um estudante, que havia faltado na aula anterior, fez diferente:

$$\begin{array}{r} 5{,}25 \\ \times \quad 4 \\ \hline 21{,}00 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 84 & \underline{|21} \\ 0 & \ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ \times\ 4 \\ \hline 16 \end{array}$$

Resposta: $84 \div 5{,}25 = 16$.

a) Explique o método tradicional usado pelo professor.

b) Explique o método usado pelo estudante que faltou à primeira aula.

c) Qual deve ser o comportamento do professor perante uma solução diferente da que ele propôs? É errado ensinar o método tradicional? O professor deveria se prevenir e ensinar logo os dois métodos?

d) Tecnicamente falando, qual dos dois métodos é melhor? E pedagogicamente?

Atividade 2.8.8. O que você faz se um estudante se põe a somar $0{,}23333\ldots$ com $0{,}51212\ldots$ usando o algoritmo usual?

$$\begin{array}{r} 0{,}\ 2\ 3\ 3\ 3\ 3 \\ +\ 0{,}\ 5\ 1\ 2\ 1\ 2 \\ \hline \end{array}$$

Capítulo 3

A constante de Pitágoras

3.1 Introdução

Apresentamos neste Capítulo o número $\sqrt{2}$, denominado *constante de Pitágoras*. Ele vai nos abrir as portas para o estudo dos números não racionais. Pretendemos seguir os passos dos antigos sumérios, que primeiro o investigaram, dos matemáticos da Escola Pitagórica, da Academia de Platão, da Escola Alexandrina, e de tantos outros, que se dedicaram ao estudo dessa importante constante matemática.

3.2 O aparecimento de $\sqrt{2}$

O único número positivo cujo quadrado é 2, representado por $\sqrt{2}$, é estudado desde tempos remotos. Os Sumérios, povo que habitou a Mesopotâmia antes dos babilônios, conheciam esse número e tinham um método para calcular seu valor numérico. Um exemplo notável pode ser visto em um tablete sumeriano, desenterrado em Susa em 1936, e ao qual foi atribuída a data de 1600 a. C. Nele vemos representado um quadrado, suas duas diagonais e três números escritos no sistema sexagesimal.

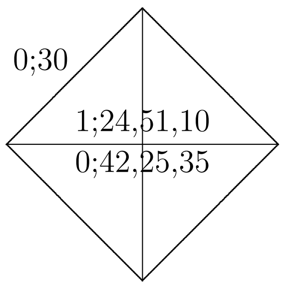


Figura 3.1: Representação estilizada de tablete sumeriano

Na Figura 3.1 os números estão escritos segundo a notação para o sistema sexagesimal proposta por Otto Neugebauer em [67], em que as casas sexagesimais são separadas por vírgula e a parte inteira é separada da parte não inteira por ponto e vírgula. Indicaremos esses números por:

$$a = (0;30)_{60} \quad b = (1;24{,}51{,}10)_{60} \quad c = (0;42{,}25{,}35)_{60}$$

Qual é a relação entre esses números? Calculando na base sexagesimal temos

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 1; & 24, & 51, & 10 \\
 & & \times & 0; & 30 \\
\hline
 & & & 5 & 0 \\
 & & 25 & 30 & \\
 & 12 & & & \\
 & 30 & & & \\
\hline
0; & 42, & 25, & 35, & 0
\end{array}$$

portanto $c = ab$. Por outro lado, interpretando c como uma aproximação para o valor da diagonal do quadrado de lado a, conforme está sugerido na Figura 3.1, temos, em virtude do Teorema de Pitágoras, $c \approx a\sqrt{2}$. Assim, relacionando $c = ab$ e $c \approx a\sqrt{2}$, vemos que b deve ser uma aproximação de $\sqrt{2}$. Podemos confirmar isso fazendo o cálculo

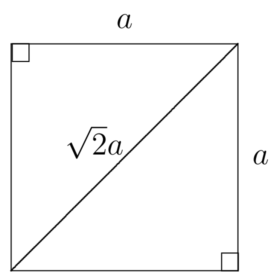
$$[(1;24,51,10)_{60}]^2 = (1;59,59,59,38,1,40)_{60}$$

e temos que b^2 é uma aproximação de 2. Resulta a aproximação

$$\sqrt{2} \approx (1;24,51,10)_{60} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1{,}41421296296$$

Comparando com nosso valor $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562 \pm 10^{-9}$ vemos que a aproximação calculada pelos sumérios tem erro $< 10^{-6}$. Os matemáticos europeus obtiveram essa precisão apenas no século XIII. Como os sumérios conseguiram isso? Os historiadores têm uma explicação, a qual apresentaremos na Seção 3.4.

Os matemáticos da Antiga Grécia também conheciam $\sqrt{2}$, mas sob um ponto de vista mais geométrico. Por exemplo, em virtude do Teorema de Pitágoras, $\sqrt{2}$ é o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1. Do Teorema de Pitágoras temos ainda que, em qualquer quadrado, a razão entre a diagonal e o lado é $\sqrt{2}$. Assim sendo, $\sqrt{2}$ pode ser visto como uma constante, que a tradição consagrou com o nome de *constante de Pitágoras*.



Em qualquer quadrado

$$\frac{\text{diagonal}}{\text{lado}} = \text{constante} = \sqrt{2}$$

Figura 3.2: O quadrado e $\sqrt{2}$

Mas não precisamos do Teorema de Pitágoras para evidenciar geometricamente a existência de $\sqrt{2}$. Basta construir um quadrado com área 2. O lado desse quadrado, evidentemente, mede $\sqrt{2}$.

Em *Mênon*, um dos diálogos menores de Platão, o autor coloca Sócrates dialogando com o estudante Mênon. A uma certa altura Sócrates explica a um menino inexperiente em Geometria como obter um quadrado de área 2. Em [30], página 7, o autor esclarece que o diálogo *Mênon*, de Platão, é a mais antiga referência à matemática grega que sobreviveu até nossos dias, e data provavelmente de 385 a. C.

Vamos explicar o raciocínio de Sócrates a nosso modo. Consideremos um quadrado $ABCD$ de área s, conforme a Figura 3.3 à esquerda.

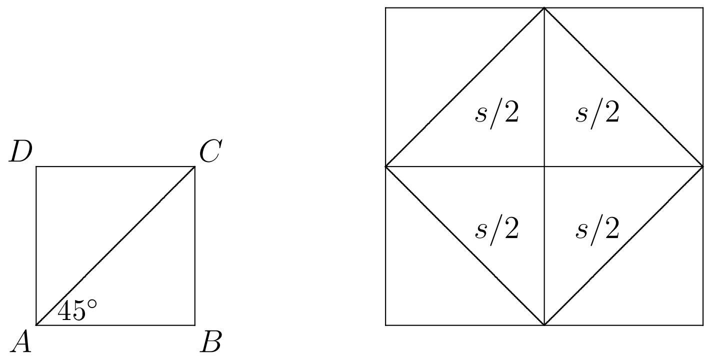


Figura 3.3: Construção do quadrado de área $2a$

Consideremos agora o quadrado do lado direito da Figura 3.3. Ele consiste de quatro cópias do quadrado dado inicialmente, formando um quadrado maior. Consideremos as diagonais ali desenhadas. Essas diagonais têm o mesmo comprimento e formam entre si, nos pontos em que se encontram, ângulos de 90°. Portanto essas diagonais formam um quadrado. Esse quadrado tem área igual a $s/2 + s/2 + s/2 + s/2 = 2s$. Consequentemente o quadrado cujo lado é igual à diagonal de um quadrado dado tem área igual ao dobro da área deste.

Consideremos agora um quadrado de lado 1. Sua área é 1. Construindo o quadrado cujo lado é sua diagonal, obtemos um quadrado de área 2. O lado desse quadrado é $\sqrt{2}$. Fizemos isso sem usar o Teorema de Pitágoras.

Observamos que obtivemos $\sqrt{2}$ através de construções geométricas que podem ser realizadas com régua e compasso, obedecendo às imposições de construtibilidade consideradas no antigo modelo grego.

Com a régua não metrizada e o compasso podemos traçar a perpendicular a uma reta dada por um ponto dado, ponto este na reta ou fora dela. Assim sendo, podemos construir um quadrado de lado 1, traçar sua diagonal, e obter um segmento de comprimento $\sqrt{2}$ usando o Teorema de Pitágoras ou o método descrito por Platão. Com isso vemos que $\sqrt{2}$ é um número construtível.

Outra forma de construir $\sqrt{2}$ com régua não metrizada e compasso é a seguinte. Tomando um segmento unitário AB, construímos o segmento AC de comprimento 3, como na Figura 3.4, à esquerda.

Em seguida marcamos o ponto médio M do segmento AC, e traçamos a semicircunferência com centro em M e diâmetro AC. Consideremos o segmento BD, perpendicular a AC, com D na circunferência. BD é a altura do triângulo retângulo ADC, que sabemos medir $|BD| = \sqrt{|AB| \times |BC|} = \sqrt{1 \times 2} = \sqrt{2}$. Aqui usamos a mesma notação para segmento e sua medida.

O estudante pode observar que todos os passos descritos na construção acima podem ser executados com régua não metrizada e compasso. Assim sendo, obtivemos outra maneira de construir $\sqrt{2}$.

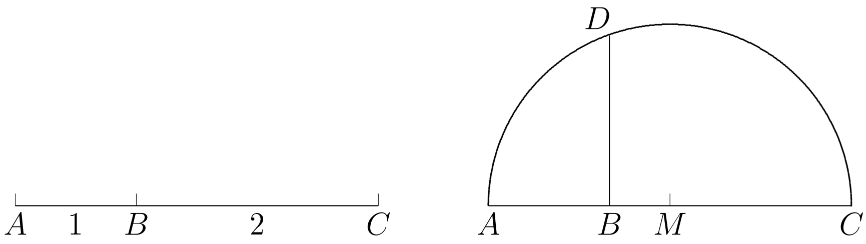


Figura 3.4: Construção de $\sqrt{2}$ com régua e compasso

3.3 A não racionalidade de $\sqrt{2}$

A propriedade de que $\sqrt{2}$ não é racional é muito citada, não apenas na literatura matemática, mas também em tratados de Filosofia. Segundo [30], página 295, Aristóteles a cita 30 vezes em sua vasta obra filosófica.

Apresentamos várias demonstrações da não racionalidade de $\sqrt{2}$, iniciando com a preferida de Aristóteles.

3.3.1 Par ou ímpar

A demonstração mais conhecida da não racionalidade de $\sqrt{2}$ utiliza o fato de que todo número inteiro é ou par ou ímpar: *todo número inteiro* a *se escreve em uma e somente uma das formas* $a = 2q$ *ou* $a = 2q + 1$*, para algum* q *inteiro.* No primeiro caso a chama-se par, e no segundo, ímpar.

Vamos usar o seguinte resultado:

Proposição 3.1. *O quadrado de todo número ímpar é ímpar.*

Demonstração. De fato, se $a = 2q + 1$ é ímpar, então $a^2 = (2q + 1)^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 2(2q^2 + 2q) + 1 = 2t + 1$, sendo t inteiro. Portanto a^2 é ímpar. □

Uma consequência disso é que

Proposição 3.2. *Se* a^2 *é par, então* a *é par.*

Demonstração. De fato, se a fosse ímpar, seu quadrado seria ímpar. □

Passamos a demonstrar o

Teorema 3.3. $\sqrt{2}$ *não é racional.*

Demonstração. Procedemos por redução ao absurdo. Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional. Então existem inteiros a e $b \neq 0$ tais que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$. Simplificando a fração $\dfrac{a}{b}$ por 2 quantas vezes for necessário, podemos supor que a e b não são ambos pares.

Elevando $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ ao quadrado temos $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$, ou $2b^2 = a^2$. Vemos que a^2 é par, o que implica que a é par. Escrevemos $a = 2q$. Introduzindo esta informação em $2b^2 = a^2$ temos $2b^2 = (2q)^2$, ou $2b^2 = 4q^2$. Simplificando temos $b^2 = 2q^2$. Portanto b também é par, e chegamos a uma contradição. Concluímos que $\sqrt{2}$ não é racional. □

3.3.2 Um método de descida

O estudante certamente apreciará a seguinte demonstração da não racionalidade de $\sqrt{2}$, que não faz uso de nenhum resultado da Teoria dos Números.

Procedemos por redução ao absurdo. Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional. Então existe um inteiro positivo a_0 tal que $a_0\sqrt{2}$ é inteiro. Consideremos o inteiro $a_1 = a_0(\sqrt{2} - 1)$. Como $1 < \sqrt{2}$, a_1 é um inteiro positivo. Temos ainda $a_1\sqrt{2} = a_0(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} = 2a_0 - a_0\sqrt{2}$, que também é um número inteiro. Observe que

$$\sqrt{2} < 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} - 1 < 1 \quad \Rightarrow \quad a_0(\sqrt{2} - 1) < a_0 \quad \Rightarrow \quad a_1 < a_0.$$

Repetindo o argumento, encontramos um terceiro número inteiro positivo a_2 tal que $a_2\sqrt{2}$ é inteiro e $a_2 < a_1 < a_0$. Prosseguindo, depois de n passos encontramos n inteiros positivos a_i, com $1 \leq i \leq n$, tais que $1 \leq a_n < \cdots < a_1 < a_0$. Podemos tomar $n = a_0$. Chegamos a uma contradição, pois o estudante há que concordar que não podem haver a_0 números inteiros ≥ 1 e $< a_0$. Portanto, $\sqrt{2}$ é um número não racional.

Um argumento do tipo utilizado acima chama-se *método de descida*.

Poderíamos ter começado a redação dessa demonstração de outra forma, supondo que a_0 é o menor inteiro positivo tal que $a_0\sqrt{2}$ é inteiro. Ao encontrar $a_1 < a_0$ tal que $a_1\sqrt{2}$ é inteiro, chegamos a uma contradição.

3.3.3 Um método geométrico

Vejamos um método geométrico para a demonstração da não racionalidade de $\sqrt{2}$. Procedemos por redução ao absurdo. Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional. Seja q o menor inteiro positivo tal que $q\sqrt{2}$ é inteiro. Consideremos o triângulo retângulo isósceles ABC com catetos de medida q. Segundo o Teorema de Pitágoras, a hipotenusa desse triângulo tem medida $q\sqrt{2}$.

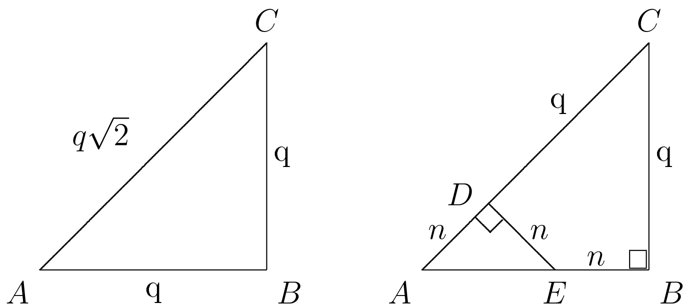


Figura 3.5: Demonstração geométrica de que $\sqrt{2}$ não é racional

Vamos construir um triângulo retângulo isósceles menor. Marquemos no segmento AC um ponto D tal que $CD = q$. Observemos que a medida de AD é o inteiro positivo n tal que $n = q\sqrt{2} - q = q(\sqrt{2} - 1)$. Temos $n < q$ e $n < (\sqrt{2}/2)q = AC/2$.

A reta perpendicular a AC passando pelo ponto D intercepta AB no ponto E. Como ABC é isósceles com base AC, o ângulo $\angle DAE$ mede 45^o. Como ADE é retângulo com hipotenusa AE, o ângulo $\angle AED$ também mede 45^o. Portanto ADE é um triângulo retângulo isósceles com base AE e catetos medindo n. Observemos ainda que CED e CEB são congruentes, portanto $DE \cong EB$. Assim $|AE| = |AB| - |EB|$ é inteiro. Mas $|AE| = n\sqrt{2}$ com $n < q$, o que contraria a hipótese de que q é o menor inteiro positivo com a propriedade de que $q\sqrt{2}$ é inteiro.

Concluímos que $\sqrt{2}$ não é racional.

3.3.4 Outro método de descida

Esta é uma variante da demonstração 3.3.2. Procedemos novamente por redução ao absurdo. Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional. Seja $\sqrt{2} = a/b$. Temos $a = b\sqrt{2}$. Como $1 < \sqrt{2} < 2$, isso implica $b < a$ e $a < 2b$. Em particular, $0 < a - b < b$.

Façamos agora os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} 2b - a &= \sqrt{2}(\sqrt{2}b) - a \\ &= \sqrt{2}a - a \\ &= \sqrt{2}a - \sqrt{2}b \\ &= \sqrt{2}(a - b) \end{aligned}$$

Escrevendo $a_1 = 2b - a$ e $b_1 = a - b$, provamos que $\sqrt{2} = a_1/b_1$, com $0 < b_1 < b$. Repetindo o argumento, encontramos inteiros b_i, $1 \leq i \leq b$, tais que $1 \leq b_b < \ldots < b_1 < b$. Mas não podem existir b inteiros ≥ 1 e $< b$. Chegamos a uma contradição, e $\sqrt{2}$ não é racional.

3.3.5 Outro método geométrico

Esta é uma versão geométrica da demonstração 3.3.4. Confira [68] , *slides* 49 a 52. Procedemos novamente por redução ao absurdo. Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional. Seja $\sqrt{2} = a/b$, sendo a e b inteiros positivos, com a o menor possível. Notemos que $a = b\sqrt{2}$. Como $1 < \sqrt{2} < 2$, isso implica $b < a$ e $a < 2b$.

Consideremos um quadrado de lado a e, em vértices opostos desse quadrado, disponhamos dois quadrados de lado b, conforme a figura.

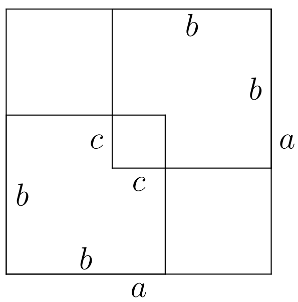


Figura 3.6: Outra demonstração geométrica de que $\sqrt{2}$ não é racional

Como $a < 2b$, a interseção dos dois quadrados de lado b formam um quadrado menor de lado c. Comparando as áreas temos

$$a^2 = 2b^2 + 2(a - b)^2 - c^2$$

De $a = b\sqrt{2}$ temos $a^2 = 2b^2$. A expressão acima torna-se

$$c^2 = 2(a - b)^2.$$

Segue que $\sqrt{2} = c/(a - b)$. Da minimalidade de a vem $a < c$, o que é impossível! Concluímos que $\sqrt{2}$ não é racional.

3.3.6 Um argumento curioso

Uma fração de inteiros a/b será chamada *honesta* se $a/b \notin \mathbb{Z}$. Observe que se a/b é honesta então a^2/b^2 também é honesta.

Teorema 3.4. *$\sqrt{2}$ não é racional.*

Demonstração. Suponhamos $\sqrt{2}$ racional. Seja $\sqrt{2} = a/b$, sendo a e $b \neq 0$ números inteiros. Como $1 < \sqrt{2} < 2$, segue que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, e a fração a/b é honesta. Daí a fração a^2/b^2 também é honesta. Mas isso é uma contradição, pois $a^2/b^2 = 2 \in \mathbb{Z}$. Portanto $\sqrt{2}$ não é racional. □

Observações. Este argumento está proposto em [95]. Segundo o articulista este é um bom argumento para justificar a não racionalidade de $\sqrt{2}$ para estudantes que podem aceitar como plausível a implicação

$$\frac{a}{b} \quad \text{honesta} \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{b^2} \quad \text{honesta} \tag{3.1}$$

Dessa forma o professor evita entrar em detalhes sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, cujo uso fica implícito em (3.1). O articulista observa que é válido o uso de argumentos plausíveis no ensino da Matemática desde que: *(i)* a demonstração omitida não tenha papel central no assunto; *(ii)* os estudantes tenham atividades prévias que os levam a acreditar no argumento; *(iii)* o professor esteja preparado para suprir o que estiver faltando.

3.4 Aproximações do valor numérico de $\sqrt{2}$

Todo estudante bem informado em Matemática sabe que uma aproximação do valor numérico de $\sqrt{2}$ no sistema decimal é $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$. Com a facilidade oferecida pelas calculadoras eletrônicas podemos obter sem dificuldade o valor numérico de $\sqrt{2}$ com mais casas decimais exatas, por exemplo

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356237$$

Já sabemos também do Teorema 2.5, página 30, que a expansão decimal de $\sqrt{2}$ não segue nenhum padrão regular de repetição. Mais exatamente, não é finita e nem periódica. Isso se deve a que $\sqrt{2}$ não é racional.

Usando um computador e um algoritmo adequado podemos calcular aproximações de $\sqrt{2}$ com quantas casas desejarmos. O estudo de métodos para o cálculo do valor numérico de $\sqrt{2}$ existe desde o tempo da antiga civilização suméria. Veremos alguns métodos, começando com os mais simples.

3.4.1 Um método de tentativas

Observemos inicialmente que se r é um número tal que $r^2 < 2$, então $r < \sqrt{2}$. De fato, suponhamos que $r \geq \sqrt{2}$. Multiplicando essa inequação por r e por $\sqrt{2}$ separadamente temos

$$r^2 \geq r\sqrt{2} \quad \text{e} \quad r\sqrt{2} \geq \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$$

Portanto $r^2 \geq r\sqrt{2} \geq 2$, o que é uma contradição com a hipótese de que $r^2 < 2$. Assim $r > 0$ e $r^2 < 2$ implicam $r < \sqrt{2}$. De forma análoga se verifica que se $r > 0$ é um número tal que $2 < r^2$, então $\sqrt{2} < r$.

Notemos agora que $1^2 < 2 < 2^2$, portanto

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

o que nos dá uma primeira aproximação de $\sqrt{2}$.

Calculando $1{,}1^2 = 1,21$ e $1{,}2^2 = 1{,}44$ e $1{,}3^2 = 1,69$ e $1{,}4^2 = 1{,}96$ e $1{,}5^2 = 2,25$ vemos que $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$ do que segue

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

Calculando $1{,}41^2 = 1,9881$ e $1{,}42^2 = 2,0164$ vemos que $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$ do que segue

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

Calculando $1{,}411^2 = 1{,}990921$ e $1{,}412^2 = 1{,}993744$ e $1{,}413^2 = 1{,}996569$ e $1{,}414^2 = 1{,}999396$ e $1{,}415^2 = 2{,}002225$ vemos que $1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$ do que segue

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$

E assim sucessivamente, podemos obter quantas casas desejarmos, bastando para isso ter muita paciência.

Considerando que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ podemos adotar um dos valores $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ ou $\sqrt{2} \approx 1{,}415$. O primeiro valor é uma *aproximação por falta*, e o segundo é uma *aproximação por excesso.*

Ao tomarmos um valor x como uma aproximação de $\sqrt{2}$ o *erro da aproximação* é $E = \sqrt{2} - x$. Como não temos o valor exato de $\sqrt{2}$ nunca saberemos o valor exato de E, mas podemos cotá-lo. Um número ε é uma *cota* de E se $|E| < \varepsilon$. Quanto menor ε, melhor é a aproximação.

Por exemplo, ao tomarmos $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ o erro é $E = \sqrt{2} - 1{,}414$ e uma cota para E é $\varepsilon = 10^{-3}$ de acordo com o seguinte cálculo:

$$|E| = \sqrt{2} - 1{,}414 < 1{,}415 - 1{,}414 = 0{,}001 = 10^{-3}$$

3.4.2 Fazendo uma média

Se $r > 0$ é um número, uma ideia para calcular $\sqrt{r}$ é decompor r em um produto $r = xy$ com $x > 0$ e $y > 0$ e x próximo de y, e tomar a média $(x+y)/2$ como uma aproximação de $\sqrt{r}$. Por exemplo, para calcular $\sqrt{15}$ tomamos $15 = xy$ com $x = 4$ e $y = 15/4$. Como $y = 3{,}75$ vemos que x e y são valores próximos um do outro. Então

$$\sqrt{15} \approx \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\left[4 + \frac{15}{4}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{16+15}{4} = \frac{31}{8} = 3{,}875$$

Para referência $\sqrt{15} \approx 3{,}872983346$ é um valor exato até a décima casa, calculado com um aplicativo computacional algébrico. Vemos que obtivemos uma boa aproximação para $\sqrt{15}$.

Por que esse método funciona? Observe o seguinte:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - r = \frac{x^2+2xy+y^2}{4} - xy = \frac{x^2-2xy+y^2}{4} = \frac{1}{4}(x-y)^2$$

Quanto mais x estiver próximo de y mais $x - y$ estará próximo de zero. Assim tanto mais $((x+y)/2)^2$ estará próximo de r e consequentemente $(x+y)/2$ de $\sqrt{r}$. Outra consequência desses cálculos é que $(x+y)/2$ é sempre uma aproximação por excesso.

Voltando ao assunto que mais nos interessa, isto é, o cálculo de aproximações do valor numérico de $\sqrt{2}$, vejamos um exemplo de aplicação desta técnica. Escrevamos

$$2 = \frac{4}{3}\,\frac{3}{2}$$

Assim $2 = xy$, com $x = 4/3 \approx 1{,}33$ e $y = 3/2 = 1{,}5$. Portanto $x \approx y$. Aplicando a média temos

$$\sqrt{2} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{8+9}{6} = \frac{17}{12} \approx 1{,}417$$

uma aproximação de $\sqrt{2}$ com erro $< 10^{-2}$. Podemos repetir o procedimento usando a aproximação 17/12. Tomando $x = 17/12$ e $y = 24/17$, a média é $577/408 \approx 1{,}414215$, uma aproximação de $\sqrt{2}$ com erro $< 10^{-5}$.

3.4.3 Calculando raízes quadradas elevando ao quadrado

Podemos ver em [35] um interessante método para obter aproximações de $\sqrt{r}$. Vamos aplicar o método para $\sqrt{2}$. Começamos com qualquer aproximação positiva de $\sqrt{2}$. Como $1 < \sqrt{2} < 2$, podemos tomar $a_1 = 1$ como uma primeira aproximação de $\sqrt{2}$.

Notemos agora que

$$\sqrt{2} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} - 1 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{2} - 1)^2 \approx 0$$

$$\Rightarrow \quad 2 - 2\sqrt{2} + 1 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad 3 - 2\sqrt{2} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \approx \frac{3}{2}$$

Obtivemos assim uma segunda aproximação $a_2 = 3/2$, melhor do que a_1. Prosseguindo com a mesma metodologia, temos

$$\sqrt{2} \approx \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} - \frac{3}{2} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)^2 \approx 0$$

$$\Rightarrow \quad 2 - 3\sqrt{2} + \frac{9}{4} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad 8 - 12\sqrt{2} + 9 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \approx \frac{17}{12}$$

A terceira aproximação $a_3 = 17/12$ é melhor do que a anterior. Será útil obtermos a_4.

$$\sqrt{2} \approx \frac{17}{12} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} - \frac{17}{12} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{2} - \frac{17}{12}\right)^2 \approx 0$$

$$\Rightarrow \quad 2 - 2\frac{17}{12}\sqrt{2} + \frac{17^2}{12^2} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \approx \frac{2 \cdot 12^2 + 17^2}{2 \cdot 12 \cdot 17} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \approx \frac{577}{408}$$

Portanto $a_4 = 577/408$. Para efeito de comparação fazemos um resumo:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= \frac{3}{2} = 1{,}5 \\ a_3 &= \frac{17}{12} \approx 1{,}41666666667 \\ a_4 &= \frac{577}{408} \approx 1{,}414215686 \end{aligned}$$

O valor de $\sqrt{2}$ com 16 casas exatas, calculado com um aplicativo computacional algébrico, é $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373095$. Comparando esse valor com os de a_3 e a_4, observamos uma tendência de, a cada iteração, dobrar o número de casas exatas. O estudante pode calcular $a_5 = 665857/470832$ e verificar essa tendência.

Por que o método funciona? Basicamente é devido ao seguinte: se r é um número tal que $0 < r < 1$, então $r^2 < r$. Assim se a é uma aproximação de $\sqrt{2}$ tal que $|\sqrt{2} - a| < 1$, temos $(\sqrt{2} - a)^2 < |\sqrt{2} - a|$, e podemos obter uma aproximação melhor do que a.

Os seguintes cálculos podem aprofundar nossa compreensão sobre o que está ocorrendo. Seja $a > 0$ uma aproximação de $\sqrt{2}$ tal que $|\sqrt{2} - a| < 1$. Temos

$$\begin{aligned} & 0 < (\sqrt{2} - a)^2 < |\sqrt{2} - a| \\ \Rightarrow\quad & 0 < 2 - 2a\sqrt{2} + a^2 < |\sqrt{2} - a| \\ \Rightarrow\quad & 0 < 2a\left[\frac{1}{a} - \sqrt{2} + \frac{a}{2}\right] < |\sqrt{2} - a| \\ \Rightarrow\quad & 0 < \frac{2 + a^2}{2a} - \sqrt{2} < \frac{1}{2a}|\sqrt{2} - a| \end{aligned}$$

Vemos que, se $a \geq 1$, a aproximação $(2 + a^2)/2a$ é melhor do que a, dividindo o erro pelo menos pela metade.

Nossos cálculos também fornecem uma relação de recorrência que permite definir a sequência a_n de aproximações de $\sqrt{2}$. O estudante também poderá se convencer de que esse método funciona para o cálculo de qualquer $\sqrt{r}$, com $r > 1$.

3.4.4 Um método muito antigo

Em [67], páginas 42 e 43, o autor sugere que os sumérios utilizavam o método da média, apresentado em 3.4.2, para calcular sua famosa aproximação de $\sqrt{2}$, que estudamos no início deste Capítulo. Vamos retomar o método 3.4.2 e elaborá-lo de uma forma mais detalhada para o cálculo de $\sqrt{r}$ para todo número positivo r.

Seja r um número positivo. Para calcular $\sqrt{r}$ escrevemos $r = ab$, sendo a e b números positivos. Notemos que $b = r/a$, e que

$$a < \sqrt{r} \quad\Longleftrightarrow\quad 1 < \frac{\sqrt{r}}{a} \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{r} < \frac{r}{a} \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{r} < b \tag{3.2}$$

e, como $a = r/b$, temos a implicação simétrica, isto é,

$$b < \sqrt{r} \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{r} < a$$

Portanto, colocando $\sqrt{r}$, a e b em um eixo de coordenadas, vemos que a e b estão em lados opostos em relação a $\sqrt{r}$. Isto nos leva a ter esperança de que a média $c = (a + b)/2$ poderá ser uma melhor aproximação de $\sqrt{r}$ do que a ou b.

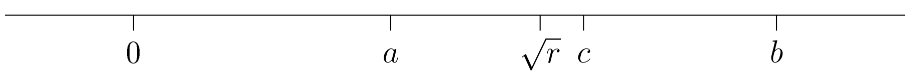


Figura 3.7: Primeiro passo do método da média

A situação delineada na Figura 3.7 sempre ocorre, de acordo com o

Lema 3.5. *Seja $r > 0$, e sejam $a > 0$ e $b > 0$ tais que $r = ab$. Denotamos $c = (a+b)/2$. Valem as seguintes propriedades:*
i) Se $a = \sqrt{r}$ (ou se $b = \sqrt{r}$) então $c = \sqrt{r}$;
ii) Se $a < b$ então $a < \sqrt{r} < c < b$;
iii) Se $a < b$ então $0 < c - \sqrt{r} < \frac{1}{2}\big(b - \sqrt{r}\big)$.

Demonstração. i) é claro. Vejamos ii). De $a < b$ temos $a^2 < ab = r$, portanto $a < \sqrt{r}$. Usando 3.2 temos $a < \sqrt{r} < b$. Ainda

$$c = \frac{b+a}{2} = \frac{b + \dfrac{r}{b}}{2} = \frac{1}{2}\left(b + \frac{r}{b}\right) = \frac{b^2 + r}{2b}$$

Portanto

$$c - \sqrt{r} = \frac{b^2 + r}{2b} - \sqrt{r} = \frac{b^2 + r - 2b\sqrt{r}}{2b} = \frac{(b - \sqrt{r})^2}{2b} > 0$$

do que segue $\sqrt{r} < c$. Ainda de $a < b$ temos $c = (a+b)/2 < (b+b)/2 = b$, ou $c < b$. Isto completa a demonstração de ii).

Vejamos agora iii). Como $a < b$ temos $a < \sqrt{r} < c < b$. De acordo com o que foi visto acima temos

$$0 < c - \sqrt{r} = \frac{\big(b - \sqrt{r}\big)^2}{2b} = \frac{1}{2}\,\frac{b - \sqrt{r}}{b}\big(b - \sqrt{r}\big)$$

Mas

$$0 < \sqrt{r} \quad \Rightarrow \quad b < \sqrt{r} + b \quad \Rightarrow \quad b - \sqrt{r} < b \quad \Rightarrow \quad \frac{b - \sqrt{r}}{b} < 1$$

Portanto

$$0 < c - \sqrt{r} < \frac{1}{2}\,\big(b - \sqrt{r}\big)$$

Isto termina a demonstração do Lema. □

Tomando repetidamente a média das duas últimas aproximações, obtemos uma sequência de números que convergem para $\sqrt{r}$, de acordo com o

Teorema 3.6. *Seja $r > 0$. A sequência $(a_n)_{n \geq 0}$ definida por*

$$\begin{cases} a_0 > 0; \\ a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{r}{a_{n-1}}\right), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

converge para $\sqrt{r}$.

Observação. Estudaremos no Capítulo 5 o conceito de convergência de sequências numéricas. Dessa forma o estudante que não conhece esse conceito pode adiar o estudo do Teorema 3.6. Mas se quiser pode estudar a demonstração abaixo sem nenhum problema, pois não será feito nada de misterioso.

Demonstração. Notemos que a_1 é a média aritmética de a_0 e de r/a_0, e que $a_0(r/a_0) = r$. Notemos ainda que a_2 é a média aritmética de a_1 e de r/a_1, e que $a_1(r/a_1) = r$, e assim por diante. Estamos na posição de aplicar o Lema 3.5 para cada $n \geq 0$, com $a = a_n$ e $b = r/a_n$ ou vice-versa, e $c = a_{n+1}$.

Se $a_0 = \sqrt{r}$, temos $a_1 = \sqrt{r}$, em seguida temos $a_2 = \sqrt{r}$, e assim sucessivamente, vale que $a_n = \sqrt{r}$ para todo $n \geq 0$. Portanto, nesse caso a sequência $(a_n)_{n \geq 0}$ é constante $= \sqrt{r}$.

Se $a_0 \neq \sqrt{r}$, examinamos os casos $a_0 < \sqrt{r}$ e $a_0 > \sqrt{r}$. Suponhamos primeiro $a_0 < \sqrt{r}$. Aplicando 3.2 com $a = a_0$ e $b = r/a_0$ temos $\sqrt{r} < b$, portanto $a < b$. Pela parte ii) do Lema 3.5 vem $\sqrt{r} < a_1$. Aplicando agora 3.2 com $a = r/a_1$ e $b = a_1$, temos $\sqrt{r} < a_1 \Rightarrow a < \sqrt{r} \Rightarrow a < b$. Novamente da parte ii) do Lema 3.5 segue $\sqrt{r} < a_2$. Aplicando a parte iii) do Lema 3.5 vem $0 < a_2 - \sqrt{r} < \frac{1}{2}\left(a_1 - \sqrt{r}\right)$.

Repetindo o argumento para $a = r/a_2$ e $b = a_2$ segue que

$$\sqrt{r} < a_3 \quad \text{e} \quad 0 < a_3 - \sqrt{r} < \frac{1}{2}\left(a_2 - \sqrt{r}\right) < \frac{1}{2^2}\left(a_1 - \sqrt{r}\right)$$

Procedendo indutivamente temos $\sqrt{r} < a_n$ para todo $n \geq 1$ e

$$0 < a_n - \sqrt{r} < \frac{1}{2^{n-1}}\left(a_1 - \sqrt{r}\right) \quad \text{para todo } n \geq 2 \tag{3.3}$$

Por outro lado, se $\sqrt{r} < a_0$, procedemos da mesma forma e obtemos novamente 3.3.

Como o fator $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ tende a zero quando $n \to \infty$ e o valor $a_1 - \sqrt{r}$ está fixo, segue de 3.3 que $a_n - \sqrt{r}$ tende a zero. Isto significa que a_n converge para $\sqrt{r}$, conforme queríamos demonstrar. $\square$

Aplicando a fórmula do Teorema 3.6 para calcular aproximações de $\sqrt{2}$ com o valor inicial $a_0 = 2$ obtemos

$$a_0 = 2 \quad a_1 = \frac{3}{2} \quad a_2 = \frac{17}{12} \quad a_3 = \frac{577}{408} \quad a_4 = \frac{665857}{470832}$$

$$a_5 = \frac{886731088897}{627013566048} \quad a_6 = \frac{1572584048032918633353217}{1111984844349868137938112}$$

$$a_7 = \frac{4946041176255201878775086487573351061418968498177}{3497379255757941172020851852070562919437964212608}$$

Podemos utilizar um aplicativo computacional algébrico para calcular a expansão decimal de cada uma dessas frações e ter uma ideia da velocidade com que elas se aproximam de $\sqrt{2}$. Calculamos a expansão decimal de cada fração acima com precisão de 60 casas:
$a_0 = 2$
$a_1 = 1{,}5$
$a_2 \approx 1{,}416666666666666666666666666666666666666666666666666666666667$
$a_3 \approx 1{,}414215686274509803921568627450980392156862745098039215686628$
$a_4 \approx 1{,}414213562374689910626295578890134910116559622115744044584490$
$a_5 \approx 1{,}414213562373095048801689623502530243614981925776197428498829$
$a_6 \approx 1{,}414213562373095048801688724209698078569671875377234001561010$
$a_7 \approx 1{,}414213562373095048801688724209698078569671875376948073176680$

Para comparar calculamos $\sqrt{2}$ com 62 casas exatas usando um aplicativo computacional algébrico: $\sqrt{2} \approx$

$\approx 1{,}41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667 97$

Inspecionando esses valores vemos que as casas exatas de a_n, $1 \leq n \leq 6$, são:

$a_1 = 1{,}5$ (1 casa exata)
$a_2 \approx 1{,}41$ (3 casas exatas)
$a_3 \approx 1{,}41421$ (6 casas exatas)
$a_4 \approx 1{,}41421356237$ (12 casas exatas)
$a_5 \approx 1{,}41421356237309504880168$ (24 casas exatas)

$a_6 \approx 1{,}414213562373095048801688724209698078569671875 37$ (48 casas exatas)

Os cálculos não permitem decidir qual o número de casas exatas de a_7, que é certamente maior ou igual a 60. Observamos que a cada iteração do algoritmo conseguimos o dobro de casas exatas em relação à aproximação anterior.

3.5 $\sqrt{2}$ e frações contínuas

Vamos calcular aproximações de $\sqrt{2}$ por números racionais, mas de uma forma diferente da que estivemos fazendo na seção anterior. Sabendo que $1 < \sqrt{2} < 2$, tomamos $c_0 = 1$ como uma primeira aproximação de $\sqrt{2}$. Para calcular uma segunda aproximação c_1, melhor do que c_0, escrevamos $\sqrt{2} = 1 + \varepsilon$, sendo $0 < \varepsilon < 1$. A ideia diferente aqui é escrever ε na forma $\varepsilon = 1/\alpha$. Portanto

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

Manipulando a relação acima vemos que $\alpha = 1 + \sqrt{2}$. Portanto

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} \tag{3.4}$$

Lembrando que $\sqrt{2} \approx c_0 = 1$ temos

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{1+c_0} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

e assim obtemos a segunda aproximação $c_1 = 3/2$.

Retomando (3.4), substituímos a $\sqrt{2}$ do denominador por $\sqrt{2} = 1 + (1/\alpha)$. Assim

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{\alpha}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} \tag{3.5}$$

Como $\sqrt{2} \approx c_0 = 1$, substituímos por esse valor a $\sqrt{2}$ do último denominador de (3.5) e temos

$$\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+1}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5}$$

e assim obtemos a terceira aproximação $c_2 = 7/5$.

Retomando (3.5), substituímos novamente a $\sqrt{2}$ do denominador por $\sqrt{2} = 1 + (1/\alpha)$. Portanto

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{\alpha}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}} \tag{3.6}$$

Novamente substituímos a $\sqrt{2}$ do último denominador de (3.6) por 1 e temos

$$\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12}$$

e assim obtemos a quarta aproximação $c_3 = 17/12$.

Em resumo, obtivemos as seguintes aproximações de $\sqrt{2}$:

$$c_0 = 1 \qquad c_1 = 1 + \frac{1}{2} \qquad c_2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} \qquad c_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

que nos dão os valores

$$c_0 = 1 \qquad c_1 = \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad c_2 = \frac{7}{5} = 1{,}4 \qquad c_3 = \frac{17}{12} \approx 1{,}41666$$

Fica claro que podemos continuar com esse procedimento indefinidamente e obter uma sequência $(c_n)_{n\geq 0}$ que, ao que tudo indica, converge para $\sqrt{2}$. Observamos que c_n depende recorrentemente de c_{n-1}, pois este reaparece no primeiro denominador daquele. Por exemplo,

$$c_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \left[1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}\right]} = 1 + \frac{1}{1 + c_2}$$

Dessa forma, em geral temos

$$c_n = 1 + \frac{1}{1 + c_{n-1}} \quad \text{para todo } n \geq 1 \tag{3.7}$$

Usaremos agora algumas notações e propriedades que veremos no Capítulo 5. Suponhamos que já temos demonstrado que existe $\lim_{n\to\infty} c_n$. Vamos chamar esse limite de L. Como $c_n > 0$ para todo $n \geq 0$, podemos admitir que $L \geq 0$. É válido também $L = \lim_{n\to\infty} c_{n-1}$, pois as sequências são as mesmas. Usando (3.7) e algumas propriedades de limites temos

$$L = 1 + \frac{1}{1 + L}$$

Resolvendo essa equação em L obtemos $L = \sqrt{2}$. Portanto $\lim_{n\to\infty} c_n = \sqrt{2}$.

Relembrando a notação de fração contínua introduzida na Seção 2.5, página 31, temos

$$c_0 = [1] \quad c_1 = [1; 2] \quad c_2 = [1; 2{,}2] \quad c_3 = [1; 2{,}2{,}2]$$

em geral

$$c_n = [1; 2{,}2, \ldots, 2] \quad \text{com } n \ 2's$$

Com essas notações podemos escrever

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2 \ldots] = [1; \overline{2}]$$

e

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{}{\ddots}}}$$

Estudaremos com mais detalhes as frações contínuas infinitas simples no Capítulo 8.

3.6 Problemas

Problema 3.6.1. Verifique os seguintes detalhes sobre o estudo de $\sqrt{2}$ feito pelos sumérios. **a)** $[(1;24{,}51{,}10)_{60}]^2 = (1;59{,}59{,}59{,}38{,}1{,}40)_{60}$. **b)** A aproximação calculada pelos sumérios tem erro $< 10^{-6}$. **c)** O valor $(1;24{,}51{,}10)_{60}$, obtido pela matemática sumeriana como aproximação de $\sqrt{2}$ é a representação sexagesimal finita de um número racional. Verifique que a representação decimal de $(1;24{,}51{,}10)_{60}$ não é finita. Calcule o pré-período e o período. Explique por que motivo a representação em um sistema é finita e em outro não. Aqui abreviamos $(\ldots)_{sessenta}$ por $(\ldots)_{60}$.

Problema 3.6.2. Verifique os detalhes da construção de $\sqrt{2}$ com régua e compasso ilustrada pela Figura 3.4 na página 42: o triângulo ADC é retângulo e $BD = \sqrt{AB \times BC}$.

Problema 3.6.3. Demonstre que dada uma fração de inteiros a/b podemos simplificar a fração por 2 tantas vezes quanto for necessário e obter uma fração de inteiros equivalente c/d de modo que c ou d é ímpar.

Problema 3.6.4. Imagine um argumento para justificar a afirmação feita no início deste Capítulo, de que é único o número real positivo x tal que $x^2 = 2$.

Problema 3.6.5. Usando apenas desigualdades e que $\sqrt{2}$ é o número real positivo x tal que $x^2 = 2$, prove que $1 < \sqrt{2} < 2$.

Problema 3.6.6. Mostre que, para todo inteiro positivo k, existe um segmento de reta com medida $\sqrt{k}$. Faça isto de duas maneiras diferentes: a) usando o Teorema de Pitágoras; b) usando a construção da Figura 3.4 na página 42. Conclua que para todo inteiro positivo k, $\sqrt{k}$ é construtível com régua compasso.

Problema 3.6.7. Para quais inteiros $k \geq 2$ é possível encontrar um segmento de reta de medida $\sqrt{k}$ usando-se exclusivamente o método do diálogo *Mênon* de Platão?

Problema 3.6.8. Prove que $\sqrt{3}$ não é racional usando um argumento análogo ao argumento "par ou ímpar" desenvolvido em 3.3.1.

Problema 3.6.9. **a)** O estudante há que concordar que $\sqrt{4}$ é racional. Portanto o argumento tipo "par ou ímpar" desenvolvido em 3.3.1 deve falhar nesse caso. Descubra em que passo da argumentação ocorre a falha. **b)** Investigue para que números inteiros positivos k se pode provar que $\sqrt{k}$ não é racional usando um argumento tipo "par ou ímpar".

Problema 3.6.10. Prove que $\log_2 3$ não é racional usando um argumento do tipo "par ou ímpar". Use esse resultado para concluir que existem infinitos números não racionais.

Problema 3.6.11. Prove que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ não é racional.

Problema 3.6.12. Prove que $\sqrt{2 + \sqrt{37}}$ não é racional.

Problema 3.6.13. Prove que $\sqrt{5}$ não é racional usando um argumento de descida.

Problema 3.6.14. Usando o método da descida prove que $\sqrt{k}$ é inteiro ou não racional, para todo inteiro positivo k.

Problema 3.6.15. Complete os detalhes do argumento: *Afirmação:* "Para todo inteiro positivo k, $\sqrt{k}$ é inteiro ou não racional". *Argumento:* Se $\sqrt{k}$ for racional, podemos escrever $\sqrt{k} = p/q$, sendo p e q inteiros positivos. Logo $kq^2 = p^2$, e, em virtude do Teorema Fundamental da Aritmética, existe um inteiro positivo m tal que $k = m^2$. Portanto $\sqrt{k}$ é inteiro.

Problema 3.6.16. Prove que $\sqrt[n]{2}$ não é racional para todo inteiro $n \geq 2$ usando um argumento do tipo "par ou ímpar".

Problema 3.6.17. Demonstre que $x^3 - 3x - 1 = 0$ não tem solução racional.

Problema 3.6.18. Verifique que o argumento curioso de 3.3.6 pode também ser utilizado para provar o seguinte. Se k é um número inteiro positivo e se $\sqrt{k} \notin \mathbb{Z}$ então $\sqrt{k}$ não é racional.

Problema 3.6.19. Uma fração de inteiros a/b será chamada *honesta* se $a/b \notin \mathbb{Z}$. Demonstre que

$$\frac{a}{b} \quad \text{honesta} \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{b^2} \quad \text{honesta}$$

Para essa demonstração é mesmo necessário o uso do Teorema Fundamental da Aritmética?

Problema 3.6.20. Consideremos o conjunto $\mathcal{A}$ dos números inteiros múltiplos positivos de 4. Portanto $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$. Um $\mathcal{A}$-composto é um elemento $a \in \mathcal{A}$ que pode ser escrito na forma $a = bc$, sendo b e c elementos de $\mathcal{A}$. Um $\mathcal{A}$-primo é um elemento de $\mathcal{A}$ que não é composto. Por exemplo, 4 e 8 são $\mathcal{A}$-primos. **a)** Prove que todo elemento de $\mathcal{A}$ é $\mathcal{A}$-primo ou se escrteve como um produto de $\mathcal{A}$-primos. **b)** Dê exemplos para mostrar que a decomposição de elementos de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$-primos pode não ser única. Portanto em $\mathcal{A}$ não temos um resultado equivalente ao Teorema Fundamental da Aritmética, válido em $\mathbb{Z}$. **c)** Uma fração a/b, sendo a e $b \neq 0$ elementos de $\mathcal{A}$, será chamada $\mathcal{A}$-*honesta* se $a/b \notin \mathcal{A}$. Mostre que em $\mathcal{A}$ não vale a implicação: "se a/b é $\mathcal{A}$-honesta, então a^2/b^2 é $\mathcal{A}$-honesta". **d)** Um racional denomina-se $\mathcal{A}$-racional se puder ser escrito na forma de uma fração a/b, sendo a e $b \neq 0$ elementos de $\mathcal{A}$. Encontre exemplos de $p \in \mathcal{A}$ que são $\mathcal{A}$-primos mas que $\sqrt{p}$ seja $\mathcal{A}$-racional. Isso ocorre em $\mathbb{Z}$?

Problema 3.6.21. Iniciando com a aproximação $a_1 = 1$ de $\sqrt{2}$, calcule a aproximação $a_2 = (2 + a_1^2)/2a_1$. Aplique novamente o mesmo processo a a_2 e encontre as aproximações seguintes a_3, a_4 e a_5. Encontre uma cota para o erro de cada uma dessas aproximações.

Problema 3.6.22. Calcule aproximações de $\sqrt{10}$ usando o método iterativo 3.4.3. Como $3 < \sqrt{10} < 4$, uma sugestão é iniciar com $a_1 = 3$.

Problema 3.6.23. Dado um número natural $n > 0$, seja m o inteiro positivo tal que $m \leq \sqrt{n} < m + 1$, isto é, $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Escrevamos $n = m^2 + \varepsilon$. Os matemáticos árabes da Idade Média usavam os valores $m + \varepsilon/(2m)$ e $m + \varepsilon/(2m+1)$ como aproximações de $\sqrt{n}$. Verifique que o primeiro valor é uma aproximação por excesso, e o segundo, por falta. Calcule aproximações de $\sqrt{2}$ e de $\sqrt{10}$ usando essas fórmulas.

Problema 3.6.24. No início da Seção 3.4.4 foi comentado que em [67] o autor sugere que os sumérios utilizaram o método da média para calcular sua famosa aproximação $(1; 24{,}51{,}10)_{60}$ de $\sqrt{2}$. Ao aplicar o método da média para $\sqrt{2}$ começando com $a_0 = 2$ obtivemos $a_3 = 577/408$. Calcule a expansão de a_3 no sistema sexagesimal.

Problema 3.6.25. Calcule aproximações de $\sqrt{17}$ usando o método descrito na Seção 3.4.4. Estude a velocidade das aproximações. (Sugestão: comece com $a_0 = 5$, e calcule seis termos em forma de fração de inteiros. Expanda cada fração com 70 casas exatas.)

Problema 3.6.26. Expresse $\sqrt{3}$ como fração contínua infinita simples.

Problema 3.6.27. Expresse $\sqrt{17}$ como fração contínua infinita simples.

Problema 3.6.28. Considere a sequência $c_0 = [1]$, $c_1 = [1; 1]$, $c_2 = [1; 1, 1]$, $c_3 = [1; 1, 1, 1]$, etc. Calcule $[1; 1, 1, \ldots]$ supondo que essa sequência tenha limite.

Problema 3.6.29. Consideremos a possibilidade de resolver equações através de frações contínuas. Por exemplo, seja x um número tal que $x^2 - 7x - 1 = 0$ Observe que $x = 7 + (1/x)$. Usando isso expresse x como uma fração contínua. Usando essa fração contínua ache x na forma de uma expressão com raízes.

3.7 Temas para investigação

Tema 3.7.1. Investigue se é possível provar que $\sqrt{2}$ não é racional através de sua expansão decimal.

Tema 3.7.2. Investigue $\sqrt[3]{2}$. Qual sua definição? É único? Verifique se dá para construir $\sqrt[3]{2}$ com régua e compasso. Por exemplo, o lado de um cubo de volume 2 mede $\sqrt[3]{2}$. Dado um cubo de volume 1, como construir um cubo de volume 2? É possível imitar o argumento do diálogo *Mênon*, de Platão? Colecione argumentos de que $\sqrt[3]{2}$ não é racional.

Tema 3.7.3. Pesquisar a presença de $\sqrt{2}$ na Matemática, buscando na literatura propriedades não mencionadas neste texto e fórmulas em que $\sqrt{2}$ se faz presente. Como exemplo apresentamos ao estudante a bela fórmula de Luis A. Santaló

$$E = \frac{\sqrt{2} + 2 + 5\ln(1 + \sqrt{2})}{15}$$

Essa fórmula ocorre no seguinte problema de probabilidade geométrica. São lançados randomicamente n pares de pontos em um quadrado unitário. Seja d_i a distância entre os pontos do i-ésimo par. Então E é o limite para $n \to \infty$ da média $(d_1 + \ldots + d_n)/n$.

Tema 3.7.4. Pesquisar a presença de $\sqrt{5}$ na Matemática.

Tema 3.7.5. Alguns convergentes da fração contínua de $\sqrt{2}$ surgem com insistência em vários dos métodos que estudamos. Por exemplo, $c_1 = 3/2$, $c_3 = 17/12$ e $c_7 = 577/408$ apareceram nos métodos 3.4.3 e 3.4.4. Isto ocorre pelo motivo de que, sob certas condições, os convergentes de um número irracional são suas melhores aproximações. Investigue e demonstre as seguintes afirmações. **a)** Dado um número positivo ξ, mostre que para todo inteiro positivo b existe uma fração de inteiros j/b que é uma aproximação de ξ com erro menor do que $1/2b$. **b)** Verifique que $c_1 = 3/2$ é a melhor aproximação de $\sqrt{2}$ dentre todas as frações de inteiros j/b com $b \leq 2$. **c)** Verifique que o convergente $c_2 = 7/5$ é a melhor aproximação de $\sqrt{2}$ dentre todas as frações de inteiros j/b com $b \leq 5$. **d)** Verifique que o convergente $c_3 = 17/12$ é a melhor aproximação de $\sqrt{2}$ dentre todas as frações de inteiros j/b com $b \leq 12$ **e)** Verifique que para os convergentes $c = p/q$ de $\sqrt{2}$ considerados acima, o erro $|\sqrt{2} - c|$ da aproximação é bem menos do que $1/2q$, sendo na verdade $< 1/q^2$. Pesquise um teorema geral desse tipo para qualquer número ξ.

Sugestão. O estudo de frações contínuas pode ser muito facilitado com o uso de um aplicativo computacional algébrico.

Tema 3.7.6. Examinando os convergentes da fração contínua de $\sqrt{2}$

$$c_n = [1; 2,2, \ldots ,2] \quad \text{com } n \ 2's$$

obtidos na Seção 3.5, a partir da página 51, podemos compará-los com os valores da sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ que começa com $a_0 = 1$ e que converge para $\sqrt{2}$, definida no Teorema 3.6, página 49 (com $r = 2$). Investigue as regularidades que podem ser observadas e faça conjecturas. Alguma demonstração?

Tema 3.7.7. As seguintes aproximações são encontradas em textos antigos. Veja como se pode verificar se realmente são boas fórmulas e em quais condições sobre r.

$$\sqrt{a^2+r} \approx \frac{a^2+r}{a+\frac{r}{2a}} \qquad \sqrt{a^2+r} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+r}{a+\frac{r}{2a}}+a+\frac{r}{2a}\right)$$

$$\sqrt{a^2+r} \approx \frac{r}{2a+\frac{r}{2a}} \qquad \sqrt{a^2+r} \approx a+\frac{r}{2a}-\frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{r}{2a}\right)}$$

3.8 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 3.8.1. Pesquise, nos livros de História da Matemática, a origem do símbolo $\sqrt{\ }$ como notação de raízes quadradas.

Atividade 3.8.2. Examine mais detalhadamente a observação feita em 3.3.6, na página 45, sobre o uso de argumentos plausíveis no ensino da Matemática. Dê a sua opinião. Descreva outras situações em que os professores das escolas fundamental e média utilizam argumentos plausíveis.

Atividade 3.8.3. O que dizer sobre apresentar ou não a estudantes do ensino básico a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$? Em que nível e em que circunstâncias isso seria adequado? Nesse caso, qual seria o melhor método?

Capítulo 4

Modelos para os números reais

4.1 Introdução

Apresentamos neste Capítulo algumas considerações sobre a história da construção de modelos de representação para o conjunto dos números reais. Essa história reflete o esforço e o amadurecimento psicológico do homem pensante ao analisar fenômenos quantitativos do campo abstrato. Alertamos o estudante de que nossa exposição não se aprofunda no tema e não tem perfeita exatidão histórica. Abordamos as principais ideias com o intuito de estimular uma reflexão sobre esse importante tema da Matemática.

4.2 O primeiro modelo de números

Descrevemos nessa seção o antigo modelo grego de números reais. Esse modelo, vigente até o tempo de Pitágoras, consistia de uma síntese do conhecimento matemático gerado pelos povos que antecederam a civilização grega. Tinha como base a relação entre o conjunto dos números racionais e a reta euclidiana.

Vimos, nos Capítulos 1 e 2 deste texto, como as necessidades práticas de contar e medir deram origem aos números naturais e aos racionais positivos. Dessa forma os conjuntos $\mathbb{Z}_+$ e $\mathbb{Q}_+$, juntamente com as operações aritméticas fundamentais, constituíram os primeiros modelos numéricos.

O estudo das formas geométricas foi induzido pelas necessidades práticas e pela busca da expressão da beleza, como construções arquitetônicas, pintura de untesílios, confecção de tapeçarias artísticas. Esse labor deu ensejo à construção psicológica de objetos geométricos abstratos, como o ponto, a reta, o plano e o espaço, e de seus subconjuntos especiais, como segmentos, retângulos, circunferências, esferas, etc.

Os estudiosos das formas e dos números compreenderam que havia uma estreita relação entre esses dois aspectos do mundo abstrato. Os números podiam expressar grandezas características das formas, como comprimento de um segmento, área de uma figura plana, volume de um sólido. Por outro lado, o uso das formas geométricas para o estudo dos números era imprescindível. As formas realizam os números no mundo concreto, pensavam, já que a todo número parecia corresponder um segmento. Isso os deixava mais seguros ao trabalhar com números. Ocorre ainda que para trabalhar diretamente com os números é necessário o desenvolvimento de uma linguagem algébrica, e os matemáticos gregos do tempo de Pitágoras não a tinham. Por isso o estudo das propriedades dos números sempre era feito com figuras e dependia da Geometria.

Firmou-se assim, na mente dos estudiosos, o modelo de números tendo a reta como representação geométrica. Esse modelo é descrito pelo eixo numérico.

Já consideramos o eixo numérico no Capítulo 2. Incluímos os racionais negativos, embora os antigos gregos não os utilizassem. Tomamos essa liberdade histórica em benefício da clareza didática.

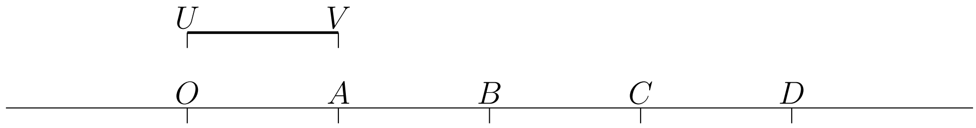


Figura 4.1: Início da construção do eixo numérico

O *eixo numérico* consiste de um segmento UV, chamado *segmento unitário*, ou simplesmente *unidade*, e de uma reta na qual marcamos um ponto O. Usando um compasso com abertura UV e com a ponta seca em O, marcamos o ponto A. Temos duas escolhas para A. Depois que ele foi escolhido, com a ponta seca do compasso em A marcamos o ponto B de modo que A esteja entre O e B. Marcamos os pontos C, D, ..., de forma que B esteja entre A e C, C esteja entre B e D, e assim sucessivamente. Confira a Figura 4.1.

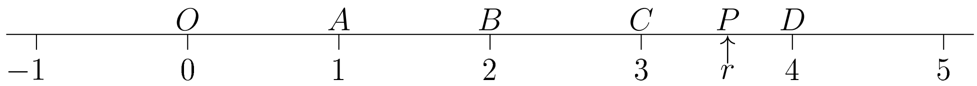


Figura 4.2: O eixo numérico

Em seguida, conforme a Figura 4.2, fazemos corresponder a cada número racional um ponto da reta. Começamos com os números inteiros não negativos, associando 0 a O, 1 a A, 2 a B, e assim por diante. A cada número racional positivo r associamos um ponto P da semirreta $\overrightarrow{OA}$ de origem O usando o processo descrito na Seção 2.3. Em seguida, usando um procedimento simétrico, associamos os números racionais negativos a pontos da semirreta oposta. Se a um ponto P do eixo numérico corresponde um número r, dizemos que r é a *coordenada* de P. A semirreta $\overrightarrow{OA}$ chama-se *semieixo positivo*, e a semirreta oposta, *semieixo negativo*. O ponto O chama-se *origem das coordenadas*.

Se P e Q são pontos de um eixo numérico com coordenadas r e s, respectivamente, o *comprimento* do segmento PQ é definido por $|PQ| = |r - s|$. Em particular, $|OP| = |r|$.

Obtivemos assim um *modelo geométrico* para os números, em que a cada número racional pode ser associado o ponto da reta do qual esse número é a coordenada. Esta relação pode ser representada pelo esquema:

$$\begin{array}{ccc} \text{números racionais} & \rightarrow & \text{eixo numérico} \\ r & \rightarrow & \text{ponto de coordenada } r \end{array}$$

Essa associação, parece, a princípio, ser bem satisfatória. Por exemplo, podemos comparar, somar e subtrair segmentos, assim como multiplicar segmentos por um inteiro positivo, de forma compatível com sua associação com os números. Vejamos.

Consideremos um eixo numérico e sejam AB e CD segmentos desse eixo (esses segmentos podem estar em qualquer localização no eixo). Tomando um compasso com abertura AB transportamos esse segmento de modo que A coincida com a origem das coordenadas e B esteja no semieixo positivo. O mesmo fazemos com CD, de modo que A coincida com C e D esteja no semieixo positivo. Confira a Figura 4.3.

Se B está entre A e D dizemos que $AB < CD$, se B coincide com D dizemos que AB e CD são congruentes e escrevemos $AB \cong CD$, e se D está entre A e B dizemos que $AB > CD$. Essa comparação é compatível com a relação de ordem nos números. De fato, a coordenada de A é

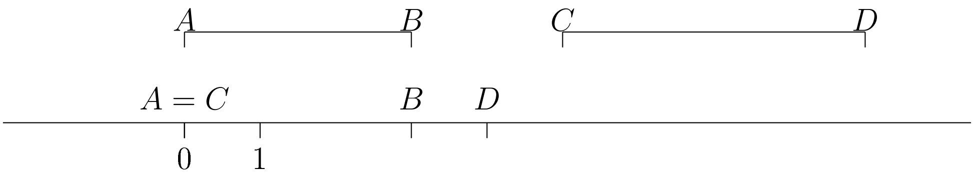


Figura 4.3: Comparação de segmentos

zero, assim como a de C (depois que os segmentos foram transportados). Sejam b a coordenada de B e d a de D. Se B está entre A e D então $b < d$, ou $|AB| < |CD|$ o que combina com a definição de que $AB < CD$. O mesmo ocorre nos outros casos.

Para obter $AB + CD$ procedemos da mesma forma, exceto que, ao transportarmos CD colocamos C em B e D de modo que B está entre A e D. Definimos $AB + CD$ como qualquer segmento congruente a AD. Confira a Figura 4.4. Essa definição também combina com a adição de números, pois $|AB + CD| = |AB| + |CD|$.

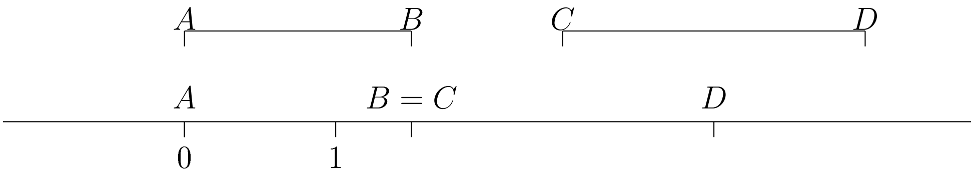


Figura 4.4: Soma de segmentos

Dados um segmento AB e um inteiro positivo n, indicaremos por nAB qualquer segmento congruente à soma $AB + \cdots + AB$ (n vezes).

Se $AB < CD$, fazemos a mesma construção da Figura 4.3 e definimos $CD - AB = BD$. Temos também que $|CD - AB| = |CD| - |AB|$.

Outra observação sobre a relação "números $\rightarrow$ eixo numérico" é que à reta está associada a noção de continuidade. A abstração que fazemos da reta é a de uma linha sem interrupções. Em particular isso implica que entre dois pontos da reta sempre existem outros. Isso parece condizer com as propriedades dos números racionais, pois entre dois números racionais $r < s$ sempre existem outros, por exemplo $(r + s)/2$.

Outra abstração que fazemos da reta é a de uma linha não limitada, no seguinte sentido. Dados segmentos AB e CD, existe um inteiro positivo n tal que justapondo-se o segmento AB n vezes obtemos um segmento maior do que CD. Na Figura 4.5, tomando $n = 6$ temos $nAB > CD$. Chamaremos a essa propriedade de *Princípio da não limitação da reta.*

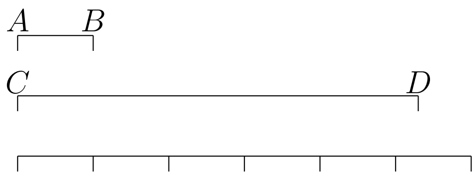


Figura 4.5: Princípio da não-limitação da reta

Esta propriedade da reta é acompanhada pelos números racionais, de acordo com o

Teorema 4.1. *Se M e r são números racionais positivos, então existe um número inteiro positivo n tal que $nr > M$.*

O estudante certamente achou óbvia a afirmação desse Teorema. Mas, mesmo assim, podemos fazer uma demonstração, deduzindo-o do Teorema do Algoritmo da Divisão 1.8, página 14.

Demonstração. Sejam $r = a/b$ e $M = c/d$, com a, b, c e d inteiros positivos. Aplicando o Teorema do Algoritmo da Divisão aos números inteiros positivos bc e ad podemos escrever $bc = adm + r$ para inteiros m e r tais que $m \geq 0$ e $0 \leq r < ad$. Dividindo essa expressão por ad temos $\frac{bc}{ad} = m + s$, com s racional tal que $0 \leq s < 1$. Seja $n = m + 1$. Então $\frac{bc}{ad} < n \Rightarrow \frac{c}{d} < n\frac{a}{b} \Rightarrow nr > M$. □

Em resumo, vimos que todo número racional pode ser representado por um ponto do eixo numérico. Vimos também que podemos adicionar e subtrair segmentos de forma análoga à que fazemos com os números. Ainda, as propriedades abstratas da reta parecem condizer com as propriedades do conjunto dos números racionais. Criamos, dessa forma, um modelo geométrico para os números:

$$\text{números racionais} \quad \rightarrow \quad \text{eixo numérico}$$

Um importante problema que se coloca nesse momento é se podemos estender esse modelo para um do tipo

$$\text{números} \quad \leftrightarrows \quad \text{eixo numérico} \qquad ?$$

perguntando se a associação entre os números e o eixo numérico é biunívoca, no sentido de que a cada racional corresponde um único ponto da reta, e a cada ponto da reta corresponde um único racional. Para resolver isso precisamos aprofundar nossa compreensão sobre a relação entre os números e a reta.

4.3 A hipótese da comensurabilidade

Na seção anterior descrevemos o modelo numérico que foi basicamente herdado de outros povos pelos antigos gregos. Os matemáticos gregos do tempo de Tales e Pitágoras assumiram a tarefa de aprofundar esse modelo aplicando seus novos métodos de estudo, incluindo o uso mais intensivo da dedução. Veremos nesta seção as conclusões a que chegaram.

No modelo "números $\rightarrow$ eixo numérico" existe uma correspondência que combina propriedades dos números com propriedades da reta, como adição, subtração e multiplicação por um inteiro positivo.

O que podemos dizer sobre divisão de segmentos? É importante examinarmos essa questão, pois a divisão é um instrumento que nos permite comparar segmentos.

Dados segmentos AB e CD, o que seria $\frac{AB}{CD}$? Para investigar isso, lembramos que sabemos dividir números racionais. Vamos então examinar mais de perto como o fazemos e ver como podemos nos inspirar nesse conhecimento para propor um significado para a divisão de segmentos.

Começaremos com os inteiros. Dados inteiros positivos a e b existem inteiros q e r com $q \geq 0$ e $0 \leq r < b$ tais que $a = bq+r$ (este resultado é uma adaptação do Teorema 1.8, página 14). Os números q e r podem ser obtidos da seguinte forma. Se $a < b$ tomamos $q = 0$ e $r = a$. Se $a \geq b$ fazemos as subtrações sucessivas $a - b$, $a - 2b$, $a - 3b$, ..., até que essa diferença fique negativa. Seja q o maior inteiro positivo tal que $a - bq \geq 0$. Pondo $r = a - bq$, temos o resultado.

Isto nos dá o primeiro passo para obtermos a/b, pois de $a = bq + r$ temos

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$$

Como $r/b < 1$ escrevemos

$$\frac{a}{b} = q + \frac{1}{b/r}$$

Para obter b/r procedemos a novas reduções, e dividimos b por r aplicando novamente o mesmo Teorema 1.8. Fazendo assim divisões sucessivas aparece um sequência de restos $r > r_1 > r_2 > \cdots \geq 0$. Esse processo tem uma quantidade finita de passos até que se obtém resto zero, pois entre r e zero existe uma quantidade finita de números inteiros. Sabemos também que o menor resto positivo é o máximo divisor comum $d = \mathrm{mdc}(a, b)$ de a e b. Portanto existem inteiros positivos m e n tais que $a = md$ e $b = nd$, e

$$\frac{a}{b} = \frac{md}{nd} = \frac{m}{n}$$

Vemos que d é uma "medida comum" de a e b.

Dados números racionais positivos $u = a/b$ e $v = c/d$, eles também têm uma medida comum, no seguinte sentido: existe um número racional positivo w e existem números inteiros positivos m e n tais que

$$u = mw \qquad \text{e} \qquad v = nw$$

De fato, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ é um número racional, que escrevemos na forma $\frac{m}{n}$, com m e n positivos (podemos também tomar m e n relativamente primos, se for conveniente). Portanto $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$, do que segue $\frac{a}{bm} = \frac{c}{dn}$. Chamaremos esse valor de w. Então w é um número racional com a propriedade desejada, e temos

$$\frac{u}{v} = \frac{mw}{nw} = \frac{m}{n}$$

Vamos aplicar esse mesmo processo a segmentos com o objetivo de construir um significado para a divisão de segmentos. Dados segmentos AB e CD tais que $AB > CD$, fazemos as subtrações sucessivas $AB - CD$, $AB - 2CD$, $AB - 3CD$, ..., enquanto AB for maior do que $2CD$, $3CD$, ... Pelo Princípio da não limitação da reta, comentado na página 59, em algum momento isso não mais ocorre. Se encontrarmos um inteiro positivo q tal que $AB \cong qCD$ cessamos o processo. Caso contrário, seja q o maior inteiro positivo tal que $AB > qCD$. Seja $RS \cong AB - qCD$. Então $RS < CD$ e $AB \cong qCD + RS$. Prosseguimos repetindo o processo para CD e RS, e assim sucessivamente. Supondo que esse processo termina após uma quantidade finita de passos, e chamando o último segmento de TU, encontramos inteiros positivos m e n tais que $AB \cong mTU$ e $CD \cong nTU$. Vemos que, se isso for válido, os segmentos AB e CD têm TU como uma "medida comum", e podemos propor a seguinte definição de divisão de segmentos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$$

A dificuldade aqui é que, no caso de segmentos, não conseguimos provar que esse processo tem uma quantidade finita de passos. Isso atrapalha tudo, pois, se a quantidade de passos é infinita, não podemos encontrar uma "medida comum" dos dois segmentos. Entretanto, se estamos em uma situação em que não temos um conhecimento mais profundo dos números, podemos perfeitamente acreditar que isso é verdadeiro. Afinal das contas, os números racionais são todos os números que conhecemos, e nem nos perguntamos se existem outros. Como dois números racionais têm sempre uma medida comum, nada mais justo do que acreditarmos que isso também seja verdadeiro para segmentos.

Parece que assim pensavam os matemáticos gregos antes de Pitágoras. Denominamos essa ideia de

Hipótese da comensurabilidade Dados segmentos quaisquer AB e CD, existem um segmento TU e inteiros positivos m e n tais que $AB = mTU$ e $CD = nTU$.

Convém fazer as definições:

Definição 4.2. Os números r e s se dizem *comensuráveis* se existirem um número u e números inteiros positivos m e n tais que $r = mu$ e $s = nu$. De forma análoga, os segmentos AB e CD se dizem comensuráveis se existirem um segmento TU e números inteiros positivos m e n tais que $AB = mTU$ e $CD = nTU$.

Foi demonstrado acima que dois números racionais positivos quaisquer são comensuráveis, e, se admitirmos a hipótese da comensurabilidade, dois segmentos quaisquer são comensuráveis. Com essa hipótese os antigos matemáticos gregos tinham a seguinte interpretação para a divisão de segmentos:

Definição 4.3. Dados segmentos AB e CD e números inteiros positivos m e n, dizemos que *AB está para CD na razão $\frac{m}{n}$* se $nAB \cong mCD$. Neste caso escrevemos $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$.

Essa interpretação é complementada pelas Proposições 4.4 e 4.8. Para sua demonstração usaremos sem maiores detalhes as seguintes propriedades sobre os segmentos AB e CD e números inteiros positivos m e n:

Propriedade 1: $n\,(mAB) = nmAB$;

Propriedade 2: $nAB = nCD \Rightarrow AB = CD$.

Proposição 4.4. *Dados segmentos AB e CD comensuráveis então existem inteiros positivos m e n tais que $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$.*

Demonstração. Como AB e CD são comensuráveis existem um segmento TU e inteiros positivos m e n tais que $AB \cong mTU$ e $CD \cong nTU$. Portanto $nAB \cong n(mTU) \cong nmTU \cong m(nTU) \cong mCD$, o que implica $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$. □

Usando esse modelo de número os antigos matemáticos gregos desenvolveram uma teoria para a Geometria. Vejamos como era a demonstração do importante Teorema da Proporcionalidade de Tales com o uso da Hipótese da Comensurabilidade.

Começamos com a seguinte Proposição, conforme [11], páginas 93 e 94.

Proposição 4.5. *Sejam a, b e c três retas paralelas que interceptam outras duas retas d e e nos pontos A, B e C e nos pontos A', B' e C', respectivamente. Se B está entre A e C, então B' está entre A' e C'. Ainda, se $AB \cong BC$, então $A'B' \cong B'C'$.*

Demonstração. A Figura 4.6 ilustra a Proposição.

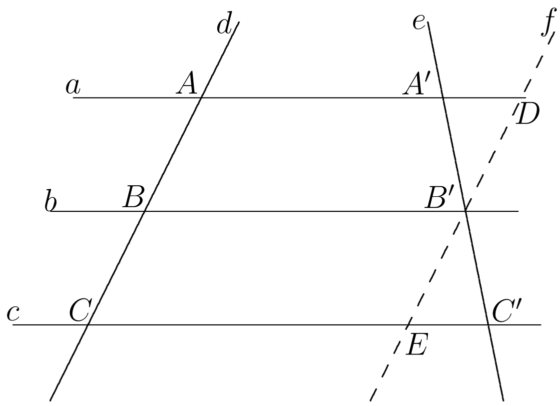


Figura 4.6: Preparação do Teorema da Proporcionalidade de Tales

Suponhamos que B está entre A e C. Então A e C estão em semiplanos opostos em relação à reta b. Como as retas a, b e c são paralelas, A e A' estão no mesmo semiplano, e C e C' estão no outro semiplano, ainda em relação à reta b. Portanto A' e C' estão em semiplanos opostos em relação à reta b. Logo o segmento $A'C'$ intercepta b em um ponto, que é B'. Segue que B' está entre A' e C'.

Suponhamos $AB \cong BC$. Consideremos a reta f paralela a d e que contém B'. Sejam D a interseção de a e f, e E a interseção de c e f. Como num paralelogramo os lados opostos têm o mesmo comprimento, segue que $AB \cong DB'$ e $BC \cong B'E$. Portanto $DB' \cong B'E$. Usando que ângulos alternos internos determinados por duas paralelas e uma transversal são congruentes, temos $B'DA' \cong B'EC'$. Segue que $A'B' \cong B'C'$. □

Corolário 4.6. *Sejam a_1, a_2, ..., a_k k retas paralelas que interceptam outras duas retas d e e nos pontos A_1, A_2, ..., A_k e nos pontos A'_1, A'_2, ..., A'_k, respectivamente. Se A_i está entre A_{i-1} e A_{i+1}, então A'_i está entre A'_{i-1} e A'_{i+1}, para todo $1 < i < k$. Ainda, se $A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong \ldots \cong A_{k-1}A_k$, então $A'_1A'_2 \cong A'_2A'_3 \cong \ldots \cong A'_{k-1}A'_k$.*

Vamos precisar do

Corolário 4.7. *Dados um segmento AB e um inteiro positivo n, podemos, usando exclusivamente régua e compasso, dividir AB em n segmentos congruentes.*

Demonstração. A Figura 4.7 sugere como fazer isso. Tomamos um segmento AA_1 e construímos $AA_n = nAA_1$, marcando em AA_n os pontos A, A_1, A_2, ..., A_n de modo que $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \ldots \cong A_{n-1}A_n$. Traçamos A_nB e as paralelas pelos pontos A_1, A_2, ... A_{n-1}. Em virtude do Corolário 4.6, essas paralelas determinam em AB n segmentos congruentes. □

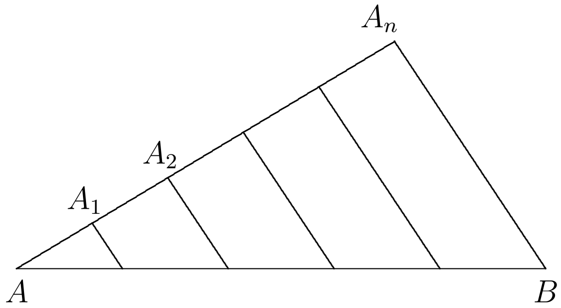


Figura 4.7: Divisão em partes iguais com régua e compasso

Obtemos a recíproca da Proposição 4.4:

Proposição 4.8. *Dados segmentos AB e CD, se existem números inteiros positivos m e n tais que $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$ então AB e CD são comensuráveis.*

Demonstração. Temos $nAB \cong mCD$. Dividimos AB em m segmentos congruentes, e seja AA_1 um deles. Então $AB \cong mAA_1$. Logo $nAB \cong nmAA_1 \Rightarrow mCD \cong nmAA_1 \Rightarrow CD \cong nAA_1$. Portanto AB e CD são comensuráveis. □

O Teorema da Proporcionalidade de Tales fornece um instrumento para identificar segmentos que estão na mesma razão. Este teorema está na base da teoria de semelhança. Vejamos como era feita sua demonstração usando a hipótese da comensurabilidade.

Teorema 4.9 (da Proporcionalidade de Tales)**.** *Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, intercepta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.*

Demonstração usando a hipótese da comensurabilidade.

A Figura 4.8 ilustra o Teorema. ABC é o triângulo dado, DE é paralelo a BC, com D entre A e B, e com E entre A e C. Dizer que a reta $\overleftrightarrow{DE}$ divide os lados AB e AC na mesma razão significa que $AD/DB = AE/EC$. Isso é o que devemos provar.

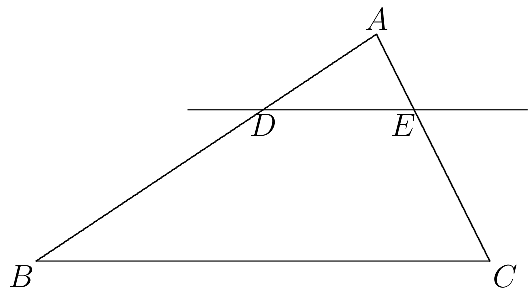


Figura 4.8: Teorema da Proporcionalidade de Tales

Suponhamos que AD e BD sejam comensuráveis. Existem um segmento ST e números inteiros positivos m e n tais que $AD = mST$ e $BD = nST$. Portanto $\frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}$. Sejam A_1, A_2, ..., A_m pontos do segmento AD de modo que $A_m = D$, A_1 está entre A e A_2, A_2 está entre A_1 e A_3, e assim por diante, e $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \ldots \cong A_{m-1}A_m \cong ST$. Sejam B_1, B_2, ..., B_n pontos do segmento DB de modo que $B_n = B$, B_1 está entre D e B_2, B_2 está entre B_1 e B_3, e assim por diante, e $DB_1 \cong B_1B_2 \cong \ldots \cong B_{n-1}B_n \cong ST$. Para todo $1 \le i \le m$, consideremos por A_i a reta paralela a BC, e seja A_i' o ponto em que essa reta intercepta AE. Para todo $1 \le j \le n$, consideremos por B_j a reta paralela a BC, e seja B_j' o ponto em que essa reta intercepta EC. Em virtude do Corolário 4.6 temos

$$AA_1' \cong A_1'A_2' \cong \ldots \cong A_{m-1}'A_m' \cong EB_1' \cong B_1'B_2' \cong \ldots \cong B_{n-1}'C$$

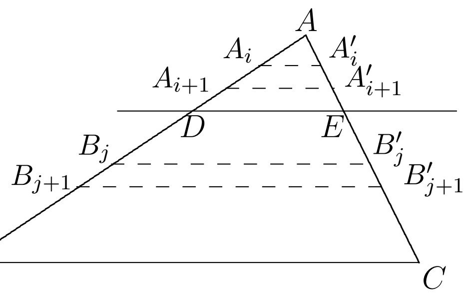


Figura 4.9: Detalhes do Teorema da Proporcionalidade de Tales

Portanto $AE = mAA_1'$ e $EC = nAA_1'$ e $\frac{AE}{EC} = \frac{m}{n}$. Segue que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

□

Vemos assim que o importante Teorema de Tales tinha uma demonstração que dependia inteiramente da hipótese da comensurabilidade. Podemos imaginar o que ocorreu quando se verificou que essa hipótese era falsa.

4.4 A descoberta da incomensurabilidade

Contam os livros de História da Matemática que os antigos matemáticos gregos, por volta de 500 a. C., estavam satisfeitos com o modelo numérico constituído pelo conjunto dos números racionais e sua relação com o eixo numérico. Parece que supunham que entre os números racionais e os pontos da reta existia uma associação biunívoca: a cada ponto do eixo numérico corresponderia exatamente um número racional. Admitiam, assim, a hipótese da comensurabilidade. Com essa suposição demonstravam inúmeros teoremas da Geometria Euclidiana.

Mas, em determinado momento, através de dedução, descobriram que existiam segmentos não comensuráveis. Isto significa que existiam pontos do eixo numérico que não correspondiam a números racionais. Em outros termos, se admitirmos a existência apenas de números racionais, a reta não ficaria completa. Ficaria com muitos "furos", o que contradiz nosso entendimento de que a reta é contínua.

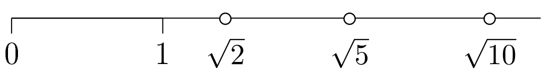


Figura 4.10: Alguns furos não racionais no eixo numérico

Os historiadores não têm clareza se a descoberta de segmentos não comensuráveis foi feita primeiro com $\sqrt{2}$, através da manipulação da diagonal do quadrado, ou com $\sqrt{5}$, mediante a manipulação da diagonal do pentágono regular. De qualquer forma conta a tradição que essa descoberta se deu na Escola Pitagórica, provavelmente no início do 5º Século a. C.

Números não racionais correspondem a segmentos não comensuráveis em relação ao segmento unitário. Por exemplo, dado um quadrado de lado AB de medida 1 e diagonal AC, se AC e AB fossem comensuráveis, existiriam um segmento TU e inteiros positivos m e n tais que $AB = mTU$ e $AC = nTU$. Logo $|AB| = m|TU|$ e $|AC| = n|TU|$, do que segue $1 = m|TU|$ e $\sqrt{2} = n|TU|$. Dividindo vem $\sqrt{2} = n/m$, o que é uma contradição.

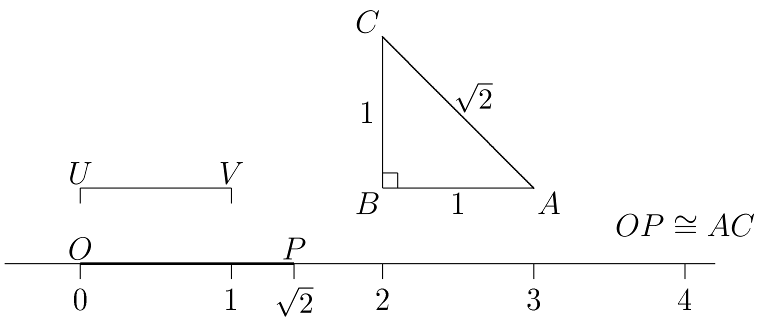


Figura 4.11: Localização de $\sqrt{2}$ no eixo numérico

Com essa descoberta abriu-se uma crise na Matemática. Como demonstrar o Teorema da Proporcionalidade de Tales e outros teoremas da Geometria sem a hipótese de que os segmentos são comensuráveis?

Afinal, o que são os números? É válido o modelo "números $\leftrightarrows$ eixo numérico" ?

Uma solução para esse impasse só viria com os estudos realizados por matemáticos gregos do Século IV a. C. Veremos na próxima seção como a Teoria das Proporções de Eudoxo permitiu a construção de um novo modelo para os números.

4.5 O modelo de número de Eudoxo

Platão fundou sua famosa Academia em Atenas por volta de 380 a. C. Era uma escola que se dedicava a estudos filosóficos e científicos. Por essa época ainda persistia o problema originado pela descoberta dos números incomensuráveis. Platão incentivava seus discípulos a resolver essa questão, o que foi feito por Eudoxo e outros matemáticos de seu tempo, com sua original definição de igualdade entre proporções. A Teoria das Proporções de Eudoxo, como é chamada, permitiu refazer a demonstração dos teoremas da Geometria que haviam sido postos em dúvida pela descoberta da incomensurabilidade.

A definição de Eudoxo nos dá condições para sabermos quando a razão de dois segmentos é igual à razão de outros dois segmentos. Para isso Eudoxo utiliza desigualdades entre segmentos.

A definição de Eudoxo de segmentos proporcionais pode ser assim colocada:

Definição 4.10. Dados segmentos AB, CD, EF e GH, dizemos que AB está para CD assim como EF está para GH se, dados inteiros positivos m e n quaisquer, temos:

(i) se $nAB \cong mCD$ então $nEF \cong mGH$,
e
(ii) se $nAB > mCD$ então $nEF > mGH$,
e
(iii) se $nAB < mCD$ então $nEF < mGH$.

Nessas condições escrevemos $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$.

O estudante mais inexperiente talvez tenha dificuldade na interpretação dessa definição. Nós a explicaremos com mais detalhes logo adiante. Antes disso vejamos como ela permite demonstrar o Teorema da Proporcionalidade de Tales 4.9.

Demonstração do Teorema 4.9 da Proporcionalidade de Tales para segmentos quaisquer.
Consideremos a Figura 4.12, em que $\triangle ABC$ é o triângulo dado, DE é paralelo a BC, com D entre A e B, e com E entre A e C. Queremos provar que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

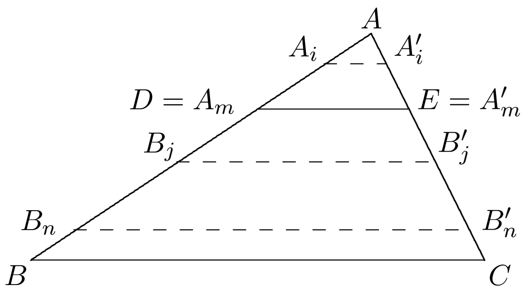


Figura 4.12: Teorema da Proporcionalidade de Tales 3

Sejam m e n números inteiros positivos. Dividindo o segmento AD em m segmentos congruentes (Corolário 4.7) obtemos pontos A_1, A_2, ..., A_m de modo que $A_m = D$, A_1 está entre A e A_2, A_2 está entre A_1 e A_3, e assim por diante, e $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \ldots \cong A_{m-1}A_m$. Portanto $AD = mAA_1$. Sejam B_1, B_2, ..., B_n pontos da semirreta $\overrightarrow{DB}$ de modo que B_1 está entre D e B_2, B_2 está entre B_1 e B_3, e assim por diante, e $DB_1 \cong B_1B_2 \cong \ldots \cong B_{n-1}B_n \cong AA_1$. Portanto $DB_n = nAA_1$. Para todo $1 \leq i \leq m$, consideremos por A_i a reta paralela a BC, e seja A'_i o ponto em que essa reta intercepta AE. Para todo $1 \leq j \leq n$, consideremos por B_j a reta paralela a BC, e seja B'_j o ponto em que essa reta intercepta $\overrightarrow{EC}$. Em virtude do Corolário

4.6 temos

$$AA'_1 \cong A'_1A'_2 \cong \ldots \cong A'_{m-1}A'_m \cong EB'_1 \cong B'_1B'_2 \cong \ldots \cong B'_{n-1}B'_n$$

Portanto $AE \cong mAA'_1$ e $EB'_n \cong nAA'_1$.

Notemos que

$$AD \cong mAA_1 \text{ e } DB_n \cong nAA_1 \Rightarrow nAD \cong nmAA_1 \text{ e } mDB_n \cong mnAA_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow nAD \cong mDB_n$$

e

$$AE \cong mAA'_1 \text{ e } EB'_n \cong nAA'_1 \Rightarrow nAE \cong nmAA'_1 \text{ e } mEB'_n \cong mnAA'_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow nAE = mEB'_n$$

Temos agora três casos a considerar.

Caso 1. $nAD \cong mDB$. Então $B_n = B$ e $B'_n = C$, o que implica $nAE \cong mEC$. Portanto

$$nAD \cong mDB \Rightarrow nAE \cong mEC$$

Caso 2. $nAD < mDB$. Então $mDB_n < mDB$ e B_n está entre D e B (como na Figura 4.12). Então B'_n está entre E e C e $mEB'_n < mEC$. Logo $nAE < mEC$. Provamos assim que

$$nAD < mDB \Rightarrow nAE < mEC$$

Caso 3. Considerando a situação contrária $nAD > mDB$ demonstramos, de modo análogo ao caso 2, que

$$nAD > mDB \Rightarrow nAE > mEC$$

O resultado segue da Definição 4.10. Aqui termina a demonstração do Teorema da Proporcionalidade de Tales 4.9. □

Uma consequência desse teorema é que podemos construir uma teoria de semelhança de triângulos. Isto está feito no Capítulo 7 de [11]. Podemos também utilizar essa teoria para multiplicar e dividir segmentos de reta.

A Figura 4.13 ilustra como é obtido o produto dos segmentos AB e CD. Na semirreta $\overrightarrow{AB}$ marcamos o ponto C tal que $AC = 1$ (o ponto C pode estar entre A e B ou não). Traçamos o segmento CD perpendicular a $\overrightarrow{AB}$. Seja E o ponto de encontro entre a semirreta $\overrightarrow{AD}$ e a reta perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ por B. Então BE é o segmento procurado, pois

$$\frac{CD}{AC} = \frac{BE}{AB} \quad \Rightarrow \quad AB \times CD = BE$$

A mesma Figura 4.13 ilustra como é obtida divisão de segmentos dados BE e AB, pois

$$\frac{BE}{AB} = \frac{CD}{AC} \quad \Rightarrow \quad \frac{BE}{AB} = CD$$

Com todas essas considerações, como fica nosso novo modelo geométrico de números? Lembramos que o antigo modelo ficou prejudicado com a descoberta de números não racionais. Estávamos construindo a associação

$$\text{números} \quad \sim \quad \text{eixo numérico}$$

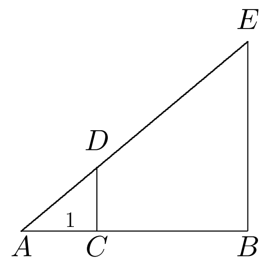


Figura 4.13: Multiplicação e divisão com régua e compasso

começando com a construção do conjunto $\mathbb{Q}$ e depois associando a cada número um ponto do eixo numérico. Na verdade fizemos o movimento

$$\text{números} \quad \longrightarrow \quad \text{eixo numérico}$$

quando descobrimos que existem pontos da reta que não ficaram associados a números. Para completar a construção parece que agora é melhor implementar o movimento inverso

$$\text{números} \quad \longleftarrow \quad \text{eixo numérico}$$

aumentando dessa forma nosso conjunto de números.

Dado um eixo numérico com origem de coordenadas O, queremos definir um novo conjunto de números considerando todos os segmentos OP para todo ponto P do eixo numérico. Dessa forma esse novo conjunto inclui os números racionais já definidos, e outros números, como $\sqrt{2}$. Esse novo conjunto, como sabemos, é chamado *conjunto dos números reais*, e indicado por $\mathbb{R}$.

Notemos que na definição de eixo numérico que fizemos na Seção 4.2, na página 58, escolhemos, antes de mais nada, um segmento UV como unidade. Este segmento tem tamanho arbitrário, mas, depois de construído o eixo numérico com essa unidade, todo comprimento de segmento dado por esse eixo se refere a essa unidade. Em outros termos, o comprimento de um segmento é sempre um valor relativo, referente a uma unidade previamente escolhida. A ideia assim é representar os novos números pelos quocientes OP/UV. Adotando a Definição 4.10 de Eudoxo como critério para comparar razões entre segmentos, podemos adotar como números os símbolos AB/CD, e definir o novo conjunto

$$\mathbb{R} = \left\{ \frac{AB}{CD} \mid AB,\ CD \text{ segmentos quaisquer} \right\}$$

denominado *conjunto dos números reais.*

O que desejamos agora é compreender o que vem a ser esse novo conjunto de números, e descrever suas propriedades. Em particular, precisaríamos definir nesse conjunto as operações aritméticas básicas e verificar que essas operações constituem uma extensão das respectivas operações no conjunto $\mathbb{Q}$.

Seria muito penoso continuar o estudo dos números reais usando esse modelo geométrico. Na próxima seção veremos um modelo algébrico para o conjunto $\mathbb{R}$, e que facilita muito continuarmos nossos estudos. Para o momento vejamos uma interpretação da Definição 4.10 de Eudoxo.

Sejam P e Q pontos de um eixo numérico com origem O, e consideremos os símbolos OP/UV e OQ/UV. Segundo Eudoxo, escrevemos $\frac{OP}{UV} = \frac{OQ}{UV}$ quando, dados inteiros positivos quaisquer m e n, temos

(i) se $nOP \cong mUV$ então $nOQ \cong mUV$,

e

(ii) se $nOP > mUV$ então $nOQ > mUV$,
e
(iii) se $nOP < mUV$ então $nOQ < mUV$.

Passando da notação geométrica para a notação algébrica, sejam $|OP| = x$ e $|OQ| = y$. Considerando $|UV| = 1$, as condições acima equivalem a

(i) se $nx = m$ então $ny = m$, e **(ii)** se $nx > m$ então $ny > m$, e **(iii)** se $nx < m$ então $ny < m$.

ou ainda a

(i) se $x = \frac{m}{n}$ então $y = \frac{m}{n}$, e **(ii)** se $x > \frac{m}{n}$ então $y > \frac{m}{n}$, e **(iii)** se $x < \frac{m}{n}$ então $y < \frac{m}{n}$.

Estas condições significam que os números reais x e y são iguais quando:

$$\text{todo racional} > x \text{ é também} > y \text{ e vice-versa}$$

ou

$$\text{todo racional} < x \text{ é também} < y \text{ e vice-versa}$$

Podemos agora fazer a seguinte leitura da Definição 4.10 de Eudoxo: todo número real x fica caracterizado pelo conjunto dos números racionais que são menores do que ele (ou, equivalentemente, x fica caracterizado pelo conjunto dos números racionais que são maiores do que ele).

Isso nos traz a ideia de fazer a associação

$$x \quad \leftrightarrows \quad \{\text{ racionais} < x\}$$

Essa foi justamente a ideia usada por Dedekind para construir um modelo algébrico para o conjunto dos números reais. Estudaremos esse modelo na próxima seção.

A Teoria das Proporções de Eudoxo, combinada com o método de dupla redução ao absurdo, permitiu a demonstração de resultados famosos, como o seguinte teorema de Arquimedes: "as áreas de dois discos estão entre si assim como os quadrados de seus raios". Para ver uma demonstração confira, por exemplo, [24], Capítulo 1. Para estudar mais detalhes sobre a Teoria das Proporções de Eudoxo confira [64], Capítulo 20.

4.6 O modelo de número de Dedekind

Vimos como o modelo geométrico permitiu ampliar o conceito de número, e criar um novo modelo, o conjunto $\mathbb{R}$. Essa identificação entre o eixo numérico e $\mathbb{R}$ foi e continua sendo importante, mas na Matemática atual o conjunto dos números reais é construído algebricamente, o que nos dá uma agilidade muito maior em sua manipulação. A construção algébrica de $\mathbb{R}$ foi feita no Século XIX por vários matemáticos, dentre eles se destaca Richard Dedekind. O principal instrumento teórico dessa proposta é o uso da Teoria dos Conjuntos.

Dedekind, segundo ele mesmo relata, inspirou-se na Teoria das Proporções de Eudoxo: todo número real a é inteiramente determinado pelo números racionais que são menores do que a. Usando a linguagem de conjuntos, ele definiu os chamados *cortes*, hoje conhecidos como *cortes de Dedekind.*

Vamos explicar as ideias de Dedekind. Estamos supondo que já está construído o conjunto $\mathbb{Q}$. Começamos com a

Definição 4.11. Dado um subconjunto não vazio A de $\mathbb{Q}$, dizemos que A tem *máximo* se existir $m \in A$ tal que $a \leq m$ para todo $a \in A$. Dizemos que A tem *mínimo* se existir $m \in A$ tal que $m \leq a$ para todo $a \in A$.

Segue a

Definição 4.12. Um *corte* é um subconjunto $L \subset \mathbb{Q}$ que satisfaz às seguintes propriedades: (i) $L \neq \emptyset$ e $\mathbb{Q} - L \neq \emptyset$; (ii) se $r \in L$ e se s é um número racional tal que $s < r$ então $s \in L$; (iii) L não tem máximo em $\mathbb{Q}$.

Temos agora a

Definição 4.13. O conjunto

$$\mathbb{R} = \{L \subset \mathbb{Q} \mid L \text{ é um corte }\}$$

chama-se *conjunto dos números reais.*

A primeira observação que faremos é a

Proposição 4.14. *Seja r um número racional. O conjunto $L_r = \{s \in \mathbb{Q} \mid s < r\}$ é um corte.*

Demonstração. Devemos verificar as três condições da Definição 4.12. É claro que as condições (i) e (ii) estão satisfeitas. Para ver (iii), suponhamos que L_r tenha máximo m. Então $m < r$. Mas entre m e r existe um número racional s. Logo $m < s < r$ e $s \in L_r$. Mas $m < s$ contraria o fato de m ser máximo de L_r. Portanto L_r não tem máximo, e isto termina a demonstração. $\square$

Para todo $r \in \mathbb{Q}$ o corte L_r será chamado *corte racional.* Os outros cortes serão chamados *cortes irracionais.* Fazendo a identificação $L_r \cong r$ vemos que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Sabemos que $\mathbb{R} - \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Os elementos desse conjunto chamam-se *números irracionais.*

Quando definimos um novo conjunto numérico a primeira providência é definir operações neste conjunto. No caso de $\mathbb{R}$ devemos definir as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de modo que sejam uma extensão das respectivas operações já definidas em $\mathbb{Q}$. Em $\mathbb{R}$ devemos também definir uma ordem compatível com a ordem de $\mathbb{Q}$. Para não sobrecarregar este texto faremos isso de forma sintética, e não nos preocuparemos em demonstrar todas as propriedades. O estudante pode obter mais detalhes em [48], página 43 e seguintes, e em [81], página 3 e seguintes.

Definição 4.15. Se L e T são cortes, escrevemos $L < T$ quando existe um número racional r tal que $r \in T$ e $r \notin L$.

Também usamos para os cortes as notações $>$, $\leq$ e $\geq$ com os significados de costume. É fácil ver que vale a Lei da Tricotomia: quaisquer que sejam os cortes L e T temos: $L < T$ ou $L = T$ ou $L > T$. Também é fácil verificar a transitividade: dados cortes L, S e T tais que $L < S$ e $S < T$ então $L < T$. Vale também a seguinte propriedade: se r e s são racionais, então $L_r < L_s$ se e somente se $r < s$. Ainda, para todo corte L, temos $r \in L$ se e somente se $L_r < L$.

Uma propriedade esperada é a

Proposição 4.16. *Sejam L e T cortes e suponha que para todo corte racional S_r tal que $S_r < L$ então $S_r < T$, e vice-versa. Nessas condições vale que $L = T$.*

Em outros termos, os números reais x e y são iguais quando todo racional $< x$ é também $< y$ e vice-versa.

Proposição 4.17. *Sejam L e T cortes tais que $L < T$. Então existe um corte racional L_s tal que $L < L_s < T$.*

Portanto entre dois números reais quaisquer sempre existe um número racional.

Demonstração. Da definição de $L < T$ temos que existe um racional r tal que $r \in T$ e $r \notin L$. Como T não tem máximo, então r não é máximo de T. Portanto existe um racional s tal que $r < s$ e $s \in T$. Como $s \in T$ e $s \notin L_s$, então $L_s < T$. Como $r \in L_s$ e $r \notin L$ vem $L < L_s$. $\square$

Vamos agora definir adição de cortes. Precisamos primeiro da

Proposição 4.18. *Se L e T são cortes, então o conjunto $L + T = \{r + s \mid r \in L \text{ e } s \in T\}$ é um corte.*

Definição 4.19. $L + T$ chama-se *soma* dos cortes L e T.

Fica definida uma operação de *adição* em $\mathbb{R}$. É fácil verificar as propriedades associativa e comutativa. Temos também que L_0 é o elemento neutro dessa operação. Se r e s são racionais então $L_r + L_s = L_{r+s}$.

Proposição 4.20. *Seja L um corte. Então o conjunto $S = \{r \in \mathbb{Q} \mid -r \in \mathbb{Q} - L \text{ e } -r \text{ não é mínimo de } \mathbb{Q} - L\}$ é um corte. Ainda, S é o único corte tal que $L + S = L_0$.*

Definição 4.21. Seja L um corte. Indicaremos por $-L$ o corte S definido na Proposição 4.20, chamado *corte oposto* de L.

Portanto $L+(-L) = L_0 = (-L)+L$. Se L e T são cortes tais que $L < T$ então $L+S < T+S$ para todo corte S.

Proposição 4.22. *Sejam L e T cortes. Então existe um único corte S tal que $L + S = T$.*

Definição 4.23. Sejam L e T cortes. O corte S definido na Proposição 4.22 é chamado *corte diferença* de T e L, e é indicado por $T - L$. Fica definida uma operação de *subtração* em $\mathbb{R}$.

Proposição 4.24. *Sejam L e T cortes tais que $L \geq L_0$ e $T \geq L_0$. Consideremos o conjunto*

$$LT = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 0\} \cup \{rs \mid r \in L \text{ e } r \geq 0 \text{ e } s \in T \text{ e } s \geq 0\}$$

Então LT é um corte.

Definição 4.25. Seja L um corte. O *valor absoluto* de L é

$$|L| = \begin{cases} L & \text{se } L \geq L_0 \\ -L & \text{se } L < L_0. \end{cases}$$

Definição 4.26. Sejam L e T cortes. Definimos o *produto* de L e T por

$$LT = \begin{cases} LT & \text{se } L \geq L_0 \text{ e } T \geq L_0 \text{ (Proposição 4.24)} \\ -|L||T| & \text{se } L < L_0 \text{ e } T \geq L_0 \\ -|L||T| & \text{se } L \geq L_0 \text{ e } T < L_0 \\ |L||T| & \text{se } L < L_0 \text{ e } T < L_0 \end{cases}$$

Fica definida uma operação de *multiplicação* em $\mathbb{R}$. Podem ser verificadas as propriedades comutativa, associativa e distributiva. Ainda L_1 é o elemento neutro. Para todo corte L temos $LL_0 = L_0$. Quaisquer que sejam os cortes L e T, se $LT = L_0$ então $L = L_0$ ou $T = L_0$. Se $L_0 < L < T$ e se $S > L_0$, então $LS < TS$. Se r e s são racionais então $L_rL_s = L_{rs}$.

Finalmente temos a

Proposição 4.27. *Sejam L e T cortes tais que $L \neq L_0$. Então existe um único corte S tal que $LS = T$.*

Em particular, se L é um corte tal que $L \neq L_0$, então existe um único corte S tal que $LS = L_1$. O corte S é chamado *inverso* de L.

O conjunto $\mathbb{R}$ assim definido resguarda uma importante propriedade do eixo numérico, a continuidade, isto é, no conjunto $\mathbb{R}$ não existem "furos". As lacunas que foram observadas na associação números racionais $\sim$ eixo numérico não existem mais na associação números reais $\sim$ eixo numérico.

Dedekind descreveu essa propriedade através do

Teorema 4.28. *Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ tais que $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}$ e se $x \in A$ e $y \in B$ então $x < y$. Nessas condições existe um único número real z tal que $x \leq z$ para todo $x \in A$ e $z \leq y$ para todo $y \in B$.*

Corolário 4.29. *Nas condições do Teorema 4.28 ou A tem máximo ou B tem mínimo.*

A afirmação do Teorema 4.28 é referida como *Propriedade da Completitude* de $\mathbb{R}$. Ela pode ser descrita de outra forma, mais fácil de utilizar. Antes de fazê-lo vejamos algumas definições.

Definição 4.30. Dado um subconjunto não vazio A de $\mathbb{R}$, dizemos que A é *limitado inferiormente* se existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq a$ para todo $a \in A$. Neste caso chamamos s de *limitante inferior*. Por outro lado, A se diz *limitado superiormente* se existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq r$ para todo $a \in A$. Neste caso chamamos r de *limitante superior*. Dizemos que A é *limitado* se for limitado inferiormente e limitado superiormente. Caso contrário dizemos que A é *ilimitado*. Dizemos que A tem *máximo* se existir $m \in A$ tal que $a \leq m$ para todo $a \in A$. Dizemos que A tem *mínimo* se existir $m \in A$ tal que $m \leq a$ para todo $a \in A$. Se A é limitado superiormente, o mínimo do conjunto de seus limitantes superiores, se existir, é chamado *supremo* de A. Se A é limitado inferiormente, o máximo do conjunto de seus limitantes inferiores, se existir, é chamado *ínfimo* de A.

Temos agora o

Teorema 4.31 (Propriedade da completitude dos números reais)**.** *Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem supremo.*

Por simetria temos também que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente tem ínfimo.

Para ver uma demonstração desse terorema, consulte [81], página 13.

Exemplo 4.32. Vejamos o que é $\sqrt{2}$ na forma de um corte. Seja

$$L = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 0\} \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq 0 \text{ e } r^2 < 2\}$$

Vamos primeiro provar que L é um corte, de acordo com a Definição 4.12. Como $1 \in L$, temos $L \neq \emptyset$. Como $2 \notin L$, temos $\mathbb{Q} - L \neq \emptyset$. Portanto está satisfeita a condição (i) da Definição. Sejam $x \in L$ e y um número racional tal que $y < x$. Se $x \leq 0$ então $y < 0$ e $y \in L$. Se $x > 0$ então $y^2 < x^2$, logo $y^2 < 2$ e $y \in L$. Portanto está também satisfeita a condição (ii) da Definição. Falta provar que L não tem máximo.

Seja $x \in L$ tal que $x > 0$. Então $x^2 < 2$ e $\frac{2-x^2}{2x+1} > 0$. Portanto existe um número racional t tal que

$$0 < t < 1 \quad \text{e} \quad 0 < t < \frac{2 - x^2}{2x + 1}$$

Notemos que $x + t \in L$. De fato, $x + t > 0$ e

$$(x+t)^2 = x^2 + 2xt + t^2 = x^2 + (2x+t)t < x^2 + (2x+1)t < x^2 + (2 - x^2) = 2$$

Portanto, para todo $x \in L$ existe $y \in L$ tal que $x < y$. Isto prova que L não tem máximo, e que L é um corte. Como $L > L_0$, usando a Proposição 4.24 temos

$$LL = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 0\} \cup \{rs \mid r, s \in L, r \geq 0, s \geq 0\}$$

Vamos provar que $LL = L_2$, em que $L_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s < 2\}$ é o corte racional determinado por 2. Vejamos primeiro que $LL \subseteq L_2$. Seja $x \in LL$. Se $x < 0$, é claro que $x \in L_2$. Suponhamos $x \geq 0$. Então $x = rs$, com $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r^2 < 2$ e $s^2 < 2$. Então $r^2 s^2 < 4 \Rightarrow (rs)^2 < 4 \Rightarrow rs < 2$ $\Rightarrow x < 2$. Logo $x \in L_2$, e $LL \subseteq L_2$.

Vamos provar agora que $L_2 \subseteq LL$. Seja $x \in L_2$. Se $x < 0$, é claro que $x \in LL$. Se $0 \leq x \leq 1$ escrevemos $x = x \cdot 1$, com $x^2 < 2$ e $1^2 < 2$. Portanto $x \in LL$. Suponhamos $1 < x < 2$. Queremos escrever $x = rs$, com $r > 0$ e $s > 0$ racionais tais que $r^2 < 2$ e $s^2 < 2$. Para isso nos inspiramos na Subseção 3.4.2, página 46.

Começamos com $r_0 = x$ e $s_0 = 1$. Temos $r_0, s_0 \in \mathbb{Q}$, $r_0 > s_0 > 0$, $x = r_0 s_0$ e $r_0 - s_0 = x - 1 < 2 - 1 = 1$.

Definimos agora $r_1 = (r_0 + s_0)/2$ e $s_1 = x/r_1$. Temos $r_1, s_1 \in \mathbb{Q}$, $r_1 > 0$, $s_1 > 0$, $x = r_1 s_1$. Ainda

$$r_1^2 - x = \left(\frac{r_0 + s_0}{2}\right)^2 - r_0 s_0 = \frac{r_0^2 + 2r_0 s_0 + s_0^2 - 4r_0 s_0}{4} = \frac{(r_0 - s_0)^2}{4}$$

Isto implica $r_1^2 > x \Rightarrow r_1^2 > r_1 s_1 \Rightarrow r_1 > s_1$. Ainda

$$r_1 - s_1 = \frac{r_0 + s_0}{2} - \frac{x}{r_1} = \frac{r_0 + s_0}{2} - \frac{2r_0 s_0}{r_0 + s_0} = \frac{r_0 - s_0}{r_0 + s_0} \frac{r_0 - s_0}{2} < \frac{r_0 - s_0}{2}$$

Em seguida definimos $r_2 = (r_1 + s_1)/2$ e $s_2 = x/r_2$. Temos $r_2, s_2 \in \mathbb{Q}$, $r_2 > 0$, $s_2 > 0$, $x = r_2 s_2$. Ainda

$$r_2^2 - x = \frac{(r_1 - s_1)^2}{4} \quad \text{e} \quad r_2 > s_2 \quad \text{e} \quad r_2 - s_2 < \frac{r_1 - s_1}{2}$$

Desta forma definimos indutivamente, para todo número natural $n \geq 0$, números racionais positivos r_n e s_n tais que $x = r_n s_n$, $r_0 > s_0$, $r_0 - s_0 < 1$, e, para todo $n \geq 1$,

$$r_n^2 - x = \frac{(r_{n-1} - s_{n-1})^2}{4} \quad \text{e} \quad r_n > s_n \quad \text{e} \quad r_n - s_n < \frac{r_{n-1} - s_{n-1}}{2}$$

Portanto

$$r_n - s_n < \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad r_n^2 - x < \frac{1}{2^{2n+2}}$$

para todo $n \geq 1$. Escolhendo n suficientemente grande para que $1/2^{2n+2} < 2 - x$ temos

$$r_n^2 < x + \frac{1}{2^{2n+2}} < x + 2 - x = 2 \quad \text{e} \quad s_n^2 < r_n^2 < 2$$

Para esse n temos $x = r_n s_n$, $r_0 > s_0 > 0$, $r_n^2 < 2$ e $s_n^2 < 2$. Logo $x \in LL$, e terminamos a demonstração de que $LL = L_2$. Definimos $L = \sqrt{2}$. Como identificamos $L_2 = 2$, temos $(\sqrt{2})^2 = 2$, demonstrando assim que existe um número real positivo y tal que $y^2 = 2$.

Terminamos aqui nossa exposição sobre o modelo de Dedekind e a gênese histórica dos números reais. O estudante certamente ficou com a impressão de que não é simples trabalhar com os cortes de Dedekind. Isso é verdade. Por isso esse recurso é utilizado apenas para definir o conjunto dos números reais e obter suas propriedades. Depois disso podemos esquecer os cortes, e para investigar as propriedades dos números reais utilizamos de preferência as sequências convergentes, que serão estudadas no capítulo seguinte.

4.7 Pequeno dicionário de propriedades de $\mathbb{R}$

As operações de adição e multiplicação de $\mathbb{R}$ satisfazem às seguintes propriedades fundamentais:

A1. *Associatividade da adição*: quaisquer que sejam a, b e c em $\mathbb{R}$ tem-se $(a+b)+c = a+(b+c)$.

A2. *Elemento neutro da adição*: o elemento $0 \in \mathbb{R}$ satisfaz à seguinte condição: $a + 0 = a = 0 + a$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

A3. *Elemento simétrico da adição*: para todo $a \in \mathbb{R}$ existe um elemento b em $\mathbb{R}$ tal que $a + b = 0 = b + a$. O elemento b chama-se *simétrico* de a em $\mathbb{R}$ e é indicado por $-a$.

A4. *Comutatividade da adição*: quaisquer que sejam a e b em $\mathbb{R}$ tem-se $a + b = b + a$.

M1. *Associatividade da multiplicação*: quaisquer que sejam a, b e c em $\mathbb{R}$ tem-se $(ab)c = a(bc)$.

M2. *Elemento neutro da multiplicação*: o elemento $1 \in \mathbb{R}$ satisfaz à seguinte condição: $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

M3. *Elemento inverso da multiplicação*: para todo $a \neq 0$ em $\mathbb{R}$ existe um elemento b em $\mathbb{R}$ tal que $ab = 1 = ba$. O elemento b chama-se *inverso* de a em $\mathbb{R}$, e é indicado por a^{-1}

M4. *Comutatividade da multiplicação*: quaisquer que sejam a e b em $\mathbb{R}$ tem-se $ab = ba$.

D. *Distributividade*: quaisquer que sejam a, b e c em $\mathbb{R}$ tem-se $a(b + c) = ab + ac$.

Dados a e b em $\mathbb{R}$, a soma $a + (-b)$ será indicada por $a - b$, e é chamada *diferença* entre a e b. A operação que associa a a e b sua diferença $a - b$ é chamada *subtração.*

Dados a e b em $\mathbb{R}$, com $b \neq 0$, o elemento ab^{-1} será indicado também por a/b, ou $\frac{a}{b}$, e é chamado *quociente* entre a e b. A operação que associa a a e a b seu quociente a/b é chamada *divisão.*

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é *ordenado.* Isto significa que $\mathbb{R}$ tem um subconjunto $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, chamado *conjunto dos números reais positivos*, satisfazendo às seguintes condições:

P1. A soma e o produto de números reais positivos são positivos.

P2. Dado $a \in \mathbb{R}$, uma e apenas uma das seguintes alternativas ocorre: ou $a = 0$, ou $a \in \mathbb{R}_+$ ou $-a \in \mathbb{R}_+$.

Se indicarmos por $\mathbb{R}_-$ o conjunto dos elementos $-a$, com $a \in \mathbb{R}_+$, temos

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_-$$

(união disjunta). $\mathbb{R}_-$ chama-se *conjunto dos números reais negativos.*

Se a e b são elementos de $\mathbb{R}$, escrevemos $a < b$ quando $b - a \in \mathbb{R}_+$. Isto equivale a dizer que existe $c \in \mathbb{R}_+$ tal que $b = a + c$.

Escrevemos $b > a$ quando $a < b$. Se $a < b$ dizemos que a é menor do que b, e se $b > a$ dizemos que b é maior do que a. Em particular $a > 0$ significa que a é positivo, ou seja, que $a \in \mathbb{R}_+$. Por outro lado, $a < 0$ significa que a é negativo. Escrevemos $a \leq b$ para indicar que $a < b$ ou $a = b$. Analogamente para $a \geq b$.

A relação de ordem $a < b$ tem as seguintes propriedades:

O1. *Transitividade*: quaisquer que sejam a, b e c em $\mathbb{R}$, se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.

O2. *Tricotomia*: quaisquer que sejam a e b em $\mathbb{R}$, ocorre uma e apenas uma das alternativas seguintes: ou $a = b$, ou $a < b$ ou $a > b$.

O3. *Monotonicidade da adição*: quaisquer que sejam a, b e c em $\mathbb{R}$, se $a < b$ então $a+c < b+c$.

O4. *Monotonicidade da multiplicação*: quaisquer que sejam a, b e c em $\mathbb{R}$, se $a < b$ e se $c > 0$ então $ac < bc$. Se $a < b$ e se $c < 0$ então $ac > bc$.

Definição 4.33. Dado $a \in \mathbb{R}$, seu *valor absoluto*, é anotado por $|a|$ e definido por

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

O valor absoluto tem as seguintes propriedades, dentre outras:

VA1. Para todo $a \in \mathbb{R}$ se tem $|a| \geq 0$.

VA2. $|a| = 0 \iff a = 0$.

VA3. Para todo $a \in \mathbb{R}$ se tem $|-a| = |a|$.

VA4. $|ab| = |a||b|$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

VA5. $|a \pm b| \leq |a| + |b|$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

VA6. $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

Lembramos também a

Propriedade da completitude Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem supremo.

Todo conjunto numérico satisfazendo as propriedades listadas acima chama-se *corpo ordenado completo*. Portanto $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.

Daqui por diante, em todo este texto, investigaremos o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ utilizando a linguagem algébrica sugerida em nosso "pequeno dicionário de propriedades". Vejamos como exemplo duas situações.

No final da Seção 4.2 vimos o que denominamos de *princípio da não limitação da reta*. Relacionamos essa propriedade com o conjunto dos números racionais no Teorema 4.1, página 59. Como fica esse resultado agora com o novo conjunto $\mathbb{R}$?

Temos:

Teorema 4.34 (Princípio da ordenação de Eudoxo)**.** *Quaisquer que sejam os números reais positivos M e δ, existe um inteiro positivo n tal que $n\delta > M$.*

O Princípio da ordenação de Eudoxo é chamado de Princípio de Arquimedes por muitos autores. Vejamos sua demonstração.

Demonstração. Suponhamos que existam números reais positivos M e δ para os quais a afirmação seja falsa. Então é limitado superiormente por M o conjunto $A = \{n\delta \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$. Seja s o supremo de A. Como $s - \delta < s$, então $s - \delta$ não é um limitante superior de A, e assim existe $n\delta \in A$ tal que $n\delta > s - \delta$. Segue que $(n+1)\delta > s$. Mas $(n+1)\delta \in A$, o que contraria o fato de ser s o supremo de A. Portanto vale a afirmação do Teorema. □

No Capítulo 9 vamos precisar do seguinte resultado.

Problema resolvido 4.35. Prove que, para todo número real $a > 0$ e para todo número inteiro $n \geq 2$, existe um único número real positivo b tal que $b^n = a$. Esse número b é denominado *raiz n-ésima de a* e é anotado por $\sqrt[n]{a}$, ou por $\sqrt{a}$ quando $n = 2$.

Demonstração. Seja $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^n < a\}$. Como $0 \in B$, vem que $B \neq \emptyset$. Por outro lado, seja $y = 1 + a$. Então $y^n > y > a$. Afirmo que y é um limitante superior de B. Seja $x \in B$. Se $x \leq 0$, temos $x < y$, pois y é positivo. Se $0 < x$, de $x^n < a$ temos $x^n < y^n$, o que implica $x < y$. (caso contrário, se $y \leq x$, temos $yy \leq xy$ e $xy \leq xx \Rightarrow y^2 \leq x^2$, etc.). Portanto y é um limitante superior de B. Seja b o supremo de B. Vamos provar que $b^n = a$.

Suponhamos primeiro que $b^n < a$. Seja $h \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < h < 1 \quad \text{e} \quad h < \frac{a - b^n}{(1+b)^n - b^n}$$

Temos

$$\begin{aligned}(b+h)^n &= b^n + \binom{n}{1}b^{n-1}h + \binom{n}{2}b^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}h^n \leq \\ &\leq b^n + h\left[\binom{n}{1}b^{n-1} + \binom{n}{2}b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\right] = \\ &= b^n + h[(1+b)^n - b^n] < b^n + (a - b^n) = a\end{aligned}$$

Portanto $b^n < a \Rightarrow b + h \in B$, contrariando o fato de que b é o supremo de b.

Suponhamos agora que $b^n > a$. Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < k < 1 \quad \text{e} \quad k < \frac{b^n - a}{(1+b)^n - b^n}$$

Para todo número real t tal que $t \geq b - k$ temos

$$\begin{aligned}t^n \geq (b-k)^n &= b^n - \binom{n}{1}b^{n-1}k + \binom{n}{2}b^{n-2}k^2 - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}k^n = \\ &= b^n - k\left[\binom{n}{1}b^{n-1} - \binom{n}{2}b^{n-2}k + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}k^{n-1}\right] \geq \\ &\geq b^n - k\left[\binom{n}{1}b^{n-1} + \binom{n}{2}b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\right] = \\ &= b^n - k[(1+b)^n - b^n] > b^n - (b^n - a) = a\end{aligned}$$

Portanto $b - k$ é um limitante superior de B, contrariando o fato de que b é o supremo de b.

Para ver a unicidade, sejam b_1 e b_2 números reais positivos tais que $b_1^n = a$ e $b_2^n = a$. Se fosse $b_1 < b_2$, aplicando a propriedade de compatibilidade entre a ordem a a multiplicação teríamos $b_1^n < b_2^n$, o que não é possível. Igualmente não podemos ter $b_2 < b_1$. Logo $b_1 = b_2$.

Terminamos. □

4.8 Problemas

Problema 4.8.1. a) Explique como a Figura 4.13 funciona para calcular o produto de números com régua e compasso. Dado um segmento unitário, calcule um segmento de comprimento $3\sqrt{2}$ usando esse método. **b)** Explique como a Figura 4.13 funciona para calcular a divisão de números com régua e compasso. Dado um segmento unitário, calcule um segmento de comprimento $3/\sqrt{2}$ usando esse método.

Problema 4.8.2. Combinando os estudos feitos nas seções 3.3 e 4.4, vemos que o eixo numérico tem infinitos pontos que correspondem a números irracionais, por exemplo, a $\sqrt{k}$, para todo inteiro positivo k tal que $\sqrt{k} \notin \mathbb{Z}$. Verifique quantos números irracionais existem no intervalo $[0, 1]$. Será que no intervalo $[1, 2]$ existem mais ou menos números irracionais do que no intervalo $[0, 1]$? No eixo numérico positivo $[0, \infty)$ existem mais ou menos números irracionais do que no eixo numérico negativo $(-\infty, 0]$?

Problema 4.8.3. Prove que a diagonal de um quadrado e seu lado são incomensuráveis. Isto é, dado um número real positivo l, não existe um número u com a seguinte propriedade: existem inteiros positivos m e n tais que $l = mu$ e $l\sqrt{2} = nu$. Encontre outros exemplos de números incomensuráveis. Dê exemplos de números irracionais diferentes comensuráveis.

Problema 4.8.4. Complete os detalhes da seguinte demonstração do Teorema 4.9 usando áreas de triângulos. Considere a Figura 4.14. É dado o triângulo ABC, DE é paralelo a BC, com D entre A e B e com E entre A e C. Queremos provar que $AD/DB = AE/EC$.

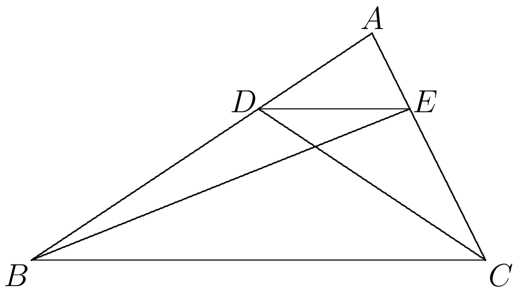


Figura 4.14: Uma prova do Teorema da Proporcionalidade de Tales

Consideremos os segmentos BE e CD. Indicamos a área de uma figura do plano F por $a(F)$. Temos $a(BDE) = a(CDE)$. Ainda $a(ADE)/a(BDE) = AD/BD$ e $a(ADE)/a(CDE) = AE/CE$. Conclua.

Problema 4.8.5. Use o Princípio de Eudoxo (página 75) para demonstrar o seguinte resultado. Seja $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq r < 1/n$ para todo inteiro positivo n. Prove que $r = 0$.

Problema 4.8.6. Prove que para todo $x \in \mathbb{R}$ existem inteiros n e m tais que $n > x$ e $m < x$.

Problema 4.8.7. Complete os detalhes da seguinte demonstração da Proposição 4.17, que não usa cortes. A afirmação é: entre dois números reais quaisquer existe um número racional.

Sejam $x < y$ números reais, e seja $\delta = y - x$. Existe um inteiro positivo n tal que $n\delta > 1$. Existe um inteiro k tal que $k > xn$. Portanto é não vazio o conjunto $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid \frac{k}{n} > x\}$. A tem mínimo m. Portanto $\frac{m}{n} > x$ e $\frac{m-1}{n} \leq x$. Logo $x < \frac{m}{n} < y$.

Problema 4.8.8. a) Prove que a soma ou o produto de um número racional (não nulo no caso de produto) com um número irracional é irracional. **b)** Prove que o inverso de qualquer número irracional é irracional. **c)** Dê exemplos para mostrar que a soma ou o produto de números irracionais positivos pode ser racional. **d)** Dê exemplos para mostrar que o quadrado de um número irracional pode ser irracional.

Problema 4.8.9. Demonstre que entre dois números reais quaisquer existem infinitos números racionais. Demonstre que entre dois números reais quaisquer existem infinitos números irracionais.

Problema 4.8.10. Prove que existem números irracionais r e t tais que r^t é racional.

Problema 4.8.11. Considere um sistema de coordenadas cartesianas no plano. Demonstre que a reta determinada por $(0,0)$ e $(1,\sqrt{2})$ não contém ponto (m,n) com $m,n \in \mathbb{Z}$ e $m \neq 0$ ou $n \neq 0$.

Problema 4.8.12. Use o Princípio de Eudoxo 4.34 para demonstrar o seguinte resultado. Sejam a_0, a_1, a_2, ... números reais positivos tais que $a_1 < a_0/2$, $a_2 < a_1/2$, ... Seja $\varepsilon > 0$ um número real. Então existe n tal que $a_n < \varepsilon$.

Problema 4.8.13. Usando apenas as propriedades dadas na Seção 4.7, prove os resultados enunciados a seguir para números reais quaisquer. **a)** $a + c = b + c$ implica $a = b$. **b)** O elemento neutro 0 para a operação de adição é único. **c)** Todo número real tem um único simétrico. **d)** $-(-a) = a$ e $-(a+b) = (-a) + (-b)$. **e)** $b + (a - b) = a$, $0 - a = -a$ e $a - a = 0$. **f)** $a(b-c) = ab - ac$. **g)** $a \cdot 0 = 0$. **h)** O elemento neutro 1 para a operação de multiplicação é único. **i)** Se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. **j)** O inverso de qualquer número $a \neq 0$ é único. **k)** Se $c \neq 0$ e se $ac = bc$, então $a = b$. **l)** $(-a)b = -(ab)$ e $(-a)(-b) = ab$. **m)** Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ então $(a^{-1})^{-1} = a$ e $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Problema 4.8.14. Usando apenas as propriedades dadas na Seção 4.7, prove que a^2 é positivo para todo $a \neq 0$ em $\mathbb{R}$. Demonstre que 1 é positivo.

Problema 4.8.15. Dados a e b em $\mathbb{R}$, com $b \neq 0$, na Seção 4.7 definimos a fração $\frac{a}{b}$, ou a/b, por ab^{-1}. Usando apenas as propriedades da referida Seção prove que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Problema 4.8.16. Usando apenas as propriedades dadas na Seção 4.7, prove os resultados enunciados a seguir para números reais quaisquer. **a)** $|a+b| \geq |a| - |b|$. **b)** $|x - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. **c)** $|a - b| \geq |a| - |b|$. **d)** $|a - b| \geq |b| - |a|$. **e)** $|a| \leq |a+b| + |b|$. **f)** $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Problema 4.8.17. Prove que, para todo número real a e para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número racional r tal que $|a - r| < \varepsilon$. Na verdade, existem infinitos números racionais r com essa propriedade.

Problema 4.8.18. Conforme vimos no Problema Resolvido 4.35, para todo número real $a > 0$, $\sqrt{a}$ é o único número real positivo b tal que $b^2 = a$. Usando as propriedades da Seção 4.7 prove que $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Problema 4.8.19. Seja S o subconjunto de $\mathbb{R}$ formado pelos números $n/(n+1)$ para todo $n \geq 0$ inteiro. Mostre que S é limitado e encontre o supremo e o ínfimo de S.

Problema 4.8.20. Dê exemplos ou prove que não existe. **a)** dois números irracionais diferentes cujo produto seja racional e cujo quociente seja também racional. **b)** dois números irracionais diferentes cuja soma seja racional e cuja diferença seja também racional.

4.9 Temas para investigação

Tema 4.9.1. Um retângulo $ABCD$ chama-se *áureo* se tiver a seguinte propriedade: se marcarmos o quadrado $ABEF$, o retângulo remanescente $DFEC$ é semelhante ao retângulo inicial $ABCD$. Confira a Figura 4.15. **a)** Pondo $a = AB$ e $b = EC$, mostre que $a/(a+b) = b/a$. **b)** Prove que o retângulo remanescente $DFEC$ também é áureo. **c)** Podemos assim obter uma infinidade de retângulos áureos. Os lados menores desses retângulos formam a sequência a, b, $a-b$, $2b-a$, $2a-3b$, ... Dê uma fórmula geral para essa sequência. **d)** Prove que os lados de um retângulo áureo são incomensuráveis. **e)** Calcule o valor exato da razão b/a. Este é o chamado *número áureo*. **f)** Pesquise propriedades do retângulo áureo e do número áureo.

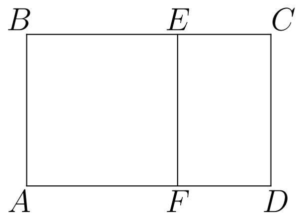


Figura 4.15: O retângulo áureo

Tema 4.9.2. Estudamos, com a Figura 3.3, na página 41, a construção sugerida no Diálogo Mênon, de Platão, para duplicar um quadrado dado com o método da régua e compasso (duplicar um quadrado dado significa construir um quadrado com o dobro da área). Investigue como seria uma construção equivalente para duplicar um cubo com régua e compasso. Dá certo?

4.10 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 4.10.1. Apresentar os números reais para estudantes da escola básica é certamente uma questão complicada. Como os autores de livros textos lidam com isso? O que sugerem as orientações curriculares oficiais?

Atividade 4.10.2. A construção dos números reais e a investigação de suas propriedades é um dos maiores feitos da mente analítica humana. Alguns desses aspectos podem ser despertados em estudantes da escola básica? Como? Pesquise opiniões de autores especializados em ensino da Matemática.

Capítulo 5

Sequências numéricas

5.1 Introdução

As sequências numéricas aparecem em todos os ramos da Matemática. São utilizadas para a descrição de conceitos e objetos matemáticos, implementação de processos iterativos, cálculo aproximado, dedução de propriedades, etc. Constituem um dos melhores instrumentos para a investigação das propriedades dos números reais.

5.2 Presença das sequências na Matemática

Uma sequência bem conhecida do estudante é a chamada *progressão aritmética*, definida por

$$a_1 = a \quad \text{e} \quad a_n = a_{n-1} + r \quad \text{para todo } n \geq 2 \tag{5.1}$$

em que a e r são números reais dados, chamados, respectivamente, *primeiro termo* e *razão*. As condições 5.1 definem a sequência passo a passo. Assim temos primeiro $a_1 = a$, depois $a_2 = a_1 + r = a + r$, em seguida $a_3 = a_2 + r = (a+r) + r = a + 2r$, e assim sucessivamente. Esse tipo de definição é denominada *definição por recorrência*, pois para obter um termo a_n precisamos "recorrer" ao termo anterior a_{n-1}. Conforme o estudante bem sabe podemos transformar 5.1 em uma fórmula direta em que a_n depende apenas de n e dos números dados a e r:

$$a_n = a + (n-1)r \quad \text{para todo } n \geq 1 \tag{5.2}$$

Do ponto de vista computacional a fórmula direta é, em geral, melhor do que a expressão recorrente, pois para obter um determinado termo da sequência não é necessário calcular os termos anteriores. Transformar uma definição por recorrência em uma fórmula direta chama-se *resolver a recorrência*.

Outro exemplo de sequência bem conhecida do estudante é a chamada *progressão geométrica*, definida por

$$a_1 = a \quad \text{e} \quad a_n = qa_{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 2 \tag{5.3}$$

em que a e q são números reais dados, também chamados, respectivamente, *primeiro termo* e *razão*. A fórmula direta para essa sequência é

$$a_n = aq^{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 1 \tag{5.4}$$

Talvez a sequência mais famosa da Matemática seja a *sequência de Fibonacci*. Ela aparece na solução do seguinte problema, proposto por Leonardo de Pisa (conhecido também por Fibonacci) em seu livro *Liber Abaci* (Livro do Ábaco): "Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se, em cada mês, cada par gera um novo par, o qual se torna produtivo a partir do segundo mês?" Talvez seja esse o primeiro problema de crescimento populacional conhecido. Admitimos algumas hipóteses simplificadoras, por exemplo, nenhum coelho morre e sempre nascem aos pares, isto é, um macho e uma fêmea. Indicando por a_n a quantidade de pares no final do n-ésimo mês, temos $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, e assim por diante, no final do mês n temos os pares que já existiam no final do mês $n-1$, portanto, a_{n-1}, e mais os que acabaram de nascer, cada par gerado por um par que existia no final do mês $n-2$, portanto, a_{n-2} pares. Dessa forma temos $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Podemos calcular $a_{12} = 233$, que é a quantidade de pares ao final de um ano, incluindo o par inicial.

Consideraremos a seguinte definição adaptada: a sequência de Fibonacci $(f_n)_{n\geq 0}$ é definida por

$$\begin{cases} f_0 &= 0, \quad f_1 = 1, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{5.5}$$

Portanto a sequência $(f_n)_{n\geq 0}$ é constituída pelos números 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., sendo que cada termo é a soma dos dois anteriores.

Nem sempre é fácil resolver uma definição por recorrência. O estudante pode verificar que a sequência de Fibonacci é dada pela fórmula direta

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Definição 5.1. Uma sequência é uma regra ou função que associa a cada inteiro positivo n um número real a_n. É usual representar uma sequência na forma "$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$", ou na forma $(a_n)_{n\geq 1}$. Diz-se que a_n é o *termo de ordem n* da sequência, e se lê "a índice n". O conjunto $\{a_n \mid n \geq 1\}$ chama-se *conjunto de valores* da sequência.

Na definição de sequência não é obrigatório começar com $n = 1$. Também não é obrigatório que o conjunto de índices seja infinito. Uma definição mais geral é a seguinte. Seja S um subconjunto do conjunto dos números inteiros. Uma função $f\colon S \to \mathbb{R}$ é uma *sequência indexada* por S. Pondo $a_n = f(n)$ para todo n em S, a sequência pode ser anotada por $(a_n)_{n\in S}$. Quando não for necessário especificar o domínio S da sequência ela pode ser indicada simplesmente por (a_n). Uma sequência (a_n) se diz *constante* quando $a_n = c$ para todo n, em que c é um número real.

As três sequências que apresentamos como exemplo nos dão uma pequena ideia da diversidade de aplicações que elas proporcionam. Mas aqui estamos interessados em um tipo particular de sequência, denominadas convergentes.

5.3 Sequências numéricas convergentes

A grosso modo dizemos que uma sequência (a_n) é convergente quando ela tende para um determinado número a, chamado limite da sequência. Neste caso escrevemos $a_n \to a$.

Examinemos, como exemplo, a sequência $(1/n)_{n\geq 1}$. À medida que n aumenta, seus valores diminuem. Temos assim

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad \ldots$$

Vemos que os valores dessa sequência se aproximam cada vez mais de 0, o que nos sugere que $a_n \to 0$. O mesmo ocorre com $(1/2^n)_{n\geq 1}$ e $(1/\sqrt{n})_{n\geq 1}$. Examinando seus valores podemos imaginar que $1/2^n \to 0$ e $1/\sqrt{n} \to 0$. Por outro lado, examinando os valores de $a_n = (n^2 - 1)/(n^2 + n + 1)$ vemos que

$$\begin{array}{llllll}
a_1 & = 0 & a_6 & = 0{,}813 & a_{11} & = 0{,}902 \\
a_2 & = 0{,}428 & a_7 & = 0{,}842 & a_{12} & = 0{,}910 \\
a_3 & = 0{,}615 & a_8 & = 0{,}863 & a_{13} & = 0{,}918 \\
a_4 & = 0{,}714 & a_9 & = 0{,}879 & a_{14} & = 0{,}924 \\
a_5 & = 0{,}774 & a_{10} & = 0{,}891 & a_{15} & = 0{,}929
\end{array}$$

o que nos leva a considerar que o limite dessa sequência pode ser 1. Entretanto a tabela acima não nos autoriza descartar que o limite seja $19/20 = 0{,}95$, por exemplo. Mesmo aumentando a tabela e calculando $a_{50} \approx 0{,}9796$, o limite poderia ser $49/50 = 0{,}98$, por exemplo. Para constatar que realmente $a_n \to 1$ necessitamos de algo mais do que uma tabela.

Nos exemplos considerados acima as sequências são crescentes ou descrescentes. Podemos ter exemplos mais estranhos, como é o caso de $a_n = (1/n) \operatorname{sen} n$, $n \geq 1$ (n em radianos). Listamos abaixo seus quinze primeiros valores.

$$\begin{array}{llllll}
a_1 & \approx +0{,}8415 & a_6 & \approx -0{,}0466 & a_{11} & \approx -0{,}0909 \\
a_2 & \approx +0{,}4546 & a_7 & \approx +0{,}0939 & a_{12} & \approx -0{,}0447 \\
a_3 & \approx +0{,}0470 & a_8 & \approx +0{,}1237 & a_{13} & \approx +0{,}0323 \\
a_4 & \approx -0{,}1892 & a_9 & \approx +0{,}0458 & a_{14} & \approx +0{,}0708 \\
a_5 & \approx -0{,}1918 & a_{10} & \approx -0{,}0544 & a_{15} & \approx +0{,}0434
\end{array}$$

O exame dos quinze primeiros valores da sequência não nos esclarece se ela se acumula em algum ponto. Mas, podemos verificar algebricamente que a sequência converge para zero. Lembrando que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $|a_n| \leq 1/n$ para todo $n \geq 1$. Como $1/n \to 0$, isto nos indica que $|(1/n) \operatorname{sen} n| \to 0$, e que $(1/n) \operatorname{sen} n \to 0$.

Essas considerações nos mostram que necessitamos de técnicas precisas para trabalhar com sequências convergentes. Precisamos ter uma definição e propriedades que permitam operacionalizar seu uso, por exemplo, as propriedades que foram utilizadas logo acima:

$$|a_n| < \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad |a_n| \to 0$$

e

$$|a_n| \to 0 \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0$$

Vejamos primeiro como deve ser a definição de convergência para sequências. Suponhamos que temos uma sequência (a_n) e que o número $a \in \mathbb{R}$ seja um canditato a limite. Como essa sequência deve se aproximar de a?

Dada um número $\varepsilon > 0$, consideremos os números $r \in \mathbb{R}$ que estão a uma distância $< \varepsilon$ de a. Eles formam o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, conforme ilustra a Figura 5.1.

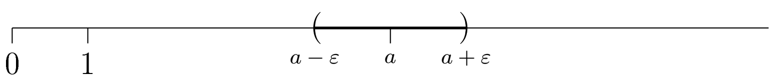


Figura 5.1: Intervalo de raio ε com centro em a

Se ocorrer $a_n \to a$ então, em algum momento, a sequência deve adentrar esse intervalo e não mais sair. Isso significa que deve existir um inteiro positivo n_0 tal que

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Temos portanto a

Definição 5.2. Uma sequência de números reais $(a_n)_{n\geq 1}$ *converge* para um número real a quando, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo n_0 tal que $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Se isso ocorrer anotamos $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, ou, se não houver perda de clareza, $a_n \to a$ ou ainda $\lim a_n = a$. O número a chama-se *limite* da sequência. Se uma sequência converge, dizemos que é *convergente*.

Um detalhe importante dessa definição é que a sequência pode entrar no intervalo e sair, mas existe um momento em que ela entra e não sai mais. Na ilustração da Figura 5.2 n_0 é algum inteiro $> m+1$.

Figura 5.2: Sequência no intervalo de raio ε com centro em a

Sobre a Definição 5.2 esclarecemos que a ideia é que o valor dado $\varepsilon > 0$ seja arbitrariamente pequeno. Notemos ainda que n_0 depende de ε. Se diminuirmos ε a tendência é que teremos que aumentar o valor de n_0. Por isso às vezes essa definição é escrita da seguinte forma: "Uma sequência de números reais $(a_n)_{n\geq 1}$ converge para um número real a quando, para todo número real $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existe um inteiro positivo arbitrariamente grande n_ε tal que $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$".

Observamos ainda que

$$\begin{aligned} a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) &\iff a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \\ &\iff -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \\ &\iff |a_n - a| < \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, na Definição 5.2, a condição

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

é equivalente a

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

Exemplo 5.3. Vamos provar que $1/n \to 0$. Seja $\varepsilon > 0$ um número real. Consideremos o número $1/\varepsilon$. Em virtude do Princípio de Eudoxo 4.34, página 75, existe um inteiro positivo n_0 tal que $n_0 > 1/\varepsilon$. Temos

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > 1/\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Aplicando a Definição 5.2 vemos que $1/n \to 0$.

Exemplo 5.4. Vamos provar que $1/2^n \to 0$. Vamos verificar primeiro que $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$. Para isso podemos usar o Método da Indução Finita, ou então a Fórmula Binomial, como segue:

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} \\ &> \binom{n}{1} \\ &> n \end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$. Logo, $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$.

Seja $\varepsilon > 0$ um número real. Sabemos que existe um inteiro positivo n_0 tal que $n_0 > 1/\varepsilon$. Temos

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > 1/\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$$

Aplicando a Definição 5.2 vemos que $1/2^n \to 0$.

Exemplo 5.5. Vamos provar que $1/\sqrt{n} \to 0$. Existe um inteiro positivo n_0 tal que $n_0 > 1/\varepsilon^2$. Temos

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > 1/\varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} > 1/\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$$

Aplicando a Definição 5.2 vemos que $1/\sqrt{n} \to 0$.

Exemplo 5.6. Vamos provar que $\lim \dfrac{n^2-1}{n^2+n+1} = 1$. Temos

$$\left|\frac{n^2-1}{n^2+n+1} - 1\right| = \frac{n+2}{n^2+n+1}$$

Como $0 < n+2 < 2n$ e $0 < n^2 < n^2+n+1$ para todo $n \geq 3$, temos

$$\frac{n+2}{n^2+n+1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

Portanto

$$\left|\frac{n^2-1}{n^2+n+1} - 1\right| < \frac{2}{n}$$

Dado um número real $\varepsilon > 0$, seja n_0 um inteiro positivo tal que $n_0 > 2/\varepsilon$. Então, para todo $n \geq n_0$, se tem $n > 2/\varepsilon$, e daí $2/n < \varepsilon$, do que segue

$$\left|\frac{n^2-1}{n^2+n+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

Em consequência, $\lim \dfrac{n^2-1}{n^2+n+1} = 1$.

Esses exemplos são bem simples. Em geral, trabalhar com limites usando diretamente a definição pode ser bastante complicado. Devido a isso são utilizadas propriedades como as que veremos a seguir.

5.4 Propriedades fundamentais das sequências convergentes

As propriedades fundamentais facilitam bastante o cálculo de limites, evitando o uso direto da Definição 5.2 dada na seção anterior.

Começaremos com o

Teorema 5.7. *O limite de qualquer sequência convergente é único.*

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência convergente e suponhamos que existam dois limites b_1 e b_2 (diferentes). Seja ε um número real tal que $0 < \varepsilon < |b_2 - b_1|$. Como $a_n \to b_1$, existe um inteiro positivo n_1 tal que $|a_n - b_1| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq n_1$. Como $a_n \to b_2$, existe um inteiro positivo n_2 tal que $|a_n - b_2| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq n_2$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então, para todo $n \geq n_0$, temos

$$|b_2 - b_1| = |(a_n - b_1) - (a_n - b_2)| \leq |a_n - b_1| + |a_n - b_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

o que é uma contradição. Portanto o limite é único. $\square$

Teorema 5.8. *Sejam (a_n) e (b_n) sequências convergentes. Então $(a_n + b_n)$ é convergente e*

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$$

Demonstração. Sejam $a = \lim a_n$ e $b = \lim b_n$. Dado $\varepsilon > 0$, existem números inteiros positivos n_1 e n_2 tais que

$$|a_n - a| < \epsilon/2 \quad \text{para todo } n \geq n_1$$

e

$$|b_n - b| < \epsilon/2 \quad \text{para todo } n \geq n_2$$

Seja n_0 o maior dos números n_1 e n_2. Então $|a_n - a| < \epsilon/2$ e $|b_n - b| < \epsilon/2$ para todo $n \geq n_0$. Daí

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$. Fica provado que $(a_n + b_n)$ é convergente e $\lim(a_n + b_n) = a + b$. Em outros termos,

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$$

$\square$

Proposição 5.9. *Se $a_n = c$ é uma sequência constante, então (a_n) é convergente e $a_n \to c$.*

Demonstração. De fato, seja $\varepsilon > 0$. Escolhamos $n_0 = 1$. Então, para todo $n \geq 1$, $|a_n - c| = 0 < \varepsilon$, e isto significa que (a_n) é convergente e $\lim a_n = c$. $\square$

Teorema 5.10. *Seja (a_n) uma sequência convergente, e seja r um número real qualquer. Então (ra_n) é convergente e*

$$\lim ra_n = r \lim a_n$$

Demonstração. Se $r = 0$, temos que $0a_n = 0$ é uma sequência constante, do que segue $\lim 0a_n = 0 = 0 \lim a_n$, e isto prova a propriedade neste caso.

Suponhamos $r \neq 0$. Seja $\lim a_n = a$. Dado $\varepsilon > 0$, ponhamos $\varepsilon' = \varepsilon/|r|$. Existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica

$$|a_n - a| < \varepsilon'$$

Portanto

$$\begin{aligned} & |a_n - a| < \varepsilon/|r| \\ \Longrightarrow & |r||a_n - a| < \varepsilon \\ \Longrightarrow & |r(a_n - a)| < \varepsilon \\ \Longrightarrow & |ra_n - ra| < \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$. Em consequência (ra_n) é convergente e $\lim ra_n = ra = r \lim a_n$. $\square$

Corolário 5.11. *Se* (a_n) *e* (b_n) *são sequências convergentes, então* $(a_n - b_n)$ *é convergente e*

$$\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$$

Demonstração. Temos $\lim(a_n - b_n) = \lim(a_n + (-1)b_n) = \lim a_n + \lim(-1)b_n = \lim a_n + (-1)\lim b_n = \lim a_n - \lim b_n$. □

Corolário 5.12. *Sejam* (a_n) *é uma sequência convergente e* $a \in \mathbb{R}$. *Então* $\lim a_n = a$ *se e somente se* $\lim(a_n - a) = 0$.

Demonstração. Seja $\lim a_n = a$. Sabemos que $(a_n - a)$ é convergente e que $\lim(a_n - a) = \lim a_n - \lim a = a - a = 0$. Reciprocamente, suponhamos que $\lim(a_n - a) = 0$. Então $\lim a_n - \lim a = 0 \Rightarrow \lim a_n = \lim a = a$. □

Teorema 5.13. *Se* (a_n) *e* (b_n) *são sequências convergentes, então* $(a_n b_n)$ *é convergente e*

$$\lim a_n b_n = (\lim a_n)(\lim b_n)$$

Demonstração. Sejam $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$. Vamos primeiro provar que $\lim(a_n - a)(b_n - b) = 0$. Seja $\epsilon > 0$, e seja $\varepsilon' = \sqrt{\varepsilon}$. Existem números naturais n_1 e n_2 tais que

$$n \geq n_1 \quad \text{implica} \quad |a_n - a| < \varepsilon'$$

e

$$n \geq n_2 \quad \text{implica} \quad |b_n - b| < \varepsilon'$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n \geq n_0$ implica

$$\begin{aligned} |(a_n - a)(b_n - b) - 0| &= |(a_n - a)(b_n - b)| \\ &= |a_n - a|\,|b_n - b| \\ &< \varepsilon'\,\varepsilon' \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto $\lim(a_n - a)(b_n - b) = 0$. Considere agora a identidade

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b) + b(a_n - a)$$

Temos

$$\begin{aligned} \lim(a_n b_n - ab) &= \lim(a_n - a)(b_n - b) + \lim a(b_n - b) + \lim b(a_n - a) \\ &= 0 + a\lim(b_n - b) + b\lim(a_n - a) \\ &= 0 + a \cdot 0 + b \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, $\lim(a_n b_n - ab) = 0$. Então $(a_n b_n)$ é convergente e em virtude do Corolário 5.12, temos

$$\lim a_n b_n = ab$$

que é o mesmo que

$$\lim a_n b_n = (\lim a_n)(\lim b_n)$$

□

Para demonstrar a propriedade seguinte vamos precisar do

Lema 5.14. *Se* $\lim a_n = a$ *e se* $a \neq 0$*, existe um inteiro positivo* n_1 *tal que* $n \geq n_1$ *implica* $|a_n| > |a|/2$.

Demonstração. Seja $\varepsilon = |a|/2$. Como $a \neq 0$, vem $\varepsilon > 0$. Então existe um inteiro positivo n_1 tal que $n \geq n_1$ implica $|a_n - a| < \varepsilon$. Mas

$$\big|\,|a_n| - |a|\,\big| \leq |a_n - a|$$

(Problema 4.8.16 (f)) do que segue

$$\big|\,|a_n| - |a|\,\big| < \varepsilon$$

ou

$$\big|\,|a_n| - |a|\,\big| < \frac{|a|}{2}$$

Isso equivale a

$$-\frac{|a|}{2} < |a_n| - |a| < \frac{|a|}{2}$$

Tomando apenas a desigualdade da esquerda, vem

$$|a| - \frac{|a|}{2} < |a_n|$$

ou

$$\frac{|a|}{2} < |a_n| \quad \text{para todo } n \geq n_1$$

□

Teorema 5.15. *Seja* (a_n) *uma sequência convergente, com* $\lim a_n \neq 0$*. Então existe um número inteiro positivo* n_1 *tal que* $n \geq n_1$ *implica que* $(1/a_n)$ *está bem definida, é convergente e*

$$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim a_n}$$

Demonstração. Seja $a = \lim a_n$. Em virtude do Lema 5.14, existe um número inteiro positivo n_1 tal que $n \geq n_1$ implica $|a_n| > |a|/2$. Em particular, $a_n \neq 0$ para todo $n \geq n_1$, e podemos considerar a sequência $1/a_n$ para $n \geq n_1$.

Por outro lado, seja $\varepsilon > 0$, e seja $\varepsilon' = \frac{1}{2}|a|^2\varepsilon$. Existe um inteiro positivo n_2 tal que $n \geq n_2$ implica $|a_n - a| < \varepsilon'$.

Seja $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$. Então $n \geq n_0$ implica

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| &= \left|\frac{a - a_n}{a_n a}\right| \\
&= \frac{|a_n - a|}{|a_n|\,|a|} \\
&= |a_n - a|\,\frac{1}{|a_n|}\,\frac{1}{|a|} \\
&< \varepsilon'\,\frac{2}{|a|}\,\frac{1}{|a|} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Em consequência

$$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$$

ou

$$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim a_n}$$

□

Corolário 5.16. *Sejam* (a_n) *e* (b_n) *sequências convergentes tais que* $\lim a_n = a$*,* $\lim b_n = b$ *e* $b \neq 0$*. Então existe um número inteiro positivo* n_1 *tal que* $n \geq n_1$ *implica que* (a_n/b_n) *está bem definida, é convergente e*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Demonstração. Em virtude do Teorema 5.15 $(1/b_n)$ é convergente. Como $a_n/b_n = a_n(1/b_n)$, aplicando o Teorema 5.13 segue o resultado. □

Exemplo 5.17. Ao calcularmos $\lim \dfrac{5n^2 - 3n + 7}{2n^2 + n - 1}$, poderíamos pensar, num primeiro momento, em aplicar o Corolário 5.16. Entretanto, não é possível fazer isto de imediato, pois as sequências $(5n^2 - 3n + 7)$ e $(2n^2 + n - 1)$ são divergentes. Para que seja válida a propriedade $\lim a_n/b_n = \lim a_n/ \lim b_n$, o Corolário 5.16 exige, antes de mais nada, que as sequências (a_n) e (b_n) sejam convergentes. Por isso, para calcular o limite acima, primeiro transformamos a fração dada em outra fração equivalente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{5n^2 - 3n + 7}{2n^2 + n - 1} &= \frac{\frac{1}{n^2}(5n^2 - 3n + 7)}{\frac{1}{n^2}(2n^2 + n - 1)} \\ &= \frac{5 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \end{aligned}$$

Obtivemos assim uma fração cujo numerador e denominador são sequências convergentes:

$$\lim \left(5 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}\right) = 5 - 0 + 0 = 5$$

e

$$\lim \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 2 + 0 - 0 = 2$$

Podemos agora aplicar o Corolário 5.16:

$$\begin{aligned} \lim \frac{5n^2 - 3n + 7}{2n^2 + n - 1} &= \lim \frac{5 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{\lim \left(5 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}\right)}{\lim \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Uma propriedade muito útil é o

Teorema 5.18 (Teorema da Compressão). *Sejam* (a_n), (b_n) *e* (c_n) *sequências tais que* $\lim a_n = \lim b_n = a$ *e* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *para todo* n. *Então* (c_n) *é convergente e* $\lim c_n = a$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Existe um inteiro positivo n_0 tal que $n \geq n_0$ implica

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{e} \quad a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$$

Então $n \geq n_0$ implica

$$a - \varepsilon < a_n < c_n < b_n < a + \varepsilon$$

ou

$$a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$$

Portanto, $\lim c_n = a$. □

Terminamos com uma propriedade que nos permite operar limites com raízes quadradas. Observamos primeiro que se $\lim a_n = a$ e $a > 0$ então existe um inteiro positivo n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $a_n > 0$ (Problema 5.7.11). Assim, para $n \geq n_0$, podemos considerar $(\sqrt{a_n})$.

Teorema 5.19. *Se* $\lim a_n = a$ *e* $a > 0$ *então existe um inteiro positivo* n_0 *tal que* $(\sqrt{a_n})_{n \geq n_0}$ *está definida e converge para* $\sqrt{a}$.

Demonstração. Combinando os resultados do Problema 5.7.11 e do Lema 5.14, vemos que existe um inteiro positivo n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $a_n > 0$ e $a_n > a/2$. Então $\sqrt{a/2} < \sqrt{a_n}$ e $\sqrt{2a} = 2\sqrt{a/2} < \sqrt{a_n} + \sqrt{a}$, e

$$\frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{2a}}, \quad n \geq n_0$$

Portanto

$$\begin{aligned} 0 \leq |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| &= \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{2a}}\,|a_n - a| \end{aligned}$$

Como $\lim |a_n - a| = 0$, podemos aplicar o Teorema da Compressão 5.18, e obter $\lim |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = 0$. Daí

$$\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$$

□

5.5 Sequências monótonas

As sequências monótonas e limitadas constituem um tipo importante de sequência convergente.

Definição 5.20. Uma sequência de números reais (a_n) se diz *crescente* quando $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n, e *decrescente* quando $a_{n+1} \leq a_n$ para todo n. A sequência é *estritamente crescente* se $a_n < a_{n+1}$ para todo n, e *estritamente decrescente* se $a_{n+1} < a_n$ para todo n. Uma sequência crescente (estritamente ou não) ou decrescente (idem) se diz *monótona*.

Exemplo 5.21. Vejamos um exemplo de sequência monótona. Vamos verificar que a sequência $a_n = n/(2n+1)$, $n \geq 1$, é estritamente crescente. Temos, para todo n inteiro positivo,

$$\begin{aligned}
2n^2 + 3n < 2n^2 + 3n + 1 &\Rightarrow n(2n+3) < (n+1)(2n+1) \\
&\Rightarrow \frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2n+3} \\
&\Rightarrow \frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2(n+1)+1} \\
&\Rightarrow a_n < a_{n+1}
\end{aligned}$$

Portanto, a sequência $a_n = n/(2n+1)$, $n \geq 1$, é estritamente crescente.

Dada uma sequência (a_n) de números reais, podemos aplicar a ela a Definição 4.30, da página 72. Temos assim os conceitos de *limitante superior* de uma sequência, *limitante inferior*, sequência *limitada superiormente*, *limitada inferiormente*, *limitada* e *ilimitada*.

Proposição 5.22. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. De fato, seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência convergente para o limite L. Escolhamos $\epsilon = 1$ na definição de limite. Existe um número natural n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $L - 1 < a_n < L + 1$. Seja M o maior dos números a_1, a_2, a_3, ..., a_{n_0-1}, $L+1$, e seja K o menor dos números a_1, a_2, a_3, ..., a_{n_0-1}, $L-1$. Então $K < a_n < M$ para todo n. Portanto, toda sequência convergente é limitada. □

Vejamos agora o principal resultado desta seção:

Teorema 5.23 (Teorema das Sequências Monótonas)**.** *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Vamos nos restringir ao caso de uma sequência decrescente e limitada. Seja pois (a_n) uma tal sequência. Consideremos o conjunto $C = \{a_n \mid \text{para todo } n\}$. Então C é limitado e, em virtude do Teorema 4.31, página 72, tem um ínfimo l_0. Vamos mostrar que $\lim a_n = l_0$. Dado $\epsilon > 0$, $l_0 + \epsilon$ não é limitante inferior de C. Logo existe $a_{n_0} \in C$ tal que $a_{n_0} < l_0 + \epsilon$. Como a sequência é decrescente, vem $a_n < a_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$. Daí $a_n < l_0 + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Por outro lado, sendo l_0 um limitante inferior, tem-se $l_0 \leq a_n$ para todo n. Fica assim provado que $l_0 - \epsilon < a_n < l_0 + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, o que significa que $\lim a_n = l_0$.

Se a sequência for crescente e limitada, verifica-se de modo análogo que ela converge para o supremo de C. Isto demonstra o teorema. □

Problema resolvido 5.24. Mostre que a sequência $(n/2^n)_{n\geq 1}$ é convergente, e calcule seu limite.

Demonstração. Seja $a_n = n/2^n$, $n \geq 1$. Esta sequência é decrescente (Problema 5.7.22). Do Exemplo 5.4, página 84, temos $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$. Portanto $0 < a_n < 1$ para todo $n \geq 1$ e a sequência é monótona e limitada. Em virtude do Teorema das Sequências Monótonas 5.23, existe $L = \lim a_n$.

Para descobrir quem é L, observe que na fração $n/2^n$, tanto o numerador quanto o denominador crescem arbitrariamente. Entretanto, o denominador cresce mais rapidamente, o que fica claro comparando-se alguns termos:

n	1	2	3	4	5	$\dots$
2^n	2	4	8	16	32	$\dots$

Isto nos leva a pensar que $L = 0$. Vamos demonstrar que isto realmente acontece. Observemos primeiro que $\lim a_{n+1} = L$, pois a sequência é a mesma. Notemos também que

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L &= \lim a_{n+1} \\ &= \lim\left(\frac{1}{2}\,a_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\lim a_n + \lim \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}\,L + 0 = \frac{1}{2}L. \end{aligned}$$

Ora, o único número L tal que $L = \frac{1}{2}\,L$ é $L = 0$. Fica provado que a sequência $(n/2^n)$ converge para zero. $\square$

Podemos demonstrar que a sequência $(n/2^n)$ converge para zero de outra forma. Usando a fórmula binomial temos:

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} \\ &> \binom{n}{2} \\ &> \frac{n(n-1)}{2} \\ &> \frac{n^2}{4} \end{aligned}$$

para todo $n \geq 2$. Segue que $0 < n/2^n < 4/n$ para todo $n \geq 1$. Como $4/n \to 0$, o Teorema da Compressão garante que $n/2^n \to 0$.

5.6 Sequências divergentes e subsequências

Apresentamos nesta seção exemplos de sequências não convergentes, e explicamos o significado das expressões $\lim a_n = +\infty$ e $\lim a_n = -\infty$. Apresentamos também o conceito de subsequência.

Definição 5.25. Uma sequência é chamada *divergente* quando não é convergente.

Portanto, a definição de sequência divergente é a negativa da definição de sequência convergente. Em outros termos, uma sequência (a_n) é divergente quando, para todo número real a, existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja o inteiro positivo n_0, existe um inteiro $n_1 > n_0$ tal que $|a_{n_1} - a| \geq \varepsilon$.

Equivalentemente, uma sequência (a_n) é divergente quando, para todo número real a, existem um número real $\varepsilon > 0$ e uma infinidade de índices n para os quais $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Exemplo 5.26. A sequência $a_n = (-1)^n$, $n \geq 1$, é divergente. Qualquer que seja o número real a, podemos encontrar um número $\varepsilon > 0$ e uma infinidade de índices n para os quais a_n está fora do intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. De fato, suponhamos primeiro que $a = 1$. Tomando algum $\varepsilon \leq 2$, por exemplo, $\varepsilon = 1$, todos os termos $a_{2k+1} = -1$ estão fora do intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = (0, 2)$. Confira a Figura 5.3.

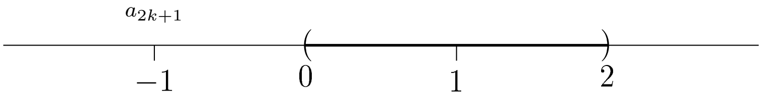


Figura 5.3: Parte de sequência fora do intervalo de raio $\varepsilon = 1$ com centro em $a = 1$

Suponhamos agora que $a \neq 1$. Seja $\varepsilon > 0$ um número menor ou igual à distância entre a e 1. Então todo termo de índice par $a_{2k} = 1$ está fora do intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Confira a Figura 5.4.

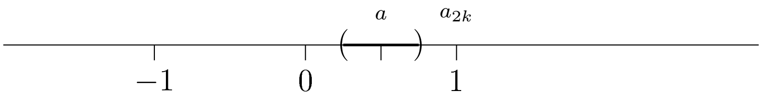


Figura 5.4: Parte de sequência fora do intervalo de raio ε com centro em $a \neq 1$

Concluímos assim a verificação de que a sequência $a_n = (-1)^n$ é divergente.

Exemplo 5.27. A sequência $a_n = n^2$, $n \geq 1$, é divergente. De fato, esta sequência é ilimitada. Lembrando que toda sequência convergente é limitada, segue a afirmação.

Definição 5.28. Diz-se que uma sequência (a_n) *tende para mais infinito* quando para todo número real M existe um número natural n_0 tal que $a_n > M$ para todo $n \geq n_0$. Neste caso anotamos

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty\,, \quad \lim a_n = +\infty \quad \text{ou} \quad a_n \to +\infty$$

(lê-se: o limite de a índice n para n tendendo para mais infinito é mais infinito). De modo análogo, diz-se que uma sequência (a_n) *tende para menos infinito* quando para todo número real K existe um número natural n_0 tal que $a_n < K$ para todo $n \geq n_0$. Neste caso anotamos

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty\,, \quad \lim a_n = -\infty \quad \text{ou} \quad a_n \to -\infty$$

(lê-se: o limite de a índice n para n tendendo para mais infinito é menos infinito).

Se uma sequência tem limite $+\infty$ ou $-\infty$, ela ainda é uma sequência divergente, pois $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais. São símbolos utilizados para descrever um determinado comportamento da sequência.

Exemplo 5.29. Vamos mostrar que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^3-3}{n^2+5} = +\infty$. Observe que

$$n^3 - 3 > \frac{1}{2}n^3 > 0 \quad \text{e} \quad 0 < n^2 + 5 < 2n^2 \quad \text{para todo } n \geq 3$$

portanto

$$\frac{n^3-3}{n^2+5} > \frac{(1/2)n^3}{2n^2} = \frac{1}{4}n \quad \text{para todo } n \geq 3$$

(essa desigualdade vale também para $n = 2$, mas isso não importa aqui). Seja então M um número real. Seja n_0 um número inteiro tal que $n_0 > 4M$ e $n_0 \geq 3$. Então, para todo n tal que $n \geq n_0$, tem-se

$$\begin{aligned} n \geq n_0 > 4M \quad & \Longrightarrow \quad \frac{1}{4}n > M \\ & \Longrightarrow \quad \frac{n^3 - 3}{n^2 + 5} > M \end{aligned}$$

Portanto $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^3 - 3}{n^2 + 5} = +\infty$.

Definição 5.30. Dada uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, seja $(n_i)_{i\geq 1}$ uma sequência infinita de números naturais tais que

$$1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_i < n_{i+1} < \cdots$$

Diz-se que $(a_{n_i})_{i\geq 1}$ é uma *subsequência* de (a_n).

Exemplo 5.31. A sequência $a_n = (-1)^n$ tem duas subsequências que se destacam: a subsequência constituída pelos termos de índice par, a saber, (a_{2i}), e a subsequência formada pelos termos de índice ímpar, (a_{2i+1}). Temos $a_{2i} = 1$ para todo i, logo a subsequência (a_{2i}) é convergente, e seu limite é igual a 1. Ainda, $a_{2i+1} = -1$ para todo i, e esta subsequência converge para -1. Portanto, a sequência $a_n = (-1)^n$ é um exemplo de sequência divergente com duas subsequências convergentes.

Teorema 5.32. *Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência convergente, então toda subsequência $(a_{n_i})_{i\geq 1}$ é convergente, e o limite é o mesmo.*

Demonstração. Suponhamos $a_n \to a$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $a_n \to a$, existe um inteiro positivo m tal que $n \geq m \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. Seja i_0 um inteiro positivo tal que $n_{i_0} \geq m$ (por exemplo, $i_0 = m$). Então, para todo $i \geq i_0$ temos $n_i \geq m \Rightarrow |a_{n_i} - a| < \varepsilon$. Portanto $\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = a$. □

Corolário 5.33. *Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência convergente e se existe uma subsequência $(a_{n_i})_{i\geq 1}$ tal que $\lim_{i\to+\infty} a_{n_i} = a$, então $\lim a_n = a$.*

5.7 Problemas

Problema 5.7.1. Mostre que a sequência $a_n = n^2$ dos quadrados dos números inteiros positivos satisfaz à relação de recorrência $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$ para todo $n \geq 1$. Reciprocamente, esta relação e mais as condições iniciais $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ e $a_3 = 9$ caracterizam a sequência dos quadrados.

Problema 5.7.2. Use diretamente a Definição 5.2 para demonstrar o seguinte. Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência e k um inteiro positivo. Então a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ converge se e somente se a sequência $(a_{n+k})_{n\geq 1}$ converge, e neste caso o limite é o mesmo.

Problema 5.7.3. Verifique que $n/(n + 1) \to 1$ usando diretamente a Definição 5.2.

Problema 5.7.4. Verifique que $\lim \frac{3n^2}{2n^2+1} = \frac{3}{2}$ usando diretamente a Definição 5.2.

Problema 5.7.5. Verifique que $\lim \frac{3n^2+1}{5n^2-n+1} = \frac{3}{5}$ usando a técnica do Exemplo 5.17.

Problema 5.7.6. Demonstre que $\lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$.

Problema 5.7.7. Verifique se a sequência $\left(\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right)$ é convergente.

Problema 5.7.8. Mostre que é convergente a sequência

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ for par} \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Problema 5.7.9. Diga quais das seguintes afirmações pode ser equivalente à definição de sequência convergente:

(?)(a) Uma sequência (a_n) de números reais converge para um número real L quando, dado um número real $\varepsilon > 0$, existe uma infinidade de índices n para os quais a_n está a uma distância de L menor do que ε.

(?)(b) Uma sequência (a_n) de números reais converge para um número real L quando, dado um número real $\varepsilon > 0$, todos os termos da sequência, com possível excessão de um número finito deles, estão a uma distância de L menor do que ε.

(?)(c) Uma sequência (a_n) de números reais converge para um número real L quando, dado um número real $\varepsilon > 0$, todos os valores da sequência, com possível excessão de um número finito deles, estão a uma distância de L menor do que ε.

Problema 5.7.10. Verifique que a sequência $\left(\dfrac{(-1)^n\, n}{n+1}\right)$ é divergente.

Problema 5.7.11. Mostre que se $\lim a_n = a$ e se $a > 0$ então existe n_0 tal que $a_n > 0$ para todo $n \geq n_0$.

Problema 5.7.12. Demonstre que se $\lim a_n = a$ então $\lim |a_n| = |a|$. Mostre que a recíproca não é verdadeira.

Problema 5.7.13. Mostre que se $\lim |a_n| = 0$ então $\lim a_n = 0$.

Problema 5.7.14. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim \dfrac{3n^3 - 7n^2 + 6n - 1}{4n^3 + n - 9}$ b) $\lim \dfrac{15n^4 - n + 1}{9n^5 + 2n^2}$

c) $\lim \dfrac{(n^2+2)^2}{2n^4 + 3n^2 - 2}$ d) $\lim \dfrac{7 \cdot 3^n - 1}{2 \cdot 3^n + 4}$

Problema 5.7.15. Usando o Teorema da Compressão, calcule os seguintes limites:

a) $\lim \dfrac{(-1)^n}{n}$ b) $\lim \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$ c) $\lim \dfrac{2}{n!}$

d) $\lim \dfrac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ e) $\lim \dfrac{e^{-n}}{n}$

Problema 5.7.16. Prove que se (a_n) é uma sequência tal que $\lim a_n = 0$ e $a_n \geq 0$ para todo n, então $\lim \sqrt{a_n} = 0$.

Problema 5.7.17. Demonstre que se $\lim a_n = 0$ e se (b_n) é limitada, então $\lim a_n b_n = 0$.

Problema 5.7.18. Calcule:

$$\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) \qquad \lim\frac{\sqrt{2n^2-n+7}}{3n-1} \qquad \lim\frac{1}{n}\sqrt{(1-\sqrt{n})(3-\sqrt{n})}$$

Problema 5.7.19. Encontre o limite da sequência

$$\left(7+\frac{1}{2}\right)^2,\quad \left(7+\frac{1}{2^2}\right)^2,\quad \left(7+\frac{1}{2^3}\right)^2,\ldots$$

caso exista.

Problema 5.7.20. Demonstre a seguinte propriedade: se (a_n) e (b_n) são sequências convergentes tais que $a_n \leq b_n$ para todo n, então $\lim a_n \leq \lim b_n$. Dê um exemplo para mostrar que $a_n < b_n$ para todo n não implica $\lim a_n < \lim b_n$.

Problema 5.7.21. Verifique se são monótonas ou não as seguintes sequências:

a) $\left(\dfrac{2n+1}{3n+5}\right)_{n\geq 0}$ b) $\left(\dfrac{3^n}{1+3^n}\right)_{n\geq 0}$

c) $\left(2^{-n}\right)_{n\geq 0}$ d) $\left(\dfrac{n^n}{n!}\right)_{n\geq 1}$

e) $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\geq 0}$

Problema 5.7.22. A sequência $(n/2^n)_{n\geq 0}$ não é monótona. Mas a sequência $(n/2^n)_{n\geq 1}$ é decrescente, e $(n/2^n)_{n\geq 2}$ é estritamente decrescente.

Problema 5.7.23. Usando o Teorema das Sequências Monótonas 5.23, demonstre que converge para $3/11$ a sequência (a_n) definida por

$$a_n = 0{,}2727\ldots 27 \qquad \text{(onde aparecem } n \text{ grupos 27)}$$

Problema 5.7.24. Seja r um número real tal que $|r| < 1$. Usando o Teorema das Sequências Monótonas 5.23, mostre que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

Problema 5.7.25. Considere a sequência (a_n) definida recorrentemente por

$$\begin{cases} a_1 &= \sqrt{2} \\ a_n &= \sqrt{2+a_{n-1}}\,, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Usando o Teorema das Sequências Monótonas 5.23, prove que esta sequência é convergente, e encontre o limite.

Problema 5.7.26. Faça o mesmo para a sequência

$$\begin{cases} a_1 &= \sqrt{2} \\ a_n &= \sqrt{2a_{n-1}}\,, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Problema 5.7.27. Demonstre que a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por

$$\begin{cases} a_0 > 0; \\ a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1}+\dfrac{r}{a_{n-1}}\right), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

converge para $\sqrt{r}$ usando (i) o Teorema da Compressão (ii) o Teorema das Sequências Monótonas.

Problema 5.7.28. Demonstre que a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por

$$\begin{cases} a_0 > 0; \\ a_n = \dfrac{1}{3}\left(2a_{n-1} + \dfrac{r}{a_{n-1}^2}\right), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

converge para $\sqrt[3]{r}$.

Problema 5.7.29. Mostre que as seguintes sequências são divergentes:

a) (2^n) b) $\left(\dfrac{(-1)^n 5n}{1+n}\right)$

c) (rn), sendo r um número real não nulo

d) $\left(\dfrac{n^3+3}{n}\right)$ e) $\left(\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}\right)$

f) $\big(1+(-1)^n\big)$ g) $\big(n^2+(-1)^n n\big)$

h) $\big(5n^2-3n+7\big)$

Problema 5.7.30. Para cada uma das sequências (a_n) abaixo, verifique se $\lim a_n = +\infty$ ou $\lim a_n = -\infty$.

a) (3^n) b) $\left(\dfrac{n^2+3n+1}{n+7}\right)$

c) (rn), $r \neq 0$ d) $\big(n^2 + (-1)^n n\big)$

Problema 5.7.31. Seja (a_n) uma sequência tal que $\lim a_n = +\infty$. Prove que existe n_0 tal que a sequência $(1/a_n)_{n\geq n_0}$ está definida, e que $\lim 1/a_n = 0$.

Problema 5.7.32. Seja $r > 1$ um número real. Mostre que $\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$.

Problema 5.7.33. A sequência $a_n = \operatorname{sen}(n\pi/2)$, $n \geq 1$, tem três subsequências que se destacam. Descreva essas subsequências.

Problema 5.7.34. A fórmula direta da sequência de Fibonacci (f_n), definida na página 82,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

foi observada pelo matemático Abraham De Moivre em 1718 e demonstrada dez anos mais tarde por Nicolaus Bernoulli. Complete os detalhes. Sejam α e β as raízes da equação $x^2 = x+1$. Portanto $\alpha^2 = \alpha + 1$ e $\beta^2 = \beta + 1$. Multiplicando estas igualdades por α^{n-2} e β^{n-2} respectivamente, obtemos $\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}$ e $\beta^n = \beta^{n-1} + \beta^{n-2}$ para todo $n \geq 2$. O estudante pode notar que as potências α^n e β^n obedecem à mesma lei da recorrência que a sequência de Fibonacci: cada termo é igual à soma dos dois termos anteriores. Por isso $x^2 = x+1$ chama-se *equação característica* desta lei de recorrência, e a experiência sugere que f_n é uma combinação linear de α^n e β^n, isto é, existem números reais A e B tais que $f_n = A\alpha^n + B\beta^n$.

Problema 5.7.35. Se (f_n) é a sequência de Fibonacci, definida na página 82, demonstre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

chamado *número áureo.*

Problema 5.7.36. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência e sejam $(a_{n_j})_{j\geq 1}$ e $(a_{n_i})_{i\geq 1}$ subsequências que convergem para o mesmo limite a e tais que $\{n_j \mid j \geq 1\} \cup \{n_i \mid i \geq 1\} = \mathbb{Z}_+$. Prove que $a_n \to a$.

Problema 5.7.37. Seja $x \in \mathbb{R}$. Prove que **a)** Existe uma sequência estritamente crescente (r_n) de números racionais tais que $r_n \to x$. **b)** Existe uma sequência estritamente decrescente (r_n) de números racionais tais que $r_n \to x$. **c)** Existe uma sequência estritamente crescente (ξ_n) de números irracionais tais que $\xi_n \to x$. **d)** Existe uma sequência estritamente decrescente (ξ_n) de números irracionais tais que $\xi_n \to x$.

Problema 5.7.38. Demonstre o Corolário 5.33.

5.8 Temas para investigação

Tema 5.8.1. Investigue propriedades e aplicações da sequência de Fibonacci. Por exemplo, o que são $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$? Tomando o determinante, o que obtemos?

Tema 5.8.2. Investigue quando a sequência $a_n = n^k$, $n \geq 1$, é convergente ou divergente, sendo k inteiro. E se k não é inteiro?

Tema 5.8.3. (OBMEP 2008, adaptado) Dispomos de uma quantidade ilimitada de ladrilhos 2×1. Se n é um número inteiro positivo, de quantas maneiras diferentes podemos cobrir um retângulo $2 \times n$ com esses ladrilhos? Estude generalizações. A Figura 5.5 ilustra que podemos cobrir um retângulo 2×3 de três maneiras diferentes.

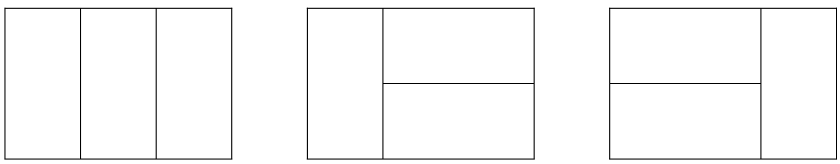


Figura 5.5: Ladrilhamento com retângulos

Tema 5.8.4. Pesquise fórmulas recorrentes para o cálculo aproximado de $\sqrt[n]{a}$.

5.9 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 5.9.1. Um professor estava procurando uma atividade para apresentar a seus estudantes. Viu em seu livro texto o seguinte problema:

1. *Que lugar da progressão aritmética 1, 6, 11, ... ocupa o número 131?*

e resolveu modificá-lo para o seguinte:

2. *Consideremos os números naturais dispostos, em sua sequência natural, em linhas com cinco números em cada linha*:

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Investigue regularidades nesse esquema (por exemplo, sobre a soma dos termos de cada linha, ou sobre os números que compõe a n-ésima linha). Faça conjecturas e as demonstre. Veja se seus resultados podem responder às seguintes perguntas: em que linha a soma dos termos é 665, e quais são os números que fazem parte dessa linha? Em que linha está 131?

Compare os dois problemas considerando aspectos psicológicos e pedagógicos.

Capítulo 6

A constante de Arquimedes π

6.1 Introdução

O conhecimento do número π é muito importante para o estudante de Matemática, de modo que neste Capítulo nos dedicaremos ao estudo dessa constante. O número π tem presença marcante em várias partes da Matemática Elementar, tais como a Geometria Plana e Espacial, assim como na Trigonometria. Na Matemática Superior é sem dúvida um dos números mais importantes.

6.2 Reconhecimento do número π

O primeiro contato de um estudante com a constante π pode se dar através de medições de objetos circulares. O professor leva à sala de aula latas cilíndricas, tampas de vidros, esferas de isopor, etc., assim como vários instrumentos de medida, como régua, fita métrica, paquímetro, barbante, etc. O professor explica o que é circunferência e diâmetro. Estimula então os estudantes a fazerem medições e preencherem uma tabela, como a que vemos abaixo.

Observamos que, apesar de se tratar de objetos com circunferências de várias medidas, a razão circunferência $\div$ diâmetro é aproximadamente constante. A variação observada na tabela pode ser devida a erros de medição ou às imperfeições dos objetos.

Podemos assim conjecturar sobre a existência dessa constante. Isso tem uma consequência importante, pois da relação

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}} = \text{constante}$$

obtemos

$$\text{comprimento da circunferência} = \text{diâmetro} \times \text{constante}$$

Objeto	Instrumento de medida	c	d	c/d
tampa redonda	fita métrica	23	7	$3,28$
esfera de isopor média	paquímetro, barbante e régua	$47,4$	$14,8$	$3,20$
esfera de isopor grande	barbante e régua	$92,1$	$29,7$	$3,10$
lata de refrigerante	paquímetro, barbante e régua	$20,7$	$6,3$	$3,28$
tampa redonda	fita métrica e régua	23	$7,4$	$3,11$
latinha	fita métrica barbante e régua	21	$6,2$	$3,39$
disco de madeira	barbante e régua	$31,5$	10	$3,15$

Podemos assim calcular o comprimento de uma circunferência sem medí-la, desde que saibamos os valores do diâmetro e o da tal constante.

A média dos números da última coluna da tabela acima é $3,21$, o que nos dá uma primeira aproximação da constante presumida.

Os observadores dos fenômenos naturais, particularmente os matemáticos, perceberam essas regularidades presentes sob vários aspectos em objetos com forma circular ou esférica, tanto no que diz respeito ao comprimento como à área e volume. No final desse capítulo descrevemos alguns experimentos que podem ser realizados.

Como os experimentos fornecem aproximações, ficamos na dúvida sobre se realmente existe a constante mencionada. Cumpre à Matemática imaginar procedimentos dedutivos e algoritmos que permitam abordar o problema e dar as respostas.

6.3 Comprimento da circunferência

A Geometria Plana define inicialmente comprimento de segmentos. Vimos na Seção 4.2 que, dado um segmento PQ, podemos medí-lo transportando-o para um eixo numérico. Se a coordenada de P for r e a de Q for s, então esse comprimento é $|r - s|$.

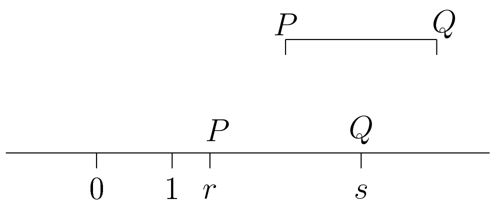


Figura 6.1: Comprimento de segmentos

Com isso podemos calcular o perímetro de polígonos. O passo seguinte é a definição de comprimento de curvas não retilíneas. A mais importante delas é certamente a circunferência.

Como podemos definir o comprimento de uma circunferência? Essa definição nos deve fornecer um instrumento teórico operacional. Podemos imaginar, por exemplo, o seguinte procedimento: corte a circunferência em um ponto e a estique, transformando-a em um segmento, conforme está sugerido na Figura 6.2. Podemos definir então que a medida da circunferência é a medida do segmento assim obtido. Esta pode ser uma definição de comprimento de uma circunferência desde que definamos o que é cortar e o que é esticar de um modo que seja possível operacionalizar essas ações com instrumentos matemáticos.

Figura 6.2: Retificação da circunferência

Transformar uma circunferência em um segmento é uma operação à qual damos o nome de *retificação da circunferência*. Os matemáticos da antiga Grécia encontraram vários métodos para retificar a circunferência. Observaram que todos os métodos de retificação que conseguiam perceber exigiam uma quantidade infinita de operações com régua e compasso. Por muito tempo se perguntou se existiria um método que exigisse uma quantidade finita de operações. Em 1882 Carl Lindemann provou que tal método não existe. Portanto qualquer método de retificação da circunferência exige algum processo infinito, como limites de sequências infinitas.

Estudamos a seguir o método de Arquimedes de retificação da circunferência. A ideia é simples: dada uma circunferência, consideramos os polígonos regulares nela inscritos. Podemos perceber que, à medida que cresce o número de lados, o polígono se confunde com a circunferência.

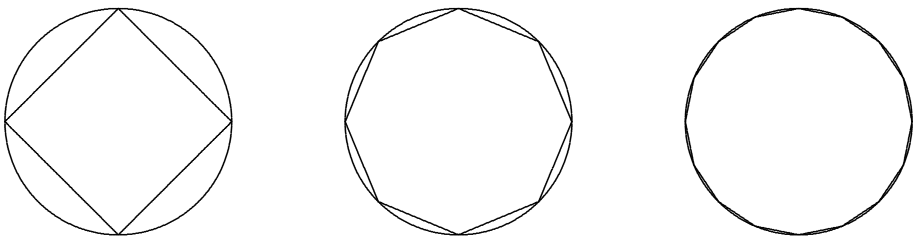


Figura 6.3: Polígonos de 4, 8 e 16 lados inscritos em uma circunferência

Naturalmente a percepção visual sugerida pela Figura 6.3 deve ser verificada com métodos analíticos. Para constatar essa necessidade o estudante pode examinar o Problema 6.11.4, em que se vê que a convergência visual não implica necessariamente na convergência de comprimentos.

O perímetro p_n de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio r é um número que estamos supondo já definido. O que temos que fazer é mostrar que existe o limite de p_n para $n \to \infty$, e então definir o comprimento da circunferência como esse limite.

Usaremos o Teorema das Sequências Monótonas, segundo o qual toda sequência de números reais crescente e limitada é convergente.

O comprimento de um segmento AB será indicado também por AB. Lembramos o Teorema do Ângulo Externo, segundo o qual a medida de um ângulo externo a um triângulo é maior do que a medida de qualquer um dos ângulos internos não adjacentes. Lembramos também que se dois ângulos internos de um triângulo não têm a mesma medida, então os lados que se opõem a estes ângulos têm medidas diferentes e o maior lado se opõe ao maior ângulo.

Lema 6.1. *No triângulo ABC, sejam D um ponto de AB e E um ponto de AC tais que $AD = AE$. Então $BC \geq DE$.*

Demonstração. Se $AB = AC$, temos $DE/BC = AD/AB \leq 1$, do que segue $DE \leq BC$. Então, sem perda de generalidade, podemos supor que $AB < AC$. Seja F um ponto de AC tal que $AB = AF$. Temos $DE \leq BF$. Assim falta provar que $BF \leq BC$. Tomando como referência a Figura 6.4, indicaremos por $\hat{x}$ o ângulo $\angle BFC$ e por x sua medida, etc. Temos $x > w$, pois $\hat{x}$ é externo ao ABF. Por motivo análogo, $z > y$. Como $z = w$, segue que $x > y$. Observe agora que no BCF, o lado BC se opõe a $\hat{x}$ e o lado BF se opõe a $\hat{y}$. Portanto $BF < BC$. Isto termina a demonstração do Lema. □

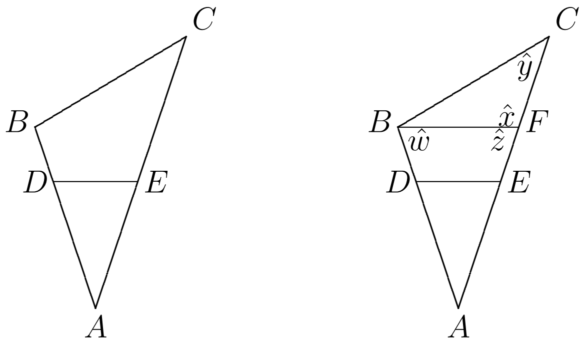


Figura 6.4: Desigualdade em um triângulo

Lema 6.2. *Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r, seja p_n o perímetro do polígono regular de n lados inscrito em $\mathcal{C}$. A sequência (p_n) é limitada superiormente.*

Demonstração. Acompanhe a Figura 6.5. O perímetro do quadrado circunscrito a $\mathcal{C}$ é $8r$. Vamos mostrar que $p_n \leq 8r$ para todo $n \geq 3$. Seja O o centro da circunferência. Os segmentos que unem O aos vértices do quadrado circunscrito determinam 4 pontos na circunferência. Considerando esses 4 pontos e mais os vértices do polígono, temos um conjunto com m pontos. Nomeamos esses pontos como A_1, A_2, ..., A_m, seguindo um mesmo sentido ao longo da circunferência. Consideremos o polígono simples fechado A formado por esses pontos. Seu perímetro é $\geq p_n$. Para cada i tal que $1 \leq i \leq m$, consideremos a semirreta começando em O e passando por A_i. Seja B_i a interseção dessa semirreta com o quadrado circunscrito à circunferência. Aplicando o Lema 6.1 ao OB_iB_{i+1}, temos $A_iA_{i+1} \leq B_iB_{i+1}$ para todo $1 \leq i \leq m-1$, e $A_mA_1 \leq B_mB_1$. A soma de A_iA_{i+1}, $1 \leq i \leq m-1$, e A_mA_1 é o perímetro de A, e a soma de B_iB_{i+1}, $1 \leq i \leq m-1$, e B_mB_1 é $8r$. Isto termina a demonstração do Lema. □

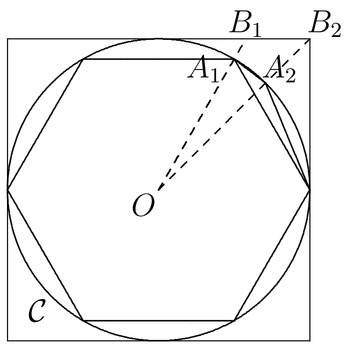


Figura 6.5: A sequência (p_n) é limitada superiormente

Lema 6.3. *Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r, seja p_n o perímetro do polígono regular de n lados inscrito em C. Então $p_n < p_{2n}$.*

Demonstração. Consideremos um polígono regular $A_1A_3A_5 \dots A_{2n-1}$ de n lados inscrito em $\mathcal{C}$ e um polígono regular $A_1A_2A_3A_4A_5 \dots A_{2n}$ de $2n$ lados inscrito em $\mathcal{C}$. Devido à desigualdade triangular temos $A_1A_3 < A_1A_2+A_2A_3$, $A_3A_5 < A_3A_4+A_4A_5$, ..., $A_{2n-1}A_1 < A_{2n-1}A_{2n}+A_{2n}A_1$. Confira a Figura 6.6. Portanto $p_n < p_{2n}$, e isto demonstra o Lema. □

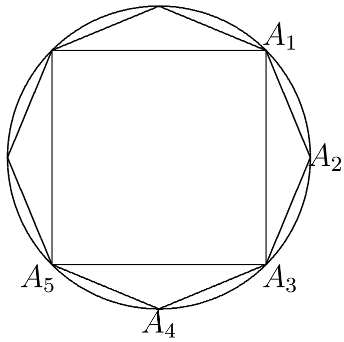


Figura 6.6: A sequência (p_n) é crescente

Teorema 6.4. *Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r, seja p_n o perímetro do polígono regular de n lados inscrito em C. A sequência p_4, p_8, p_{16}, ... é convergente.*

Demonstração. Devido aos lemas anteriores, a sequência p_4, p_8, p_{16}, ... é limitada e crescente. Então converge, em virtude do Teorema das Sequências Monótonas 5.23, demonstrado na página 91. □

Isto nos permite definir o comprimento de uma circunferência.

Definição 6.5. O comprimento de uma circunferência é o limite dos perímetros p_4, p_8, p_{16}, ... dos polígonos regulares de 2^n lados inscritos.

Observação 6.6. Na Definição 6.5 podemos usar os perímetros p_3, p_6, p_{12}, p_{24}, ... ou qualquer sequência p_k, p_{2k}, p_{4k}, p_{8k}, ... Por uma questão de facilidade nos limitamos à sequência considerada. Todas essas sequências têm o mesmo limite. Na verdade a sequência (p_n) é crescente, e portanto convergente. Esse resultado está demonstrado na Seção 10.6, página 202.

6.4 Existência da constante π

Na seção 1 vimos que medindo objetos circulares e calculando a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro obtemos valores próximos, o que nos leva a presumir que essa razão seja constante. Com a definição de comprimento de circunferência dada em 6.5 é fácil demonstrar esse fato.

Teorema 6.7. *É constante a razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e seu diâmetro.*

Demonstração. Consideremos duas circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ com centros O e O', raios r e r' e comprimentos c e c', respectivamente. Sejam $A_1A_2\ldots A_n$ e $A_1'A_2'\ldots A_n'$ polígonos regulares de n lados inscritos em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, com perímetros p_n e p_n', respectivamente.

Tomando como referência a Figura 6.7, os triângulos OA_1A_2 e $O'A_1'A_2'$ são semelhantes pois são isósceles e os ângulos $\angle A_1OA_2$ e $\angle A_1'O'A_2'$ são iguais (ambos medem $360^o/n$). Portanto

$$\frac{A_1A_2}{r} = \frac{A_1'A_2'}{r'} \quad \Rightarrow \quad \frac{nA_1A_2}{2r} = \frac{nA_1'A_2'}{2r'} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_n}{2r} = \frac{p_n'}{2r'}$$

para todo $n \geq 3$. Em particular

$$\frac{p_{2^n}}{2r} = \frac{p_{2^n}'}{2r'} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{p_{2^n}}{2r} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{2^n}'}{2r'} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{2r} = \frac{c'}{2r'}$$

Isto termina a demonstração do Teorema. □

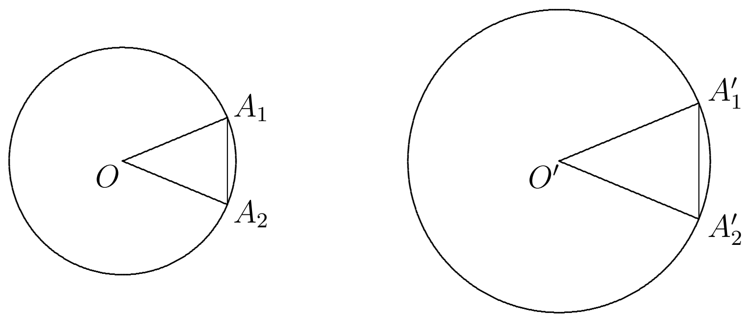


Figura 6.7: Existência da constante π

Definição 6.8. A constante cuja existência foi demonstrada no Teorema 6.7 é designada com o símbolo π, e denominada *constante de Arquimedes.*

Teorema 6.9. *O comprimento c de uma circunferência de raio r é dado pela fórmula*

$$c = 2\pi r$$

Demonstração. Vimos no Teorema 6.7 que $c/2r = \pi$. Portanto $c = 2\pi r$. □

6.5 Área de um disco

A Geometria Euclidiana define inicialmente a área de uma região quadrada.

Definição 6.10. A área de uma região quadrada de lado a é a^2.

Dada uma região plana, chamamos de *quadratura* à transformação da região em um quadrado de mesma área. Dessa forma podemos obter a área da região. Os antigos matemáticos gregos constataram que toda região poligonal pode ser quadrada através de um número finito de operações com régua e compasso. Com isso podiam obter a área dessas regiões. Passaram então ao estudo da quadratura de regiões não poligonais, e a mais importante região estudada foi o disco. Tinham esperança de conseguir, pois Hipócrates descobriu como quadrar lúnulas, que são partes de um disco delimitadas por outro disco. Entretanto, por mais que tentassem, só

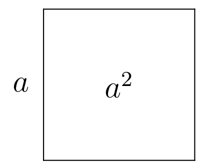


Figura 6.8: Área do quadrado

conseguiam quadrar o disco através de um número infinito de operações com régua e compasso. Essa questão perdurou por quase dois mil anos, e foi finalmente respondida por Carl Lindemann em 1822. O mesmo teorema em que Lindemann demonstrou que a circunferência não pode ser retificada com régua e compasso, prova também que o disco não pode ser quadrado com régua e compasso com uma quantidade finita de operações.

Portanto qualquer método de quadratura do disco exige algum processo infinito, como limites de sequências infinitas.

Estudaremos a seguir o método de Arquimedes de quadratura do disco. A ideia é similar ao caso da retificação da circunferência: dado um disco, consideramos os polígonos regulares nele inscritos. Revendo a Figura 6.3, podemos perceber que, à medida que cresce o número de lados do polígono, a região poligonal se confunde com o disco.

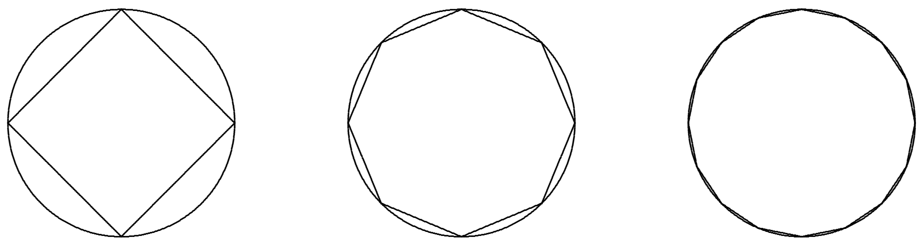


Figura 6.3: polígonos de 4, 8 e 16 lados inscritos em uma circunferência

Dado um disco de raio r, indicamos por s_n a área da região delimitada por um polígono regular de n lados inscrito no disco (isto é, inscrito na circunferência que delimita o disco). Com a experiência adquirida no estudo da Seção 6.3, o estudante poderá constatar facilmente que $s_n < s_{2n}$ e $s_n < 4r^2$ para todo $n \geq 3$. Aliás, essa constatação é até mais simples do que no caso da retificação da circunferência. Basta examinar a Figura 6.6 e observar que $4r^2$ é a área do quadrado circunscrito. Lembrando de usar o Teorema das Sequências Monótonas 5.23, temos a

Definição 6.11. A área de um disco de raio r é o limite da sequência s_4, s_8, s_{16}, ... sendo s_n a área da região delimitada por um polígono regular de n lados inscrito na circunferência que delimita o disco.

Vamos provar agora o

Teorema 6.12. *A área de um disco de raio r é πr^2.*

Demonstração. Seja $\mathcal{D}$ um disco de raio r e $\mathcal{C}$ sua circunferência. Consideremos um polígono de n lados inscrito em $\mathcal{C}$. Sejam l_n o lado desse polígono, a_n seu apótema e p_n seu perímetro. Na Figura 6.9, $l_n = AB$.

A área da região delimitada pelo polígono é

$$s_n = n\frac{1}{2}l_n a_n = \frac{1}{2}p_n a_n$$

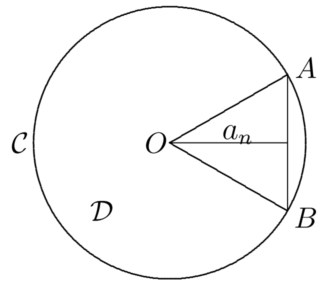


Figura 6.9: Área do disco

Mas

$$a_n = \sqrt{r^2 - (l_n/2)^2}$$

Como $\lim l_n = 0$ (Problema 6.11.7), segue que $\lim a_n = r$. Lembremo-nos ainda de que

$$\lim_{n\to\infty} p_{2^n} = 2\pi r$$

Portanto a área de $\mathcal{D}$ é

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} p_{2^n} a_{2^n} = \frac{1}{2} 2\pi r r = \pi r^2$$

Isto termina a demonstração do Teorema. □

Escólio 6.13. *É constante a razão entre a área de um disco qualquer e o quadrado de seu raio, e essa constante é π.*

6.6 O algoritmo de Arquimedes

Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de raio r. Para todo $n \geq 3$, sejam P_n e p_n os perímetros dos polígonos regulares de n lados respectivamente circunscrito e inscrito em $\mathcal{C}$. O *algoritmo de Arquimedes* é dado pelas fórmulas

$$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n} \quad \text{e} \quad p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}} \tag{6.1}$$

Estas fórmulas podem ser usadas, por exemplo, para calcular p_{2^n}, para $n \geq 2$, iniciando com $p_4 = 4r\sqrt{2}$ e $P_4 = 8r$. Desse modo podemos obter aproximações de π.

As fórmulas 6.1 não foram exatamente descobertas por Arquimedes, mas constituem uma implementação de seu método desenvolvida por Willebrord Snell e Christiaan Huyghens.

Para demonstrar as fórmulas 6.1 começamos com uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r e centro O. Seja $AB = l_n$ o lado de um polígono regular de n lados inscrito em $\mathcal{C}$. Consideremos o diâmetro AA', conforme a Figura 6.10. A corda $A'B$ é chamada complemento de AB, e sua medida será indicada por c_n. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao $AA'B$ temos

$$l_n = \sqrt{4r^2 - c_n^2} \quad \text{e} \quad c_n = \sqrt{4r^2 - l_n^2} \quad n \geq 3 \tag{6.2}$$

Consideremos ainda na Figura 6.10 o diâmetro DD' tal que $DD' \perp AB$. Portanto $AD = l_{2n}$ e $AD' = c_{2n}$.

Seja E a interseção de DD' com AB. Como $AED' \sim DAD'$ temos

$$\frac{AE}{DA} = \frac{AD'}{DD'} = \frac{ED'}{AD'} \tag{6.3}$$

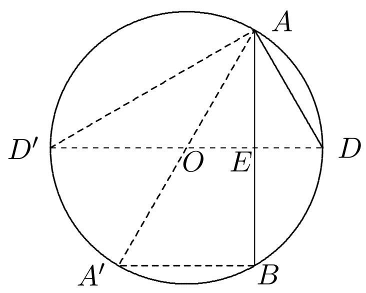


Figura 6.10: Complemento de uma corda em uma circunferência

Uma consequência de 6.3 é que $AD'^2 = D'E \cdot DD'$. Notemos que O e E são pontos médios respectivamente dos lados AA' e AB do $AA'B$, do que segue $D'E = r + OE = r + (1/2)A'B = r + (1/2)c_n$. Portanto $c_{2n}^2 = (r + (1/2)c_n)2r$, ou

$$c_{2n}^2 = 2r^2 + rc_n \tag{6.4}$$

Outra consequência de 6.3 é que $AE \cdot DD' = AD \cdot AD'$. Portanto $(1/2)l_n 2r = l_{2n}c_{2n}$, do que segue

$$c_{2n} = r\frac{l_n}{l_{2n}} \tag{6.5}$$

Lembremos ainda o resultado do Problema 6.11.13, em que

$$L_n = \frac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$$

sendo L_n o lado do polígono regular de n lados circunscrito a $\mathcal{C}$. Atualizando a notação temos

$$c_n = 2r\frac{l_n}{L_n} \tag{6.6}$$

Juntando as fórmulas 6.5 e 6.6 temos $2r(l_{2n}/L_{2n}) = c_{2n} = r(l_n/l_{2n})$, ou $2l_{2n}^2 = L_{2n}l_n$. Multiplicando a última identidade por $2n^2$ obtemos

$$p_{2n}^2 = P_{2n}p_n$$

Usando novamente 6.5 e 6.6 temos $c_{2n}^2 = c_{2n}c_{2n} = 2r(l_{2n}/L_{2n})r(l_n/l_2n)$. Combinando com 6.4 segue $2r(l_{2n}/L_{2n})r(l_n/l_2n) = 2r^2 + rc_n = 2r^2 + r2r(l_n/L_n)$. Manipulando essa relação vem

$$\frac{1}{L_{2n}} = \frac{1}{l_n} + \frac{1}{L_n} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{2nL_{2n}} = \frac{1}{nl_n} + \frac{1}{nL_n} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{P_{2n}} = \frac{1}{p_n} + \frac{1}{P_n}$$

Segue

$$P_{2n} = \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n}$$

Dessa forma completamos a demonstração do

Teorema 6.14 (Algoritmo de Arquimedes)**.** *Dada uma circunferência, para todo $n \geq 3$ sejam P_n e p_n os perímetros dos polígonos regulares de n lados a ela circunscrito e inscrito, respectivamente. Então*

$$P_{2n} = \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n} \qquad e \qquad p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}} \tag{6.7}$$

para todo $n \geq 3$.

6.7 Cálculo do valor numérico de π

Além do Algoritmo de Arquimedes foram desenvolvidos muitos métodos para o cálculo do valor numérico de π. Certamente será útil para o estudante o resumo abaixo.

Antes do surgimento dos antigos matemáticos gregos muitos povos utilizavam o número π. O valor $\pi \approx 3$ era frequentemente adotado. No Problema 50 do Papiro de Ahmes afirma-se que a área de um campo circular com diâmetro de 9 unidades é igual à área de um quadrado com lado de oito unidades. Isso equivale a $\pi \approx 3,16$. Em um tablete sumeriano, descoberto na localidade de Susa, é dada a razão $(0;57,36)_{60}$ entre o perímetro do hexágono regular e o comprimento da circunferência circunscrita, equivalendo a $\pi \approx 3,125$. Confira os Problemas 6.11.23 e 6.11.24.

Os primeiros métodos sistemáticos utilizados para o cálculo do valor numérico de π derivam diretamente de sua definição geométrica, conforme fizemos na Seção 6.6. No Século III a. C., Arquimedes, usando os perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito de 96 lados, calculou

$$3+\frac{10}{71} < \pi < 3+\frac{1}{7} \qquad \text{ou} \qquad \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

Esta estimativa equivale a

$$3,1408 < \pi < 3,1428$$

Liu Hui, no ano 300, calculou o perímetro de um polígono de $3072 = 2^9 \cdot 6$ lados, obtendo $\pi \approx 3,14159$. Em 480 Tsu Ch'ung-chih calculou $3,1415926 < \pi < 3,1415927$, e ficou famoso. Ghiyath al-Kashi, proeminente matemático árabe do século XV, calculou $\pi \approx 3,1415926535897932$. Ludolph van Ceulen, matemático europeu, calculou em 1596 o valor de π com 35 casas exatas, usando o perímetro de um polígono de 2^{62} lados. Devido a esse feito, o número π é às vezes denominado "constante de Ludolph".

François Viéte obteve a primeira expressão analítica para π:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \;\cdots$$

Pouco depois foi a vez de John Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

Com a descoberta da série do arcotangente

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad \text{para} \qquad |x| < 1$$

e lembrando que $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, Gottfried Leibnitz observou que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

A série de Leibnitz converge muito lentamente. Um pouco melhor é a fórmula de John Machin $\pi/4 = 4\operatorname{arctg}(1/5) - \operatorname{arctg}(1/239)$. Em 1873 William Shanks usou esta fórmula para calcular π com 707 casas.

Com o aparecimento dos computadores eletrônicos os recordes do cálculo de π foram constantemente ultrapassados. Por exemplo, em 1981 dois matemáticos japoneses Kazunori Miyoshi e Kazuhika Nakayama calcularam π com mais de 2 milhões de casas usando a fórmula

$$\pi = 32 \operatorname{arctg} \frac{1}{10} - 48 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} - 16 \operatorname{arctg} \frac{1}{515}$$

O uso de computadores assim como de algoritmos cada vez mais sofisticados permitiram o cálculo do valor numérico de π com bilhões de casas exatas. O estudante pode experimentar o seguinte algoritmo, de convergência quíntica, isto é, o número de casas exatas quintuplica a cada iteração.

Sejam

$$s_0 = 5(\sqrt{5} - 2) \quad \text{e} \quad s_{n+1} = \frac{25}{(z + (x/z) + 1)^2 s_n}$$

sendo

$$x = \frac{5}{s_n} - 1, \quad y = (x-1)^2 + 7 \quad \text{e} \quad z = \left(\frac{1}{2} x \left(y + \sqrt{y^2 - 4x^3}\right)\right)^{1/5}$$

Sejam

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = s_n^2 \alpha_n - 5^n \left(\frac{s_n^2 - 5}{2} + \sqrt{s_n(s_n^2 - 2s_n + 5)}\right)$$

Então $\alpha_n \to 1/\pi$ com ordem cinco.

6.8 Comprimento de arco de circunferência

Nesta seção definimos comprimento de um arco qualquer de circunferência e demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 6.15. *Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de raio r e centro O, e seja $\widehat{AB}$ um arco dessa circunferência determinado pelo ângulo $\angle AOC$ de medida θ (em graus). Então o comprimento do arco é $\pi r\theta/180^0$.*

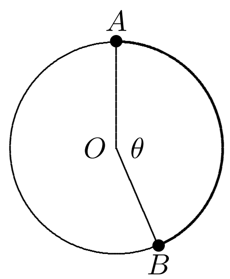


Figura 6.11: Arco em uma circunferência

Se $A = B$ consideramos que o arco é toda a circunferência $\mathcal{C}$, nesse caso $\theta = 360^o$ e a fórmula do Teorema 6.15 se reduz a $2\pi r$, de acordo com o que já conhecemos. Se AB é um diâmetro de $\mathcal{C}$, então o arco é uma semicircunferência e seu comprimento é πr (Problema 6.11.11).

Antes de demonstrar o Teorema 6.15 precisamos definir comprimento de arco de circunferência. Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de raio r e centro O, e seja $\widehat{AB}$ um arco dessa circunferência determinado pelo ângulo de medida θ (em graus). Seja $n_0 \geq 2$ um inteiro, e para todo $n \geq n_0$ consideremos os polígonos regulares de 2^n lados inscritos em $\mathcal{C}$, com vértices $A_1 A_2 \ldots A_{2^n}$, de modo que $A_1 = A$. Se n_0 é suficientemente grande, podemos supor que A_2 está no interior do arco $\widehat{AB}$ e que, se $A \neq B$, o vértice A_{2^n} está no interior do arco complementar $\widehat{BA}$. Confira a Figura 6.12.

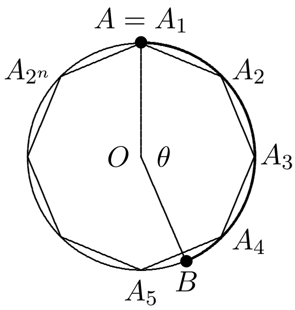


Figura 6.12: Medindo um arco de circunferência

Para cada inteiro $n \geq n_0$ definimos o inteiro $k = k(n)$ tal que $2 \leq k \leq 2^n$ com as seguintes propriedades. Se $A \neq B$, A_i está no arco $\widehat{AB}$ para todo i tal que $1 \leq i \leq k$, e A_{k+1} está fora de $\widehat{AB}$. Por outro lado, se $A = B$, então escolhemos $k = 2^n$.

Para cada $n \geq n_0$ definimos o número

$$q_n = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_kB$$

que vem a ser o comprimento do polígono $A_1A_2 \ldots A_kB$. Se $A_k = B$ entendemos que $A_kB = 0$. Se $A = B$ então q_n é o perímetro p_{2^n} do polígono regular inscrito de 2^n lados.

A seguir vamos provar que a sequência (q_n), para $n \geq n_0$, é crescente e limitada superiormente. Isto já foi verificado no caso $A = B$. Suponhamos então $A \neq B$. Que a sequência (q_n), para $n \geq n_0$, é limitada superiormente, é claro, pois $q_n \leq p_{2^n} < 8r$, para todo n. Vamos verificar a monotonicidade. Dado $n \geq n_0$, indicaremos por $A_1A_1'A_2A_2' \ldots A_{2^n}A_{2^n}'$ o polígono regular de 2^{n+1} lados inscrito em $\mathcal{C}$.

Temos quatro casos a considerar:

Primeiro caso $A_{k(n)} = B$.

Temos $q_n = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{k-1}A_k < A_1A_1' + A_1'A_2 + A_2A_2' + \ldots + A_{k-1}A_{k-1}' + A_{k-1}'A_k = q_{n+1}$.

Segundo caso $A_{k(n)}$ e $A_{k(n)}'$ estão no interior do arco $\widehat{AB}$.

Temos $q_n = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{k-1}A_k + A_kB < A_1A_1' + A_1'A_2 + A_2A_2' + \ldots + A_{k-1}A_{k-1}' + A_{k-1}'A_k + A_kA_k' + A_k'B = q_{n+1}$.

Terceiro caso $A_{k(n)}$ está no interior do arco $\widehat{AB}$ e $A_{k(n)}' = B$.

Temos $q_n = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{k-1}A_k + A_kB < A_1A_1' + A_1'A_2 + A_2A_2' + \ldots + A_{k-1}A_{k-1}' + A_{k-1}'A_k + A_kA_k' = q_{n+1}$.

Quarto caso $A_{k(n)}'$ está fora do arco $\widehat{AB}$.

Temos $q_n = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{k-1}A_k + A_kB < A_1A_1' + A_1'A_2 + A_2A_2' + \ldots + A_{k-1}A_{k-1}' + A_{k-1}'A_k + A_kB = q_{n+1}$.

Fica provado que a sequência (q_n), para $n \geq n_0$, é crescente e limitada superiormente. Com isto podemos enunciar a

Definição 6.16. Com as notações acima, o comprimento do arco $\widehat{AB}$ é o limite da sequência (q_n), para $n \to \infty$.

Vejamos agora a

Demonstração do Teorema 6.15. Usaremos as notações acima e tomamos como referência a Figura 6.12. Seja l_n a medida do lado do polígono regular inscrito de n lados, e seja c o comprimento do arco $\widehat{AB}$. Indicaremos $k(n) = k$.

Notemos primeiro que

$$\theta = m\angle A_1OA_2 + m\angle A_2OA_3 + \ldots + m\angle A_{k-1}OA_k + m\angle A_kOB =$$

$$= (k-1)\frac{360^0}{2^n} + m\angle A_kOB$$

Observando que $\lim_{n\to\infty} m\angle A_kOB = 0$, temos

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \theta = \lim_{n\to\infty} (k-1)\frac{360^0}{2^n}$$

Agora calculamos

$$c = \lim_{n\to\infty} q_{2^n} = \lim_{n\to\infty} (k-1)l_{2^n} + A_kB = \lim_{n\to\infty} (k-1)l_{2^n}$$

pois $\lim_{n\to\infty} A_kB = 0$. Portanto

$$c = \lim_{n\to\infty} (k-1)\frac{360^0}{2^n} 2^n l_{2^n} \frac{1}{360^0} = \theta 2\pi r \frac{1}{360^0} = \frac{\pi r \theta}{180^0}$$

Isto termina a demonstração do Teorema 6.15. □

Os resultados acima nos permitem definir a medida em radianos de um ângulo. A Figura 6.13 ilustra a definição.

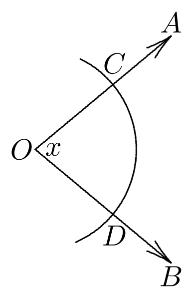


Figura 6.13: Definindo radiano

Definição 6.17. Seja $\angle AOB$ um ângulo e consideremos a circunferência com centro O e raio r. Sejam C e D os pontos do ângulo que interceptam a circunferência. A medida em radianos x do $\angle AOB$ é definida por

$$x = \frac{\text{comprimento de } \widehat{CD}}{r} \tag{6.8}$$

Juntando essa definição com o resultado do Teorema 6.15 temos a seguinte fórmula de conversão. Se um ângulo mede θ graus, sua medida em radianos é

$$x = \frac{\pi}{180^0}\theta \tag{6.9}$$

A fórmula (6.9) implica que a Definição 6.17 não depende do raio r, e portanto não depende da circunferência ali considerada. Da fórmula (6.8) temos ainda o

Teorema 6.18. *Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de raio r e centro O, e seja $\widehat{AB}$ um arco dessa circunferência determinado pelo ângulo $\angle AOC$ de medida x (em radianos). Então o comprimento do arco é rx.*

Dado um disco $\mathcal{D}$, um *setor* deste disco é o subconjunto formado pelos pontos do disco delimitados por dois raios que não estão no mesmo diâmetro e pelo arco menor da circunferência que delimita o disco. Na Figura 6.14 vemos o setor do disco de centro O delimitado pelos raios OA e OB. O $\angle AOB$ chama-se *ângulo determinado pelo setor.*

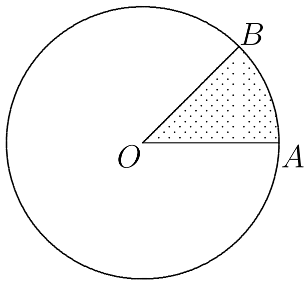


Figura 6.14: Área de um setor

Definiremos a seguir área de um setor de disco. Seja $\mathcal{D}$ um disco delimitado pela circunferência $\mathcal{C}$ de centro O e raio r, e sejam OA e OB raios de $\mathcal{C}$. Consideremos o setor S delimitado por esses raios e pelo arco $\widehat{AB}$. Seja θ (em graus) a medida do $\angle AOB$ determinado pelo setor. Indicaremos por $a(ABC)$ a área do triângulo ABC. Com as notações utilizadas na demonstração do Teorema 6.15 definimos, para todo $n \geq n_0$, a sequência

$$s_n = a(A_1OA_2) + a(A_2OA_3) + \ldots + a(A_kOB)$$

Sendo (s_n) uma sequência crescente e limitada superiormente, podemos fazer a

Definição 6.19. Com as notações acima, a área do setor S é o limite da sequência (s_n), para $n \to \infty$.

Temos agora o

Teorema 6.20. *Seja $\mathcal{D}$ um disco de raio r e centro O, e seja S a área do setor delimitado pelos raios OA e OB. Seja θ (em graus) a medida do ângulo determinado pelo setor. Então*

$$S = \frac{\pi r^2 \theta}{360^0}$$

Se a medida do ângulo determinado pelo setor for x em radianos, então

$$S = \frac{1}{2} x r^2$$

Demonstração. A cargo do estudante. □

6.9 Funções trigonométricas

Usando os resultados da seção anterior podemos definir as funções trigonométricas. Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas Oxy e a circunferência $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 =$

$1\}$ de raio 1. Seja $A = (1, 0)$. Para todo número real s tal que $0 \leq s < 2\pi$, seja $B = (x, y)$ o ponto de $\mathcal{C}$ tal que

$$s = \text{ comprimento de } \widehat{AB}$$

em que o arco$\widehat{AB}$ começa em A e continua até B percorrendo $\mathcal{C}$ no sentido anti-horário (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum). Confira a Figura 6.15.

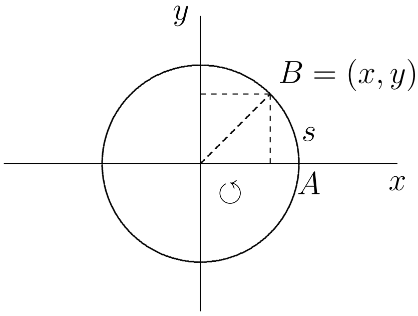


Figura 6.15: Definição de sen e cos

Observemos agora que para todo $t \in \mathbb{R}$ podemos escrever, de forma única, $t = 2k\pi + s$, sendo k inteiro e $s \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq s < 2\pi$. Para esse s consideremos o ponto $B = (x, y)$ de $\mathcal{C}$ definido acima. Pomos

$$\cos(t) = x \qquad \text{e} \qquad \text{sen}(t) = y$$

Com isso ficam definidas funções $\cos : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $\text{sen} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. A partir desse ponto a teoria das funções trigonométricas se desenvolve da forma já conhecida do estudante. Confira, por exemplo, [57], volume 1, páginas 209 a 233.

6.10 1000 casas de π

Segue abaixo o valor de π no sistema decimal com 1001 casas exatas, portanto com 1000 casas exatas após a vírgula. Cálculo executado com um aplicativo computacional algébrico. O dígito da casa 1002 é 4.

3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230
7816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609
5505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303
8196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346
03486104543266482133936072602491412737245870066063155881748815209
20962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941
51160943305727036575959195309218611738193261179310511854807446237
996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602
139494639522473719070217986094370277053921717629317675238467481846
766940513200056812714526356082778577134275778960917363717872146844
090122495343014654958537105079227968925892354201995611212902196086
40344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317
328160963185950244594553469083026425223082533446850352619311881710
10003137838752886587533208381420617177669147303598253490428755468
73115956286388235378759375195778185778053217122680661300192787661
11959092164201989

6.11 Problemas

Problema 6.11.1. Um arquiteto foi contratado para fazer uma praça circular em um terreno quadrado de 80 metros de lado. O projeto do arquiteto prevê o plantio de árvores ornamentais em uma circunferência. Diga como ele pode traçar a maior circunferência possível dentro do quadrado. Calcule o número aproximado de mudas que ele precisa encomendar, sabendo-se que a distância entre duas árvores consecutivas deve ser de aproximadamente 4 metros.

Problema 6.11.2. Conta-nos a História da Matemática que Eratóstenes de Cirene, geógrafo, matemático e bibliotecário do famoso Museu de Alexandria, conseguiu, no terceiro século antes de Cristo, medir o raio da Terra usando trigonometria. O valor obtido por Eratóstenes é bem próximo do atual, que é de 6 320 km. Supondo que a linha do equador tem a forma de uma circunferência, você pode calcular seu comprimento sem precisar andar por todo ele, medindo-o com uma trena.

Problema 6.11.3. Supondo que a Terra percorra um caminho circular em torno do Sol, e sabendo-se que a distância média da Terra ao Sol é de quase 150 000 000 km, calcule a velocidade da Terra em seu movimento de translação, em km/h.

Problema 6.11.4. Considere a Figura 6.16. Vemos um quadrado, uma diagonal e uma sequência de linhas poligonais tipo "escada" convergindo visualmente para a diagonal. A n-ésima linha poligonal é obtida dividindo a diagonal em 2^n partes iguais e tomando segmentos paralelos aos lados, conforme sugerido pela Figura 6.16. Se c_n é o comprimento da n-ésima linha poligonal, verifique se (c_n) converge para o comprimento da diagonal. Qual é a lição que podemos obter desse fenômeno?

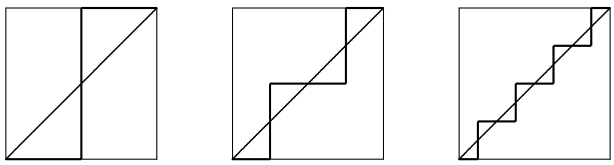


Figura 6.16: Linhas poligonais convergindo visualmente para a diagonal do quadrado

Problema 6.11.5. Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência, e seja p_n o perímetro do polígono regular de n lados inscrito em $\mathcal{C}$. Mostre que $(p_{5\cdot 2^n})_{n\geq 0}$ converge. Qual é o limite?

Problema 6.11.6. Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência, e seja P_n o perímetro do polígono regular de n lados circunscrito em $\mathcal{C}$. Mostre que $P_{2n} < P_n$ para todo $n \geq 3$. Portanto existe $\lim_{n\to\infty} P_{2^n}$.

Problema 6.11.7. Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência, e seja l_n o lado do polígono regular de n lados inscrito em $\mathcal{C}$. Prove que $\lim_{n\to\infty} l_n = 0$.

Problema 6.11.8. Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de raio r, e sejam l_n e L_n os lados dos polígonos regulares de n lados inscrito e circunscrito em $\mathcal{C}$, respectivamente. Sejam $p_n = nl_n$ e $P_n = nL_n$. Prove que

$$P_n - p_n < \frac{P_n l_n}{2r} \quad \text{para todo } n \geq 3$$

(Sugestão: considere a Figura 6.17, em que $AB = l_n$ e $CD = L_n$. Seja $a_n = OE$. Verifique que

$$\frac{l_n}{L_n} = \frac{a_n}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_n}{P_n} = \frac{a_n}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_n - p_n}{P_n} = \frac{r - a_n}{r}$$

Ainda $r < a_n + l_n/2$.)

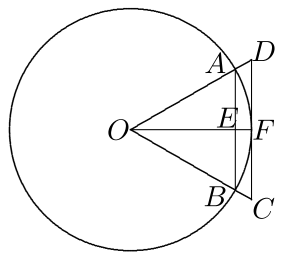


Figura 6.17: Polígonos inscritos e circunscritos

Problema 6.11.9. Prove que $\lim p_{2^n}$ e $\lim P_{2^n}$ são iguais. Assim na Definição 6.5 podemos usar polígonos circunscritos em vez de inscritos.

Problema 6.11.10. Defina área do disco usando polígonos circunscritos em vez de inscritos. Demonstre que o limite é o mesmo que o obtido com polígonos inscritos.

Problema 6.11.11. Defina comprimento de uma semicircunferência como limite de uma sequência de linhas poligonais. Prove que o comprimento de uma semicircunferência qualquer, definido dessa forma, é igual à metade do comprimento da circunferência correspondente.

Problema 6.11.12. Verifique se é ou não verdadeira a seguinte afirmação: "Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r, os valores p_n, para $n \geq 3$, dos perímetros dos polígonos inscritos de n lados em $\mathcal{C}$ converge para o comprimento da circunferência". Se a afirmação for verdadeira, demonstre. Se não for, dê um contraexemplo.

Problema 6.11.13. Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r, seja l_n o lado do polígono regular de n lados inscrito em $\mathcal{C}$, e seja L_n o lado do polígono regular de n lados circunscrito a $\mathcal{C}$. Demonstre a seguinte relação entre l_n e L_n:

$$L_n = \frac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$$

Problema 6.11.14. Calcule: **a)** o lado e o perímetro de um quadrado inscrito em uma circunferência de raio r; o lado e o perímetro de um quadrado circunscrito em uma circunferência de raio r; com esse resultado obtenha aproximações por falta e por excesso do valor numérico de π; **b)** repita o item anterior, dessa vez para o octógono regular; **c)** usando hexadecágonos regulares (polígono de 16 lados) inscrito e circunscrito, obtenha aproximações por falta e por excesso do valor numérico de π.

Problema 6.11.15. Defina área de um semidisco. Prove que a área de um semidisco é igual à metade da área do disco correspondente.

Problema 6.11.16. Considere um triângulo retângulo isósceles $\triangle ABC$ com hipotenusa BC. Tomando o ponto A como centro e AB como raio, consideremos o arco de circunferência delimitado pela corda BC. Consideremos ainda a semicircunferência de diâmetro BC, conforme a Figura 6.18. Designamos por T a área da região triangular delimitada por ABC e por S e L as áreas das outras duas regiões. A região de área L é chamada *luna de Hipócrates*. Prove que $L = T$. Portanto a luna de Hipócrates descrita acima pode ser quadrada com régua e compasso.

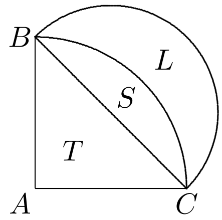


Figura 6.18: Uma luna de Hipócrates

Problema 6.11.17. No interior de um triângulo equilátero de lado L são colocados k discos de mesmo raio de forma otimizada, com os discos tangenciando o triângulo e uns aos outros. Na Figura 6.19 vemos como são colocados 6 discos. Se a é a área do triângulo e se a_k é a soma das áreas do k discos, pergunto se $\lim_{k\to\infty}(a_k/a) = 1$, ou quem sabe próximo de 1, tipo assim, no limite os discos preenchem $\approx 90,7\%$ da região triangular.

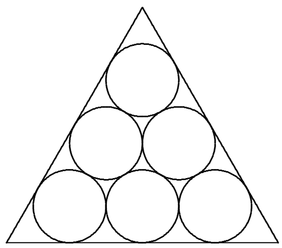


Figura 6.19: Preenchendo um triângulo com discos

Problema 6.11.18. Se $\mathcal{C}$ é uma circunferência de raio $r = 1$, mostre que $p_6 = 6$ e $P_6 = 4\sqrt{3}$. Usando o algoritmo de Arquimedes calcule os valores exatos de p_{12} e P_{12}. Use esses resultados para obter aproximações de π.

Problema 6.11.19. Usando um aplicativo computacional algébrico, calcule p_{96} e P_{96}. Obtenha a aproximação de Arquimedes $3,14 < \pi < 3,142$.

Problema 6.11.20. Calcule p_{3072} e P_{3072}. Obtenha a aproximação de Liu Hui (ano 300) $\pi \approx 3,14159$.

Problema 6.11.21. Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r, seja l_n o lado do polígono regular de n lados nela inscrito. Prove que $l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$ para todo $n \geq 3$.

Problema 6.11.22. Demonstre que a sequência

$$a_n = 2^{n-1}\underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1\,\text{radicais}}$$

converge para π.

Problema 6.11.23. No Problema 50 do Papiro de Ahmes (1650 a. C.) afirma-se que a área de um campo circular com diâmetro de 9 unidades é igual à área de um quadrado com lado de 8 unidades. Calcule o valor de π assumido com essa aproximação.

Problema 6.11.24. Em um tablete sumeriano encontrado em Susa o escriba dá como sendo $(0;57,36)_{60}$ a razão entre o perímetro do hexágono regular e o comprimento da circunferência circunscrita. Calcule a aproximação de π equivalente a essa afirmação. Aqui estamos usando a notação para o sistema sexagesimal proposta por Otto Neugebauer, em que as casas sexagesimais são separadas por vírgula e a parte inteira é separada da parte fracionária por ponto e vírgula.

Problema 6.11.25. Em 1685 o monge polonês A. Kochansky obteve

$$\pi \approx \sqrt{\frac{40}{3} - \sqrt{12}}$$

Calcule o número de casas decimais exatas que essa aproximação fornece.

Problema 6.11.26. Mostre que a aproximação $\pi \approx \sqrt{2}+\sqrt{3}$, dada por Platão, tem erro menor do que 5 partes em mil.

Problema 6.11.27. Srinivasa Ramanujan propôs

$$\pi \approx \sqrt[4]{\frac{2143}{22}}$$

Calcule o número de casas decimais exatas que essa aproximação fornece.

Problema 6.11.28. Dada uma circunferência de raio r, consideremos o quadrado circunscrito. Dividindo cada lado do quadrado em três segmentos de mesmo comprimento, construímos um octógono (não regular), conforme a Figura 6.20.
a) O que é maior, a área do disco ou do octógono? **b)** Se tomarmos a área do octógono no lugar da área do disco, qual a aproximação de π assumida?

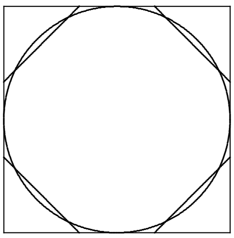


Figura 6.20: Calculando π com um octógono

Problema 6.11.29. Calcule quantas casas exatas se obtém com as seguintes aproximações de π:

$a)\ \pi \approx \sqrt{10}$ $\quad b)\ \pi \approx \dfrac{3(3+\sqrt{5})}{5}$ $\quad c)\ \pi \approx \dfrac{14+10\sqrt{2}}{33-17\sqrt{2}}$

$d)\ \pi \approx \dfrac{140+26\sqrt{29}}{99\sqrt{29}-444}$ $\quad e)\ \pi \approx \dfrac{63(17+15\sqrt{5})}{25(7+15\sqrt{5})}$

Problema 6.11.30. Complete a definição de funções trigonométricas feita na seção 6.9 provando o seguinte: **a)** Dado $t \in \mathbb{R}$, existem e são únicos o inteiro k e o real s tais que $t = 2k\pi + s$ e $0 \leq s < 2k\pi$. **b)** Dado $0 \leq s < 2\pi$, existe um único ponto B de $\mathcal{C}$ tal que o comprimento do arco $\widehat{AB}$ é s, sendo que o arco é tomado a partir de A no sentido anti-horário.

Problema 6.11.31. Tomando como referência a definição das funções trigonométricas sen e cos feita na seção 6.9 verifique o seguinte: **a)** Se $0 < t < \pi/2$, $\cos(t)$ e $\operatorname{sen}(t)$ têm os mesmos valores que as funções homônimas definidas na trigonometria do triângulo retângulo. **b)** Para todo $t \in \mathbb{R}$ temos $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, em que anotamos $\cos^2 t = (\cos(t))^2$ e $\operatorname{sen}^2 t = (\operatorname{sen}(t))^2$. **c)** $\cos(t+2k\pi) = \cos t$ e $\operatorname{sen}(t+2k\pi) = \operatorname{sen} t$, quaisquer que sejam $t \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$. **d)** $\cos(-t) = \cos t$ e $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$, qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$. **e)** $\cos(t+\pi) = -\cos t$, e as outras fórmulas de redução.

Problema 6.11.32. ([Borwein1], pág. 338) Tomando como referência as notações relativas ao Teorema 6.14 (Algoritmo de Arquimedes), prove que

a)

$$P_{2n} - p_{2n} = \frac{P_{2n}p_n}{\big(P_{2n} + p_{2n}\big)\big(P_n + p_n\big)}\big(P_n - p_n\big)$$

para todo $n \geq 3$;

b) Existe para cada $n \geq 3$ um ε_n tal que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ e

$$\frac{P_{2n}p_n}{\big(P_{2n} + p_{2n}\big)\big(P_n + p_n\big)} < \frac{1}{4 - \varepsilon_n}$$

para todo $n \geq 3$.

c) Mostre que, para n suficientemente grande, ao iterarmos o algoritmo de Arquimedes conseguimos, a cada duas iterações, pelo menos uma casa decimal exata a mais para π.

6.12 Temas para investigação

Tema 6.12.1. Investigue como seria possível operacionalizar a retificação da circunferência conforme sugerido para Figura 6.2 da página 103.

Tema 6.12.2. Informe-se sobre possíveis métodos de obter aproximações do valor numérico de π através de probabilidade.

Tema 6.12.3. Defina uma sequência de polígonos externos a uma circunferência, conforme sugerido pela Figura 6.21. **a)** Investigue se os perímetros dos polígonos dessa sequência convergem para o comprimento da circunferência. **b)** Investigue se a sequência das áreas das regiões delimitadas por esses polígonos converge para a área do disco.

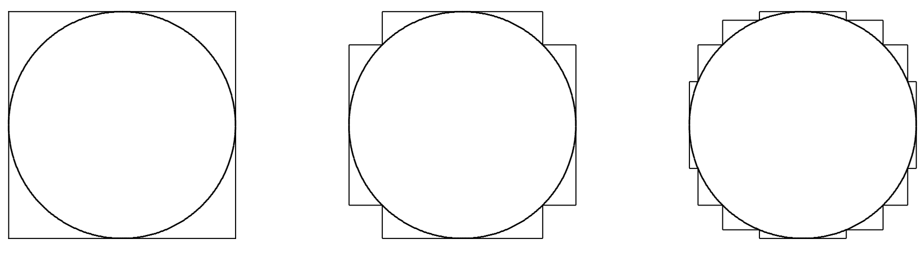


Figura 6.21: Polígonos externos a uma circunferência

Tema 6.12.4. Estude o artigo [12]. Usando Geometria Analítica, construa a seguinte versão da proposta dos autores. Suponha que já foi provado que o comprimento de uma circunferência de raio r é igual a $2\pi r$. Queremos, a partir disso, obter a área do disco.

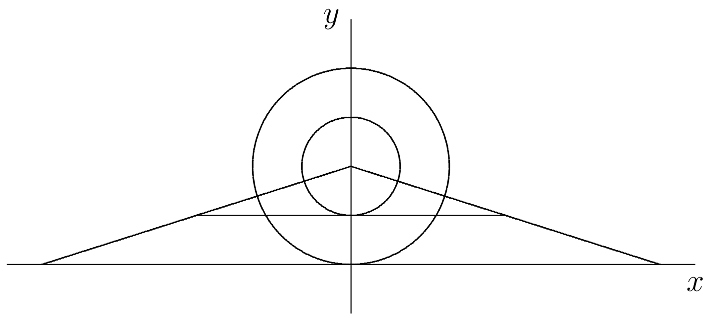


Figura 6.22: "Triangularização" do disco

Em um plano, considere um sistema de coordenadas cartesianas Oxy e um disco de raio $r > 0$ com centro em $(0, r)$, conforme a Figura 6.22.

Para todo $y \in [0, r]$, considere a circunferência com centro em $(0, r)$ e raio $r - y$. Retifique essa circunferência, transformando-a em um segmento paralelo ao eixo Ox e centrado em $(0, y)$. Obtenha dessa forma a área do disco. Está tudo correto?

Tema 6.12.5. Verifique se o Algoritmo de Arquimedes, descrito na Seção 6.6, tem uma versão usando áreas no lugar de perímetros.

Tema 6.12.6. Um estudante perguntou se, dado um disco, existe um número natural $n \geq 3$ tal que a área do disco é a média aritmética entre as áreas das regiões poligonais regulares de n lados inscrita e circunscrita no disco. Se não valer, quem sabe a média geométrica?

Tema 6.12.7. Seja $n \geq 3$ um inteiro. Defina diâmetro de um polígono regular de n lados. O que se pode dizer sobre a razão entre o perímetro e o diâmetro de um polígono regular de n lados?

Tema 6.12.8. Na mídia impressa ou eletrônica aparece, às vezes, notícias sobre quebra de recordes no cálculo do valor de π com bilhões de casas decimais exatas. Por que existe interesse nesse tipo de cálculo?

6.13 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 6.13.1. Faça uma pesquisa bibliográfica em diversos livros textos de Matemática da escola básica para verificar como são as propostas dos autores para o ensino do número π, o comprimento da circunferência e a área do disco.

Atividade 6.13.2. Na Seção 6.2, vemos uma tabela, na página 101, que descreve um experimento para reconhecimento do número π. Tente experimentos análogos considerando áreas ou volumes. Verifique se é viável usar esses experimentos em sala de aula com cilindros e esferas. Como podem ser feitas essas medições? Como sugerir que, no caso de áreas, o valor deve ser dividido pelo quadrado do raio, em vez do raio? Como explicar para o estudante que a constante é realmente a mesma? No caso de volume de esferas, a constante é outra. Por que usamos novamente π? Como explicar isso para os estudantes?

Atividade 6.13.3. Um livro didático apresenta, sem muita explicação, as seguintes figuras e uma fórmula. Parece que aí tem alguma ideia, mas do que? Você sabe explicar essa ideia?

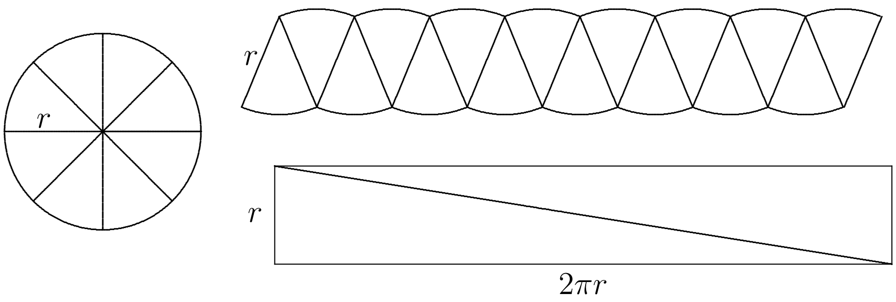


Figura 6.23: Brincando com tesoura

Demonstrar? Qual a validade dessa ideia como recurso didático? Que estratégia poderia ser adequada para implementar essa ideia em uma aula?

$$A = \frac{1}{2}(r)(2\pi r) = \pi r^2$$

Alguns estudantes utilizaram arranjos diferentes. Estude suas possibilidades.

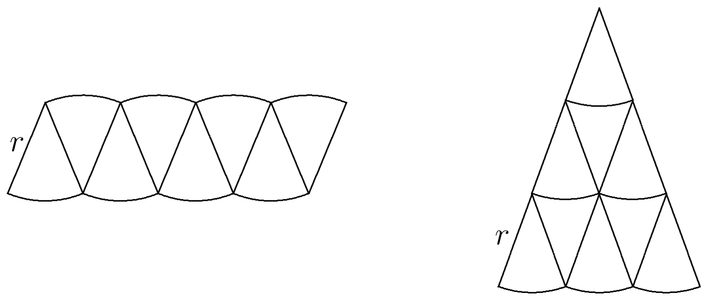


Figura 6.24: Brincando com tesoura 2

Atividade 6.13.4. Crie uma atividade para estudantes tomando como ideia básica uma pista de corrida de atletismo com a parte curva em forma de semicircunferência. A Figura 6.25 é uma sugestão.

Atividade 6.13.5. A Figura 6.26 sugere algum problema a ser apresentado a estudantes?

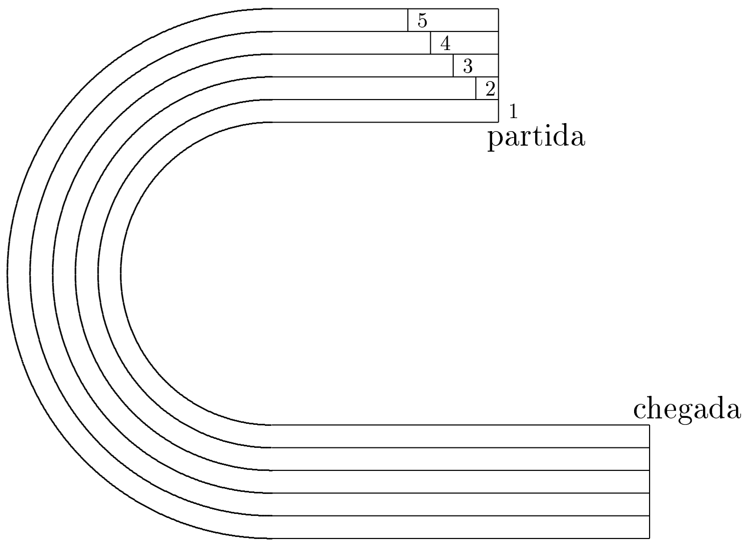


Figura 6.25: Pista de atletismo

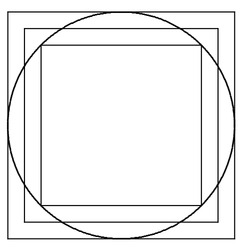


Figura 6.26: Problema dos três quadrados

Capítulo 7

A série geométrica

7.1 Introdução

Somas infinitas aparecem naturalmente na Matemática, e a série geométrica é o exemplo mais simples.

7.2 Estudos iniciais sobre a série geométrica

Já comentamos, no início do Capítulo 5, que um exemplo de sequência bem conhecida do estudante é a chamada *progressão geométrica*, definida por

$$a_1 = a \quad \text{e} \quad a_n = ra_{n-1} \text{ para todo } n \geq 2 \tag{7.1}$$

em que a e r são números reais dados, chamados, respectivamente, *primeiro termo* e *razão*. A fórmula direta para essa sequência é

$$a_n = ar^{n-1} \text{ para todo } n \geq 1 \tag{7.2}$$

A progressão geométrica e a regra para obter a soma de seus termos são conhecidas desde a Antiguidade. No antigo Papiro de Ahmes o escriba apresenta o seguinte problema (adaptado): "Em um conjunto de sete casas, cada casa tem um gato, cada gato come sete ratos, cada rato comeria sete espigas, e cada espiga produz sete medidas de grãos." Em seguida, o escriba calcula quantas medidas de grãos foram economizadas, e, curiosamente, calcula a soma do número de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grãos.

Esse problema do Papiro de Ahmes parece ser o antepassado do seguinte desafio, escrito em versos, muito difundido na Idade Média:

"Quando ia a Saint Ives,
encontrei um homem com sete mulheres;
cada mulher tinha sete sacos,
cada saco tinha sete gatos,
cada gato tinha sete gatinhos.
Gatinhos, gatos, sacos e mulheres,
quantos iam a Saint Ives?"

Euclides de Alexandria (quarto século antes de Cristo) apresenta, em *Os Elementos*, uma regra para o cálculo da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Sua regra pode ser descrita pela fórmula não muito prática

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

Em um tratado de Aritmética, escrito em 1410 por Prosdócimo de Beldamandi, aparece uma regra esquisita:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = ar^{n-1} + \frac{ar^{n-1} - a}{r - 1}$$

Nos tempos atuais a soma

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é dada pela fórmula

$$s_n = \begin{cases} a\,\dfrac{1 - r^n}{1 - r} & \text{se } r \neq 1 \\ an & \text{se } r = 1 \end{cases} \tag{7.3}$$

Se $r = 1$, a progressão geométrica é uma sequência constante, a saber, $a_n = a$ para todo n, e portanto $s_n = a + a + \cdots + a$ (n termos), ou $s_n = na$. Se $r \neq 1$, a fórmula 7.3 pode ser demonstrada através do Método da Indução Completa. Outra forma de demonstrar é considerar a disposição

$$\begin{array}{rl} & s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ - & rs_n = \phantom{a+{}} ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline & s_n - rs_n = a \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -ar^n \end{array}$$

a qual implica a fórmula 7.3 para $r \neq 1$.

Mas aqui estamos interessados na soma infinita dos termos de uma progressão geométrica. Segundo [86], vol. II, página 503, a primeira série geométrica infinita conhecida é a que foi calculada por Arquimedes em seu trabalho *A Quadratura da Parábola*. A série calculada foi

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \cdots$$

Definição 7.1. Dados números reais a e r, a *série geométrica* de *primeiro termo* a e *razão* r é a soma infinita

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + \cdots \tag{7.4}$$

Naturalmente precisamos esclarecer o que significa uma soma infinita. Mas antes observamos que existem muitos motivos pelos quais a Matemática considera este tipo de soma. Apresentamos inicialmente dois exemplos.

Exemplo 7.2. De acordo com o que estudamos no Capítulo 2, a expansão decimal de um número racional pode ser uma soma infinita. Por exemplo, $1/3 = 0{,}333\ldots$, o que significa

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots \end{aligned}$$

portanto $1/3$ se escreve como a soma infinita dos termos da progressão geométrica cujo primeiro termo é $a = 3/10$ e cuja razão é $r = 1/10$.

Exemplo 7.3. Consideremos o quadrado unitário. Dividindo-o ao meio com um segmento vertical, obtemos dois retângulos, cada um com área igual a $1/2$. Dividindo o retângulo da direita ao meio com um segmento horizontal, obtemos dois retângulos, cada um com área igual a $1/4$. Dentre estes dois, escolhemos o retângulo superior, e o dividimos ao meio com um segmento vertical, e temos dois retângulos, cada um com área igual a $1/8$. Podemos continuar indefinidamente este processo. Confira a Figura 7.1. Isto nos indica que deve ser verdadeira uma identidade do tipo

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

a qual envolve uma soma infinita dos termos da progressão geométrica cujo primeiro termo é $a = 1/2$ e cuja razão é $r = 1/2$.

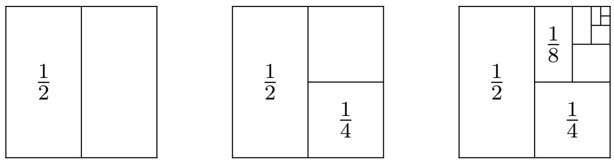


Figura 7.1: Decomposição infinita do quadrado unitário

Podemos tentar uma demonstração algébrica para uma identidade do tipo

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

imitando a demonstração feita para o caso finito. Temos

$$? \qquad \begin{array}{rcl} & S = & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \\ - & \frac{1}{2}\,S = & \phantom{\frac{1}{2} +\ } \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \\ \hline S & - \ \frac{1}{2}\,S = & \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 + \cdots \end{array}$$

Portanto $(1/2)S = 1/2$, ou $S = 1$, como esperávamos. O estudante poderá verificar que este método também se aplica à série geométrica do exemplo 7.2, em que

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots$$

Mas, a Matemática tem seus próprios caminhos. Se o estudante aplicasse o método acima para a "soma infinita"

$$S = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots$$

obteria $S = -1/4$. Isto, sem dúvida, seria muito esquisito. Como poderia a "soma" $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots$ ser igual a $-1/4$, se todas as parcelas são positivas? Se isto fosse verdade, a Matemática estaria de pernas para o ar!

A propósito, a história ocorrida entre o rei e o sábio, contada no Problema 7.6.5, tem outra versão. Um rei, desejando recompensar os feitos de seu melhor guerreiro, perguntou-lhe o que desejava. O guerreiro era um aficcionado do jogo de xadrez. Mostrando ao rei um tabuleiro de xadrez, pediu-lhe um grão de trigo pela primeira casa, dois grãos pela segunda casa, quatro pela terceira, e assim por diante. Julgando ser modesto o guerreiro, o rei prometeu-lhe atender o pedido, e lhe ordenou voltar ao palácio no dia seguinte. Chamou então o rei o contador e o dispenseiro da corte, e ordenou-lhes que tomassem as providências necessárias para atender ao pedido do guerreiro. Depois de muitos cálculos, o contador e o dispenseiro constataram que, mesmo considerando toda a produção de trigo do reinado durante cem anos, não se atingiria a quantidade necessária. O rei ficou estupefato. Previu que o guerreiro exigiria a mão de sua única filha. Como, no íntimo, não gostasse de guerreiros, pediu ao mais famoso sábio de seu reino que apresentasse uma solução para o problema.

O sábio sugeriu ao rei que oferecesse ao guerreiro todo o trigo correspondente não apenas a um tabuleiro com 64 casas, mas a um tabuleiro infinito. O imprudente guerreiro aceitou. O sábio fez então o seguinte cálculo:

$$\begin{array}{rl} & S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots \\ - & \\ & 2S = \quad\;\; 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots \\ \hline & -S = 1 \end{array}$$

portanto, $S = -1$.

O guerreiro tinha noções de Matemática, mas não soube contestar os cálculos do sábio. Teve então que pagar um grão de trigo ao rei.

Por que o cálculo

$$\begin{array}{rl} & S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \\ - & \\ & rS \quad\;\; ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \\ \hline & (1-r)\,S = a \end{array}$$

funciona para algumas progressões geométricas e para outras não? Para responder a isto precisamos olhar a questão mais de perto. Ao fazer a conta

$$rS = r(a + ar + ar^2 + \cdots) = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

estamos usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação a uma "soma infinita". Ora, sabemos que vale a propriedade distributiva da multiplicação em relação a uma soma finita. E quanto a uma soma infinita? Por outro lado, ao efetuarmos $S - rS$, estamos usando a propriedade associativa em somas infinitas:

$$\begin{aligned} S - rS &= (a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots) - (ar + ar^2 + ar^3 + \cdots) \\ &= a + (ar - ar) + (ar^2 + ar^2) + (ar^3 + ar^3) + \cdots \\ &= a + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \cdots \\ &= a \end{aligned}$$

Para saber se estas propriedades são válidas neste contexto, necessitamos ter mais clareza sobre o significado de soma infinita.

7.3 Convergência da série geométrica

Para definir o que se entende por soma infinita, vamos reexaminar o Exemplo 7.3. Vimos ali que a identidade

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

foi gerada mediante a partição da área de um quadrado unitário. Esta partição é um processo infinito, o que nos sugere considerar o limite de alguma sequência. Devemos considerar uma sequência cujo limite seja 1. No Exemplo referido, aproximamo-nos da área total do quadrado à medida que adicionamos mais um novo retângulo à soma das áreas dos retângulos anteriores. Isso nos sugere considerar a sequência

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{2} \\
s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\
s_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\
&\vdots \\
s_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Vamos calcular $\lim_{n\to\infty} s_n$. Sabemos, da fórmula 7.3, que

$$s_n = \frac{1}{2}\ \frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Como $\lim_{n\to\infty} (1/2)^n = 0$, segue que $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Isto é o que queríamos. Estas considerações nos sugerem a

Definição 7.4. Dada uma progressão geométrica infinita $(ar^n)_{n\geq 0}$, a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$, definida por

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

é chamada *sequência das somas parciais* de $(ar^n)_{n\geq 0}$. Essa sequência também é indicada pela *soma infinita* $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$, e é também chamada *série geométrica.*

A soma infinita $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ é também indicada com a notação de somatória $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, que se lê "somatória de $n = 0$ a infinito de ar^n ".

Definição 7.5. Se a e r são números reais, dizemos que a série geométrica $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots$ é *convergente* se existir o limite $\lim s_n$ da sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ das somas parciais. Neste caso o limite é indicado por $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ ou por $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, e é chamado de *soma* da série.

Insistimos em observar que estamos usando uma notação de duplo sentido. Dessa forma

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

indicam tanto a sequência das somas parciais como o limite, se existir. Por outro lado, se não existir $\lim s_n$, dizemos que a série é *divergente*. Sempre que não houver ambiguidade, escrevemos $\sum ar^n$ no lugar de $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$.

Para calcular a soma de uma série geométrica, necessitamos primeiro conhecer $\lim_{n\to\infty} r^n$ para todo número real r. Vamos demonstrar o

Teorema 7.6. *Para todo número real r temos*

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & se\ |r| < 1 \\ 1 & se\ r = 1 \\ +\infty & se\ r > 1 \\ \textit{não existe se} & r \leq -1 \end{cases} \tag{7.5}$$

Demonstração. 1º Caso: $r = 1$.

Temos $\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

2º Caso: $|r| < 1$.

Se $r = 0$, temos $\lim_{n\to\infty} r^n = \lim 0 = 0$. Suponhamos $r \neq 0$. Seja $s = (1/|r|) - 1$. Então $s > 0$ e $|r| = 1/(1+s)$. Aplicando a fórmula binomial, obtemos

$$\begin{aligned}(1+s)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}s + \binom{n}{2}s^2 + \cdots \binom{n}{n}s^n \\ &> \binom{n}{1}s \\ &> ns\end{aligned}$$

todo $n \geq 1$. Portanto

$$0 < |r|^n = \frac{1}{(1+s)^n} < \frac{1}{ns}$$

Como $\lim_{n\to\infty} 1/(ns) = 0$, o Teorema da Compressão 5.18 garante que $\lim |r|^n = 0$.

3º Caso: $r > 1$.

Seja $s = r - 1$. Então $s > 0$ e $r = 1 + s$. Usando a desigualdade do caso anterior temos

$$r^n = (1+s)^n > ns \quad \text{para todo } \; n \geq 1$$

Como $\lim_{n\to\infty} ns = +\infty$, segue que o mesmo vale para (r^n).

4º Caso: $r < -1$.

Observe que $|r| > 1$. Pelo que provamos acima no 3º caso, a subsequência dada pelos valores pares de n tende para $+\infty$, enquanto $r^n < -1$ para todo n ímpar. Portanto não existe $\lim r^n$.

5º Caso: $r = -1$.

A sequência $\big((-1)^n\big)_{n\geq 1}$ oscila, assumindo o valor 1 para n par, e -1 para n ímpar. Logo, não existe $\lim(-1)^n$.

Isto termina a demonstração. □

Temos agora o

Teorema 7.7. *Sejam r e a números reais com $a \neq 0$. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \begin{cases} = \dfrac{a}{1-r} & \textit{se } |r| < 1 \\ \textit{é divergente} & \textit{se } |r| \geq 1 \end{cases} \tag{7.6}$$

Demonstração. Seja $(s_n)_{n\geq 1}$ a sequência das somas parciais, isto é,

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

Queremos calcular $\lim s_n$. Sabemos que

$$s_n = \begin{cases} a\dfrac{1-r^n}{1-r} & \text{se } r \neq 1 \\ an & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

Consideremos três casos.

1º Caso: $|r| < 1$.

Temos $\lim r^n = 0$ e $s_n = a(1-r^n)/(1-r)$. Portanto,

$$\lim s_n = \frac{a}{1-r}\lim(1-r^n) = \frac{a}{1-r}(1-0) = \frac{a}{1-r}$$

2º Caso: $r = 1$.

Então $s_n = an$ (onde $a \neq 0$), e $\lim s_n$ não existe.

3º Caso: $|r| \geq 1$ e $r \neq 1$.

Temos $s_n = a(1-r^n)/(1-r)$ e $\lim r^n$ não existe. Consequentemente, $\lim s_n$ não existe. Isto termina a demonstração. $\square$

Exemplo 7.8. Vamos recalcular a soma da série geométrica

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

à luz do resultado acima. Temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= \frac{(1/2)}{1-(1/2)}\\ &= 1\end{aligned}$$

confirmando o que já esperávamos.

Exemplo 7.9. Observe que

$$\begin{aligned}0{,}333\ldots &= \frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^n\\ &= \frac{(3/10)}{1-(1/10)}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

o que está de acordo com o que vimos na Seção 2.4.

Exemplo 7.10. Vamos examinar a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{2n}}{5^{3n+2}}$. Observemos primeiro que ela é igual a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^2}\left(\frac{4^2}{5^3}\right)^n$. Portanto, a série pode ser colocada na forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, e vemos assim que se trata de uma série geométrica de primeiro termo $a = 1/5^2$ e razão $r = 4^2/5^3$. Como $|r| < 1$, a série é convergente. De acordo com o Teorema 7.7, sua soma é

$$\frac{1}{5^2}\,\frac{1}{1-(4^2/5^3)} = \frac{5}{5^3-4^2} = \frac{5}{109}$$

Exemplo 7.11. Considere a série geométrica $\sum_{n=2}^{\infty} 5(1/3)^n$. Um estudante mais apressado poderá concluir erroneamente que se trata da série geométrica de razão igual a $1/3$ e primeiro termo igual a 5. Observe, entretanto, que o índice n começa com 2, e não com zero. Assim

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} 5\left(\frac{1}{3}\right)^n &= 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots \\ &= \frac{5}{9} + \frac{5}{9}\frac{1}{3} + \frac{5}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

e a progressão tem primeiro termo igual a $\dfrac{5}{9}$ e razão $\dfrac{1}{3}$. A soma é $\dfrac{5/9}{1-(1/3)} = \dfrac{5}{6}$.

7.4 Aplicações da série geométrica

Na Seção 2.4 vimos como as séries geométricas aparecem na expansão decimal de números racionais. Em particular, a recíproca do Teorema 2.5 afirma que toda expansão decimal periódica representa um número racional. Vamos fazer uma demonstração geral dessa afirmação, pois na Seção 2.4 foi feito apenas um exemplo.

Consideremos um representação decimal periódica

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0{,}b_1 b_2 \ldots b_{N-1}\overline{b_N \ldots b_{N+k-1}}$$

em que $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ é a parte inteira, $b_1 b_2 \ldots b_{N-1}$ é a parte não inteira não periódica e $b_N \ldots b_{N+k-1}$ é a parte periódica. Observemos primeiro que

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0{,}b_1 b_2 \ldots b_{N-1}\overline{b_N \ldots b_{N+k-1}} =$$

$$= a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_{N-1}}{10^{N-1}} +$$

$$+ \frac{1}{10^{N-1}}\left[\,0{,}\overline{b_N \ldots b_{N+k-1}}\,\right].$$

Basta demonstrar, portanto, que é racional toda representação periódica simples da forma $0{,}\overline{b_1 b_2 \ldots b_k}$. Temos

$$\begin{aligned}0{,}\overline{b_1 b_2 \ldots b_k} &= \frac{\big(b_1 b_2 \ldots b_k\big)_{10}}{10^k} + \frac{\big(b_1 b_2 \ldots b_k\big)_{10}}{10^{2k}} + \frac{\big(b_1 b_2 \ldots b_k\big)_{10}}{10^{3k}} + \cdots \\ &= \frac{\big(b_1 b_2 \ldots b_k\big)_{10}}{10^k}\left[1 + \left(\frac{1}{10^k}\right) + \left(\frac{1}{10^k}\right)^2 + \left(\frac{1}{10^k}\right)^3 + \cdots\right] \\ &= \frac{\big(b_1 b_2 \ldots b_k\big)_{10}}{10^k}\,\frac{1}{1-\big(1/10^k\big)} \\ &= \frac{\big(b_1 b_2 \ldots b_k\big)_{10}}{10^k - 1}\end{aligned}$$

que é um número racional.

As séries geométricas podem ser utilizadas em diversos problemas de Física, conforme podemos ver no exemplo seguinte e nos Problemas 7.6.13 a 7.6.15.

Exemplo 7.12. Uma bola de borracha é solta a uma altura de l metros sobre um piso horizontal. O movimento da bola ficará perfeitamente descrito se dissermos que, a cada vez que a bola se choca com o piso, ela sobe até uma altura igual a r vezes a altura do salto anterior, onde r é um número tal que $0 < r < 1$. Consideramos que a bola salta um número infinito de vezes.

Vamos calcular primeiro a distância total percorrida pela bola. A bola é solta, e desce l metros até o piso. Depois sobe rl metros, e desce a mesma distância. Portanto, percorre $l+2rl$ metros após o primeiro salto. E assim sucessivamente, a distância total percorrida é

$$\begin{aligned} d &= l + 2rl + 2r^2 l + 2r^3 l + \cdots \\ &= l + 2rl + (2rl)r + (2rl)r^2 + \cdots \\ &= l + 2rl\,\frac{1}{1-r} \\ &= l\,\frac{1+r}{1-r}\ \text{ metros} \end{aligned}$$

Vamos calcular o tempo que a bola leva para percorrer esta distância. Um corpo em queda livre satisfaz às equações $v_f = v_i - gt$ e $v_f^2 = v_i^2 - 2gy$, onde v_i é a velocidade inicial, v_f é a velocidade final, g a aceleração da gravidade, t o intervalo de tempo e y a distância percorrida. Como referencial consideramos o eixo Oy conforme a Figura 7.2.

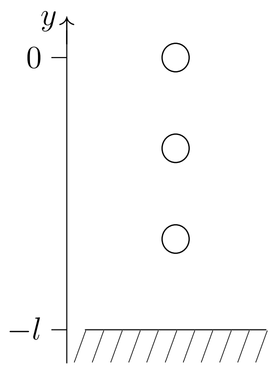


Figura 7.2: Uma bola é solta de uma altura l

Fazendo $v_i = 0$ nestas equações, obtemos $v_f = -gt$ e $v_f^2 = -2gy$. Lembrando que v_f aponta para baixo, vem

$$v_f = -\sqrt{-2gy} = -\sqrt{2g|y|}$$

Daí

$$t = \frac{v_f}{-g} = \sqrt{\frac{2|y|}{g}}$$

Este é o tempo que o corpo leva para percorrer, em queda livre, a distância $|y|$. Portanto, o tempo total é

$$
\begin{aligned}
t_T &= \sqrt{\frac{2l}{g}} + 2\sqrt{\frac{2rl}{g}} + 2\sqrt{\frac{2r^2l}{g}} + 2\sqrt{\frac{2r^3l}{g}} + \cdots \\
&= \sqrt{\frac{2l}{g}} + 2\sqrt{\frac{2rl}{g}}\left[1 + \sqrt{r} + \left(\sqrt{r}\right)^2 + \left(\sqrt{r}\right)^3 + \cdots\right] \\
&= \sqrt{\frac{2l}{g}} + 2\sqrt{\frac{2rl}{g}}\,\frac{1}{1-\sqrt{r}} \\
&= \sqrt{\frac{2l}{g}}\,\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} \text{ segundos}
\end{aligned}
$$

Para encerrar nossa apresentação das aplicações da série geométrica, vejamos como ela resolve o paradoxo de Zeno chamado *Aquiles e a tartaruga.* Esse paradoxo, proposto por Zeno por volta de 450 a. C., apontou as limitações do modelo matemático da época. De fato, esse modelo tinha dificuldade em lidar com processos infinitos. Por exemplo, pode ser finita uma soma de infinitos números positivos? Nas seções anteriores vimos que isso é possível dentro de nosso modelo de números reais. Mas o modelo numérico do tempo de Zeno não esclarecia essa questão.

Para descrever seu paradoxo Zeno utiliza dois personagens, Aquiles, considerado o guerreiro mais rápido da Antiguidade, e a tartaruga, conhecida por sua lentidão ao caminhar. Aquiles aposta uma corrida com a tartaruga, que sai com uma vantagem inicial. Naturalmente o bom senso nos diz que Aquiles alcançará facilmente a tartaruga. Mas, segundo argumenta Zeno, isso não ocorre (por isso esse argumento é denominado paradoxo). No instante $t = 0$, Aquiles está no ponto A, e a tartaruga no ponto B. Começam a correr, e, depois de um certo tempo, Aquiles alcança o ponto B. Mas, neste ínterim, a tartaruga já atingiu o ponto C mais adiante. Quando Aquiles chega no ponto C, a tartaruga está mais adiante em D, e assim *ad infinitum.* E por isso, afirma Zeno, Aquiles nunca alcança a tartaruga.

Utilizando o conceito de convergência de séries podemos construir um modelo matemático para o paradoxo de Zeno em que Aquiles alcança a tartaruga, e podemos calcular a distância e o tempo que ele gasta para isso. Consideremos dois pontos A e T que se movimentam com velocidade constante em um eixo de coordenadas. Sejam V a velocidade de A, e v a de T, de forma que $V > v > 0$. Suponhamos que no instante $t = 0$ o ponto A está na origem das coordenadas e T está em P_1, com coordenada $d > 0$. No instante $t_1 > 0$, A está em P_1 e T está em P_2. No instante t_2, A está em P_2 e T em P_3. E assim sucessivamente. Confira a Figura 7.3.

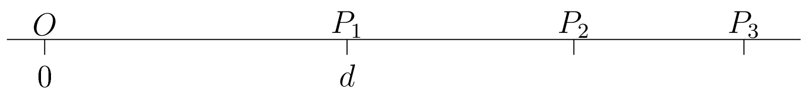


Figura 7.3: O paradoxo de Zeno “Aquiles e a tartaruga”

Vamos calcular o tempo e a distância percorrida por A até que T seja alcançado. Escrevemos $V = kv$, em que $k > 1$ é constante. Como t_1 é o intervalo de tempo necessário para A ir de O a P_1, temos $t_1 = d/V = d/kv$. Neste intervalo de tempo, T vai de P_1 a P_2. Seja d_1 essa distância. Então $d_1 = vt_1 = d/k$. Para percorrer a distância d_1 entre P_1 e P_2 A gasta o intervalo de tempo $t_2 = d_1/V = d/k^2v$. Nesse ínterim, T alcança P_3, e percorre a distância $d_2 = vt_2 = d/k^2$. Para chegar até P_3, A gasta o intervalo de tempo $t_3 = d_2/V = d/k^3v$. E assim sucessivamente. A distância total percorrida por T é finita e vale

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots = \frac{d}{k} + \frac{d}{k^2} + \frac{d}{k^3} + \cdots = \frac{d}{k}\frac{1}{1-\frac{1}{k}} = \frac{d}{k-1}$$

O tempo total dispendido por A e por T na corrida também é finito e vale

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots = \frac{d}{kv} + \frac{d}{k^2v} + \frac{d}{k^3v} + \cdots = \frac{d}{kv}\left[1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{d}{kv}\frac{1}{1-\frac{1}{k}} = \frac{d}{v(k-1)}$$

Nesse tempo A percorre a distância

$$Vt = kv\frac{d}{v(k-1)} = \frac{dk}{k-1} = d + \frac{d}{k-1}$$

Portanto, no tempo t, A percorre a distância inicial d que a separava de T e mais a distância percorrida por T. Portanto A alcança T num intervalo de tempo finito. Assim, no modelo numérico dos números reais não existe o paradoxo de Zeno.

7.5 Outras séries numéricas

Definição 7.13. Dada uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de números reais, a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ definida por $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, para todo $n \geq 1$, denomina-se *sequência das somas parciais* de $(a_n)_{n\geq 1}$. A expressão $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, também indicada por $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, denomina-se *série associada* à sequência, ou simplesmente série. Diz-se que a série *converge* se existir $\lim s_n$. Caso contrário, diz-se que a série *diverge*. Se $\lim s_n = a$, escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, e a chama-se *soma* da série.

No teorema demonstrado a seguir vemos que podemos somar séries convergentes e multiplicar uma série convergente, termo a termo, por uma constante. Com estes resultados resolvemos as questões colocadas no final da Seção 7.2 quanto ao uso das propriedades distributiva e associativa em somas infinitas.

Teorema 7.14. *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes. Então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é convergente e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente e c é um número real, então $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Demonstração. Sejam $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ e $t_n = b_1 + \cdots + b_n$. Como $\lim s_n$ e $\lim t_n$ existem, segue que existe $\lim(s_n + t_n)$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = (\lim s_n) + (\lim t_n) = \lim(s_n + t_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$$

Por outro lado, $\lim cs_n$ existe e

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = \lim cs_n = c \lim s_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

□

No Capítulo 8 usaremos o

Teorema 7.15 (Teste da comparação). *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries tais que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

Demonstração. Sejam $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ e $t_n = b_1 + \cdots + b_n$. Como $0 \leq a_n$ temos que a sequência (s_n) é crescente. Temos também $0 \leq s_n \leq t_n \leq \lim t_n$, e vemos que a sequência s_n é limitada superiormente. Em virtude do Teorema das Sequências Monótonas 5.23 a sequência s_n é convergente, portanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

7.6 Problemas

Problema 7.6.1. Resolva o problema do Papiro de Ahmes: “Em um conjunto de sete casas, cada casa tem um gato, cada gato come sete ratos, cada rato comeria sete espigas, e cada espiga produz sete medidas de grãos.” Calcule quantas medidas de grãos foram economizadas e a soma do número de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grãos.

Problema 7.6.2. Resolva o desafio da Idade Média, descrito no texto: Quando ia a Saint Ives, encontrei um homem com sete mulheres; cada mulher tinha sete sacos, cada saco tinha sete gatos, cada gato tinha sete gatinhos. Gatinhos, gatos, sacos e mulheres, quantos iam a Saint Ives?

Problema 7.6.3. Outra maneira de demonstrar a fórmula 7.3 para $r \neq 1$, além das sugeridas no texto, consiste em utilizar a identidade polinomial

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = 1 - x^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

Problema 7.6.4. Um homem muito rico e sovina contrata o pedreiro João, e quer lhe pagar 30 reais por semana, durante um ano. João faz uma contraproposta: que lhe seja pago 1 centavo de real na 1ª semana, 2 centavos na 2ª semana, 4 centavos na 3º, e assim sucessivamente, seu salário em cada semana será o dobro do da semana precedente. Assinale a melhor alternativa e explique.

(a) João é bobo, vai ganhar muito menos do que a proposta inicial. (b) O homem rico poderá aceitar a proposta de João, pois pagará não muito mais do que o dobro do que iria gastar, e estava mesmo disposto a aumentar a oferta até 70 reais por semana. (c) João se sairá bem, mas ganhará o suficiente para viver somente após o 6º mês. Até lá, terá que usar o dinheiro que tem na poupança. (d) nenhuma das anteriores.

Problema 7.6.5. Conta-se que um rei, desejando recompensar o sábio inventor do jogo de xadrez, perguntou-lhe o que desejava. O sábio, com o intuito de lhe dar uma lição de humildade, lhe pediu um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez, dois grãos pela segunda casa, quatro grãos pela terceira, e assim sucessivamente, o número de grãos deveria sempre dobrar, até a última casa do tabuleiro. Poderá o rei atender o pedido do sábio?

Problema 7.6.6. Em cada um dos casos abaixo, coloque a série na forma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$. Decida se a série é convergente ou não. Se for convergente, calcule a soma.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{5}$ b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{5}{7^{3i}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{5^{2n}}$ e) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{j+1}}{3^j}$ f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{5}{3^n}$

g) $\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1+5^{2l}}{7^{3l+3}}$ h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{3^{k-3}}$

Problema 7.6.7. Coloque as séries abaixo na forma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$. Calcule a soma, quando existir.

a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} 5^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}$

Problema 7.6.8. Demonstre que se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim a_n = 0$.

Problema 7.6.9. Em alguns textos didáticos, uma expansão decimal periódica é denominada *dízima periódica*. Uma dízima periódica que não possui parte não periódica chama-se *dízima periódica simples*. Se possui parte não periódica, chama-se *dízima periódica composta*. Dada uma dízima periódica, uma fração ordinária que a represente chama-se *geratriz* da dízima periódica. Justifique a seguinte regra, encontrada em antigos livros didáticos: "A geratriz de uma dízima periódica simples sem parte inteira é uma fração cujo numerador é o período e cujo denominador é o número formado por tantos 9's quantos forem os dígitos do período."

Problema 7.6.10. Justifique esta outra regra: "A geratriz de uma dízima periódica composta sem parte inteira é uma fração cujo numerador é a parte não periódica seguida de um período menos a parte não periódica, e cujo denominador é o número formado por tantos 9's quantos forem os dígitos do período, seguido de tantos zeros quantos forem os dígitos da parte não periódica."

Problema 7.6.11. Mostre que $1/8 = 0{,}125$ e que $1/8 = 0{,}124999\ldots$ Que observação geral pode ser feita se nos inspirarmos neste exemplo?

Problema 7.6.12. Uma *fração decimal* é uma fração ordinária cujo denominador é uma potência de 10. Toda fração de inteiros com expansão decimal infinita pode ser aproximada por uma fração decimal. Por exemplo $7/11 = 0{,}\overline{63}$, de modo que para todo inteiro positivo n podemos aproximar

$$\frac{7}{11} \approx \frac{63}{10^2} + \frac{63}{10^4} + \cdots + \frac{63}{10^{2n}}$$

a) Prove que o erro R_n dessa aproximação satisfaz à condição $0 < R_n < 10^{-2n}$. **b)** Calcule uma aproximação de $7/11$ com erro $< 10^{-10}$.

Problema 7.6.13. Uma amostra de carbono 14 apresentou, num determinado ano, uma atividade de $3{,}5 \times 10^6$ desintegrações por grama de material. Sabendo-se que a atividade do carbono 14 em um determinado ano é $999876/10^6$ da atividade do ano anterior, calcule o número total de desintegrações por grama de material a partir do ano em que foi feita a medição.

Problema 7.6.14. Uma amostra de material radioativo emite anualmente uma quantidade de radiação igual a $998/10^3$ da quantidade do ano anterior. Em um determinado ano, a radiação foi de $2{,}5 \times 10^4$ roentgens. Calcule a radiação total emitida a partir do ano em que foi feita a medição.

Problema 7.6.15. Um corpo está sendo resfriado em um ambiente de temperatura constante. Ele emite, a cada minuto, $9/10$ da quantidade de calorias emitida no minuto anterior. Se no primeiro minuto o corpo emitiu 50 calorias, calcule a quantidade hipotética total de calorias que o corpo emitirá. Calcule em quanto tempo o corpo emitirá 90% deste total.

Problema 7.6.16. Na Figura 7.4, o triângulo maior é equilátero e tem lado igual a l. Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo construímos outros quatro triângulos equiláteros. Escolhemos um deles, e repetimos o procedimento, formando quatro triângulos equiláteros. Escolhemos um deles, e assim por diante, construímos infinitos triângulos equiláteros. Calcule a soma das áreas e dos perímetros dos triângulos escolhidos em cada etapa, incluindo o triângulo inicial.

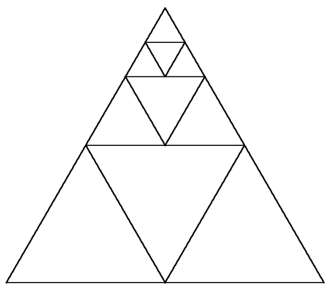


Figura 7.4: Área e perímetro de infinitos triângulos

Problema 7.6.17. Uma espiral infinita é formada por segmentos. O primeiro segmento mede 1, o segundo r, o terceiro r^2, e assim por diante, sendo $0 < r < 1$ um número real. Um segmento qualquer é perpendicular ao anterior, conforme sugerido pela Figura 7.5. Mostre que existe um ponto limite e o localize.

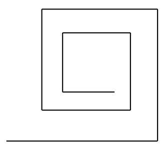


Figura 7.5: Limite de uma espiral infinita

Problema 7.6.18. Supondo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ é uma série convergente, ache seu valor. Para verificar que essa série é convergente, o estudante pode usar o teste da razão, estudado em cursos de Cálculo.

Problema 7.6.19. a) Usando a definição de convergência de séries, prove que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ não é convergente. **b)** Considere o seguinte cálculo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0$$

(?) Logo esta série tem soma igual a zero. Como isso é possível?

Problema 7.6.20. Relendo o final da Seção 7.2, explique agora por que o cálculo

$$\begin{array}{rl} S = & a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \\ - \quad r\,S & \quad\;\; ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \\ \hline (1-r)\,S = & a \end{array}$$

funciona para algumas progressões geométricas e para outras não.

Problema 7.6.21. Ao fazer o cálculo 2.14, página 29, usamos um caso particular da propriedade associativa para somas infinitas. **a)** Dê um exemplo para mostrar que a propriedade associativa nem sempre vale para somas infinitas. **b)** Prove que, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, então

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots$$

Problema 7.6.22. [Algoritmo da divisão continuada] Por que o algoritmo da divisão continuada usual fornece os dígitos da expansão decimal? Acompanhe o seguinte raciocínio e complete as argumentações. Seja a/b um número racional, com a e b inteiros positivos. Vamos supor primeiro que $a < b$. No primeiro passo da divisão continuada dividimos $10a$ por b e obtemos $10a = b_1 b + r_1$, com $0 \le r_1 < b$ e $0 \le b_1 < 10$. Escrevemos $0{,}b_1$ no quociente e ficamos com resto r_1. No segundo passo dividimos $10r_1$ por b e obtemos $10r_1 = b_2 b + r_2$, com $0 \le r_2 < b$ e $0 \le b_2 < 10$. Escrevemos $0{,}b_1 b_2$ no quociente e ficamos com resto r_2. No n-ésimo passo obtemos $10r_{n-1} = b_n b + r_n$, com $0 \le r_n < b$ e $0 \le b_n < 10$. **a)** Prove que

$$\frac{a}{b} = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}\,\frac{r_n}{b}$$

b) Demonstre que

$$\frac{a}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$$

Portanto, os dígitos b_i, obtidos na divisão continuada, são os dígitos da expansão decimal de a/b. Observamos que isso vale para qualquer base β.

7.7 Temas para investigação

Tema 7.7.1. A *curva de Koch* ou *curva floco-de-neve*, foi observada pelo matemático sueco Helge Von Koch em 1904. Ela é o limite de uma sequência de curvas poligonais fechadas que começa com um triângulo equilátero de lado 1. Para obter a segunda curva dessa sequência, cada lado da curva anterior é subdividido em três partes iguais. A parte do meio (em cada lado) é lado de um novo triângulo equilátero, com o terceiro vértice fora da região poligonal anterior. Em seguida eliminamos cada uma dessas partes do meio. Obtemos a região poligonal desenhada no centro da Figura 7.6. Para obter a terceira curva dessa sequência repetimos o procedimento. Confira a terceira figura em 7.6. E assim sucessivamente.
a) Considerando o n-ésimo estágio da construção da curva de Koch, calcule: a quantidade de lados q_n, o comprimento l_n de cada lado, e o perímetro p_n. Supondo que o perímetro da curva de Koch seja $\lim_{n\to\infty} p_n$, calcule-o.

b) Calcule a área a_n da região poligonal do n-ésimo estágio da construção da curva de Koch. Supondo que a área da região determinada pela curva de Koch seja $\lim_{n\to\infty} a_n$, calcule-a.

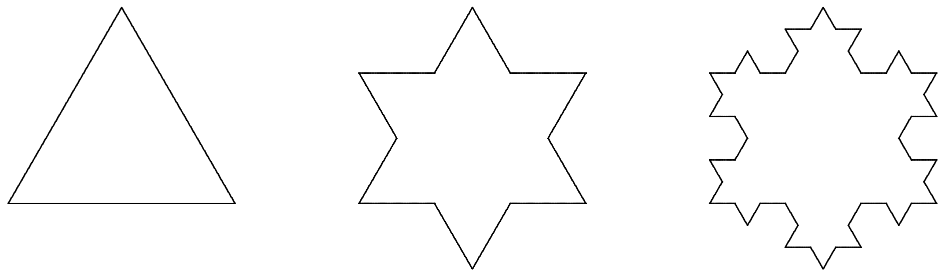


Figura 7.6: Gerando a curva de Koch

c) Investigue se é possível generalizar a curva de Koch iniciando com outros polígonos regulares. E iniciando com um tetraedro regular?

7.8 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 7.8.1. Comentamos na página 30 que o número 1 tem duas representações no sistema decimal, a saber, 1 e 0,999... Investigações em sala de aula constataram que estudantes do ensino básico têm dificuldade em aceitar essa observação. Uma causa é certamente a questão de compreender a notação e o significado de 0,999... Mas também se observou que outras identidades, como $1/3 = 0{,}333\ldots$, não provocam igual rejeição, talvez pelo fato de pode ser obtida através da divisão continuada de 1 por 3.

Estude a possibilidade de usar a seguinte modificação do algoritmo usual de divisão continuada, que permite obter $1/1 = 0{,}999\ldots$

$$
\begin{array}{ccccc|l}
1 & 0 & & & & \quad 1 \\ \cline{6-6}
 & 1 & 0 & & & 0,\ 9\ 9\ 9\ \ldots \\
 & & 1 & 0 & & \\
 & & & 1 & & \\
 & & & & \ddots &
\end{array}
$$

Está correto? Você acha que é viável o uso pedagógico dessa modificação do algoritmo usual de divisão continuada?

Complemente o Problema 7.6.11 deste Capítulo e obtenha $1/8 = 0{,}125$ através do algoritmo de divisão continuada usual e $1/8 = 0{,}124999\ldots$ através do algoritmo de divisão continuada modificado.

Atividade 7.8.2. Bole um problema sobre um gerente de hotel que pensou em fazer a seguinte promoção: todo hóspede paga 1 diária completa no primeiro dia; no segundo dia, paga $5/6$ de uma diária, no terceiro dia $5/6$ sobre o custo do dia anterior, e assim por diante.

Atividade 7.8.3. Construa atividades para estudantes que usem somas infinitas com a Figura 7.7.

Atividade 7.8.4. Construa atividades para estudantes que usem somas infinitas com a Figura 7.8.

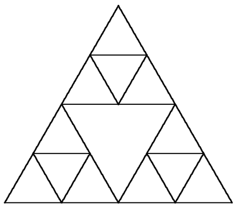


Figura 7.7: Imagine uma atividade

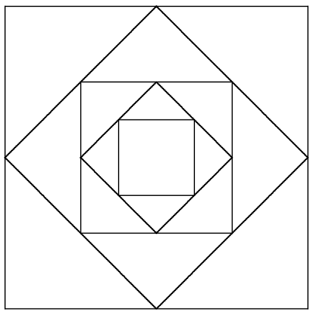


Figura 7.8: Imagine uma atividade

Capítulo 8

Números irracionais

8.1 Introdução

Continuamos neste capítulo o estudo dos números reais, agora com maior ênfase nos números irracionais. Em particular, estudamos as duas formas mais utilizadas para representar números irracionais, as expansões decimais e as frações contínuas infinitas simples.

8.2 Expansões decimais

No Capítulo 2, mais exatamente, no Teorema 2.2, página 26, vimos que todo número racional tem uma representação na forma de uma expansão decimal. Isso ocorre com qualquer número real $r \in [0,1)$, de acordo com o

Teorema 8.1. *Todo número real $r \in [0,1)$ se escreve na forma*

$$r = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{10^j} \tag{8.1}$$

em que, para todo $j \geq 1$, d_j é um algarismo decimal. Ainda, os números d_j's são únicos se existirem infinitos j's para os quais $d_j \neq 9$. Reciprocamente, toda série da forma 8.1 representa um número real do intervalo $[0,1)$.

É bem conhecida do estudante a *notação compacta*, em que a expressão 8.1 é escrita na forma

$$r = 0{,}d_1 d_2 d_3 \ldots \tag{8.2}$$

O Teorema 8.1 considera números reais no intervalo $[0,1)$, mas qualquer número real tem uma expansão decimal. De fato, todo número real se escreve na forma $r = n + s$, com n inteiro e $s \in [0,1)$. Portanto

$$r = \pm a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \ldots$$

em que cada a_i e cada b_j é um algarismo decimal.

Dado um número real $r \in [0,1)$, os números d_j da representação 8.1 são denominados *dígitos* de r.

Veremos na Seção 8.4 uma demonstração do Teorema 8.1 em um contexto um pouco mais geral. Para o momento preferimos fazer algumas observações.

Conforme afirma o Teorema 8.1, se existirem infinitos dígitos $\neq 9$ na expansão 8.1, então são unicamente determinados. Para ver que a condição dada é necessaria para a unicidade dos dígitos observemos que o número real $1/2$ tem duas representações como expansão decimal, a saber,

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}4999\ldots$$

De fato, $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
0{,}4999\ldots &= \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots \\
&= \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2}\left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots\right] \\
&= \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2-10} = \frac{4}{10} + \frac{9}{90} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Vemos, portanto, que a condição dada no Teorema 8.1 é necessaria para a unicidade dos dígitos.

A afirmação recíproca enunciada no Teorema 8.1 pode ser facilmente provada com o conhecimento que agora temos das séries numéricas. Vamos demonstrar que toda série numérica da forma 8.1 é convergente. De fato, seja $(s_n)_{n\geq 1}$ a sequência das somas parciais de $\left(d_i/10^i\right)_{i\geq 1}$. Como $s_n = s_{n-1} + d_n/10^n$ e $d_n/10^n \geq 0$, vem que $s_n \geq s_{n-1}$ para todo $n \geq 2$, e portanto a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ é crescente. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} \\
&\leq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^n} \\
&\leq \frac{9}{10}\,\frac{1-1/10^{n+1}}{1-1/10} \\
&\leq 1 - \frac{1}{10^{n+1}} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

e concluimos que a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ é limitada. Em consequência, existe $\lim s_n$, e a série é convergente. Concluímos que toda série numérica da forma 8.1 é convergente para um número real $r \in [0,1]$. De acordo com o Problema 8.6.2, se $d_j \neq 9$ para algum j então $r \in [0,1)$.

Dado um número real $r = 0{,}d_1d_2d_3\ldots \in [0,1)$, qual o significado geométrico de cada um dos dígitos d_j? Isto já foi visto na Seção 2.4 para números racionais, e para números reais o significado é o mesmo. Suponhamos que a representação $r = 0{,}d_1d_2d_3\ldots$ tenha infinitos dígitos $\neq 9$. Dividimos o intervalo $[0,1]$ em dez subintervalos iguais, e podemos ver que $r \in \left[\frac{d_1}{10}, \frac{d_1+1}{10}\right)$. Confira a Figura 8.1.

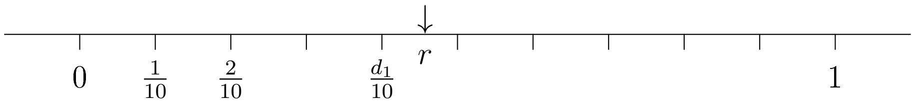


Figura 8.1: Determinação de dígito decimal

De fato,

$$r = 0{,}d_1d_2d_3\cdots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots \geq \frac{d_1}{10}$$

Por outro lado, notemos que

$$\frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots \leq \frac{9}{10^2}\left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right] = \frac{1}{10}$$

sendo que a igualdade ocorre se e somente se $d_j = 9$ para todo $j \geq 2$. Como existem infinitos dígitos $\neq 9$, temos $r < \frac{d_1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{d_1+1}{10}$.

Uma caracterização algébrica de d_1 é que esse dígito é a parte inteira de $10r$. De fato,

$$10r = d_1 + \frac{d_2}{10} + \frac{d_3}{10^2} + \cdots = d_1{,}d_2d_3\ldots$$

portanto $\lfloor 10r \rfloor = d_1$.

Em seguida subdividimos $\left[\frac{d_1}{10}, \frac{d_1+1}{10}\right)$ em dez subintervalos iguais, cada um de comprimento $\frac{1}{100}$. Os extremos desses subintervalos são os pontos de coordenadas $\frac{d_1}{10}$, $\frac{d_1}{10} + \frac{1}{100}$, $\frac{d_1}{10} + \frac{2}{100}$, ..., $\frac{d_1}{10} + \frac{10}{100} = \frac{d_1+1}{10}$. O número r está no subintervalo

$$\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} \leq r < \frac{d_1}{10} + \frac{d_2+1}{10^2}$$

o que se pode provar facilmente. E assim sucessivamente.

8.3 Reconhecimento de números irracionais

Reconhecer se um dado número real é racional ou irracional pode não ser uma tarefa simples. Um critério que pode ser útil em determinadas situações é o seguinte:

Teorema 8.2. *Um número real é irracional se e somente se sua expansão decimal for não periódica.*

Esse resultado é uma decorrência do Teorema 2.5, página 30. Ele nos permite construir exemplos de números irracionais, como

$$0{,}101001000100001000001000000 1\ldots$$

em que temos o algarismo 1 seguido de um zero, depois o algarismo 1 seguido de dois zeros, depois o algarismo 1 seguido de três zeros, e assim por diante, esse número é construído por agrupamentos de dígitos, sendo que o n-ésimo agrupamento consiste do algarismo 1 seguido de n zeros. Podemos ver que essa expansão não é periódica, portanto se trata de um número irracional.

Dado um número racional $a{,}a_1a_2\ldots a_n\overline{b_1b_2\ldots b_m}$, podemos construir infinitos números irracionais intercalando entre a primeira ocorrência do período e a segunda um agrupamento de dígitos $c_1c_2\ldots c_k$, depois entre a segunda ocorrência do período e a terceira o agrupamento $c_1c_2\ldots c_kc_1c_2\ldots c_k$, e assim sucessivamente. Portanto a cada número racional podemos associar infinitos números irracionais.

O teorema abaixo constitui um instrumento importante para o estudo de uma certa classe de números irracionais.

Teorema 8.3. *Se α é raiz real do polinômio $p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$, sendo $n \geq 1$ e c_i um número inteiro para todo $0 \leq i \leq n-1$, então α é inteiro ou irracional. Ainda, se α é inteiro então ele é divisor de c_0.*

Demonstração. Suponhamos que α seja racional não inteiro. Escrevamos $\alpha = a/b$, sendo a e b inteiros relativamente primos, com $b > 1$. Por hipótese $p(\alpha) = 0$, ou

$$\frac{a^n}{b^n} + c_{n-1}\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \cdots + c_1\frac{a}{b} + c_0 = 0$$

Multiplicando essa equação por b^n vem

$$a^n + c_{n-1}a^{n-1}b + \cdots + c_1ab^{n-1} + c_0b^n = 0$$

ou

$$a^n = b\left(-c_{n-1}a^{n-1} - \cdots - c_1ab^{n-2} - c_0b^{n-1}\right)$$

Portanto b é divisor de a^n. Usando que $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$ e o Teorema 1.13, enunciado na página 16, temos que b é divisor de a. Portanto $\mathrm{mdc}(a,b) = b$, contrariando o fato de ser $b > 1$. Segue que α é inteiro ou irracional.

Por outro lado, se α é inteiro, temos $b = 1$ e $\alpha = a$, e a segunda relação acima fica

$$a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1a + c_0 = 0$$

e está claro que α é divisor de c_0. Isto termina a demonstração. □

Exemplo 8.4. Vamos usar o resultado do Teorema 8.3 para dar outra demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional. Seja $\alpha = \sqrt{2}$. Elevando essa identidade ao quadrado, vem $\alpha^2 = 2$, ou $\alpha^2 - 2 = 0$. Consequentemente α é raiz real do polinômio $p(x) = x^2 - 2$. Notemos que esse polinômio tem coeficiente líder igual a 1 e o outro coeficiente é inteiro. Podemos então aplicar o resultado do Teorema 8.3 e concluir que α é inteiro ou irracional. Observando que $1 < 2 < 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$, vemos que α não é inteiro. Portanto $\alpha = \sqrt{2}$ é irracional.

Exemplo 8.5. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ é irracional. De fato, seja $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{3}}$. Elevando essa identidade ao quadrado, vem $\alpha^2 = 2 + \sqrt{3}$, ou $\alpha^2 - 2 = \sqrt{3}$. Elevando ao quadrado novamente vem $\alpha^4 - 4\alpha^2 + 1 = 0$. Consequentemente α é raiz real do polinômio $p(x) = x^4 - 4x^2 + 1$. De acordo com o Teorema 8.3 α é inteiro ou irracional. Se fosse inteiro seria divisor de 1. Observando que $\sqrt{2+\sqrt{3}} > 1$, vemos que não é. Portanto $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ é irracional.

Exemplo 8.6. Se m e k são inteiros positivos tais que $\sqrt[m]{k} \notin \mathbb{Z}$ então $\sqrt[m]{k}$ é irracional. De fato, seja $\alpha = \sqrt[m]{k}$. Elevando essa identidade à potência m vem $\alpha^m = k$, ou $\alpha^m - k = 0$. Consequentemente α é raiz real do polinômio $p(x) = x^m - k$. De acordo com o Teorema 8.3 α é inteiro ou irracional. Como α não é inteiro por hipótese, segue que α é irracional.

De acordo com esse exemplo são irracionais números como $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[7]{19}$, etc.

O Teorema 8.3 nos apresenta a seguinte questão: é todo número irracional raiz de um polinômio $p(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$ com coeficientes inteiros? Este não é um problema fácil, e foi respondido por Joseph Liouville em 1851. Estudando a forma com que os números irracionais são aproximados por números racionais, determinou condições necessárias para que um número seja raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Com isso encontrou exemplos de números irracionais que não satisfazem essa condição. Um exemplo é

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} \tag{8.3}$$

Isto motiva a

Definição 8.7. Um número real chama-se *algébrico* se é raiz de um polinômio $p(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$ com coeficientes inteiros. Caso contrário chama-se *transcendente*.

Vimos acima vários exemplos de números algébricos, como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{5}$, etc. Observe que todo número racional a/b é algébrico, pois é raiz do polinômio $p(x) = bx - a$. Além do exemplo de Liouville dado acima, os números transcendentes mais famosos são a constante de Arquimedes π, o número e e $2^{\sqrt{2}}$. Não é simples verificar que esses números são transcendentes.

Em [45], página 490, pode-se estudar uma demonstração do

Teorema 8.8 (Gelfond, 1934). *Sejam α e β números algébricos (reais ou complexos). Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ e se β não for racional então α^β é transcendente.*

Exemplos de números transcendentes fornecidos por esse teorema: $2^{\sqrt{n}}$ e $\sqrt{n}^{\sqrt{2}}$ para todo inteiro positivo n tal que $\sqrt{n}$ não é inteiro; $2^{\sqrt{-2}}$; 2^i; e^π, pois $e^\pi = e^{-2i \log i} = i^{-2i}$.

Não é simples reconhecer números transcendentes, mas sabemos que, de um certo ponto de vista, eles são muito mais numerosos do que os números algébricos, devido ao seguinte resultado de 1874 de Georg Cantor:

Teorema 8.9. *O conjunto dos números algébricos é enumerável, mas o conjunto dos números transcendentes não.*

Um conjunto A se diz *enumerável* quando existe uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \mapsto A$. Em outros termos, os elementos de A podem ser "contados". Para obter uma demonstração do Teorema 8.9 consulte [29], páginas 15 e 16.

Para completar nossa lista de teoremas enunciamos os

Teorema 8.10. *O número e é irracional.*

Estudaremos o número e e a demonstração desse teorema no Capítulo 9.

Teorema 8.11 (Lambert, 1761). *A constante de Arquimedes π é irracional.*

Para estudar uma demonstração, confira [29], página 9.

Teorema 8.12 (Hermite, 1873). *O número e é transcendente.*

O estudante pode obter um roteiro de uma demonstração em [29], página 29.

Teorema 8.13 (Lindemann, 1882). *O número π é transcendente.*

Para estudar uma demonstração, confira [29], página 33 e seguintes.

Nesse campo de estudos existem inúmeras questões não respondidas. Por exemplo, não se sabe se os números π^e, $e\pi$, $e + \pi$ são irracionais.

Não poderíamos terminar essa Seção sem observar o

Teorema 8.14. *Todo número construtível (com régua e compasso) é algébrico.*

Dessa forma o Teorema 8.13 de Lindemann resolveu um dos famosos problemas da antiguidade, qual seja, "dado um disco, construir com régua e compasso um quadrado com área igual à do disco dado". De fato, se fosse possível tal construção, seria possível construir o número $\sqrt{\pi}$ com régua e compasso, e, em virtude do Teorema 8.14, $\sqrt{\pi}$ seria algébrico. Mas o produto de números algébricos é algébrico (confira [29], página 17), e então π seria algébrico, contrariando o teorema de Lindemann. Vemos também que não é possível retificar uma dada circunferência com régua e compasso, pois o comprimento da circunferência é proporcional a π.

8.4 Expansões β-ádicas

Seja $\beta > 1$ um inteiro. Sabemos que todo inteiro positivo n tem um única representação no sistema posicional de base β. Resultado similar acontece para números reais $r \in [0,1)$. Lembramos que, dado um inteiro $\beta > 1$, um β-algarismo é um inteiro d tal que $0 \leq d \leq \beta - 1$.

Teorema 8.15. *Seja $\beta > 1$ um inteiro. Todo número real $r \in [0,1)$ se escreve na forma*

$$r = \frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \frac{d_3}{\beta^3} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{\beta^j} \tag{8.4}$$

sendo d_j um β-algarismo para todo j. Ainda, os números d_j's são únicos se existirem infinitos j's para os quais $d_j \neq \beta - 1$. Reciprocamente, toda série da forma 8.4 representa um número real do intervalo $[0,1)$.

A representação 8.4 pode ser escrita na forma compacta $(0{,}d_1d_2d_3\ldots)_\beta$, e os números d_j são chamados *dígitos* da representação na base β.

Demonstração do Teorema 8.15. Vejamos primeiro a existência da representação 8.4. Seja $r \in [0,1)$ um número real. Seja d_1 o β-algarismo tal que $d_1/\beta \leq r < (d_1+1)/\beta$ (isto significa que dividimos $[0,1)$ em β intervalos $\left[\frac{j}{\beta}, \frac{j+1}{\beta}\right)$, $0 \leq j < \beta$, e localizamos r em um deles). Se $d_1/\beta = r$ terminamos. Suponhamos $d_1/\beta < r$. Seja d_2 o β-algarismo tal que $d_1/\beta + d_2/\beta^2 \leq r < d_1/\beta + (d_2+1)/\beta^2$ (isto significa que dividimos $\left[\frac{d_1}{\beta}, \frac{d_1+1}{\beta}\right)$ em β intervalos e localizamos r em um deles). Se $d_1/\beta + d_2/\beta^2 = r$, terminamos. Suponhamos $d_1/\beta + d_2/\beta^2 < r$. E assim por diante, definimos d_1, d_2, d_3, ... β-algarismos de forma que, para todo $n \geq 1$, temos

$$\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{d_n}{\beta^n} \leq r < \frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{d_n+1}{\beta^n}$$

Se $d_1/\beta + d_2/\beta^2 + \ldots d_n/\beta^n = r$ para algum n, terminamos. Caso contrário, obtemos infinitos d_j's. A sequência

$$s_n = \frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{d_n}{\beta^n}$$

das somas parciais de $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{\beta^j}$ é crescente e limitada superiormente (por r), de modo que $s = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{\beta^j}$ é um número real $\leq r$.

Queremos provar que $r = s$. Como $s_n \leq r < s_n + 1/\beta^n$, temos $0 \leq r - s_n < 1/\beta^n \Rightarrow 0 \leq r - \lim s_n = 0$, portanto $r = s$. Isso demonstra a existência da representação 8.4 para todo número real $r \in [0,1)$.

Vejamos agora a unicidade. Sejam

$$r = 0{,}d_1d_2d_3\ldots \quad \text{e} \quad s = 0{,}c_1c_2c_3\ldots$$

expansões tais que existem infinitos i's para os quais $d_i \neq \beta - 1$ e infinitos i's para os quais $c_i \neq \beta - 1$ (se alguma dessas expansões for finita, acrescentamos infinitos dígitos zeros). Suponhamos que exista algum índice i para o qual $d_i \neq c_i$, e seja j o menor para o qual isso ocorre. Isto é, temos $d_i = c_i$ para todo $1 \leq i < j$ e $d_j \neq c_j$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $d_j < c_j$. Como r tem infinitos i's para os quais $d_i \neq \beta - 1$, existe $k > j$ tal que $d_k < \beta - 1$. Então

$$r = 0{,}d_1d_2\ldots d_{j-1}d_j\ldots d_k\cdots \leq 0{,}d_1d_2\ldots d_{j-1}d_j\ldots d_k(\beta-1)(\beta-1)\cdots =$$

$$= 0{,}d_1d_2 \ldots d_{j-1}d_j \ldots (d_k + 1) < 0{,}d_1d_2 \ldots d_{j-1}(d_j + 1) \leq$$
$$\leq 0{,}c_1c_2 \ldots c_{j-1}c_j \leq 0{,}c_1c_2 \ldots c_{j-1}c_jc_{j+1} \cdots = s$$

Portanto $r < s$. Isto implica que se $r = s$ então $d_j = c_j$ para todo $j \geq 1$.

Finalmente, para terminar a demonstração do Teorema 8.15, observamos que a série 8.4 converge. Para ver isso basta compará-la com a série geométrica $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta-1}{\beta^j} = 1$. Quanto a provar que 8.4 representa um número de $[0, 1)$, fica a cargo do estudante (Problema 8.6.2). $\square$

Exemplo 8.16. Vejamos como encontrar a expansão de $r = 3/5$ na base $\beta = 7$. Escrevemos

$$r = (0{,}d_1d_2d_3 \ldots)_{sete} = \frac{d_1}{7} + \frac{d_2}{7^2} + \frac{d_3}{7^3} + \ldots$$

sendo d_i um dos algarismos 0, 1, 2, 3, ..., 7 para todo i. Multiplicando essa expressão por 7, temos

$$7r = d_1 + \frac{d_2}{7} + \frac{d_3}{7^2} + \ldots$$

Assim d_1 é a parte inteira de $7r$, e

$$d_1 = \lfloor 7r \rfloor = \left\lfloor 7\frac{3}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{21}{5} \right\rfloor = 4$$

Seja $r_1 = 7r - d_1$. Temos $r_1 = \frac{21}{5} - 4 = \frac{1}{5}$ e $r_1 = \frac{d_2}{7} + \frac{d_3}{7^2} + \ldots$ Repetindo o mesmo cálculo mas agora para r_1 no lugar de r vem

$$d_2 = \lfloor 7r_1 \rfloor = \left\lfloor 7\frac{1}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7}{5} \right\rfloor = 1$$

Seja $r_2 = 7r_1 - d_2 = \frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5}$. Repetindo o cálculo vem

$$d_3 = \lfloor 7r_2 \rfloor = \left\lfloor 7\frac{2}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{14}{5} \right\rfloor = 2$$

Seja $r_3 = 7r_2 - d_3 = \frac{14}{5} - 2 = \frac{4}{5}$. Temos

$$d_4 = \lfloor 7r_3 \rfloor = \left\lfloor 7\frac{4}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{28}{5} \right\rfloor = 5$$

Seja $r_4 = 7r_3 - d_4 = \frac{28}{5} - 5 = \frac{3}{5}$. A partir desse ponto os dígitos se repetem. Obtivemos assim

$$\frac{3}{5} = (0, \overline{4125})_{sete}$$

Outra forma de obter a expansão de 3/5 na base sete é fazer a divisão continuada de 3 por 5 na base sete:

$$
\begin{array}{rrrrr}
3 & 0 & & & \\
-2 & 6 & & & \\
\cline{1-2}
 & 1 & 0 & & \\
 & & -5 & & \\
\cline{2-3}
 & & 2 & 0 & \\
 & & -1 & 3 & \\
\cline{3-4}
 & & & 4 & 0 \\
 & & & -3 & 4 \\
\cline{4-5}
 & & & & 3 \\
 & & & & \ddots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|l}
\ 5 \\
\hline
0,\ 4\ 1\ 2\ 5 \ldots
\end{array}
$$

todos os cálculos são feitos na base sete

8.5 Frações contínuas de irracionais

Vimos na Seção 2.5 do Capítulo 2 o que é uma fração contínua finita simples e estudamos o Teorema 2.6, página 32, segundo o qual todo número racional se exprime na forma de uma fração contínua finita simples, e, reciprocamente, toda fração contínua finita simples é um número racional. Estudaremos agora, de uma forma suscinta, a representação de números irracionais através de frações contínuas infinitas simples. Uma apresentação mais completa pode ser estudada em [83], página 140 e seguintes.

Exemplo 8.17. Começamos com o número π. Seja $a_0 = \lfloor \pi \rfloor$ o maior inteiro $\leq \pi$. Portanto $a_0 = 3$. Sabemos que π não é inteiro, portanto $\pi - a_0 > 0$, e podemos considerar o número

$$\pi_1 = \frac{1}{\pi - a_0} = \frac{1}{\pi - 3} \approx \frac{1}{0{,}1415926535897932385} \approx 7{,}0625133059310457679$$

Notemos que

$$\pi = a_0 + \frac{1}{\pi_1} = 3 + \frac{1}{\pi_1}$$

Seja $a_1 = \lfloor \pi_1 \rfloor$ o maior inteiro $\leq \pi_1$. Portanto $a_1 = 7$. Consideremos o número

$$\pi_2 = \frac{1}{\pi_1 - a_1} = \frac{1}{\pi_1 - 7} \approx 15{,}996594406685720373$$

Notemos que

$$\pi_1 = a_1 + \frac{1}{\pi_2} \quad \Rightarrow \quad \pi = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\pi_2}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\pi_2}}$$

Seja $a_2 = \lfloor \pi_2 \rfloor$ o maior inteiro $\leq \pi_2$. Portanto $a_2 = 15$. Consideremos o número

$$\pi_3 = \frac{1}{\pi_2 - a_2} = \frac{1}{\pi_2 - 15} \approx 1{,}0034172310133721161$$

Notemos que

$$\pi_2 = a_2 + \frac{1}{\pi_3} \quad \Rightarrow \quad \pi = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\pi_3}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{\pi_3}}}$$

Seja $a_3 = \lfloor \pi_3 \rfloor$ o maior inteiro $\leq \pi_3$. Portanto $a_3 = 1$. Consideremos o número

$$\pi_4 = \frac{1}{\pi_3 - a_3} = \frac{1}{\pi_3 - 1} \approx 292{,}63459101443720781$$

Notemos que

$$\pi_3 = a_3 + \frac{1}{\pi_4} \quad \Rightarrow \quad \pi = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\pi_4}}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\pi_4}}}}$$

Seja $a_4 = \lfloor \pi_4 \rfloor$ o maior inteiro $\leq \pi_4$. Portanto $a_4 = 292$. Consideremos o número

$$\pi_5 = \frac{1}{\pi_4 - a_4} = \frac{1}{\pi_4 - 292} \approx 1{,}5758180895247281647$$

Notemos que

$$\pi_4 = a_4 + \frac{1}{\pi_5} \quad \Rightarrow$$

$$\pi = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\pi_5}}}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Podemos prosseguir com esses cálculos, e sabemos que esse processo nunca termina, pois π é irracional.

Vemos que precisamos considerar frações contínuas infinitas. Seja $(a_n)_{n \geq 0}$ uma sequência de números inteiros, com $a_i > 0$ para todo $i > 0$. Para todo inteiro $n \geq 0$, chamamos de *n-ésimo convergente associado a essa sequência* o número

$$c_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \tag{8.5}$$

Para maior simplicidade, anotamos

$$c_n = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] \tag{8.6}$$

Agora definimos recursivamente as sequências $(p_n)_{n \geq 0}$ e $(q_n)_{n \geq 0}$ por

$$p_0 = a_0 \quad p_1 = a_0 a_1 + 1 \qquad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{para todo } n \geq 2$$

e

$$q_0 = 1 \quad q_1 = a_1 \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad \text{para todo } n \geq 2$$

Não é difícil demonstrar os seguintes resultados:

Lema 8.18. *Com as anotações acima temos* $c_n = p_n / q_n$ *para todo* $n \geq 0$.

Lema 8.19. *Com as anotações acima temos* $q_n > n$ *para todo* $n \geq 2$.

Lema 8.20. *Com as anotações acima temos* $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ *para todo* $n \geq 1$.

Lema 8.21. *Com as anotações acima temos*

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} \quad \textit{para todo } n \geq 1$$

e

$$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n (-1)^n}{q_n q_{n-2}} \quad \textit{para todo } n \geq 2$$

Lema 8.22. *Com as anotações acima temos*

$$c_1 > c_3 > c_5 > \dots$$

e

$$c_0 < c_2 < c_4 < \dots$$

e

$$c_{2i} < c_{2j+1} \quad \textit{quaisquer que sejam } i, j \geq 0$$

Chegamos em nosso principal objetivo:

Teorema 8.23. *Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números inteiros, com $a_i > 0$ para todo $i > 0$, e seja c_n o n-ésimo convergente associado a essa sequência. Então a sequência $(c_n)_{n\geq 0}$ é convergente.*

Demonstração. De acordo com o Lema 8.22 a subsequência $(c_{2n+1})_{n\geq 0}$ é decrescente e limitada inferiormente, e a subsequência $(c_{2n})_{n\geq 0}$ é crescente e limitada superiormente. Portanto existem $\lim c_{2n+1} = \alpha_1$ e $\lim c_{2n} = \alpha_2$. Vamos mostrar que $\alpha_1 = \alpha_2$.

De acordo com os Lemas 8.19 e 8.21 temos

$$c_{2n+1} - c_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n+1}q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}} < \frac{1}{(2n+1)(2n)}$$

portanto $\lim(c_{2n+1} - c_{2n}) = 0$, de modo que $\alpha_1 = \alpha_2$. Isto implica que $(c_n)_{n\geq 0}$ é convergente. □

Definição 8.24. Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números inteiros, com $a_i > 0$ para todo $i > 0$, e seja c_n o n-ésimo convergente associado a essa sequência. O número real $\alpha = \lim c_n$ chama-se *fração contínua infinita simples associada à sequência* $(a_n)_{n\geq 0}$, e é indicado por

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

Teorema 8.25. *Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números inteiros, com $a_i > 0$ para todo $i > 0$, e seja c_n o n-ésimo convergente associado a essa sequência. Então $\alpha = \lim c_n$ é irracional.*

Demonstração. Usando as notações e os resultados acima temos $c_{2n} < \alpha < c_{2n+1}$. Logo

$$0 < \alpha - c_{2n} < c_{2n+1} - c_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}$$

Como $c_{2n} = p_{2n}/q_{2n}$ isso implica

$$0 < \alpha - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}} \quad \Rightarrow \quad 0 < \alpha q_{2n} - p_{2n} < \frac{1}{q_{2n+1}}$$

Suponhamos que α seja racional, e escrevamos $\alpha = a/b$. Temos então

$$0 < aq_{2n} - bp_{2n} < \frac{b}{q_{2n+1}}$$

Vemos que $aq_{2n} - bp_{2n}$ é um inteiro positivo para todo $n \geq 0$. Mas $q_{2n+1} > 2n+1$ de modo que podemos escolher um n tal que $b/q_{2n+1} < 1$. Então para esse n o inteiro $aq_{2n} - bp_{2n}$ é positivo mas < 1, o que é impossível. Segue que α é irracional. □

Teorema 8.26. *Todo número irracional é igual a uma fração contínua infinita simples.*

Demonstração. Seja α um número irracional. Começamos seguindo a ideia utilizada no Exemplo 8.17 para o cálculo da fração contínua infinita simples de π. Definimos recursivamente duas sequências $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ por

$$\alpha_0 = \alpha \qquad a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor \qquad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$$

em que $\lfloor \alpha_n \rfloor$ é o maior inteiro $\leq \alpha_n$, portanto $a_n \leq \alpha_n$ para todo $n \geq 0$. Na verdade se tem $a_n < \alpha_n$ para todo $n \geq 0$, pois α é irracional, e isso implica que α_n é irracional para todo $n \geq 0$. Portanto $a_n > 0$ para todo $n > 0$. Podemos então considerar a sequência $(c_n)_{n\geq 0}$ dos convergentes associados à sequência $(a_n)_{n\geq 0}$, definidos por $c_n = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ para todo $n \geq 0$. Sabemos que existe $\lim c_n$, e queremos provar que esse limite é α.

Consideremos as sequências $(p_n)_{n\geq 0}$ e $(q_n)_{n\geq 0}$ definidas acima. De acordo com o Lema 8.18 temos $c_n = p_n/q_n$ para todo $n \geq 0$.

Notemos agora o seguinte:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = [a_0; \alpha_1]$$

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}} = [a_0; a_1, \alpha_2]$$

em geral

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$$

para todo $n \geq 0$. Os convergentes de $[a_0; a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$ são da forma $\tilde{p}_{n+1}/\tilde{q}_{n+1} = (\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1})/(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})$, portanto

$$\begin{aligned}
\alpha - c_n &= \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\
&= \frac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \\
&= \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}
\end{aligned}$$

Como $a_n < \alpha_n$ para todo $n \geq 0$ temos

$$|\alpha - c_n| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Mas $1/q_n q_{n+1} \to 0$, o que implica $c_n \to \alpha$. □

Para encerrar enunciamos o

Teorema 8.27. *Todo número irracional é igual a uma única fração contínua infinita simples.*

Isto é, sejam $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 0}$ sequências de números inteiros, com $a_i > 0$ e $b_i > 0$ para todo $i > 0$, tais que $[a_0; a_1, a_2, \dots] = [b_0; b_1, b_2, \dots]$. Então $a_i = b_i$ para todo $i \geq 0$.

8.6 Problemas

Problema 8.6.1. Todo número racional com representação finita tem uma segunda representação contendo infinitos dígitos iguais a 9. Por exemplo, $0{,}2743 = 0{,}2742999\ldots$. Prove que, em geral,

$$0{,}b_1b_2\ldots b_{m-1}b_m = 0{,}b_1b_2\ldots b_{m-1}\big(b_m-1\big)999\ldots$$

sendo cada b_i um algarismo decimal.

Problema 8.6.2. Demonstre que para que a expansão decimal $0{,}d_1d_2d_3\ldots$ seja igual a 1 é necessário que $d_j = 9$ para todo $j \geq 1$. E quanto a expansões β-ádicas?

Problema 8.6.3. Seja α um número irracional. Seja $\varepsilon > 0$ um número real. Usando a expansão decimal de α, mostre que existe um número racional r tal que $|\alpha - r| < \varepsilon$.

Problema 8.6.4. Demonstre que é irracional o número

$$0{,}101001000100001000001000000 1\ldots$$

definido no início da Seção 8.3.

Problema 8.6.5. Sejam $r < s$ e $t < u$ números tais que $s - r = u - t$ e $t - r$ é racional. Prove que os intervalos $[r, s]$ e $[t, u]$ têm a mesma quantidade de números irracionais, no seguinte sentido: existe uma função bijetiva $f : [r, s] \mapsto [t, u]$ tal que $f(x)$ é irracional se e somente se x é irracional, para todo $x \in [r, s]$.

Problema 8.6.6. Mostre que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional através do Teorema 8.3.

Problema 8.6.7. Mostre que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ é irracional através do Teorema 8.3.

Problema 8.6.8. Demonstre, usando o Teorema 8.3, que se p é primo então $\sqrt{p}$ é irracional.

Problema 8.6.9. Veja como você poderia verificar, através do Teorema 8.3, a possível irracionalidade do número $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$.

Problema 8.6.10. Seja β um inteiro ≥ 2. Dada uma fração de inteiros a/b, encontre condições necessárias e suficientes sobre a e b para que sua expansão β-ádica seja finita.

Problema 8.6.11. Seja β um inteiro ≥ 2. Demonstre que a expansão β-ádica de um número real é finita ou periódica se e somente se o número é racional.

Problema 8.6.12. Encontre as expansões na base oito de **a)** $1/4$; **b)** $1/3$.

Problema 8.6.13. Encontre as expansões decimais e a representação como fração de inteiros (decimais) de **a)** $(0{,}102)_{três}$; **b)** $(0{,}\overline{13})_{quatro}$.

Problema 8.6.14. Encontre um exemplo de uma base $\beta \geq 2$ e de uma expansão β-ádica que seja finita ou infinita periódica mas cuja expansão decimal seja infinita não periódica. Quem sabe $(0{,}10201)_{três}$.

Problema 8.6.15. Seja $\beta \geq 2$ um inteiro. Encontre a expansão β-ádica dos seguintes números: **a)** $1/(\beta-1)$; **b)** $1/(\beta+1)$.

Problema 8.6.16. Seja $\beta \geq 2$ um inteiro. Prove que

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^4}+\frac{1}{\beta^9}+\cdots+\frac{1}{\beta^{n^2}}+\ldots$$

é irracional.

Problema 8.6.17. Mostre que a fração contínua simples de π^4 é

$$\pi^4=[97;2,2,3,1,16539,1,6,7,6,8,\ldots]$$

Calcule o convergente c_4 e descubra como Srinivasa Ramanujan calculou a aproximação de π dada no Problema 6.11.27.

Problema 8.6.18. Não se sabe se $\pi+e$ e πe são números racionais. Prove que pelo menos um deles é irracional.

8.7 Temas para investigação

Tema 8.7.1. Considere os números inteiros 0, 1, 2, 3, ..., 9, 10, 11, 12,... Listando esses dígitos, nessa ordem, numa só sequência, formamos o número real 0,012345678910111213.... Investigue as propriedades desse número.

Tema 8.7.2. Investigue os seguintes assuntos. **a)** Estudando exemplos de frações contínuas simples de números da forma $\sqrt{a^2+1}$, em que a é um inteiro positivo, faça uma conjectura. Demonstre sua conjectura. **b)** Estude a forma das frações contínuas simples de números do tipo $\sqrt{a^2-1}$, $\sqrt{a^2+2}$, $\sqrt{a^2-2}$, e $\sqrt{a^2-a}$, em que a é um inteiro positivo. **c)** Qual a relação entre as frações contínuas simples de a e $1/a$?

Tema 8.7.3. Relendo a Seção 3.5 não podemos deixar de observar que a fração contínua de $\sqrt{2}$ é periódica! Inclusive foi usada a notação $\sqrt{2}=[1;2,2,2\ldots]=[1;\overline{2}]$, imitando a notação de expansão decimal periódica para números racionais. Vemos assim que uma fração contínua pode ser periódica e não racional, o que não ocorre para expansões decimais. Investigue esse assunto. Que tipo de números são $[a_0;\overline{a}]$, $[a_0;\overline{ab}]$, $[a_0;a,\overline{b}]$, etc.

Tema 8.7.4. Dado um número real x, indicamos por $[x]$ a parte inteira de x. Por exemplo, $[\pi]=3$. Consideremos a função $f\colon[0{,}1]\mapsto[0{,}1]$ definida por $f(x)=10x-[10x]$. Mostre que f está bem definida. Para todo inteiro $n\geq 2$, indicamos por $f^n(x)$ a composta $(f\circ f\circ\cdots\circ f)(x)$ (f composta n vezes). Dado $x_0\in[0{,}1]$, a *órbita* de x_0 é a sequência x_0, $x_1=f(x_0)$, $x_2=f^2(x_0)$, $x_3=f^3(x_0)$, ... Um número $a\in[0{,}1]$ denomina-se *atrator* de f se existe $x_0\in[0{,}1]$ cuja órbita $x_n\to a$. Uma órbita (x_n) denomina-se *periódica* se existe um inteiro $i\geq 0$ tal que $x_i=x_0$. O menor i com essa propriedade chama-se *período* dessa órbita. Uma órbita (x_n) denomina-se *ultimamente periódica* se existem inteiros $i>j>0$ tal que $x_i=x_j$. Determine quem são os atratores de f, e quem são as órbitas que convergem para eles. Determine as órbitas periódicas e as ultimamente periódicas. Mostre que dados $b\in[0{,}1]$ e $\varepsilon>0$ existe $x_0\in(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ cuja órbita é periódica. Mostre que existem órbitas que "passeiam" por todo o intervalo [0,1], isto é, são densas em [0,1].

Seja $\beta\geq 2$ um inteiro. Estude as órbitas da função $f\colon[0{,}1]\mapsto[0{,}1]$ definida por $f(x)=\beta x-[\beta x]$.

8.8 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 8.8.1. Às vezes alguns estudantes calculam uma aproximação para um determinado número usando uma calculadora digital e, ao observar que não aparece um período, concluem que o número é irracional. Imagine uma atividade para lidar com esse engano.

Capítulo 9

Funções exponenciais e logarítmicas

9.1 Introdução

Apresentamos neste Capítulo as funções exponenciais e logarítmicas, que estão entre as mais importantes da Matemática. Essas funções têm origem muito antiga e surgiram de ideias simples, conforme veremos. Dentre as várias opções que conhecemos para a definição dessas funções, escolhemos a que é apresentada no volume 1 de [57], página 167 e seguintes, por julgarmos que é a mais adequada como embasamento teórico para professores do ensino médio. Confira também [81], página 184.

9.2 Uma ideia antiga

A ideia de encontrar um método para representar números grandes sempre fez parte do imaginário dos matemáticos. Arquimedes, em sua obra "O contador de grãos de areia", construiu um método capaz de enumerar os grãos de areia que preencheriam uma esfera imaginária com raio igual à distância entre a Terra e o Sol. Outros matemáticos experientes trataram do assunto, como Apolônio de Perga e Papus de Alexandria.

Com a predominância dos sistemas numéricos posicionais, consagrou-se o uso das potências para representar números grandes. Desde a Idade Média se faz uso da potenciação. De acordo com [86], volume II, página 32, na primeira metade do segundo milênio eram consideradas, na Europa, sete operações fundamentais, às vezes nove, a saber: numeração, adição, subtração, duplicação, mediação (divisão por dois), multiplicação, divisão, progressão e radiciação. Neste contexto, progressão significa potenciação.

Já vimos, no Capítulo 7 (por exemplo, problemas 7.6.4 e 7.6.5), a capacidade que têm as potências em representar números grandes, assim como pudemos também observar a rapidez de crescimento de uma sequência como (2^n). Imitando Arquimedes, podemos calcular (confira o Problema 9.9.2) quantos átomos de hidrogênio caberiam no universo conhecido, e encontramos menos do que 10^{110} átomos. Ficamos admirados com a facilidade que as potências têm em representar uma quantidade que para nós é grandiosa.

Problema resolvido 9.1. Tome uma folha de papel, dobre-a ao meio, e dobre ao meio novamente. Volte a dobrar outras 41 vezes. Sobre a espessura do pacote de folhas que resulta dessas operações, pode-se dizer que: (a) Não ultrapassa 5 cm. (b) Não ultrapassa 5 m. (c) É aproximadamente igual à distância média entre a Terra e a Lua. (d) nenhuma das anteriores.

Solução. A alternativa correta é (d). De fato, quando se dobra uma folha n vezes, a espessura do pacote que assim resulta é 2^n vezes a espessura da folha. Tomando-se um pacote de 500 folhas, desses que se compram em papelarias, podemos medir sua espessura: $0,05$ metros. Se 500 folhas têm espessura de $0,05$ metros, 2^{43} folhas têm $2^{43} \cdot 0,05/500 \approx 879\,609\,302$ metros. A distância média da Terra à Lua é, aproximadamente, $384\,400\,000$ metros). □

9.3 Construção da função exponencial

Vimos como a multiplicação potencializa a adição. Dado um número real $a > 0$, as somas sucessivas $a + a$, $a + a + a$, $a + a + a + a$, ... são indicadas por $2a$, $3a$, $4a$, ... A soma de n parcelas iguais a a é anotada por na, para todo número inteiro positivo n.

Também vimos como a multiplicação facilita a exploração e o entendimento dos números, e é muito útil na análise dos mais variados fenômenos. Portanto nada mais justo do que tentarmos potencializar a própria multiplicação, mediante o estudo dos produtos aa, aaa, ... O estudante bem sabe que esses produtos são anotados na forma a^n. Mais exatamente, se $a > 0$ é um número real e n é um inteiro positivo, definimos

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a \text{ (em que o termo } a \text{ comparece } n \text{ vezes)}$$

Uma definição por recorrência pode ser

$$a^1 = a \quad \text{e} \quad a^n = a \cdot a^{n-1} \quad \text{para todo inteiro } n \geq 2$$

Obtivemos assim uma operação que associa a todo número real $a > 0$ e a todo número inteiro positivo n o valor a^n. Esta operação é denominada *potenciação*. O valor a^n chama-se *potência de a elevado a n*. Na expressão a^n, o número a chama-se *base*, e n chama-se *expoente*.

O estudante já conhece a propriedade fundamental das potências:

Proposição 9.2. *Para todo número real $a > 0$ e quaisquer que sejam os inteiros positivos m e n temos $a^m\,a^n = a^{m+n}$.*

Demonstração. De fato, $a^m a^n$ é o produto de $m + n$ fatores iguais a a. Em outros termos,

$$\begin{aligned} a^m\,a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m+n} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

□

Deixamos para o estudante a demonstração do

Corolário 9.3. *Para todo número real $a > 0$ e quaisquer que sejam os inteiros positivos m_1, m_2, ..., m_n, temos $a^{m_1}a^{m_2} \cdots a^{m_n} = a^{m_1+m_2+\cdots+m_n}$. Em particular, se $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$, temos $(a^m)^n = a^{mn}$.*

Notemos que se o número real a se escreve na forma de uma fração $a = b/c$, então $a^n = b^n/c^n$ para todo inteiro positivo n, pois

$$a^n = \left(\frac{b}{c}\right)^n = \frac{b}{c} \cdots \frac{b}{c} = \frac{b \cdots b}{c \cdots c} = \frac{b^n}{c^n}$$

Em particular

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

para todo número real $a > 0$ e todo inteiro positivo n. Notemos também que se $a > 0$ e $b > 0$ são números reais e n é um inteiro positivo qualquer, então $(ab)^n = ab \cdots ab = a \cdots a\, b \cdots b = a^n b^n$, e se $0 < a < b$ então $0 < a^n < b^n$.

O resultado seguinte compara a expressão exponencial $(1+x)^n$ com a expressão linear $1+nx$. Confira também o Problema 9.9.4.

Lema 9.4 (Desigualdade de Bernoulli). *Para todo número real $x > 0$ e qualquer que seja o inteiro $n \geq 2$ temos $(1+x)^n > 1 + nx$ (se $n = 1$ ou $x = 0$ vale a igualdade).*

Demonstração. Da fórmula binomial temos

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n$$

Como $\binom{n}{1} = n$ e como $\binom{n}{i}x^i > 0$ para todo i, segue a desigualdade. □

Proposição 9.5. *Para todo número real $0 < a < 1$ a sequência $(a^n)_{n\geq 1}$ é estritamente decrescente e $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$. Para todo número real $a > 1$ a sequência $(a^n)_{n\geq 1}$ é estritamente crescente e $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.*

Demonstração. Suponhamos primeiro que $0 < a < 1$. Multiplicando por a vem $a^2 < a$. Multiplicando por a novamente vem $a^3 < a^2$. E assim sucessivamente, temos $a^{n+1} < a^n$ para todo $n \geq 1$. Portanto a sequência (a_n) é estritamente decrescente. Seja agora $b = 1/a$. Temos $b > 1$, e podemos escrever $b = 1 + c$ com $c > 0$. Logo $b^n = (1+c)^n \geq 1 + nc$ para todo inteiro positivo n, em virtude da Desigualdade de Bernoulli. Portanto $b^n > nc$, e $a^n < 1/nc$. Como $\lim 1/nc = 0$, segue que $\lim a^n = 0$.

Suponhamos agora que $a > 1$. Multiplicando por a vem $a^2 > a$. Multiplicando por a novamente vem $a^3 > a^2$. E assim sucessivamente, temos $a^{n+1} > a^n$ para todo $n \geq 1$. Portanto a sequência (a_n) é estritamente crescente. Por outro lado, escrevendo $a = 1 + b$, temos $b > 0$ e $a^n = (1+b)^n \geq 1 + nb$ para todo inteiro positivo n. Como $\lim(1 + nb) = +\infty$ vem $\lim a^n = +\infty$. □

Nossa providência agora é estender a definição de potência para expoentes inteiros quaisquer.

Definição 9.6. Para todo número real $a > 0$ e todo inteiro n definimos a *potência* a^n de *base* a e *expoente* n por

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ a^n & \text{se } n > 0 \\ \dfrac{1}{a^{-n}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Existem motivos para definirmos a^n dessa forma. O principal é que queremos preservar a propriedade fundamental $a^m\, a^n = a^{m+n}$ também para inteiros ≤ 0. De fato, queremos $a^0\, a^1 = a^{0+1}$, o que implica $a^0\, a = a$, e $a^0 = 1$. Também queremos $a^n\, a^{-n} = a^{n-n} = 1$, o que implica $a^n = 1/a^{-n}$.

As propriedades anteriores têm agora a forma

Proposição 9.7. *(i) Para todo número real $a > 0$ e quaisquer que sejam os inteiros m e n temos $a^m\, a^n = a^{m+n}$ e $(a^m)^n = a^{mn}$. (ii) Para todo número real $0 < a < 1$ a sequência (a^n), $n \in \mathbb{Z}$, é estritamente decrescente, $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$ e $\lim_{n\to-\infty} a^n = +\infty$. (iii) Para todo número real $a > 1$ a sequência (a^n), $n \in \mathbb{Z}$, é estritamente crescente, $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ e $\lim_{n\to-\infty} a^n = 0$.*

Demonstração. (i) Vamos verificar primeiro que $a^m\, a^n = a^{m+n}$. Isto já foi feito para $m > 0$ e $n > 0$. Se $m = 0$ temos $a^0 a^n = a^n = a^{0+n}$, analogamente se $n = 0$. Se $m < 0$ e $n < 0$ temos $m + n < 0$ e

$$a^m a^n = \frac{1}{a^{-m}}\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m}a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$$

Suponhamos $m > 0$ e $n < 0$. Temos três casos a considerar:

1º caso $m = |n|$. Então $-n = |n|$ e $m + n = 0$. Temos

$$a^m a^n = a^m \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{|n|}} = 1 = a^0 = a^{m+n}$$

2º caso $m > |n|$. Logo $m + n > 0$. Seja $m = |n| + k$, com $k > 0$. Temos

$$a^m a^n = a^m \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^{|n|+k}}{a^{|n|}} = \frac{a^{|n|}a^k}{a^{|n|}} = a^k = a^{m-|n|} = a^{m+n}$$

3º caso $m < |n|$. Logo $m + n < 0$. Seja $|n| = m + k$, com $k > 0$. Temos

$$a^m a^n = a^m \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{|n|}} = \frac{a^m}{a^{m+k}} = \frac{a^m}{a^m a^k} = \frac{1}{a^k} = \frac{1}{a^{-m+|n|}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = a^{m+n}$$

Analogamente se $m < 0$ e $n > 0$. Dessa forma consideramos demonstrado que $a^m\, a^n = a^{m+n}$ quaisquer que sejam os inteiros m e n.

Vamos agora verificar que $(a^m)^n = a^{mn}$. Isso já foi feito para $m > 0$ e $n > 0$. Se $m = 0$ temos $(a^0)^n = 1^n = 1 = a^0 = a^{0n}$, e se $n = 0$ temos $(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m0}$. Se $m > 0$ e $n < 0$ temos

$$(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}$$

se $m < 0$ e $n > 0$ temos

$$(a^m)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}$$

e se $m < 0$ e $n < 0$ temos

$$(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{(a^{-m})^{-n}}} = \left(a^{-m}\right)^{-n} = a^{(-m)(-n)} = a^{mn}$$

Dessa forma consideramos demonstrado que $(a^m)^n = a^{mn}$ quaisquer que sejam os inteiros m e n.

(ii) Já foi verificado que $0 < a < 1 \Rightarrow a^n > a^{n+1}$ para todo $n > 0$. Isto vale para $n = 0$, pois $a^0 = 1 > a = a^{0+1}$, e também para $n = -1$, pois $a^{-1} = \frac{1}{a} > 1 = a^0 = a^{-1+1}$. Suponhamos $n < -1$. Então $-n-1 > 0 \Rightarrow a^{-n-1} > a^{-n-1+1} = a^{-n} \Rightarrow \frac{1}{a^{-n}} > \frac{1}{a^{-n-1}} \Rightarrow a^n > a^{n+1}$. Isto prova que a sequência (a^n), $n \in \mathbb{Z}$, é estritamente decrescente.

Já foi verificado que $0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a^n = 0$ e que $a > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$. Logo $0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{n\to-\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} a^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n = +\infty$, pois $1/a > 1$.

(iii) Suponhamos $a > 1$. Como $0 < 1/a < 1$, seguem de (ii) as afirmações. $\square$

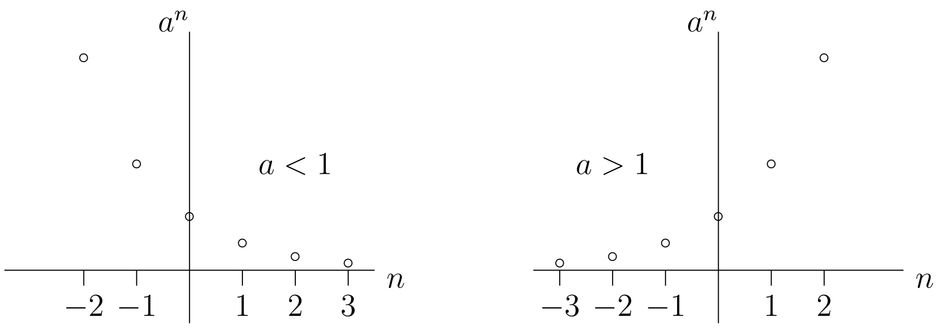


Figura 9.1: Gráficos de funções exponenciais com expoente inteiro

Como ilustração da Proposição 9.7 vemos na Figura 9.1 parte do gráfico da função $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f(n) = (1/2)^n$ (à esquerda), e parte do gráfico da função $g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}_+$, $g(n) = 2^n$ (à direita).

Observação 9.8. (i) Sejam $a > 0$ um número real e m e n inteiros. A expressão a^{m^n} é ambígua. Seu valor depende de que potência calculamos primeiro: se primeiro $l = m^n$ e depois a^l, ou se primeiro $t = a^m$ e depois t^n. Por exemplo:

$$\left(2^3\right)^4 = 8^4 = 4096 \qquad 2^{(3^4)} = 2^{81} = 2417851639229258349412352$$

Para fixar um procedimento definimos $a^{m^n} = a^{(m^n)}$. Em geral convencionamos que, para efetuar uma potência de potências, o cálculo é feito da direita para a esquerda.

(ii) No estudo que estamos fazendo sobre potências tomamos como base números reais $a > 0$. Isto nos permitirá definir, para $a \neq 1$, a função bijetiva $f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f_a(x) = a^x$. Esta é uma função invertível, e, como bem sabe o estudante, a inversa é a função $\log_a x$. Esse esquema não permanece se tomamos como base números reais negativos. Mas nada impede que utilizemos a notação exponencial com base negativa em certos casos. Por exemplo, faz sentido a notação a^n para todo número real $a \neq 0$ e todo inteiro n, pois, se $a < 0$, podemos considerar que $a^n = (-1)^n(-a)^n$, sendo $(-1)^n = 1$ se n é par, e $= -1$ se n é ímpar. Se $a = 0$ podemos definir $0^n = 0$ para todo inteiro positivo. A expressão 0^n para inteiros negativos implicaria divisão por zero, de modo que ela fica indefinida. Preferimos deixar a expressão 0^0 indefinida, pois dessa forma podemos eventualmente utilizá-la na teoria de limites de funções, em que ela assume vários significados.

Nosso objetivo agora é estender a definição de potência para expoentes racionais. Queremos preservar a propriedade fundamental, isto é, se r e s são números racionais, é necessário que $a^r a^s = a^{r+s}$. Isto implica que $(a^r)^s = a^{rs}$. Em particular, $(a^{1/n})^n = a$, ou seja, queremos que $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.

Lembremos o Problema Resolvido 4.35, página 76, em que se afirma que, para todo número real $a > 0$ e para todo número inteiro $n \geq 2$, existe um único número real positivo b tal que $b^n = a$, denominado *raiz n-ésima de a*, e anotado por $\sqrt[n]{a}$ ou por $\sqrt{a}$ quando $n = 2$. Em resumo, $\sqrt[n]{a}$ é o único número real positivo tal que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Notemos que se $a > 0$ e $b > 0$ são números reais e $n \geq 2$ é um inteiro então

$$\left(\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Usando contradição podemos facilmente constatar que

$$0 < a < b \quad \Rightarrow \quad 0 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

Estabelecendo que $\sqrt[1]{a} = a$, consideremos a

Definição 9.9. Para todo número real $a > 0$ e quaisquer que sejam os inteiros m e n, com $n > 0$, definimos a *potência* $a^{m/n}$ de *base* a e *expoente* m/n por

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Lembramos que todo número racional r se escreve de maneira única na forma $r = m/n$ com m e n inteiros relativamente primos e $n > 0$, e que toda outra representação de r como fração de inteiros é da forma $r = mt/nt$ com $t > 0$ inteiro. Confira o Problema 2.6.4, página 32. Notemos agora que

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nt]{a^{mt}}$$

pois

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nt} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^t = (a^m)^t = a^{mt}$$

e

$$\left(\sqrt[nt]{a^{mt}}\right)^{nt} = a^{mt}$$

Dessa forma podemos considerar que 9.9 define a^r para todo número real $a > 0$ e todo racional r, e essa definição não depende da particular representação de r como fração de inteiros.

Proposição 9.10. *(i) Para todo número real $a > 0$ e quaisquer que sejam os racionais r e s temos $a^r\, a^s = a^{r+s}$ e $(a^r)^s = a^{rs}$. (ii) Para todo número real $0 < a < 1$ e quaisquer que sejam os racionais $r < s$ temos $a^r > a^s$. (iii) Para todo número real $a > 1$ e quaisquer que sejam os racionais $r < s$ temos $a^r < a^s$.*

Demonstração. (i) Sejam $r = m/n$ e $s = p/q$ representações de r e s como frações de inteiros tais que $n > 0$ e $q > 0$. Temos

$$a^r\, a^s = a^{m/n}\, a^{p/q} = \sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\,\sqrt[nq]{a^{np}} =$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq}\, a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{(mq+np)/nq} = a^{r+s}$$

e

$$(a^r)^s = (a^r)^{p/q} = \sqrt[q]{(a^r)^p} = \sqrt[q]{a^r \dots a^r} = \sqrt[q]{a^{r+\dots+r}} = \sqrt[q]{a^{rp}} = a^{rp/q} = a^{rs}$$

(ii) Sejam $r = m/n$ e $s = p/q$ representações de r e s como frações de inteiros tais que $n > 0$ e $q > 0$. Então $r < s \iff mq < np$. Como $0 < a < 1$ temos $a^{mq} > a^{np}$. Portanto

$$a^r = a^{m/n} = a^{mq/nq} = \sqrt[nq]{a^{mq}} > \sqrt[nq]{a^{np}} = a^{np/nq} = a^{p/q} = a^s$$

(iii) Análogo a (ii). □

Dessa forma, para todo número real $a > 0$, fica definida uma função $f_a : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}_+$ por $f_a(r) = a^r$. Como ilustração vemos na Figura 9.2 parte do gráfico da função $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f(r) = (1/2)^r$ (à esquerda), e parte do gráfico da função $g : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}_+$, $g(r) = 2^r$ (à direita).

Para completar a construção da função exponencial com base $a > 0$ precisamos definir o significado de a^x para todo número real x.

Por exemplo, o que é $2^{\sqrt{2}}$? Lembramos que existem sequências de racionais (r_n) tais que $r_n \to \sqrt{2}$, como 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, 1,414213, 1,4142135, 1,41421356, ... Já que 2^r está definido para todo racional r, examinamos esses valores para essa sequência:

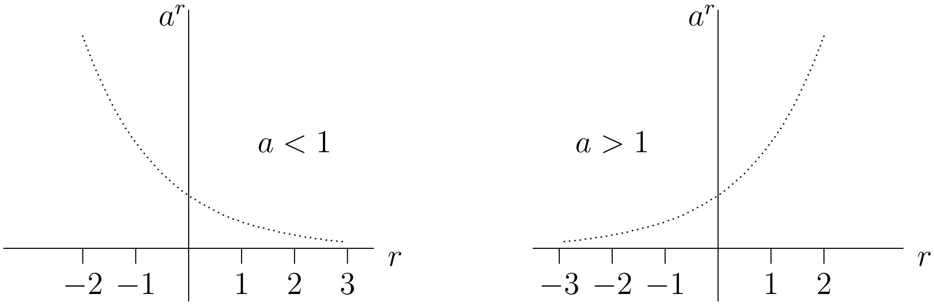


Figura 9.2: Gráficos de funções exponenciais com expoente racional

$$
\begin{array}{rcl}
2^1 & \approx & 2 \\
2^{1,4} & \approx & 2{,}639015822 \\
2^{1,41} & \approx & 2{,}657371628 \\
2^{1,414} & \approx & 2{,}664749650 \\
2^{1,4142} & \approx & 2{,}665119089 \\
2^{1,41421} & \approx & 2{,}665137562 \\
2^{1,414213} & \approx & 2{,}665143104 \\
2^{1,4142135} & \approx & 2{,}665144027 \\
2^{1,41421356} & \approx & 2{,}665144138
\end{array}
$$

Vemos que os valores 2^r parecem convergir para um determinado número. Isto nos dá a esperança de que podemos definir $2^{\sqrt{2}}$ como limite de uma sequência. Mas um detalhe deve ser considerado. Existe uma infinidade de sequências de racionais (r_n) tais que $r_n \to \sqrt{2}$. Será que o limite é sempre o mesmo, qualquer que seja a sequência considerada? Por exemplo, na Seção 3.5 vimos que os convergentes $c_n = [1; 2{,}2, \ldots, 2]$ (com n $2's$) da fração contínua de $\sqrt{2}$ convergem para $\sqrt{2}$. Tomando $c_9 = [1; 2{,}2{,}2{,}2{,}2{,}2{,}2{,}2{,}2] = 3363/2378$ calculamos

$$a^{3363/2378} \approx 2{,}665144258$$

o que parece confirmar que o limite é sempre o mesmo, qualquer que seja a sequência de racionais (r_n) tal que $r_n \to \sqrt{2}$.

Podemos então formular o seguinte programa: (i) dado um número real $a > 0$, para todo número real x definimos $a^x = \lim a^{r_n}$ sendo (r_n) uma sequência de racionais tal que $r_n \to \sqrt{2}$; (ii) provamos que essa definição não depende da particular sequência de racionais considerada; (iii) demonstramos as propriedades esperadas, inclusive a propriedade fundamental $a^x a^y = a^{x+y}$.

Este programa pode ser feito sem muita dificuldade, mas procederemos de uma forma um pouco diferente.

Lembremos a propriedade da completitude, enunciada no Teorema 4.31, na página 72: "Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem supremo". Recordemos também a Definição 4.30, em que se vê que o supremo de um subconjunto não vazio e limitado superiormente $A \subset \mathbb{R}$ é um número real b que satisfaz às seguintes condições: (i) $a \leq b$ para todo $a \in A$; (ii) se c é um número real tal que $a \leq c$ para todo $a \in A$, então $b \leq c$. A condição (i) diz que b é um limitante superior de A. A condição (ii) diz que b é o menor limitante superior de A. Notemos que a condição (ii) é equivalente à seguinte: (iii) se c é um número real tal que $c < b$, então existe $a \in A$ tal que $c < a$.

O supremo de um subconjunto não vazio e limitado superiormente $A \subset \mathbb{R}$ é único. Observemos também que resultados análogos são válidos para o ínfimo.

Seja então $a > 0$ um número real. Para todo número real x consideremos o conjunto

$$E_{a,x} = \{a^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ e } r < x\}$$

Notemos que $E_{a,x}$ é não vazio, pois existem racionais $< x$. Ainda, se $a > 1$, então $E_{a,x}$ é limitado superiormente por qualquer a^s tal que s é racional e $x < s$. Se $0 < a < 1$, então $E_{a,x}$ é limitado inferiormente por qualquer a^s tal que s é racional e $x < s$. Consequentemente, em virtude da propriedade da completitude dos números reais, se $a > 1$, então $E_{a,x}$ tem supremo, e se $0 < a < 1$, então $E_{a,x}$ tem ínfimo. Isto justifica a seguinte

Definição 9.11. Para todo número real $a > 0$ e qualquer que seja o número real x, definimos a *potência* a^x de *base* a e *expoente* x por

$$a^x = \text{ supremo de } E_{a,x} \quad \text{se } a > 1$$

e

$$1^x = 1$$

e

$$a^x = \text{ ínfimo de } E_{a,x} \quad \text{se } 0 < a < 1$$

Observemos primeiro a

Proposição 9.12. *Para todo número real $a > 0$ e qualquer que seja o número real x temos $a^x > 0$.*

Demonstração. Isto é claro se $a = 1$. Se $a > 1$, a^x é o supremo de $E_{a,x}$, que só tem elementos positivos. Portanto $a^x > 0$. Suponhamos $0 < a < 1$. Logo a^x é o ínfimo de $E_{a,x}$. Seja s um número racional tal que $x < s$. Para todo racional $r < x$ temos $r < s$, portanto $a^r > a^s$. Assim a^s é um limitante inferior de $E_{a,x}$. Como a^x é o maior dos limitantes inferiores, segue que $a^s \leq a^x$. Mas $a^s > 0$, portanto $a^x > 0$. □

Dessa forma, para todo número real $a > 0$, fica definida a função $f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ por $f_a(x) = a^x$, denominada *função exponencial de base a*. Vamos provar que essa função satisfaz às propriedades esperadas. De imediato obtemos a

Proposição 9.13. *A função $f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f_a(x) = a^x$, é estritamente crescente se $a > 1$ e estritamente decrescente se $0 < a < 1$. Em particular, se $a \neq 1$, f_a é injetiva.*

Demonstração. Suponhamos primeiro que $a > 1$. Queremos provar que se $x < y$ são números reais então $a^x < a^y$. Sejam s e t números racionais tais que $x < s < t < y$. Para todo número racional r tal que $r < x$ temos $a^r < a^s$. Logo a^s é um limitante superior de $E_{a,x}$. Como a^x é o supremo de $E_{a,x}$, ele é o menor dos limitantes superiores, portanto $a^x \leq a^s$. Por outro lado $t < y \Rightarrow a^t \in E_{a,y} \Rightarrow a^t \leq a^y$, pois a^y é o supremo de $E_{a,y}$. Em resumo temos $a^x \leq a^s < a^t \leq a^y$, ou $a^x < a^y$.

Suponhamos agora $0 < a < 1$. Queremos provar que se $x < y$ são números reais então $a^x > a^y$. Sejam s e t números racionais tais que $x < s < t < y$. Para todo racional r tal que $r < x$ temos $r < s$, logo $a^r > a^s$. Portanto a^s é um limitante inferior de $E_{a,x}$. Como a^x é o ínfimo de $E_{a,x}$, ele é o maior dos limitantes inferiores, e assim $a^x \geq a^s$. Por outro lado $t < y \Rightarrow a^t \in E_{a,y} \Rightarrow a^t \geq a^y$, pois a^y é o ínfimo de $E_{a,y}$. Em resumo temos $a^x \geq a^s > a^t \geq a^y$, ou $a^x > a^y$.

Como toda função estritamente crescente ou estritamente decrescente é injetiva, terminamos. □

Lema 9.14. *Seja $a > 0$ um número real. Então $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$ qualquer que seja o número real x.*

Demonstração. Isto é claro se $a = 1$. Suponhamos $a > 1$. Então a^x é o supremo de $E_{a,x}$ e, como $1/a < 1$, temos que $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ é o ínfimo de $E_{\frac{1}{a},x}$.

Para todo racional $r < x$ temos $a^r \leq a^x$ (pois a^x é o supremo de $E_{a,x}$). Segue que $\frac{1}{a^x} \leq \frac{1}{a^r}$ $\Rightarrow \frac{1}{a^x} \leq \left(\frac{1}{a}\right)^r$ (aqui usamos o Problema 9.9.7). Logo $\frac{1}{a^x}$ é limitante inferior de $E_{\frac{1}{a},x}$, do que segue $\frac{1}{a^x} \leq \left(\frac{1}{a}\right)^x$, pois $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ é o maior limitante inferior.

Por outro lado, para todo racional $r < x$ temos $\left(\frac{1}{a}\right)^x \leq \left(\frac{1}{a}\right)^r$, pois $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ é o ínfimo de $E_{\frac{1}{a},x}$. Usando novamente o Problema 9.9.7 temos

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x \leq \frac{1}{a^r} \quad \Rightarrow \quad a^r \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} \quad \Rightarrow \quad a^x \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x \leq \frac{1}{a^x}$$

Portanto $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$, e a afirmação fica provada quando $a > 1$.

Se $0 < a < 1$, seja $b = 1/a$. Então $b > 1$, e podemos utilizar para b o que já foi demonstrado. Temos

$$\left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x} \quad \Rightarrow \quad a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$$

e a afirmação fica provada quando $0 < a < 1$. □

Proposição 9.15. *Seja $a > 0$ um número real. Então $a^x a^y = a^{x+y}$ quaisquer que sejam x e y em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Se $a = 1$ a afirmação é clara. Suponhamos $a > 1$. Seja r um racional tal que $r < x + y$. Existem racionais s e t tais que $r = s + t$, $s < x$ e $t < y$. De fato, seja $\varepsilon = x + y - r$, e seja s um racional tal que $0 < x - s < \varepsilon/2$. Portanto $s - x > -\varepsilon/2$. Definimos $t = r - s$. Então $r = s + t$ e $y - t = y - (r - s) = y - r + s = \varepsilon - x + s > \varepsilon - \varepsilon/2 > 0$. Portanto $t < y$, como queríamos. Temos $a^s \in E_{a,x}$ e $a^t \in E_{a,y}$, logo $a^s \leq a^x$ e $a^t \leq a^y$. Segue que $a^r = a^{s+t} = a^s a^t \leq a^x a^y$. Portanto $a^x a^y$ é um limitante superior de $E_{a,x+y}$. Como a^{x+y} é o menor desses limitantes superiores, vem $a^{x+y} \leq a^x a^y$. Suponhamos $a^{x+y} < a^x a^y$, e vamos provar que isso leva a uma contradição. Temos $\frac{a^{x+y}}{a^y} < a^x$, portanto $\frac{a^{x+y}}{a^y}$ não é um limitante superior de $E_{a,x}$. Isto implica que existe um racional s tal que $s < x$ e $\frac{a^{x+y}}{a^y} < a^s$. Mas agora $\frac{a^{x+y}}{a^s} < a^y$, o que implica que existe um racional t tal que $t < y$ e $\frac{a^{x+y}}{a^s} < a^t$. Portanto $a^{x+y} < a^s a^t$, ou $a^{x+y} < a^{s+t}$. Mas $s + t < x + y$, portanto $a^{s+t} \leq a^{x+y}$. Temos uma contradição, e terminamos a demonstração de que $a^x a^y = a^{x+y}$ para o caso $a > 1$.

Suponhamos $0 < a < 1$. Temos $1/a > 1$. Aplicando o resultado da primeira parte e o Lema 9.14 temos

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x+y} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \left(\frac{1}{a}\right)^y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a^{x+y}} = \frac{1}{a^x}\frac{1}{a^y} \quad \Rightarrow \quad a^x a^y = a^{x+y}$$

e terminamos a demonstração da Proposição. □

Vamos demonstrar que a função $f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f_a(x) = a^x$, é sobrejetiva para todo $a > 0$ e $a \neq 1$. Necessitamos de dois resultados preliminares. O primeiro basicamente verifica que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, e o segundo que existe a^r com r racional em todo intervalo $I \subset \mathbb{R}_+$.

Lema 9.16. *Seja $a > 0$ um número real. Dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo n tal que $|a^{1/n} - 1| < \varepsilon$.*

Demonstração. Se $a = 1$ a afirmação é clara. Suponhamos $a > 1$. Seja n um inteiro positivo tal que $n > (a-1)/\varepsilon$. Então $a < 1 + n\varepsilon$. Em virtude da Desigualdade de Bernoulli (Lema 9.4) temos $1 + n\varepsilon \leq (1+\varepsilon)^n$, logo $a < (1+\varepsilon)^n \Rightarrow a^{1/n} < 1+\varepsilon \Rightarrow a^{1/n} - 1 < \varepsilon \Rightarrow |a^{1/n} - 1| < \varepsilon$.

Suponhamos agora $0 < a < 1$. Como $1/a > 1$, existe um inteiro positivo n tal que $|(1/a)^{1/n} - 1| < \varepsilon$. Como $0 < 1/n$ temos $a^{1/n} < a^0 = 1$. Portanto

$$\left|\frac{1}{a^{1/n}} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow |1 - a^{1/n}| < \varepsilon a^{1/n} < \varepsilon \Rightarrow |a^{1/n} - 1| < \varepsilon$$

o que termina a demonstração. □

Lema 9.17. *Seja $a > 0$ um número real com $a \neq 1$. Se $I \subset \mathbb{R}_+$ é um intervalo não vazio qualquer, existe um racional r tal que $a^r \in I$.*

Demonstração. Podemos assumir que I é um intervalo aberto. Escrevemos $I = (b_1, b_2)$, com $0 \leq b_1 < b_2$ reais. Suponhamos primeiro $a > 1$. Em virtude da Proposição 9.7, temos $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$. Portanto existe um inteiro m tal que $b_2 < a^m$. Dado $\varepsilon > 0$, pelo Lema 9.16, existe um inteiro positivo n tal que $a^{1/n} - 1 < \varepsilon/a^m$. Notemos agora que, quaisquer que sejam os números racionais r e s tais que $r < s \leq m$ e $s - r \leq 1/n$ temos

$$a^s - a^r = a^r(a^{s-r} - 1) \leq a^m(a^{1/n} - 1) < a^m\varepsilon/a^m = \varepsilon$$

Consideremos $\varepsilon < b_2 - b_1$ e a sequência de racionais $r_k = m - k/n$ para $k \geq 0$. Essa sequência é decrescente e não limitada inferiormente. Portanto (a^{r_k}) é decrescente e $\lim_{k\to+\infty} a^{r_k} = 0$. Notemos também que $r_{k+1} < r_k \leq m$ e $r_k - r_{k+1} \leq 1/n$, portanto $a^{r_k} - a^{r_{k+1}} < \varepsilon < b_2 - b_1$. Segue que existe k tal que $a^{r_k} \in I$.

Suponhamos agora $0 < a < 1$. Em $I = (b_1, b_2)$ podemos supor $0 < b_1 < b_2$, pois, se necessário, podemos diminuir I. Consideremos o intervalo $J = (1/b_2, 1/b_1) \subset \mathbb{R}_+$. Como $1/a > 1$, existe um racional r tal que $(1/a)^r \in J$. Segue que $a^r \in I$, e terminamos. □

Teorema 9.18. *Para todo número real $a > 0$, com $a \neq 1$, é sobrejetiva a função $f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f_a(x) = a^x$.*

Demonstração. Suponhamos primeiro $a > 1$. Seja $b \in \mathbb{R}_+$. Queremos encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$. Note que $(b-1, b) \cap (0, b)$ é um intervalo de $\mathbb{R}_+$. Portanto, em virtude do Lema 9.17, existe um racional r_1 tal que a^{r_1} está nesse intervalo. Em seguida escolhemos um racional r_2 tal que a^{r_2} está no intervalo $(b - 1/2, b) \cap (a^{r_1}, b)$. E assim sucessivamente, para todo inteiro positivo $n > 1$, escolhidos os racionais r_1, r_2, ..., r_{n-1}, tomamos um racional r_n tal que a^{r_n} está no intervalo $(b - 1/n, b) \cap (a^{r_{n-1}}, b)$. Obtemos uma sequência de racionais (r_n) tal que (a^{r_n}) é crescente e $0 < b - a^{r_n} < 1/n$ para todo inteiro positivo n. Logo $\lim a^{r_n} = b$. Como $a > 1$, a função f_a é estritamente crescente, portanto a sequência (r_n) é também estritamente crescente. Ainda, em virtude da Proposição 9.7, temos $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$. Portanto existe um inteiro m tal que $b < a^m$. Então, para todo n temos $a^{r_n} < a^m$, o que implica $r_n < m$. Portanto (r_n) é crescente e limitada superiormente, de modo que existe $x = \lim r_n$. Mas então b é o supremo do conjunto $E_{a,x}$, de modo que $b = a^x$.

Suponhamos agora $0 < a < 1$. Seja $b \in \mathbb{R}_+$. Pelo que foi provado acima, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $(1/a)^x = 1/b$. Logo $a^x = b$, e terminamos. □

Nosso objetivo agora é provar que, para todo número real $a > 0$, é contínua a função $f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f_a(x) = a^x$. Antes lembramos a

Definição 9.19. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $f : A \mapsto \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é contínua em $x \in A$ quando, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $y \in A$ e $|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Dizemos que f é contínua em A quando for contínua em todo $x \in A$.

Uma forma de demonstrar que f_a é contínua em $\mathbb{R}$ é provar primeiro que ela é contínua em 0. Temos:

Lema 9.20. *Seja $a > 0$ um número real. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$h \in \mathbb{R} \;\; e \;\; |h| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; |a^h - 1| < \varepsilon.$$

Demonstração. Se $a = 1$ a afirmação é clara. Suponhamos $a > 1$. Seja $\varepsilon > 0$. Já foi observado no Lema 9.16 que existe um inteiro positivo n tal que $a^{1/n} - 1 < \varepsilon$. Se $0 \le h < 1/n$ temos $0 < a^h - 1 < a^{1/n} - 1 < \varepsilon \Rightarrow |a^h - 1| < \varepsilon$. Se $-(1/n) < h < 0$ temos $0 < -h < 1/n \Rightarrow |a^{-h} - 1| < \varepsilon \Rightarrow |\frac{1}{a^h} - 1| < \varepsilon \Rightarrow |1 - a^h| < \varepsilon a^h < \varepsilon \Rightarrow |a^h - 1| < \varepsilon$. Tomando $\delta = 1/n$ temos $|h| < \delta \Rightarrow |a^h - 1| < \varepsilon$.

Suponhamos agora $0 < a < 1$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\varepsilon' = \varepsilon a$. Como $1/a > 1$, existe $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta \Rightarrow |(1/a)^h - 1| < \varepsilon'$. Podemos assumir que $\delta < 1$. Então $-1 < -\delta < h \Rightarrow a^h < a^{-1}$. Portanto

$$|h| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{a^h} - 1\right| < \varepsilon' \Rightarrow |1 - a^h| < \varepsilon' a^h < \varepsilon$$

o que termina a demonstração. □

Teorema 9.21. *Para todo número real $a > 0$ é contínua a função $f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f_a(x) = a^x$.*

Demonstração. Fixemos $x \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\varepsilon' = \varepsilon / a^x$. Em virtude do Lema 9.20, existe $\delta > 0$ tal que

$$h \in \mathbb{R} \text{ e } |h| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; |a^h - 1| < \varepsilon'$$

Então, se $y \in \mathbb{R}$ e $|y - x| < \delta$ temos

$$|a^y - a^x| = |a^{y-x} - 1| a^x < \varepsilon' a^x = \varepsilon$$

Provamos que f_a é contínua em x para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto f_a é contínua. □

Segue um resultado bastante útil:

Teorema 9.22. *Seja $a > 0$ um número real. Se $x \in \mathbb{R}$ e se (r_n) é uma sequência de racionais tais que $r_n \to x$, então $a^{r_n} \to a^x$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como f_a é contínua em x, existe $\delta > 0$ tal que $y \in \mathbb{R}$ e $|y - x| < \delta \Rightarrow |a^y - a^x| < \varepsilon$. Como $r_n \to x$, existe n_0 tal que $n \ge n_0 \Rightarrow |r_n - x| < \delta$. Portanto $n \ge n_0 \Rightarrow |a^{r_n} - a^x| < \varepsilon$, o que prova que $a^{r_n} \to a^x$. □

Usando esse resultado podemos demonstrar mais facilmente algumas propriedades evitando a definição de a^x como supremo ou ínfimo. Por exemplo

Teorema 9.23. *Seja $a > 0$ um número real. Então $(a^x)^y = a^{xy}$ quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. É claro que o resultado vale se $y = 0$. Também vale se $y = m$ for um inteiro positivo. De fato, usando a Proposição 9.15 temos

$$(a^x)^m = a^x a^x \cdots a^x = a^{x+x+\cdots+x} = a^{xm}$$

Se $y = m$ for um inteiro negativo temos

$$(a^x)^m = \frac{1}{(a^x)^{-m}} = \frac{1}{a^{-xm}} = a^{xm}$$

Portanto resultado vale para todo y inteiro. Se y for racional, com $y = m/n$, m e $n > 0$ inteiros, então

$$(a^x)^y = (a^x)^{m/n} = \sqrt[n]{(a^x)^m} = \sqrt[n]{a^{xm}} = a^{xm/n} = a^{xy}$$

Portanto resultado vale para todo y racional. Seja agora y um número real qualquer. Seja (r_n) uma sequência de racionais tais que $r_n \to y$. Então

$$(a^x)^y = \lim (a^x)^{r_n} = \lim a^{xr_n} = a^{xy}$$

como queríamos demonstrar. □

O estudante poderá recordar de seus estudos do Cálculo as definições de $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$. Usando as propriedades correspondentes para o caso em que o expoente é inteiro, fica fácil provar o

Teorema 9.24. *Seja $a > 0$ um número real. Se $a > 1$ então $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$. Se $0 < a < 1$ então $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.*

Para completar nosso estudo das funções exponenciais, seguem gráficos típicos dessas funções.

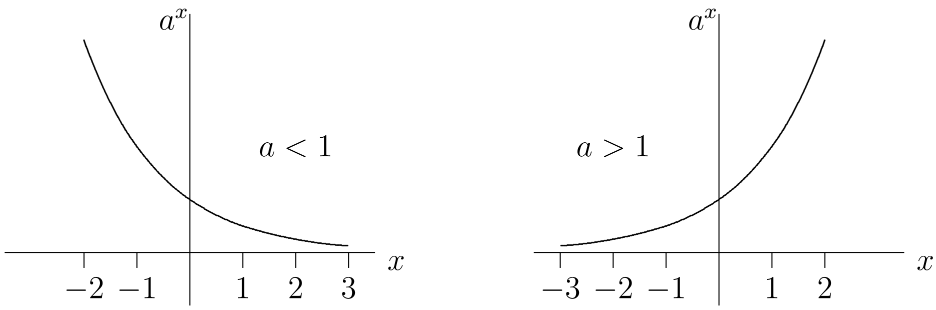


Figura 9.3: Gráficos de funções exponenciais com expoente real

9.4 O aparecimento do logaritmo

Arquimedes, em sua obra "O contador de grãos de areia", observou uma interessante relação entre as progressões aritméticas (PA) e geométricas (PG). Para ilustrar essa relação consideremos a PA 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... e a PG 1, 2, 4, 8, ... alinhadas conforme a tabela a seguir:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \cdots \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512 & 1024 & 2048 & 4096 & \cdots \end{array} \quad (9.1)$$

Podemos fazer umas brincadeiras. Por exemplo, para multiplicar entre si dois números da PG, digamos, 32×128, tomamos os números correspondentes da PA, que são 5 e 7, e somamos. Temos assim $5 + 7 = 12$. Em seguida vemos que a 12 corresponde 4096. Por "coincidência", $32 \times 128 = 4096$. O estudante pode testar outros valores, e pode facilmente explicar por que a brincadeira funciona.

Outras propriedades foram observadas em livros de autoria de vários matemáticos. Em 1484 o matemático francês Nicolas Chuquet publicou sua obra *Triparty en la science des nombres*, em que observa a seguinte propriedade da tabela 9.1: tomando um número da PG, digamos 16, para calcular $16 \times 16 \times 16$, basta tomar o número correspondente da PA, no caso 4, somar $4+4+4=12$, e tomar o número da PG correspondente a 12, que é 4096. Este vem a ser $16 \times 16 \times 16$. O estudante pode conferir. Essas propriedades, relatadas por Arquimedes e Chuquet, também foram mencionadas por Christoff Rudolff em 1525 e por Peter Apian em 1527, ambos matemáticos alemães.

Alemão era também Michael Stifel, cuja obra *Arithmetica Integra*, publicada em 1544, era um tratado contendo todo o conhecimento de Álgebra de sua época. Nessa obra Stifel observa as propriedades acima descritas, e acrescenta mais duas propriedades. Para facilitar sua descrição, chamaremos de *expoente* de um termo da PG ao termo correspondente da PA. Assim, na tabela 9.1 acima, o expoente de 8 é 3 e o de 64 é 6. O termo expoente foi cunhado por Stifel, mas em uma obra posterior, de 1553.

Stifel observou que o quociente de dois termos da PG tem expoente igual à diferença dos expoentes dos dois termos. Assim, para calcular $512/64$, tomamos seus expoentes 9 e 6, e calculamos $9-6=3$. Como 3 é expoente de 8, então $512/64=8$. Stifel observou também que se um termo da PG tem expoente par, então o expoente da raiz quadrada desse termo é a metade dele. Por exemplo, para calcular $\sqrt{256}$, consideramos o expoente 8. Como $8/2=4$ é expoente de 16, então $\sqrt{256}=16$.

Stifel também considerou tabelas com expoentes negativos, por exemplo

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{64} & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & \cdots \end{array} \tag{9.2}$$

O estudante poderá observar outras propriedades e calcular, por exemplo, $\sqrt[3]{512}$ ou $\sqrt{1024} \times 16$ usando apenas os expoentes desses números. Mediante as propriedades das potências, o estudante poderá facilmente justificar todas essas afirmações. Justificativas gerais não eram fáceis naquela época, pois nem mesmo havia a notação para potências que utilizamos hoje.

No Século XVI os progressos da astronomia e da navegação trouxeram a necessidade do desenvolvimento do cálculo numérico. As tábuas trigonométricas se faziam muito necessárias. Sem as facilidades que temos hoje proporcionadas pelas máquinas digitais, matemáticos e astrônomos procuravam descobrir uma forma de facilitar os extensos cálculos que precisavam fazer. Uma das ideias adotadas foi utilizar as relações já observadas entre PA's e PG's. Vimos como essas propriedades permitem simplificar cálculos, pois reduzem a multiplicação à adição, a divisão à subtração, a potenciação à multiplicação e a radiciação à divisão.

Dada uma correspondência entre uma PA e uma PG como em 9.2, se um número está na PG, o número da PA que lhe corresponde passou a ser chamado *logaritmo*. Escolhida uma base $a>0$ para a PG, uma relação do tipo

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{a^6} & \frac{1}{a^5} & \frac{1}{a^4} & \frac{1}{a^3} & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & a^0 & a^1 & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & \cdots \end{array} \tag{9.3}$$

chama-se *tábua de logaritmos de base* a. Dado um número a^n da PG, seu *logaritmo na base* a é n, e o logaritmo de $1/a^n$ é $-n$. Indicaremos por $\log_a(a^n)$ o logaritmo de a^n na base a. Portanto $\log_a(a^n)=n$ e $\log_a(1/a^n)=-n$. Como $1/a^n=a^{-n}$, podemos unificar as duas relações escrevendo apenas que $\log_a(a^n)=n$ para todo inteiro n. Nessa notação é costume se omitirem os parêntesis quando não houver perda de clareza, escrevendo-se, por exemplo, $\log_a a^n = n$.

Notemos que

$$\log_a a^n a^m = \log_a a^{n+m} = n + m = \log_a a^n + \log_a a^m$$

quaisquer que sejam os inteiros n e m.

Portanto, expressando-nos na linguagem matemática atual, o que fizemos até agora foi definir uma função

$$\log_a : \{\dots, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3, \dots\} \mapsto \mathbb{Z} \quad \text{por} \quad \log_a a^n = n$$

satisfazendo a propriedade

$$\log_a(wz) = \log_a w + \log_a z$$

denominada *propriedade fundamental dos logaritmos.*

De tudo o que foi feito fica claro que a função $\log_a$ é inversa da função exponencial $f_a : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f_a(n) = a^n$, no sentido de que sua composta é a identidade. Assim

$$\log_a \circ f_a(n) = \log_a(a^n) = n \quad \text{e} \quad f_a \circ \log_a(a^n) = f_a(n) = a^n$$

para todo inteiro n.

Como essa observação constatamos que fica fácil estender a definição de $\log_a$ e obter uma função $\log_a : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$. Isso é o que faremos detalhadamente na próxima seção.

Terminamos essa seção relatando que os matemáticos e astrônomos do Século XVI perceberam que uma tábua como a 9.1 tinha pouca utilidade, pois é grande a distância entre os termos consecutivos da PG. Para aproximar esses termos é preciso adotar, na tábua 9.3, um valor mais próximo de 1 para a base a, por exemplo, $a = 0{,}0001$. Basicamente foi isso o que foi feito naquela época. O primeiro que publicou uma tábua de logaritmos foi o matemático escocês John Napier, em 1614. Sua obra tinha o título significativo “Descrição da maravilhosa regra dos logaritmos”. O matemático e instrumentista científico suiço Jost Bürgi também construiu uma tábua de logaritmos, e a publicou em 1620. Também em 1620 John Speidell publicou uma tábua de logaritmos usando como base o número e. O matemático inglês Henry Briggs se entusiasmou com os logaritmos de J. Napier, e o visitou na Escócia em 1615. Em 1624 publicou sua própria tábua, sendo o primeiro que utilizou a base 10.

Os trabalhos dos inventores dos logaritmos se tornaram rapidamente conhecidos na Europa, e foram produzidas muitas tábuas. Em 1620 Edmund Gunther publicou a primeira tábua de logaritmos de funções trigonométricas, e em 1624 apareceu a primeira tábua de Johannes Kepler. O holandês Adriaan Vlacq completou e reeditou a tábua de H. Briggs em 1628, e esta versão foi publicada na China em 1713.

9.5 Construção do logaritmo

Lembremos que, dada uma função $f : A \mapsto B$, sua inversa, quando existe, é uma função $g : B \mapsto A$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$. O Teorema enunciado a seguir resume as propriedades que vamos utilizar. Supomos que esses resultados são conhecidos do estudante.

Teorema 9.25. *Uma função $f : A \mapsto B$ tem inversa se e somente se for bijetiva. Se A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$ e se $f : A \mapsto B$ tem inversa e é contínua, então sua inversa $g : B \mapsto A$ também é contínua. Se $f : A \mapsto B$ é crescente ou decrescente, sua inversa, se existir, também é crescente ou decrescente, respectivamente.*

Duas observações úteis. A primeira é que se $f : A \mapsto B$ tem inversa $g : B \mapsto A$, então g tem inversa, que é f, e assim também g é bijetiva. A segunda é que os gráficos de f e de sua inversa g são simétricos em relação à diagonal principal $\Delta = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ do plano cartesiano. De fato, se (x,y) é um ponto do gráfico de f, então $y = f(x)$, logo $x = g(y)$. Portanto $(y,x) = (y,g(y))$ pertence ao gráfico de g. Em resumo

$$(x,y) \text{ pertence ao gráfico de } f \iff (y,x) \text{ pertence ao gráfico de } g$$

Combinando com os resultados obtidos na Seção 9.3, temos:

Definição 9.26. Para todo número real $a > 0$ tal que $a \neq 1$, a inversa da função exponencial $f_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $f_a(x) = a^x$, é denominada *função logarítmica de base* a, e anotada por $\log_a$.

Teorema 9.27. *A função logarítmica de base* a $\log_a : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ *é bijetiva, contínua, estritamente crescente se* $a > 1$ *e estritamente decrescente se* $0 < a < 1$.

Como $f_a(\log_a(y)) = y$ e $\log_a(f_a(x)) = x$, temos

$$a^{\log_a y} = y \quad \text{e} \quad \log_a a^x = x$$

quaisquer que sejam $y \in \mathbb{R}_+$ e $x \in \mathbb{R}$. Convém ter em mente a seguinte equivalência:

$$x = \log_a y \iff a^x = y$$

É imediata a demonstração da propriedade fundamental dos logaritmos:

Teorema 9.28. *Seja* $a > 0$ *um número real tal que* $a \neq 1$. *Então, quaisquer que sejam* $x, y \in \mathbb{R}_+$, *temos*

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Demonstração. Sejam $w = \log_a x$ e $z = \log_a y$. Então $a^w = x$ e $a^z = y$. Como $xy = a^w a^z = a^{w+z}$, temos $\log_a(xy) = \log_a(a^{w+z}) = w + z = \log_a x + \log_a y$. □

Duas funções logarítmicas quaisquer diferem por um fator constante, de acordo com o

Teorema 9.29. *(fórmula da mudança de base) Sejam* $a > 0$ *e* $b > 0$ *números reais tais que* $a \neq 1$ *e* $b \neq 1$. *Então, para todo* $x \in \mathbb{R}_+$, *temos*

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Demonstração. Sejam $w = \log_a x$, $z = \log_b x$ e $t = \log_a b$. Então $a^w = x$, $b^z = x$ e $a^t = b$. Portanto

$$a^w = b^z = (a^t)^z = a^{tz} \quad \Rightarrow \quad w = tz \quad \Rightarrow \quad z = \frac{w}{t}$$

do que segue a fórmula. □

Outras propriedades dos logaritmos podem ser facilmente provadas pelo estudante. Basta utilizar a propriedade correspondente da exponencial.

Teorema 9.30. *Seja* $a > 0$ *um número real tal que* $a \neq 1$. *Então*
(i) $\log_a x^y = y \log_a x$ *quaisquer que sejam* $x \in \mathbb{R}_+$ *e* $y \in \mathbb{R}$
(ii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ *quaisquer que sejam* $x, y \in \mathbb{R}_+$
(iii) $\log_a 1 = 0$
(iv) Se $a > 1$ *então* $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ *e* $\lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty$
(v) Se $a < 1$ *então* $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ *e* $\lim_{x\to 0} \log_a x = +\infty$

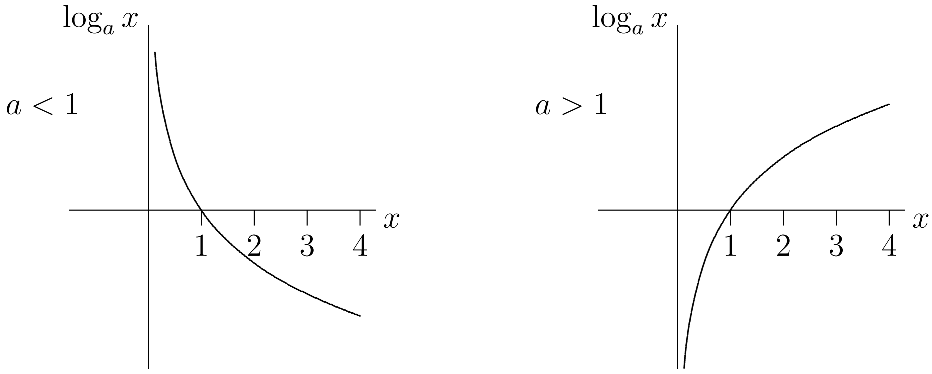


Figura 9.4: Gráficos de funções logarítmicas

A Figura 9.4 apresenta os gráficos típicos de $\log_a$ para os casos $a < 1$ e $a > 1$.

As bases mais utilizadas para a função logarítmica são 10 e e. Para essas bases temos notações especiais:

$$\log = \log_{10} \quad \text{e} \quad \ln = \log_e$$

Estudaremos o número e na última seção desse capítulo.

9.6 Aplicações da exponencial

Vejamos alguns exemplos de aplicações das funções exponenciais. Com eles teremos a oportunidade de compreender algumas das situações em que essas funções podem ser utilizadas como modelos de fenômenos naturais.

9.6.1 Um modelo de crescimento populacional

Observou-se em um laboratório que uma população de um certo tipo de bactéria, colocada sob certas condições favoráveis de temperatura e alimentação, dobra, em número de indivíduos, a cada 20 minutos. Pede-se uma função $p(t)$ que dê a quantidade de indivíduos no instante t em minutos conhecendo-se a quantidade p_0 de indivíduos no instante $t = 0$. Uma tal função chama-se *modelo* do fenômeno.

1ª solução. Uma forma de iniciar esse estudo é considerar que

$$\begin{aligned} p(0) &= p_0 \\ p(20) &= p_0 \times 2 \\ p(40) &= p_0 \times 2^2 \\ p(60) &= p_0 \times 2^3 \end{aligned}$$

o que sugere que $p(n \times 20) = p_0 \times 2^n$ para todo inteiro $n \geq 0$. Se $t \geq 0$ é um instante qualquer, em minutos, escrevemos $t = x \times 20$, e temos

$$p(t) = p_0 \times 2^x = p_0 \times 2^{t/20}$$

Esta é a função que sugerimos como modelo. Ela obedece à condição dada, pois, para todo $t \geq 0$, temos

$$p(t + 20) = p_0 \times 2^{(t+20)/20} = p_0 \times 2^{(t/20)+1} = 2p_0 \times 2^{t/20} = 2p(t)$$

isto é, dado um instante t qualquer, 20 minutos depois a população dobra.

2ª solução. As condições do problema sugerem procurar uma função estritamente crescente e tal que, dado um certo intervalo de tempo δ, em minutos, e dado um instante $t \geq 0$, temos $p(t+\delta) = kp(t)$, em que $k > 0$ não depende de t. O Teorema 9.32 apresentado abaixo nos indica que $p(t)$ é uma função do tipo exponencial. Portanto existem números reais positivos a e b tais que $p(t) = ba^t$. Como $p(0) = p_0$ e $p(0) = ba^0 = b$ vem $b = p_0$ e $p(t) = p_0 a^t$. Como $p(20) = 2p_0$ temos $p_0 a^{20} = 2p_0 \Rightarrow a^{20} = 2 \Rightarrow a = 2^{1/20}$. Portanto

$$p(t) = p_0 \times \left(2^{1/20}\right)^t = p_0 \times 2^{t/20}$$

para todo $t \geq 0$. Obtivemos a mesma função mas por um caminho diferente.

9.6.2 Pressão atmosférica

A atmosfera terrestre é composta por gases que, embora rarefeitos, exercem um peso sobre qualquer objeto que esteja nela colocado. A pressão atmosférica em um ponto é, em valor absoluto, igual ao pêso de uma coluna de ar da atmosfera com seção unitária e altura igual à distância desse ponto ao nível superior da atmosfera. Evangelista Torricelli inventou um dispositivo que mede a pressão atmosférica por comparação com o peso exercido por uma coluna de mercúrio em um tubo. Blaise Pascal, usando esse invento, constatou que a pressão atmosférica diminui com a altura.

Vemos a seguir uma tabela com valores da pressão atmosférica, medida por comparação com a pressão exercida por uma coluna de mercúrio, com altura medida em centímetros. Os dados da tabela constituem uma amostra média de várias medições. A pressão atmosférica em um ponto sofre variação em torno de um valor médio, pois a atmosfera terrestre não é estática.

Nosso objetivo é obter uma função $P(h)$ que forneça a pressão P, medida em centímetros de mercúrio, em relação à altura h, medida em metros. Portanto queremos que $P(0) = 76$, $P(200) = 74,2$, etc., pelo menos aproximadamente. Vejamos duas maneiras de obter essa função.

1ª solução. Observando os valores da tabela para $h = 0$, 1000, 2000 e 3000, vejamos como varia cada valor $P(h)$ em comparação com o valor anterior:

$$\frac{P(1000)}{P(0)} \approx 0,8868, \quad \frac{P(2000)}{P(1000)} \approx 0,8872, \quad \frac{P(3000)}{P(2000)} \approx 0,8813$$

Vemos que os valores comparativos se conservam, aproximadamente. A média desses valores é

$$\frac{0,8868 + 0,8872 + 0,8813}{3} \approx 0,8851$$

Temos portanto o seguinte esquema:

$$\begin{aligned} P(0) &= 76 \\ P(1000) &\approx 76 \times 0,8851 \\ P(2000) &\approx 76 \times 0,8851^2 \\ P(3000) &\approx 76 \times 0,8851^3 \end{aligned}$$

Altitude (m) (m)	Pressão Atmosférica cmHg
0	76
200	74, 2
400	72, 4
600	70, 7
800	69, 0
1000	67, 4
1200	65, 8
1400	64, 2
1600	62, 7
1800	61, 2
2000	59, 8
3000	52, 7
4000	47
5000	41
6000	36
10000	21

(9.4)

Podemos induzir que

$$P(h) = 76 \times 0,8851^n \quad \text{para } h = n \times 1000 \; (n \text{ inteiro } \geq 0)$$

De $h = n \times 1000$ temos $n = h/1000$, do que obtemos a expressão

$$P(h) = 76 \times 0,8851^{h/1000}$$

a qual propomos como modelo para medida da pressão atmosférica. Podemos verificar que essa função corresponde muito bem aos valores da tabela 9.4, por exemplo $P(1200) \approx 65,64$ e $P(10000) \approx 22,42$.

2ª solução. As condições do problema sugerem que devemos procurar uma função $P(h)$ estritamente decrescente e tal que o quociente $P(h+\delta)/P(h)$ não depende de h. Por exemplo, para $\delta = 1000$ vimos que

$$\frac{P(0+1000)}{P(0)} \approx \frac{P(1000+1000)}{P(1000)} \approx \frac{P(2000+1000)}{P(2000)}$$

O Teorema 9.32 apresentado abaixo seguir nos indica que $P(h)$ é uma função do tipo exponencial. Portanto existem números reais positivos a e b tais que $P(h) = ba^h$. Como $P(0) = 76$ e $P(0) = ba^0 = b$ vem $b = 76$. Tomando um dos valores da tabela 9.4, por exemplo, $P(1000) = 67,4$, temos $76 \times a^{1000} = 67,4 \Rightarrow a = (67,4/76)^{1/1000} \approx 0,99987992$. Portanto chegamos à proposta

$$P(h) = 76 \times 0,99987992^h$$

Como $0,8851^{1/1000} \approx 0,99987796$, vemos que a função obtida na solução 2 é próxima daquela da solução 1.

Para encerrar nosso estudo sobre a função barométrica $P(h)$ observamos que ela pode ser obtida a partir de propriedades físicas que originam uma equação diferencial.

9.6.3 Caracterização das funções exponenciais

Definição 9.31. Uma função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ é denominada *tipo exponencial* se for da forma $f(x) = ba^x$, com a e b números reais positivos.

Teorema 9.32. *Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ uma função estritamente monótona tal que o quociente $f(y+x)/f(y)$ não depende de y, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Então f é do tipo exponencial.*

Demonstração. Sejam x e y números reais positivos quaisquer. Como o quociente $f(y+x)/f(y)$ não depende de y, podemos definir a função $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ por

$$g(x) = \frac{f(y+x)}{f(y)} \tag{9.5}$$

Na fórmula (9.5) escolhemos, por um momento, $y = 0$. Então

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(0)} \tag{9.6}$$

Como $f(0) > 0$, nossa primeira constatação é que $g(x)$, assim como $f(x)$, é monótona injetiva. Ainda, em (9.6), podemos trocar x por $x+y$ ou x por y e obter

$$g(x+y) = \frac{f(x+y)}{f(0)} \quad \text{e} \quad g(y) = \frac{f(y)}{f(0)}$$

respectivamente. Combinando essas relações temos

$$g(x)g(y) = \frac{f(y+x)}{f(y)}\, g(y) = \frac{f(y+x)}{f(y)}\, \frac{f(y)}{f(0)} = \frac{f(y+x)}{f(0)} = g(x+y)$$

Portanto a função $g(x)$ satisfaz às condições dadas no Problema 9.9.13, de modo que existe um número real positivo a tal que $g(x) = a^x$. Então $f(x) = f(0)a^x = ba^x$ para $b = f(0) > 0$. Terminamos. $\square$

Problema resolvido 9.33. Um tanque está cheio com 100 litros de água e 30 gramas de sal. No instante $t = 0$ uma torneira é aberta e despeja continuamente água pura no tanque à razão de 20 litros de água por minuto. Ao mesmo tempo e à mesma razão a mistura sai do tanque por um vertedouro. A mistura é mantida homogênea por um dispositivo. Construa uma função $s(t)$ que dê a quantidade de sal presente no tanque no instante $t \geq 0$.

Solução 1 (aproximada) Se em um determinado instante t existe uma quantidade $s(t)$ de sal no tanque, um minuto depois foram retirados $(20/100)s(t)$, logo restam (aproximadamente)

$$s(t+1) = s(t) - \frac{20}{100}s(t) = s(t)\left(1 - \frac{20}{100}\right) = \frac{4}{5}s(t)$$

Portanto

$$s(1) = \frac{4}{5}s(0) = 30\frac{4}{5} \quad s(2) = \frac{4}{5}s(1) = 30\left(\frac{4}{5}\right)^2 \quad s(3) = \frac{4}{5}s(2) = 30\left(\frac{4}{5}\right)^3$$

em geral

$$s(n) = 30\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

Isto sugere considerarmos como modelo do fenômeno a função

$$s(t) = 30\left(\frac{4}{5}\right)^t, \quad t \geq 0$$

Solução 2 (aproximada) Dado um instante t e um intervalo de tempo $\delta > 0$, do instante t até o instante $t+\delta$ são retirados $\frac{20}{100}\delta s(t)$ gramas de sal, portanto ficam no tanque

$$s(t+\delta) = s(t) - \frac{20}{100}\delta s(t) \Rightarrow \frac{s(t+\delta)}{s(t)} = 1 - \frac{20}{100}\delta$$

o que mostra que a razão $s(t+\delta)/s(t)$ não depende de t. Usando o Teorema 9.32 vemos que $s(t)$ é do tipo exponencial, portanto existem números reais positivos a e b tais que $s(t) = ba^t$. Como $s(0) = 30$ vem $b = 30$. Usando a aproximação $s(1) = 30(4/5)$ vem $a = 4/5$. Segue que

$$s(t) = 30\left(\frac{4}{5}\right)^t, \quad t \geq 0$$

Solução 3 (exata) Da relação

$$s(t+\delta) = s(t) - \frac{20}{100}\delta s(t)$$

considerada acima temos

$$s(t+\delta) - s(t) = -\frac{20}{100}\delta s(t) \Rightarrow \frac{s(t+\delta) - s(t)}{\delta} = -\frac{1}{5}s(t)$$

Fazendo $\delta \to 0$ temos

$$s'(t) = -\frac{1}{5}s(t) \Rightarrow \frac{s'(t)}{s(t)} = -\frac{1}{5} \Rightarrow \int \frac{s'(t)}{s(t)}dt = \int -\frac{1}{5}dt \Rightarrow$$

$$\ln|(s(t)| - \ln|(s(0)| = -\frac{1}{5}(t-0)$$

Como $s(t) > 0$ paras todo $t \geq 0$ temos

$$\ln\frac{s(t)}{s(0)} = -\frac{1}{5}t \Rightarrow \frac{s(t)}{s(0)} = e^{-t/5} \Rightarrow s(t) = s(0)e^{-t/5} \Rightarrow s(t) = 30e^{-t/5}$$

Notemos que

$$e^{-1/5} \approx 0,8187 \approx 0,8 = \frac{4}{5}$$

Solução 4 (aproximada, chamada método da batelada pelos engenheiros) Supomos que no instante $t = 0$ foram colocados 20 litros de água pura no tanque, e, depois de ter sido a mistura homogeineizada, foram despejados do tanque 20 litros. Portanto a quantidade $s(1)$ de sal no tanque passou a ser $s(0) - (20/120)s(0)$, e assim por diante. Portanto em geral temos

$$s(n) = 30\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Isto sugere considerarmos como modelo do fenômeno a função

$$s(t) = 30\left(\frac{5}{6}\right)^t, \quad t \geq 0$$

Note que

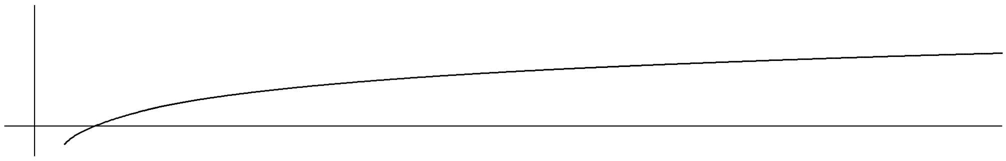
$$\frac{5}{6} \approx 0,83333 \approx e^{-1/5}$$

sendo $5/6$ uma aproximação melhor do que $4/5$.

9.7 Aplicações do logaritmo

Diversas ciências utilizam as escalas logarítmicas para medição de grandezas envolvidas em fenômenos naturais. Vamos examinar dois exemplos. Outras aplicações dos logaritmos podem ser estudadas nos problemas propostos.

Observamos inicialmente qual é o efeito de se considerar uma escala logarítmica. A função $\log x$ tende a infinito quando x tende a infinito, porém mais lentamente. Assim, o logaritmo de números muito grandes é bem pequeno. Por exemplo, $\log 1000000000 = 9$. Confira este fenômeno no gráfico da função logarítmica decimal desenhado abaixo, em que os eixos estão na mesma escala.



9.7.1 A escala Richter

A medição da magnitude de um terremoto envolveria números muito altos. Um terremoto libera grande quantidade de energia, medida em bilhões de ergs. Para evitar a utilização de números muito grandes é usada uma escala logarítmica de base 10, chamada escala Richter.

Esse método foi proposto por Charles Richter e Beno Gutenberg em 1935. Para estabelecer o valor de um terremoto na escala Richter, primeiramente sua intensidade I é comparada com um valor pré-estabelecido I_0, valor este de um terremoto de "pequenas proporções". Obtem-se o quociente I/I_0. A magnitude do terremoto na escala Richter é então dada por $R = \log(I/I_0)$.

Uma das maiores medidas já registradas foi a do terremoto ocorrido em Valdívia, no Chile, em 1960, que teve uma magnitude de 9,5 na escala Richter. Outro grande terremoto ocorreu no Alaska, em 1964, que registrou 9,2 na mesma escala. Embora na escala Richter as duas medidas estejam próximas, o primeiro terremoto foi duas vezes mais potente do que o segundo. De fato, se I_1 é a intensidade relativa do terremoto no Chile, e I_2 a do Alaska, temos $\log I_1 = 9,5$, e $\log I_2 = 9,2$. Então $I_1 = 10^{9,5}$ e $I_2 = 10^{9,2}$. Comparando temos $I_1/I_2 \approx 2$.

9.7.2 A escala pH

O valor pH de uma substância é uma medida de sua acidez, determinada pela presença de hidrônios H_3O^+. A concentração $[H_3O^+]$ de hidrônio da água destilada é 10^{-7} mol/l, e é considerada neutra. As concentrações entre 10^{-2} e 10^{-7} estão presentes nas soluções ácidas, e aquelas entre 10^{-7} e 10^{-12} nas substâncias alcalinas.

Para medir a acidez é mais prático considerar uma escala logarítmica. Assim, o pH é definido por pH$= -\log[H_3O^+]$. Portanto, um pH igual a 7 é considerado neutro, de 2 a 7, ácido, e de 7 a 12, base.

9.8 Gênese do número e

A constante e, uma das mais importantes da Matemática, aparece de forma natural quando lidamos com fenômenos cuja descrição demanda funções exponenciais e logarítmicas. Vejamos um desses exemplos. Antes observamos que, pelo que sabemos, o número e não foi percebido por John Napier, de modo que não o denominamos aqui de constante de Napier, como às vezes ocorre na literatura. Se quisermos batizá-lo com o nome de algum matemático, julgamos ser melhor usar *constante de Euler*, pois Leonard Euler descobriu várias de suas propriedades. Por exemplo, usando frações contínuas, foi o primeiro a provar que e é irracional.

9.8.1 Crescimento populacional e o número e

Desejamos encontrar uma função $p(t)$ que seja um bom modelo para descrever o crescimento populacional de espécies. Consideremos inicialmente a seguinte relação:

$$p(t+h) - p(t) = \alpha\, h\, p(t) \tag{9.7}$$

imaginando que o aumento da quantidade de indivíduos do instante t até um instante posterior $t+h$ é diretamente proporcional ao tempo h decorrido entre esses instantes e diretamente proporcional à quantidade $p(t)$ de indivíduos existentes no instante t. Estamos indicando por α a constante de proporcionalidade.

Tomando em (9.7) $h = 1$ e, sucessivamente, $t = 0,\ 1,\ 2$, etc, obtemos $p(1) = p(0)(1+\alpha)$, $p(2) = p(1)(1+\alpha) = p(0)(1+\alpha)^2$, em geral, $p(m) = p(0)(1+\alpha)^m$ para todo inteiro $m \geq 0$. Isto nos dá um modelo discreto, em que o domínio da função $p(t)$ é o conjunto dos inteiros ≥ 0.

Mas desejamos obter um modelo contínuo, em que o domínio da função $p(t)$ seja o conjunto dos reais ≥ 0. Para isso consideramos um inteiro $n \geq 2$ e subdividimos o intervalo real $[0, 1]$ em n subintervalos iguais. Tomando em 9.7 $h = 1/n$ e, sucessivamente, $t = 0,\ 1/n,\ 2/n,\ \ldots,\ n/n = 1$, obtemos $p(1/n) = p(0)(1+\alpha/n)$, $p(2/n) = p(0)(1+\alpha/n)^2$, ..., $p(n/n) = p(0)(1+\alpha/n)^n$, ou seja,

$$p(1) = p(0)\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$$

para todo inteiro $n \geq 0$. Como nos interessa considerar $n \to \infty$, perguntamo-nos se existe $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$. Veremos no Teorema 9.39 que esse limite é igual a e^α. Portanto

$$p(1) = p(0)e^\alpha$$

Repetindo a mesma construção no intervalo real $[1, 2]$, obtemos

$$p(2) = p(1)e^\alpha = p(0)\left(e^\alpha\right)^2 = p(0)e^{\alpha 2}$$

em geral

$$p(m) = p(0)e^{\alpha m}$$

para todo inteiro $m \geq 0$. Isto sugere que adotemos o modelo contínuo

$$p(t) = p(0)e^{\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R},\ t \geq 0$$

9.8.2 Definição do número e

Os resultados da seção anterior sugerem estudar a sequência $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$.

Teorema 9.34. *É convergente a sequência* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$.

Demonstração. Podemos calcular alguns termos de (a_n) e observar que essa sequência deve ser crescente e limitada superiormente por 3. Vamos verificar esses fatos. Pretendemos dessa forma usar o Teorema das Sequências Monótonas 5.23, na página 91.

Da fórmula binomial temos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}}+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

Notemos que

$$\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-j+1)}{j!}\ \frac{1}{n^j}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-j+1)}{n^j}\ \frac{1}{j!}=\frac{n}{n}\ \frac{n-1}{n}\ \frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-j+1}{n}\ \frac{1}{j!}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{j-1}{n}\right)\ \frac{1}{j!}$$

para $1\le j\le n$. Portanto

$$a_n = 1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\ \frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ \frac{1}{3!}+\cdots+$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\ \frac{1}{n!}$$

Vamos agora usar que $1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}$, $1-\frac{2}{n}<1-\frac{2}{n+1}$, ..., $1-\frac{n-1}{n}<1-\frac{n-1}{n+1}$. Substituindo esses valores na expressão de a_n obtida acima, e em seguida acrescentando mais um termo correspondente a $n+1$, obtemos a expressão de a_{n+1}, conforme segue:

$$a_n < 1+1+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ \frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ \frac{1}{3!}+\cdots+$$

$$+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\ \frac{1}{n!}+$$

$$+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\ \frac{1}{(n+1)!}=a_{n+1}$$

portanto $a_n<a_{n+1}$ para todo $n\ge 1$. Provamos que a sequência (a_n) é estritamente crescente.

Observamos agora que $1-\frac{1}{n}<1$, $1-\frac{2}{n}<1$, ..., $1-\frac{n-1}{n}<1$. Substituindo esses valores na expressão de a_n obtida acima vem

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\frac{1}{n!}$$

para todo inteiro $n\ge 2$.

Consideremos a sequência (s_n) das somas parciais

$$s_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

com $s_1=1+\frac{1}{1!}=2$, $s_2=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}=\frac{5}{4}$, $s_3=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=\frac{16}{6}$, etc.

Vamos provar que $s_n<3$ para todo inteiro $n\ge 1$. De acordo com os cálculos acima, isso certamente ocorre para $n=1$, 2 e 3. Suponhamos $n\ge 4$. Sabemos que $2^n<n!$ para todo inteiro $n\ge 4$ (confira 1.7.3 na página 17). Então

$$s_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}<\frac{16}{6}+\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\right)=$$

$$= \frac{67}{24} \approx 2,792 < 3$$

Como $a_n \leq s_n$ para todo inteiro $n \geq 1$, temos $a_n < 3$ para todo inteiro $n \geq 1$. Isto termina a demonstração de que (a_n) é convergente. □

O Teorema 9.34 justifica a

Definição 9.35. Definimos

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{9.8}$$

Uma propriedade importante de e é

Teorema 9.36.

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e$$

Demonstração. Consideremos a sequência das somas parciais $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. É claro que essa sequência é crescente, pois são somas de termos positivos. Vimos na demonstração do Teorema 9.34 que $s_n < 3$ para todo inteiro $n \geq 1$. Portanto, em virtude do Teorema das Sequências Monótonas 5.23, existe $b = \lim s_n$. Queremos provar que $b = e$. Usando as notações da demonstração do Teorema 9.34 foi visto que $a_n \leq s_n$, portanto $e \leq b$. Ainda, fixemos $p \in \mathbb{Z}_+$. Para todo inteiro $n > p$ temos

$$a_n > 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots +$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{p-1}{n}\right)\frac{1}{p!}$$

Fazendo $n \to \infty$ (e mantendo p fixo) vem

$$\lim_{n \to \infty} a_n \geq \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{p!}\right)$$

portanto $e \geq s_p$ para todo inteiro positivo p. Fazendo agora $p \to \infty$ temos $\lim_{p \to \infty} e \geq \lim_{p \to \infty} s_p \Rightarrow e \geq b$. Terminamos. □

O Teorema 9.36 tem muitas aplicações importantes, citaremos apenas duas. A primeira é que a sequência (s_n) converge mais rapidamente do que a sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Dessa forma, usando a sequência (s_n), podemos mais confortavelmente fazer o cálculo do valor aproximado de e. Por exemplo,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} \approx 2,7182$$

com cinco casa exatas. Para registro apresentamos o valor aproximado de e com 20 casas exatas após a vírgula:

$$e \approx 2,71828182845904523536$$

Outra aplicação do Teorema 9.36 é a seguinte demonstração de que e é irracional:

Teorema 9.37. *e é irracional.*

Demonstração. Suponhamos que e seja racional. Então podemos escrever $e = m/n$ com m e $n > 1$ inteiros. Usando a notação $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ vemos que $n!s_n$ é um inteiro. Também $n!e$ é um inteiro. Portanto $n!(e - s_n)$ é um inteiro. Como (s_n) é crescente e $s_n \to e$, temos $0 < n!(e - s_n)$. Do Problema 9.9.26 temos $e - s_n \leq \frac{1}{n!n}$. Portanto

$$0 < n!(e - s_n) \leq n!\frac{1}{n!n} = \frac{1}{n} < 1$$

Dessa forma encontramos um inteiro entre 0 e 1, o que não é possível. Segue a afirmação do Teorema. □

Vamos precisar do

Lema 9.38.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Uma demonstração desse lema usando desigualdades pode ser estudada em [57], volume 1, páginas 197 e 198. Ou então usamos um resultado do Cálculo, em que $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$. Em $x = 1$ isso significa que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Teorema 9.39. *Para todo x real temos*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Demonstração. Se $x = 0$ o resultado é claro. Suponhamos $x \neq 0$. Usando o Lema 9.38 e lembrando que a função ln é contínua, temos

$$\ln \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) =$$

$$= x \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x$$

do que segue o resultado. □

9.9 Problemas

Problema 9.9.1. Imaginemos que o Sol se divida em duas metades, e que cada uma das metades se divida em duas, etc. Quantas operações destas seriam necessárias para que resultasse uma partícula com aproximadamente o volume de um átomo de hidrogênio? (a) Menos do que 192. (b) Mais do que 2^{60}. (c) Se alguém dividisse o Sol uma vez por segundo, o tempo necessário para que fosse atingido o volume do hidrogênio iria até o fim do Sistema Solar. (d) Entre 2^{30} e 2^{35}. (e) nenhuma das anteriores.

Problema 9.9.2. Imitando a ideia de Arquimedes em sua obra "O contador de grãos de areia", calcule uma cota superior para a quantidade de átomos de hidrogênio que caberiam no universo observável. O raio do átomo de hidrogênio pode ser tomado como $5{,}3 \times 10^{-11}$ metros. Supondo que o universo observável seja uma esfera, podemos considerar para seu raio o valor 14×10^{25} metros.

Problema 9.9.3. Se A é um conjunto e n é um inteiro positivo, indicaremos por $A^n = A \times \cdots \times A$ o produto cartesiano de A por A n vezes. Sejam m e n inteiros positivos. Demonstre que m^n é a quantidade de elementos (n-uplas) de $\{1, 2, 3, \ldots, m\}^n$.

Problema 9.9.4. Usando o Método da Indução Completa demonstre a Desigualdade de Bernoulli $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para todo inteiro positivo n e todo real $x \geq -1$. Verifique por que motivo não aplicamos aqui a demonstração usada no Lema 9.4.

Problema 9.9.5. Usando apenas a parte (i) da Proposição 9.7 prove que $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ qualquer que seja o número real $a > 0$ e o inteiro n. Usando apenas a parte (i) da Proposição 9.10 prove que $\frac{1}{a^r} = a^{-r}$ qualquer que seja o número real $a > 0$ e o racional r.

Problema 9.9.6. Escreva detalhadamente as demonstrações das seguintes propriedades, algumas já comentadas no texto. (i) Se $a > 0$ e $b > 0$ são números reais e n é um inteiro positivo então $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$. (ii) Se $0 < a < b$ são números reais e n é um inteiro positivo então $0 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$. (iii) Sejam $a > 0$ um número real e m, n e t inteiros tais que $n > 0$ e $t > 0$. Então $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nt]{a^{mt}}$. (iv) Sejam $a > 0$ um número real e m e n inteiros tais que $n > 0$. Então $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$. (v) Se $0 < a$ e $0 < b$ são números reais e n é um inteiro qualquer então $(ab)^n = a^n b^n$. (vi) Se $0 < a$ e $0 < b$ são números reais e r é um racional qualquer então $(ab)^r = a^r b^r$.

Problema 9.9.7. Seja $a > 0$ um número real. Usando apenas a definição de potência com expoente racional, demonstre que $\left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r}$ para todo número racional r.

Problema 9.9.8. Seja $a > 0$ um número real. Verifique que a função $f_a : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}_+$, definida por $f(r) = a^r$, não é sobrejetiva.

Problema 9.9.9. a) Prove que são equivalentes as condições (ii) e (iii) dadas na caracterização de supremo, página 163. **b)** Estude uma caracterização análoga para o ínfimo. **c)** Demonstre que o supremo, quando existe, é único. O mesmo para o ínfimo.

Problema 9.9.10. Seja $a > 0$ um número real. Considerando $x \in \mathbb{R}$, demonstre que

$$a > 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

$$a < 1 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

Problema 9.9.11. Sejam $0 < a$ e $0 < b$ números reais. Prove que $(ab)^x = a^x b^x$ qualquer que seja o número real x.

Problema 9.9.12. Sejam $0 < a < b$ e x números reais. Prove que $x > 0 \Rightarrow a^x < b^x$, e $x = 0 \Rightarrow a^x = b^x$ e $x < 0 \Rightarrow a^x > b^x$. Construa, no mesmo sistema cartesiano, os gráficos de a^x e b^x, com $x \in \mathbb{R}$, nos seguintes casos: (i) $0 < a < 1 < b$; (ii) $0 < a < b < 1$; (iii) $1 < a < b$.

Problema 9.9.13. (unicidade da função exponencial) Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x + y) = f(x)f(y)$ quaisquer que sejam x e y em $\mathbb{R}$. Suponha que f não é identicamente nula. Prove que: (i) $f(x) \neq 0$ para todo x real. (ii) $f(x) > 0$ para todo x real. (iii) $f(0) = 1$. (iv) $f(-x) = 1/f(x)$ para todo x real. (v) Seja $a = f(1)$; então $f(n) = a^n$ para todo inteiro n. (vi) $f(1/n) = a^{1/n}$ para todo inteiro positivo n. (vii) $f(r) = a^r$ para todo número racional r. (viii) Se f é estritamente monótona, então $f(x) = a^x$ para todo x real. (ix) Se f é contínua, então $f(x) = a^x$ para todo x real.

Problema 9.9.14. Dê as definições de $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Demonstre o Teorema 9.30.

Problema 9.9.15. (caracterização das funções logarítmicas) Seja $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}_+$. Então existe um número real $a > 0$ tal que $f = \log_a$.

Problema 9.9.16. Na solução 1 do problema da pressão atmosférica 9.6.2, verifique o que aconteceria se tomássemos os valores $P(0)$, $P(200)$, $P(400)$ e $P(600)$, em vez de $P(1000)$, etc. Obtém-se uma função diferente daquela do texto?

Problema 9.9.17. Supondo que a solução do problema da pressão atmosférica 9.6.2 seja válida para valores negativos de h, calcule a pressão na superfície do Mar Morto, sabendo-se que sua altura é de 422 m.

Problema 9.9.18. Em um certo país a mortalidade infantil foi de 2500 crianças em 1990. Um programa de saúde foi implantado, de modo que, a cada ano, a mortalidade tem sido reduzida de 10% em relação ao ano anterior. Encontre uma função adequada para modelar o fenômeno. Calcule quanto tempo foi ou será necessário para que a mortalidade se reduza a 40% em relação a 1990.

Problema 9.9.19. Considerando-se uma camada de ozônio de espessura T cm, seja I_0 a intensidade de um determinado comprimento de onda de luz do Sol antes de atingir a atmosfera, I a intensidade do mesmo comprimento de onda de luz depois de passar pela camada de ozônio, e β o coeficiente de absorção para esse comprimento de onda. Essas grandezas estão relacionadas pela fórmula $I = I_0 e^{-\beta T}$. **a)** Obtenha uma fórmula que forneça a espessura da camada de ozônio em função das outras grandezas. **b)** Se para um comprimento de onda de $3,055 \times 10^{-8}$ cm se tem $\beta = 2,7$ e $I_0/I = 2,3$, calcule o valor correspondente da espessura da camada de ozônio.

Problema 9.9.20. A fórmula de Ehrenberg $\ln P = \ln 2,4 + 0,0184h$ relaciona o peso P em kilogramas de uma criança com sua altura h em centímetros, e é considerada válida para crianças com idade entre 5 e 13 anos. **a)** Encontre a altura de uma criança com 20 kg. **b)** Encontre o peso de uma criança com 130 cm.

Problema 9.9.21. Se um raio de luz de intensidade k é projetado verticalmente para baixo na água, sua intensidade à profundidade de x metros é $ke^{-1,4x}$. Calcule a que profundidade a intensidade é a metade de seu valor na superfície.

Problema 9.9.22. Algumas das perguntas desse problema se referem à tabela 9.9 abaixo. **a)** Calcule a relação real entre as intensidades dos dois terremotos ocorridos em São Francisco. **b)** Compare as intensidades reais dos terremotos ocorridos em Assam e no Irã. **c)** Se a magnitude de um terremoto tem valor negativo na escala Richter, o que se pode concluir? **d)** Foi proposta a fórmula $\log E = 11,4 + 1,5R$ para relacionar a energia E dissipada em um terremoto (medida em ergs) e a magnitude R da escala Richter. Calcule a energia dissipada no terremoto de Valdívia, no Chile, em 1960. **e)** Se um terremoto tem intensidade 10 vezes maior do que outro, qual a diferença dos valores na escala Richter? **f)** Dois terremotos têm valores R_1 e R_2 na escala Richter de modo que $R_1 - R_2 = 2$. Compare suas intensidades.

Local do terremoto	Data	valor na escala Richter
Lisboa, Portugal	1755	$9,0$(estimado)
São Francisco, USA	1906	$8,0$(estimado)
Assan, Egito	1952	$8,7$
Valdívia, Chile	1960	$9,5$
Anchorage, Alaska	1964	$9,2$
Peru	1970	$7,7$
Cidade do México	1985	$8,0$
Armênia	1989	$6,9$
São Francisco, USA	1989	$6,9$
Iran	1990	$7,3$
Oceano Índico	2004	$9,3$

(9.9)

Problema 9.9.23. Algumas das perguntas desse problema se referem à tabela 9.10 abaixo. **a)** O café preto é 100 vezes mais ácido do que a água pura. Qual é seu pH? **b)** Compare a acidez do leite com a do suco de limão. **c)** A concentração de hidrônios do fluido cérebro-espinhal é $4,8\times10^{-8}$ mol/l. Qual é seu pH? **d)** O pH do sangue humano fica entre 7,37 e 7,44. Determinar os limites correspondentes para $[H_3O^+]$.

Substância	pH
suco de limão	$2,1$
suco de tomate	$4,1$
leite	$6,6$
Leite de magnésia	10

(9.10)

Problema 9.9.24. Para medir sons é utilizada uma unidade chamada decibéis. Trata-se de uma escala logarítmica definida da seguinte forma. Considera-se a constante $I_0 = 10^{-12}$, medida em watt/m^2, e que corresponde aproximadamente à menor intensidade que o ouvido humano pode captar numa frequência de 1000 Hz. Então a medida em decibéis de um som de intensidade I é $L = 10\log(I/I_0)$. Utiliza-se a abreviação dB para indicar o decibel. **a)** Quantos decibéis mede um som cuja intensidade é 10 vezes maior do que I_0? **b)** A intensidade da voz média humana é 10000 maior do que I_0. Ache sua medida em decibéis. **c)** Um som com intensidade de 1 watt/m^2 provoca efeitos dolorosos no ouvido humano. A quantos decibéis corresponde essa intensidade? **d)** Em um ambiente o nível sonoro é de 85 dB. Calcule o valor da intensidade do som nesse ambiente.

Problema 9.9.25. A magnitude aparente m de uma estrela está relacionada com sua intensidade luminosa aparente I através da fórmula $m = c - 2,5\log I$, onde c é uma constante cujo valor depende da unidade de medida de I. Assim, quanto maior a intensidade menor é o valor de m. A estrela de maior intensidade luminosa em nossos céus é Sirius, com magnitude $-1,5$. **a)** Mostre que se I_1 e I_2 são as intensidades luminosas de duas estrelas de magnitude m_1 e m_2, respectivamente, então $m_1 - m_2 = 2,5\log(I_2/I_1)$. Conclua que uma estrela de magnitude m é 2,5 vezes mais brilhante que uma de magnitude $m+1$. **b)** Quantas vezes Sirius é mais brilhante que Betelgeuse, que tem magnitude 0,4? **c)** A olho nu é possível observar estrelas até a magnitude 6. Compare o brilho de uma estrela de magnitude 6 com a de magnitude -1. **d)** A magnitude aparente do Sol é -26,9. Compare a luminosidade aparente do Sol com a da estrela Sirius.

Problema 9.9.26. Usando a notação $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ para todo inteiro positivo n, prove que $0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}$. Use esse resultado para encontrar o erro da aproximação $e \approx s_{10}$.

Problema 9.9.27. Seja $m(t)$ a quantidade de massa no instante t de uma amostra de uma substância radioativa. Admitamos que a substância perde massa, de um instante t qualquer a um instante posterior qualquer $t + h$, com valor diretamente proporcional a h e a $m(t)$. Seja α a constante de proporcionalidade. Veja como pode ser obtida a fórmula $m(t) = m(0)e^{-\alpha t}$.

Problema 9.9.28. A desintegração completa de uma substância radiativa pode durar milhões de anos. Por isso é mais prático indicar a meia-vida da substância. A meia-vida $T_{1/2}$ de uma substância radioativa é o intervalo de tempo necessário para que a substância perca metade de sua massa, a contar de um instante inicial. Usando as notações e o resultado do Problema 9.9.27, calcule $T_{1/2}$ em função de α.

Problema 9.9.29. Um paraquedista está caindo em queda livre, e no instante $t = 0$ abre seu paraquedas. Usando leis da Física podemos obter uma expressão para sua velocidade para $t \geq 0$:

$$v(t) = \frac{g}{a}\left(1 - e^{-at}\right) + v(0)e^{-at}$$

sendo $g > 0$ a aceleração da gravidade e $a > 0$ uma constante que inclui o coeficiente de frenagem do paraquedas. Calcule a velocidade limite $v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t)$. Mostre por que a velocidade $v(0)$ pouco afeta o movimento. Faça um gráfico de $v(t)$.

9.10 Temas para investigação

Tema 9.10.1. Faça um estudo sobre a presença das funções exponenciais e logarítmicas na Matemática. Busque belas fórmulas e teoremas em que aparecem essas funções.

Tema 9.10.2. Estude a função $\log \log x$, que aparece em uma área da Matemática denominada Complexidade Computacional. Investigue seu domínio, sua imagem, suas propriedades e gráfico.

Tema 9.10.3. Estude como são feitos ajustes de curva com a função $\log x$. Dê exemplos.

9.11 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 9.11.1. Revendo nosso estudo sobre funções exponenciais, verifique quais conceitos e técnicas poderiam ser efetivamente trabalhados com estudantes da escola média. Tome como referência os tipos de escola e classes com as quais você atua. Compare nossa apresentação com as propostas dos diversos autores de livros didáticos para esse segmento escolar.

Atividade 9.11.2. Um professor apresentou a seus estudantes a tarefa de preencher a tabela abaixo (adaptada de [6], página 8):

x	e^x
0 cm	1 cm
3 cm	20 cm
5,1 cm	164 cm (altura de uma pessoa)
15 cm	$32,7$ km (distância entre São Carlos e Descalvado)
20 cm	
cm	149.500.000 km $\pm$ (distância média da Terra ao Sol)
	km (um ano-luz)

Identifique quais são os conteúdos trabalhados com essa tarefa. Descreva os processos cognitivos[1] que podem ser desenvolvidos.

Atividade 9.11.3. Os autores de [37] afirmam que é mais fácil ensinar logaritmos usando a notação $\log_a = a^{\square}$ (leia-se: "a-caixa"). Exemplos:

$2^{\square}(8) = 3$ (leia-se: "2-caixa de 8 igual a 3")

$2^{\square}(16) = 4$

$2^{\square}(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$

$3^{\square}(\frac{1}{9}) = -2$

Sugerem que, depois de estudar exemplos e as propriedades mais básicas, explica-se aos estudantes que existe outra notação mais usual $a^{\square} = \log_a$. Os exemplos agora são escritos na forma

$\log_3(81) = 3^{\square}(81) = 4$

e por último adota-se apenas a notação usual. Estude essa sugestão e crie uma sequência didática para utilizá-la.

Atividade 9.11.4. Estude textos sobre ensino da Matemática para formar uma opinião sobre a seguinte questão: na escola média o professor de matemática deveria ensinar logaritmo antes de exponencial, tomando para definição de logaritmo áreas sob o gráfico de $1/x$?

Atividade 9.11.5. Construa uma atividade para introduzir para estudantes a ideia de escala logaritmica tendo por base o seguinte quadro proposto em [80].

Conjunto	n	Faça aqui seu gráfico
um grupo de amigos	10	
formandos de uma escola	100	
estudantes de uma escola	1000	
pessoas de pequena cidade	10000	
habitantes de uma cidade	100000	
habitantes de região urbana	1000000	
habitantes de pequeno país	10000000	
habitantes de um país	100000000	

[1]Cognição é o ato ou processo de conhecer, que envolve atenção, percepção, memória, raciocínio, juízo, imaginação, pensamento e linguagem.

Atividade 9.11.6. Estude detalhadamente as folhas de atividades apresentadas nas páginas seguintes. São parte das atividades propostas em [80] (fizemos simplificações gráficas em relação ao original). Estude os objetivos pedagógicos dessa atividade e descreva situações nas quais você imagina que ela poderia ser aplicada. Confira as atividades completas em [80], pág. 193.

SIMPLIFICANDO CÁLCULOS

I) No tempo em que não havia calculadora não era fácil fazer contas. Vamos tentar!

a) $8192 \,\underline{\big|\; 256 \;}$

b) $\begin{array}{r} 4096 \\ \underline{\times 128} \end{array}$

Nos séculos XVI e XVII o estudo da Trigonometria por parte da Astronomia exigia uma necessidade de precisão em cálculos com números grandes, com 8 ou mais casas decimais. Era preciso multiplicar, dividir, extrair raízes desses números grandes. Como não existiam calculadoras e computadores, isso dava muito trabalho. Em meados do Século XVI, o monge e matemático Michael Stifel, partindo de uma antiga ideia de Arquimedes, começou a usar algumas tabelas numéricas para facilitar cálculos. Vejamos uma dessas tabelas:

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Você reconhece essas sequências numéricas?

A sequência da 1ª linha é uma ______________________ de razão ______________________

A sequência da 2ª linha é uma ______________________ de razão ______________________

II) Vamos usar essa relação para fazer umas contas. Observe:

Para calcular $8192 \div 256$ olhamos esses números na 1ª linha da tabela e procuramos os seus correspondentes na 2ª linha, que são 13 e 8. Com os números encontrados na 2ª linha fazemos uma subtração, $13 - 8$, que é igual a 5, e vemos que o correspondente de 5 na 1ª linha é 32. Com isso temos $8192 \div 256 = 32$.

32			256					8192
5			8					13

↑ ↑ 13−8 ↑

Confere? Vimos antes que $8192 \div 256 = 32$. Será isso uma coincidência? Para fazer uma divisão fizemos uma subtração, não é melhor?

III) Usando a tabela você pode economizar cálculos. Faça as operações propostas usando esse método e depois confira com uma calculadora:

$a)$ $512 \div 64 \to 9 - 6 = 3 \ \to 8$ $512 \div 64 = 8$	$b)$ $1024 \div 16 \to$ $1024 \div 16 =$	$c)$ $4096 \div 128 \to$
$d)$ $65536 \div 128 \to$	$e)$ $131072 \div 4096 \to$	$f)$ $262144 \div 8192 \to$

Pense no que você fez com a divisão e faça agora multiplicações:

$g)$ $8 \times 64 \to$	$h)$ $32 \times 4096 \to$	$i)$ $32768 \times 8 \to$
$j)$ $512 \times 256 \to$	$k)$ $8192 \times 16 \to$	$l)$ $64 \times 4096 \to$

Substituímos a divisão por uma ______________________________
Substituímos a multiplicação por uma ______________________________

IV) Calcule sem usar calculadora: $4^3 =$____________________ $8^4 =$____________________

Para calcular 4^3 localizamos 4 na 1ª linha da tabela de Michael Stifel, e vemos que o número que lhe corresponde na 2ª linha é 2. Calculamos $2 \times 3 = 6$, e vemos que número da 1ª linha da tabela correponde a 6, que é 64. Note que $4^3 = 64$.

$$\downarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 4 & \quad & \quad & \quad & 64 \\ \hline 2 & & & & 6 \\ \hline \end{array} \uparrow$$
$$\xrightarrow[\times 3]{\qquad\qquad\qquad}$$

Da mesma forma, para calcular 8^4, fazemos $8 \to 3 \to 3 \times 4 = 12 \to 4096$. Temos $8^4 = 4096$, é só conferir.

Vamos verificar se o método funciona para outras contas? Depois confira com a calculadora:

$a)$ $16^3 \to 4 \times 3 = 12$ $\to 4096 \qquad 16^3 = 4096$	$b)$ $8^5 \to$	$c)$ $4^6 \to$
$d)$ $32^3 \to$	$e)$ $256^2 \to$	$f)$ $512^2 \to$

Se na potenciação você multiplicou, na radiciação você deverá ____________________

$g)$ $\sqrt{256} \to$	$h)$ $\sqrt{1024} \to$	$i)$ $\sqrt{4096} \to$
$j)$ $\sqrt[3]{512} \to$	$k)$ $\sqrt[3]{4096} \to$	$l)$ $\sqrt[3]{32768} \to$

Substituímos a potenciação por uma ______________________________
Substituímos a radiciação por uma ______________________________

Perceba que fizemos uma redução de operações e os cálculos se tornaram muito mais rápidos e fáceis. Foi isso o que fizeram os matemáticos com suas tabelas no Século XVI.

V) Por que funciona?

Vamos escrever a tabela de Michael Stifel de outra maneira. Escrevemos os números da primeira linha como potências de 2. Complete a tabela.

1 2^0	2	4	8 2^3	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Observe, nessa nova tabela, a relação da primeira linha com a segunda: na primeira linha temos sempre 2 elevado ao número correspondente da segunda linha.

Veja agora como explicamos que a divisão vira uma subtração:

$$4096 \div 16 = \frac{4096}{16} = \frac{2^{12}}{2^4} = 2^{12-4} = 2^8 = 256$$

Agora explique você mesmo por que a multiplicação vira adição:

$512 \times 64 =$ ____

$256 \times 128 =$ ____

Também explique você mesmo por que a potenciação vira multiplicação:

$8^4 = (2^3)^4 =$ ____

$32^3 =$ ____

Veja nossa explicação de por que a radiciação vira divisão:

$$\sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = \left(2^{10}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$$

Agora explique você mesmo:

$\sqrt{16384} =$ ____

UMA INVENÇÃO INTERESSANTE

Os Matemáticos e os astrônomos perceberam que se trabalhassem com os expoentes dos números, quando escritos em forma de potências, seus cálculos seriam simplificados. Com isso criaram tabelas de duas colunas (ou duas linhas) em que se colocava os termos de uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 1 (potências de um certo número) em correspondência com os termos de uma progressão aritmética (na verdade os expoentes dos números). Essas tabelas foram chamadas de *tábuas de logaritmos*.

1 2^0	2 2^1	4 2^2	8 2^3	16 2^4	32 2^5	64 2^6	128 2^7	256 2^8	512 2^9	1024 2^{10}	2048 2^{11}	4096 2^{12}	8192 2^{13}	16384 2^{14}	32768 2^{15}	65536 2^{16}	131072 2^{17}	262144 2^{18}
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Na tabela, o número de baixo chama-se **logaritmo** do número de cima. Assim:

128
$\downarrow$
7

O logaritmo de 128 é 7, pois $2^7 = 128$.

512
$\downarrow$
9

O logaritmo de 512 é 9, pois $2^9 = 512$.

8192
$\downarrow$
13

O logaritmo de 8192 é 13, pois $2^{13} = 8192$.

OBSERVE QUE O LOGARITMO É O EXPOENTE DE UMA POTÊNCIA

Complete a tabela:

	Abreviando		Abreviando
O logaritmo de 2048 é 11	log(2048)=11	O logaritmo de 4096 é	log(4096)=.......
O logaritmo de 256 é	log(256)=.......	O logaritmo de 8 é	
O logaritmo de 32 é		O logaritmo de 16384 é	

Vamos trabalhar com uma PG de razão 3:

1 3^0	3 3^1	9 3^2	27 3^3	81 3^4	243 3^5	729 3^6	2187 3^7	6561 3^8	19683 3^9	59049 3^{10}	177147 3^{11}	531441 3^{12}
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

81
$\downarrow$
4

O logaritmo de 81 é 4, pois $3^4 = 81$.

2187
$\downarrow$
7

O logaritmo de 2187 é 7, pois $3^7 = 2187$.

Complete a tabela:

	Abreviando		Abreviando
O logaritmo de 81 é 4	log(81)=4	O logaritmo de 2187 é	log(2187)=.......
O logaritmo de 6561 é	log(6561)=.......	O logaritmo de 177147 é	

Vemos que quando a base das potências é 2 ou 3 muitos números ficam de fora. Por exemplo, nenhuma das tabelas anteriores permite fazer 9571×111275. Por isso, em meados do Século XVII, John Napier, um rico e inteligente lorde escocês que tinha tomado conhecimento das tabelas de Michael Stifel, propôs tabelas de razões menores para abranger uma quantidade maior de números.

Se tivermos uma tabela em que a PG tem razão 1,1 os termos estão mais próximos.

1 $1,1^0$	$1,1$ $1,1^1$	$1,21$ $1,1^2$	$1,331$ $1,1^3$	$1,4641$ $1,1^4$	$1,61051$ $1,1^5$	$1,771561$ $1,1^6$	$1,9487171$ $1,1^7$	$2,14358881$ $1,1^8$	$2,357947691$ $1,1^9$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

1,331
$\downarrow$
3

O logaritmo de 1,331 é 3, pois $1,1^3 = 1,331$.

1,771561
$\downarrow$
6

O logaritmo de 1,771561 é 6, pois $1,1^6 = 1,771561$.

COMO DIFERENCIAR AS TABELAS? Usaremos a seguinte notação:

$$2^7 = 128 \iff \log_2(128) = 7$$

$$3^4 = 81 \iff \log_3(81) = 4$$

Resumo:

Dados números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se **logaritmo** de b na base a. Ou seja,

$$\log_a b = c \iff a^c = b, \text{ com } a \text{ e } b \text{ positivos e } a \neq 1$$

Capítulo 10

Tópicos sobre áreas e volumes

10.1 Introdução

Estudamos, nos nove capítulos anteriores deste livro, conceitos e técnicas de Análise Matemática que são necessárias para os professores do ensino básico. O principal assunto foi, sem dúvida, a construção de modelos para os números reais. Vimos ainda importantes propriedades dos números racionais e irracionais e suas representações, sequências numéricas convergentes, séries geométricas e funções exponenciais e logarítmicas.

Mas existem mais assuntos da Matemática da escola básica que necessitam, para seu estudo e compreensão, do aporte de processos infinitos, próprios da Análise Matemática. Por exemplo, por que a área do quadrado de lado a é a^2 ? O que é o *Princípio de Cavalieri*?

Para não alongar demasiadamente esse texto apresentamos, neste Capítulo, algumas breves observações sobre áreas e volumes.

10.2 Sobre o conceito de área

Uma *região triangular* é a reunião de um triângulo e de seu interior. Uma *região poligonal* é a reunião de uma quantidade finita de regiões triangulares tais que, se duas dessas regiões se interceptam, a interseção é um lado comum a duas regiões triangulares ou um vértice comum a duas ou mais regiões triangulares.

Na apresentação do conceito de área estudado na escola básica são admitidos os seguintes postulados, explícita ou implicitamente:

A_1 A toda região poligonal corresponde um único número positivo, que é denominado *área* da região.

A_2 Duas regiões triangulares congruentes quaisquer têm a mesma área.

A_3 Se uma região poligonal está contida em outra, então sua área é menor ou igual do que a daquela outra.

A_4 Se duas regiões poligonais não têm ponto interior comum, então a área de sua união é igual à soma das áreas das regiões.

A_5 A área da região quadrada de lado a é a^2.

Usando a área da região quadrada podemos obter a área de uma região triangular qualquer, e, por A_4, temos a área de uma região poligonal qualquer.

Nesse esquema é natural aceitarmos os postulados A_1, A_2, A_3 e A_4, muito embora eles também possam ser construídos. Para ver como fazer isso confira, por exemplo, [64], página 168 e seguintes. Mas não é natural aceitarmos A_5. No lugar dele deveria estar um postulado que determine apenas a unidade de área de forma condizente com a unidade de comprimento considerada no contexto. Desse modo o postulado A_5 deveria ser substituído por

A'_5 A área da região quadrada de lado 1 é 1.

Muitos livros de Matemática Elementar preferem adotar A_5 do que A'_5 para evitar a dificuldade de provar que $A'_5 \quad \Rightarrow \quad A_5$.

Vamos ver uma demonstração dessa implicação.

Teorema 10.1. $A'_5 \quad \Rightarrow \quad A_5$.

Demonstração. Seguimos a ideia apresentada em [64], página 165 e seguintes. Consideremos um quadrado de lado a. Vejamos primeiro o caso em que $a = 1/n$, sendo n um inteiro positivo. Tomamos um quadrado de lado 1. Dividindo os lados desse quadrado em n partes iguais, podemos reparti-lo em n^2 quadrados menores congruentes, cada um com lado $a = 1/n$. Confira a Figura 10.1.

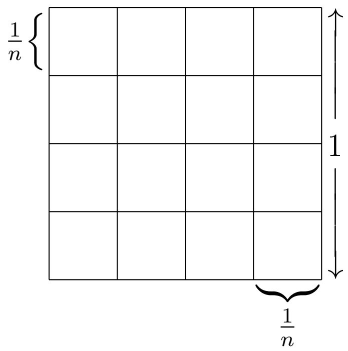


Figura 10.1: Área do quadrado de lado $a = 1/n$

Usando o postulado A_4 acima temos

$$\text{área do quadrado de lado } 1 = n^2 \; \times \; \text{ área do quadrado menor}$$

Usando agora o Postulado A'_5 temos

$$1 = n^2 \; \times \; \text{ área do quadrado menor}$$

$$\Rightarrow \text{área do quadrado menor} = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = a^2$$

A afirmação do Teorema fica provada para esse caso. Suponhamos agora o caso em que o lado do quadrado dado é um número racional $a = m/n$. Dividindo seus lados em m partes iguais, podemos reparti-lo em m^2 quadrados menores, cada um com lado $1/n$, portanto com área $1/n^2$, de acordo com o que foi provado acima. Confira a Figura 10.2.

Então

$$\text{área do quadrado dado} = m^2 \times \tfrac{1}{n^2} = \left(\tfrac{m}{n}\right)^2 = a^2$$

e fica provado o teorema para esse caso.

Suponhamos agora que o lado do quadrado dado seja um número real positivo a, e seja α sua área. Queremos provar que $\alpha = a^2$. Suponhamos $\alpha < a^2$. Então $\sqrt{\alpha} < a$ e existe um número racional r tal que $\sqrt{\alpha} < r < a$. Construímos um quadrado de lado r contido no quadrado de lado a. Então

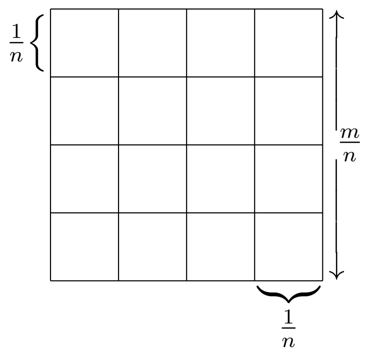


Figura 10.2: Área do quadrado de lado $a = m/n$

$$\text{área do quadrado de lado } r \leq \text{área do quadrado de lado } a$$

$$\Rightarrow \quad r^2 \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad r \leq \sqrt{\alpha}$$

o que é uma contradição. Suponhamos agora $a^2 < \alpha$. Então $a < \sqrt{\alpha}$ e existe um número racional r tal que $a < r < \sqrt{\alpha}$. Construímos um quadrado de lado r contendo o quadrado de lado a. Então

$$\text{área do quadrado de lado } a \leq \text{área do quadrado de lado } r$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \leq r^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\alpha} \leq r$$

o que é uma contradição.

Isto termina a demonstração. □

Existem outras formas de demonstrar o Teorema 10.1. Uma delas é usando o resultado do Problema 5.7.37. O estudante pode se sentir convidado a fazer isso. Outra forma consiste em utilizar o seguinte resultado:

Se $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ é uma função crescente tal que $f(nx) = nf(x)$ quaisquer que sejam $x \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}$, então $f(rx) = rf(x)$ quaisquer que sejam $x, r \in \mathbb{R}_+$.

Para obter mais detalhes confira [57], volume 2, página 254 e seguintes.

10.3 Área de setores parabólicos

Na seção 10.2 vimos como definir área de regiões poligonais, mas não é simples definir área de uma figura qualquer do plano. Para as figuras mais comuns da Matemática Elementar, como discos, regiões elípticas, setores parabólicos, etc., podemos utilizar a seguinte definição, suficiente para essas situações.

Definição 10.2. Seja $\mathcal{F}$ um subconjunto do plano, e suponhamos que existe uma região poligonal contida em $\mathcal{F}$ e uma região poligonal que contém $\mathcal{F}$. Seja α o supremo das áreas de todas as regiões poligonais contidas em $\mathcal{F}$, e β o ínfimo das áreas de todas as regiões poligonais que contêm $\mathcal{F}$. Se $\alpha = \beta$, dizemos que esse valor é a área de $\mathcal{F}$.

Temos o

Teorema 10.3. *Seja $\mathcal{F}$ um subconjunto do plano, e suponhamos que exista uma sequência (α_n) de áreas de regiões poligonais contidas em $\mathcal{F}$, e uma sequência (β_n) de áreas de regiões poligonais que contêm $\mathcal{F}$. Se existirem os limites dessas sequências e se forem iguais, então esse valor comum é a área de $\mathcal{F}$.*

Demonstração. O conjunto dos números que são áreas de regiões poligonais contidas em $\mathcal{F}$ é não vazio e limitado superiormente, logo tem supremo α. O conjunto dos números que são áreas de regiões poligonais que contêm $\mathcal{F}$ é não vazio e limitado inferiormente, logo tem ínfimo β. Temos $\alpha_n \leq \alpha \leq \beta \leq \beta_n$ para todo n. Portanto $\lim \alpha_n \leq \alpha \leq \beta \leq \lim \beta_n$. Como $\lim \alpha_n = \lim \beta_n$, todos esses valores são iguais, e, por definição, é a área de $\mathcal{F}$. □

No Capítulo 6, seção 6.5, vimos que, dado um disco $\mathcal{D}$ de raio r, a sequência (α_n) das áreas das regiões poligonais regulares nele contidas converge para πr^2. No Problema 6.11.10 foi sugerido verificar que a sequência (β_n) das áreas das regiões poligonais regulares que contêm $\mathcal{D}$ também converge para πr^2. Portanto a definição que havíamos dado de área do disco está de acordo com a Definição 10.2.

Vejamos agora áreas de setores parabólicos, que são regiões delimitadas por uma reta e por um arco de parábola, conforme ilustrado na Figura 10.3.

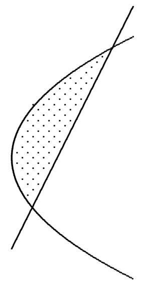


Figura 10.3: Exemplo de setor parabólico

O estudante pode verificar que, para calcular a área de qualquer setor parabólico, é suficiente saber a área de um *triângulo parabólico* (Figura 10.4).

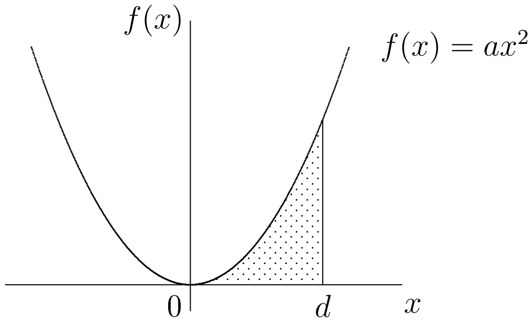


Figura 10.4: Triângulo parabólico

Consideremos então um triângulo parabólico $\mathcal{T}$ delimitado pelo eixo Ox, pela reta $x = d$, com $d > 0$, e pelo gráfico de $f(x) = ax^2$, com $a > 0$. Vamos definir uma sequência (α_n) de áreas de regiões poligonais contidas em $\mathcal{T}$.

Seja $n \geq 2$ um número natural. Dividimos o intervalo $[0, d]$ do eixo Ox em n subintervalos, todos de comprimento d/n. Os extremos desses subintervalos são os pontos de abcissa

$$0 \qquad \frac{d}{n} \qquad \frac{2d}{n} \qquad \ldots \qquad \frac{id}{n} \qquad \ldots \qquad \frac{nd}{n} = d$$

Consideremos os retângulos cujas bases são os subintervalos $\left[\frac{(i-1)d}{n}, \frac{id}{n}\right]$ e cujas alturas são $f\left(\frac{(i-1)d}{n}\right)$, com $1 \leq i \leq n$, conforme a Figura 10.5.

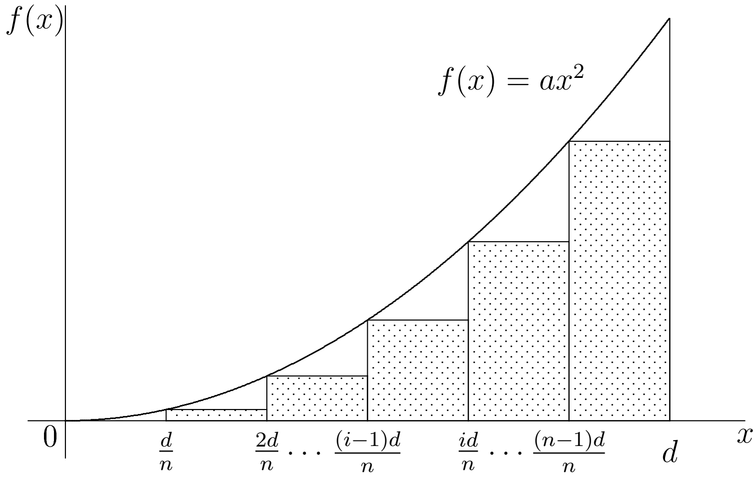


Figura 10.5: Área do triângulo parabólico

Seja α_n a área da região poligonal formada por esses retângulos. Essa região está contida no triângulo parabólico. Temos

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{ad^3}{n^3}(i-1)^2 \\ &= \frac{ad^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 \\ &= \frac{ad^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\alpha_n &= \frac{ad^3}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{n^3} \\ &= \frac{ad^3}{6}\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(2-\frac{1}{n}\Big) \\ &= \frac{ad^3}{6}\cdot 2 \\ &= \frac{ad^3}{3}\end{aligned}$$

Consideremos os retângulos cujas bases são os subintervalos $\left[\frac{(i-1)d}{n}, \frac{id}{n}\right]$ e cujas alturas são $f\left(\frac{id}{n}\right)$, com $1 \le i \le n$. Seja β_n a área da região poligonal formada por esses retângulos. Essa região contém o triângulo parabólico. O estudante poderá verificar que

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}\alpha_n = \frac{ad^3}{3}$$

Temos então o

Teorema 10.4. *Dado um sistema de coordenadas cartesianas xOy, a área do triângulo parabólico delimitado pelo eixo Ox, pela reta $x = d$, com $d > 0$, e pelo gráfico de $f(x) = ax^2$, com $a > 0$, é $\dfrac{ad^3}{3}$.*

10.4 Os Teoremas de Cavalieri

Conforme já comentamos, os métodos da Geometria Euclidiana são suficientes para a determinação da área de qualquer região poligonal. Nesse estudo o primeiro obstáculo que encontramos é a área do disco, para o que temos que lançar mão de métodos da Análise Matemática. Para volumes, os obstáculos aparecem mais cedo. Mesmo para um poliedro simples, como a pirâmide, já encontramos dificuldades, e precisamos usar os métodos da Análise Matemática.

Mas todos concordamos que volumes de sólidos, como prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas devem ser estudados no ensino básico. Os textos de Matemática Elementar, para evitar as dificuldades mencionadas, adotam o Princípio de Cavalieri. As dificuldades ficam concentradas em uma única afirmação, que é considerada plausível e assumida sem demonstração. A ideia desse princípio é fácil de entender, mas sua demonstração, em geral, para estudantes do ensino básico, é complicada. Conforme comentamos na página 45, é válido o uso de argumentos plausíveis no ensino da Matemática desde que: *(i)* a demonstração omitida não tenha papel central no assunto; *(ii)* os estudantes tenham atividades prévias que os levam a acreditar no argumento; *(iii)* o professor esteja preparado para suprir o que estiver faltando.

Sim, o Princípio de Cavalieri, geralmente adotado como postulado nos livros de Matemática Elementar, é na verdade um teorema. Vejamos duas versões desse princípio, para áreas e para volumes, e como podem ser demonstradas.

Princípio de Cavalieri para áreas Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ regiões de um plano, e seja r uma reta desse plano. Suponha que, para toda reta s paralela a r, as interseções de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ com s sejam vazias ou sejam segmentos tais que a razão entre seus comprimentos é constante. Então a razão entre as áreas de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ é essa mesma constante.

Princípio de Cavalieri para volumes Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sólidos, e seja α um plano. Suponha que, para todo plano β paralelo a α, as interseções de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ com β sejam vazias ou sejam regiões tais que a razão entre suas áreas é constante. Então a razão entre os volumes de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ é essa mesma constante.

Esses princípios levam o nome do matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri, que os chamava de *método dos indivisíveis*, e os divulgou (em versões mais restritas) através de seu famoso livro *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, de 1635. Mas, na verdade, esse método é muito anterior a Cavalieri, tendo sido utilizado por geômetras chineses dos primeiros séculos de nossa era e pelos antigos gregos, como Demócrito e Arquimedes.

A ideia inicial da demonstração do Princípio de Cavalieri para áreas é simples. Se $\mathcal{R}$ é uma região do plano, indicaremos sua área por $a(\mathcal{R})$. Estamos fatiando duas regiões do plano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. Se as fatias de $\mathcal{F}$ são $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ..., $\mathcal{F}_n$, e se as fatias de $\mathcal{G}$ são $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, ..., $\mathcal{G}_n$, de modo que $a(\mathcal{F}_i) = ka(\mathcal{G}_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$ e para algum número positivo k, então

$$\begin{aligned} a(\mathcal{F}) = a(\mathcal{F}_1) + \cdots + a(\mathcal{F}_n) = ka(\mathcal{G}_1) + \cdots + ka(\mathcal{G}_n) = \\ = k\left(a(\mathcal{G}_1) + \cdots + a(\mathcal{G}_n)\right) = ka(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Ocorre que, no Princípio de Cavalieri para áreas, as regiões são "fatiadas" por segmentos, que não têm área, mas comprimento. Ainda, a quantidade de segmentos é infinita. Se existe um número real positivo r tal que as fatias de $\mathcal{F}$ são os segmentos $\mathcal{F}_\xi$, para $\xi \in [0, r]$, e se as fatias de $\mathcal{G}$ são $\mathcal{G}_\xi$, para $\xi \in [0, r]$, de modo que seus comprimentos satisfaçam $c(\mathcal{F}_\xi) = kc(\mathcal{G}_\xi)$ para todo $\xi \in [0, r]$, então

$$\sum_{\xi \in [0,r]} c(\mathcal{F}_\xi) = \sum_{\xi \in [0,r]} kc(\mathcal{G}_\xi)$$

Figura 10.6: Ideia do Princípio de Cavalieri para áreas

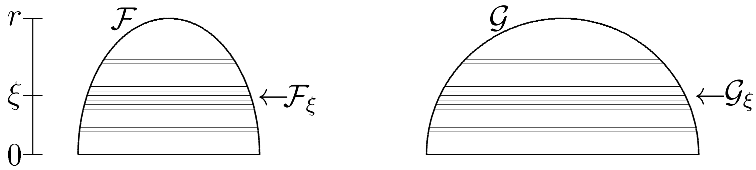


Figura 10.7: Princípio de Cavalieri para áreas

Necessitamos de uma técnica que nos diga que essas somas infinitas são números, que são as áreas de $\mathcal{F}$ e de $\mathcal{G}$, respectivamente, e que

$$\sum_{\xi \in [0,r]} kc(\mathcal{G}_\xi) = k \sum_{\xi \in [0,r]} c(\mathcal{G}_\xi)$$

Observações análogas podem ser feitas sobre o Princípio de Cavalieri para volumes.

Essa técnica, como sabemos, é fornecida pelo Cálculo Diferencial e Integral. As demonstrações dos dois princípios de Cavalieri constituem uma aplicação direta da teoria de integração de funções reais. Observamos inicialmente que os enunciados desses princípios feitos acima não se preocupam em definir condições sobre as fronteiras das regiões e dos sólidos. Mas sabemos que é necessário impor condições de integrabilidade. Entendemos que isso não é feito nos livros textos do ensino básico, primeiro para não desviar a atenção do estudante, segundo por que, naqueles contextos, os princípios são aplicados para regiões e sólidos muito simples, que satisfazem naturalmente as condições de integrabilidade.

Vejamos então como podemos enunciar os princípios de Cavalieri na forma de teoremas.

Teorema 10.5 (Princípio de Cavalieri para áreas)**.** *Consideremos em um plano um sistema de coordenadas cartesianas Oxy, e seja $\mathcal{R}$ a região delimitada por $y = 0$, $y = b > 0$ e pelos gráficos das funções contínuas $x = f_1(y)$ e $x = f_2(y)$, $0 \leq y \leq b$, com $f_1(y) \leq f_2(y)$ para todo y. Seja $\mathcal{S}$ a região delimitada por $y = 0$, $y = b$ e pelos gráficos das funções contínuas $x = g_1(y)$ e $x = g_2(y)$, $0 \leq y \leq b$, com $g_1(y) \leq g_2(y)$ para todo y. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $f_2(y) - f_1(y) = k\,[g_2(y) - g_1(y)]$ para todo y. Então $a(\mathcal{R}) = ka(\mathcal{S})$.*

Demonstração. Da teoria de integração de funções reais temos:

$$a(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} dxdy = \int_0^b \left[\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} dx\right] dy = \int_0^b [f_2(y) - f_1(y)]\, dy =$$

$$= \int_0^b k\,[g_2(y) - g_1(y)]\, dy = k \int_0^b [g_2(y) - g_1(y)]\, dy = \cdots = ka(\mathcal{S})$$

□

Se $\mathcal{P}$ é um sólido, indicaremos seu volume por $v(\mathcal{P})$.

Teorema 10.6 (Princípio de Cavalieri para volumes)**.** *Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$, e seja $\mathcal{P}$ um sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma* *quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x,z)$ e $x = g(y,z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja $\mathcal{P}_t$ a interseção de $\mathcal{P}$ com o plano $z = t$. Seja $\mathcal{Q}$ outro sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x,z)$ e $x = g(y,z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja $\mathcal{Q}_t$ a interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $z = t$. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $a(\mathcal{P}_t) = ka(\mathcal{Q}_t)$ para todo t. Então $v(\mathcal{P}) = kv(\mathcal{Q})$.*

Demonstração. Da teoria de integração de funções reais temos:

$$v(\mathcal{P}) = \iiint\limits_{\mathcal{P}} dxdydz = \int_0^c \left[\iint\limits_{\mathcal{P}_z} dxdy \right] dz = \int_0^c a(\mathcal{P}_z)dz =$$

$$= \int_0^c ka(\mathcal{Q}_z)dz = k\int_0^c a(\mathcal{Q}_z)dz = \cdots = kv(\mathcal{Q})$$

□

10.5 Área da elipse e volume do elipsoide

Nesta seção veremos dois exemplos não usuais de aplicação dos princípios de Cavalieri, um para áreas, e outro para volumes.

De acordo com o que vimos no Capítulo 6, a área do disco de raio r é πr^2. Ali usamos o método geométrico de Arquimedes para definir o número π e provar a fórmula citada. A partir disso podemos, através do Princípio de Cavalieri para áreas, obter a área de qualquer elipse.

Teorema 10.7. *A área da região elíptica de semieixos a e b é πab.*

Demonstração. Consideremos, em um sistema de coordenadas Oxy, a região semielíptica $\mathcal{R}$ dada por $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$ e $y \geq 0$, sendo $b \geq a > 0$. Adotando a notação do Teorema 10.5 temos $f_1(y) = -a\sqrt{1 - y^2/b^2}$ e $f_2(y) = a\sqrt{1 - y^2/b^2}$, para $0 \leq y \leq b$. Consideremos o semidisco $\mathcal{S}$ dado por $x^2 + y^2 \leq b^2$ e $y \geq 0$. Sejam $g_1(y) = -\sqrt{b^2 - y^2}$ e $g_2(y) = -\sqrt{b^2 - y^2}$, para $0 \leq y \leq b$. Notemos que

$$f_2(y) - f_1(y) = 2a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{2a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} = \frac{a}{b}\left[g_2(y) - g_1(y)\right]$$

Estamos assim em condições de aplicar o Teorema 10.5, com $k = a/b$. Com isso temos

$$a(\mathcal{R}) = \frac{a}{b}a(\mathcal{S}) = \frac{a}{b}\frac{\pi b^2}{2} = \frac{\pi ab}{2}$$

Essa é a área da região semielíptica. Duplicando, segue o resultado. □

Uma das mais famosas aplicações do Princípio de Cavalieri para volumes é o cálculo do volume da esfera mediante sua comparação com um cilindro menos dois cones. Essa demonstração é apresentada em muitos livros textos para o ensino médio. Com isso sabemos que o volume da esfera de raio r é $(4/3)\pi r^3$. A partir disso podemos calcular o volume de qualquer elipsoide.

Teorema 10.8. *O volume do elipsoide de semieixos a, b e c é $\frac{4}{3}\pi abc$.*

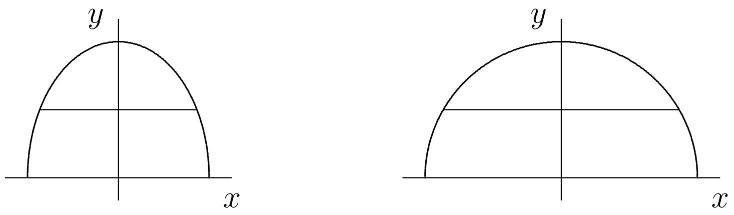


Figura 10.8: Área da região elíptica

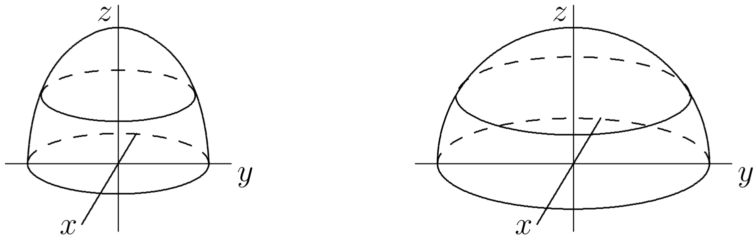


Figura 10.9: Volume do elipsoide

Demonstração. Suponhamos $c \geq b \geq a > 0$, e consideremos o semielipsoide $\mathcal{P}$ definido por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad z \geq 0$$

É fácil ver que esse sólido é delimitado pelos planos $z = 0$, $z = c$ e pelos gráficos de duas funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ (ou do tipo $x = g(y, z)$). Além disso, para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, a interseção $\mathcal{P}_t$ de $\mathcal{P}$ com o plano $z = t$ é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{t^2}{c^2} = \frac{c^2 - t^2}{c^2}$$

Seja $d = \sqrt{(c^2 - t^2)/c^2} = (1/c)\sqrt{c^2 - t^2}$. Então $\mathcal{P}_t$ é dado por

$$\frac{x^2}{(ad)^2} + \frac{y^2}{(bd)^2} \leq 1$$

e, em virtude do Teorema 10.7, sua área é

$$\pi(ad)(bd) = \pi abd^2 = \frac{ab}{c^2}\pi(c^2 - t^2)$$

Consideremos agora a semiesfera $\mathcal{Q}$ definida por

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2, \quad z \geq 0$$

É fácil ver que esse sólido é delimitado pelos planos $z = 0$, $z = c$ e pelos gráficos de duas funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ (ou do tipo $x = g(y, z)$). Além disso, para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, a interseção $\mathcal{Q}_t$ de $\mathcal{Q}$ com o plano $z = t$ é dada por

$$x^2 + y^2 + t^2 \leq c^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq c^2 - t^2$$

Seja $r = \sqrt{c^2 - t^2}$. Então $\mathcal{Q}_t$ é dado por

$$x^2 + y^2 \leq r^2$$

e sua área é $\pi r^2 = \pi(c^2 - t^2)$.

Notemos que, para cada t tal que $0 \leq t \leq c$,

$$a(\mathcal{P}_t) = \frac{ab}{c^2}\pi(c^2 - t^2) = \frac{ab}{c^2}a(\mathcal{Q}_t)$$

Estamos assim em condições de aplicar o Teorema 10.6 com $k = ab/c^2$. Temos então

$$v(\mathcal{P}) = kv(\mathcal{Q}) = \frac{ab}{c^2}\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi c^3 = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi abc$$

Esse é o volume do semielipsoide. Duplicando, segue o resultado desejado. □

10.6 Comprimento da circunferência usando derivadas

Esta seção é um complemento do Capítulo 6. Vamos fazer o que foi prometido na Observação 6.6, na página 105.

Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de raio r, e, para todo $n \geq 3$, seja p_n o perímetro do polígono regular de n lados inscrito em $\mathcal{C}$. Vamos mostrar que (p_n) converge. Começaremos com um resultado conhecido dos estudantes de Cálculo Diferencial de uma variável.

Lema 10.9. *Se* $0 < x < \pi/2$, *então*

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Demonstração. Na Figura 10.10 a circunferência tem raio 1, $\angle BOC$ mede x (em radianos) e OB é perpendicular a AD e a BC. Portanto $AD = \operatorname{sen} x$ e $BC = \operatorname{tg} x$. Observe que a área do triângulo OBC é $\operatorname{tg} x/2$, a área do setor de circunferência OBD é $x/2$ e a área do triângulo OBD é $\operatorname{sen} x/2$. Examinando a figura fica claro que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Manipulando essa relação obtemos o Lema. □

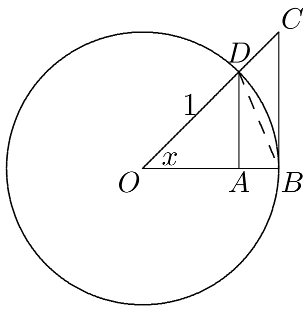


Figura 10.10: Uma desigualdade trigonométrica

Consideremos um polígono regular de n lados $A_1A_2A_3\ldots A_n$ inscrito em $\mathcal{C}$. Seja l_n o lado do polígono. Na Figura 10.11, $l_n = A_1A_2$, M é ponto médio de A_1A_2, portanto OM é um apótema do polígono, e $\angle MOA_1$ vale π/n. Portanto $l_n = 2r\operatorname{sen}(\pi/n)$. Consequentemente o perímetro do polígono é $p_n = nl_n = 2rn\operatorname{sen}(\pi/n)$.

Temos agora a

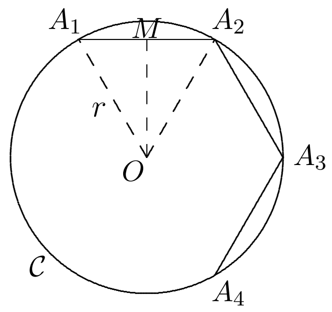


Figura 10.11: Uma fórmula trigonométrica para o perímetro

Proposição 10.10. *Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de raio r. A sequência $(p_n)_{n\geq 3}$ dos perímetros do polígonos regulares de n lados inscritos em $\mathcal{C}$ é convergente, e seu limite é o comprimento de $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Consideremos a função $f : [0, \pi/2) \mapsto \mathcal{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x/x$ se $x > 0$ e $f(0) = 1$. Derivando f em $(0, \pi/2)$ e usando o Lema 10.9, vemos que f é decrescente em $(0, \pi/2)$. Usando novamente o Lema 10.9, vemos que f é decrescente em $[0, \pi/2)$.

Para todo $n \geq 3$ temos

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\pi}{n+1} < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad f\Big(\frac{\pi}{n}\Big) < f\Big(\frac{\pi}{n+1}\Big) \\ &\Rightarrow \quad 2rn \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} < 2r(n+1)\operatorname{sen}\frac{\pi}{n+1} \\ &\Rightarrow \quad p_n < p_{n+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad f\Big(\frac{\pi}{n}\Big) < f(0) \\ &\Rightarrow \quad 2rn \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} < 2r\pi \\ &\Rightarrow \quad p_n < 2r\pi \end{aligned}$$

Portanto (p_n) é crescente e limitada. Em virtude do Teorema das Sequências Monótonas 5.23, exite $\lim p_n$. Como a subsequência (p_{2^n}) converge para o comprimento de $\mathcal{C}$, o mesmo ocorre com a sequência (p_n). Isto termina a Proposição. □

Isto nos permite redefinir o comprimento de uma circunferência.

Definição 10.11. O comprimento de uma circunferência é o limite dos perímetros dos polígonos regulares nela inscritos.

10.7 Problemas

Problema 10.7.1. Prove, de várias maneiras diferentes, que a área do retângulo de dimensões a e b é ab. A partir disso obtenha a área de um triângulo qualquer.

Problema 10.7.2. Defina o volume de um cubo de lado 1 como sendo 1. Prove, de várias maneiras diferentes, que o volume de um cubo de lado a é a^3. Quais são os postulados sobre volume que você precisou assumir?

Problema 10.7.3. Defina o volume de um cubo de lado 1 como sendo 1. Usando o resultado do Problema 5.7.37 prove que o volume do paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c é abc.

Problema 10.7.4. a) Demonstre o seguinte: *Se* $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ *é uma função crescente tal que* $f(nx) = nf(x)$ *quaisquer que sejam* $x \in \mathbb{R}_+$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *então* $f(rx) = rf(x)$ *quaisquer que sejam* $x, r \in \mathbb{R}_+$. **b)** Suponha que o volume de um cubo de lado 1 seja 1. Usando a parte a), prove que o volume do paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c é abc.

Problema 10.7.5. a) Consideremos um eixo numérico. Para cada número racional r, consideremos o intervalo com centro em r e raio 10^{-15}. Prove que a união de todos esses intervalos é toda a reta. **b)** Seja $(r_i)_{i\geq 1}$ uma enumeração dos números racionais. Para cada racional r_i, o cobrimos com o intervalo de centro em r_i e raio 2^{-i}. Verifique se a união desses intervalos é toda a reta.

Problema 10.7.6. Calcule a área da região hachurada da Figura 10.12, delimitada pelas curvas $y = 3x^2$ e $y = x^2$ e pelas retas $x = 1$ e $x = 5/2$.

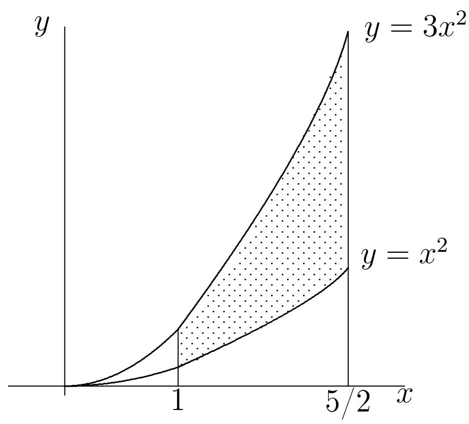


Figura 10.12: Calcule a área

Problema 10.7.7. Dentre os tratados de Arquimedes que se ocuparam do Cálculo Integral, o mais popular era a *Quadratura da Parábola.* Nele Arquimedes demonstrou o seguinte resultado. Considere o segmento parabólico APB tal que AB é paralelo à reta tangente à parábola pelo vértice P, conforme a Figura 10.13. Segundo Arquimedes, a área do setor parabólico assim determinado é igual a $4/3$ da área do triângulo APB. Demonstre esse resultado.

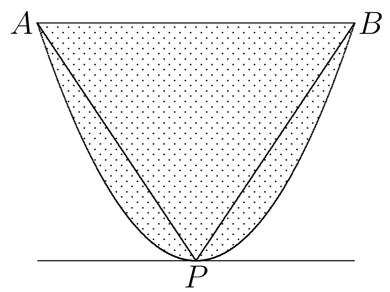


Figura 10.13: Um teorema de Arquimedes

Problema 10.7.8. Veja como você pode obter e justificar uma fórmula para o volume de um cilindro qualquer com base elíptica.

Problema 10.7.9. Veja como você pode obter e justificar uma fórmula para o volume de um cone qualquer com base elíptica.

Problema 10.7.10. Sabemos que π (e também $\pi/2$) são números irracionais e que suas representações como expansões decimais não apresentam nenhum padrão de regularidade. Mas esses números podem ser representados por belas frações contínuas (não simples) que apresentam regularidades. A fração contínua de $\pi/2$ dada abaixo é devida a Stern, e é de 1833 (confira [69] página 137), e a fração contínua de π foi descoberta por L. J. Lange em 1999 (confira [51]):

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{2\cdot 3}{1 - \cfrac{1\cdot 2}{3 - \cfrac{4\cdot 5}{1 - \cfrac{3\cdot 4}{3 - \ddots}}}}} \qquad \pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \ddots}}}}$$

Descreva as regularidades dessas frações contínuas e compare os primeiros convergentes com o valor numérico de π.

Problema 10.7.11. Usando a técnica do Exemplo 8.17 construa os primeiros termos da fração contínua infinita simples para o número de Euler e. Achando nove convergentes é possível perceber uma regularidade.

10.8 Temas para investigação

Tema 10.8.1. Tendo em vista os métodos da seção 10.6, use funções trigonométricas para exprimir o perímetro e a área de uma região poligonal regular de n lados em função do raio da circunferência circunscrita. Veja que resultados da teoria de limites de funções reais são necessários para obter, dessa forma, o comprimento de uma circunferência e a área de um disco. Verifique se é possível adaptar esse método para o ensino médio.

Tema 10.8.2. Investigue o seguinte problema: tomando-se aleatoriamente dois números inteiros positivos a e b, qual a probabilidade de que a fração a/b seja irredutível.

Tema 10.8.3. Dado um sistema de coordenadas cartesianas Oxy e dados $a > 0$ e $d > 0$, denominamos *triângulo cúbico* à região delimitada pelo eixo das abcissas, pela reta $x = d$ e pelo gráfico de $y = ax^3$. Encontre a área dessa região usando a mesma técnica da Seção 10.3.

Tema 10.8.4. Usando o Princípio de Cavalieri para áreas, encontre a área da região determinada pelo eixo Ox e por um arco da ciclóide comparando essa região com o disco da circunferência geradora.

Tema 10.8.5. a) Considere a sequência de figuras 10.14. Enuncie o teorema que está sendo provado. Considere também demonstrações algébricas do resultado.

b) Explore também a sequência de figuras 10.15.

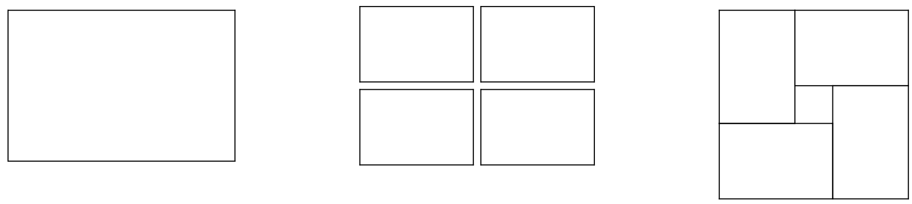


Figura 10.14: O que está sendo provado sobre retângulos?

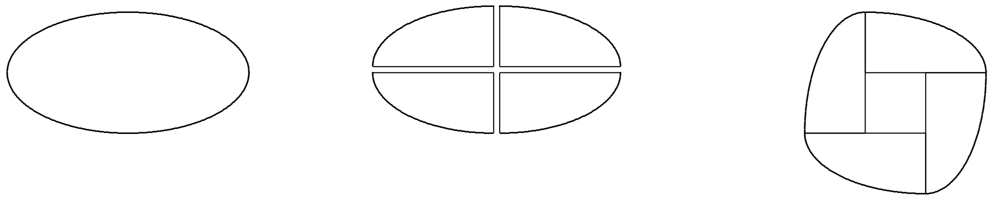


Figura 10.15: O que está sendo provado sobre elipses?

10.9 Atividades para licenciandos e professores

Atividade 10.9.1. (INEP- ENC 98, adaptado) Em uma aula sobre área de retângulos, você sugere aos estudantes desenhar retângulos com lados medindo uma quantidade inteira de centímetros a e b. Dividindo a região retangular em quadrados de 1 cm^2, eles percebem claramente que a área é $a \times b$ cm^2. Um estudante então pergunta: e se os lados medirem 3,6 cm e 7,4 cm? Como você lidaria com essa pergunta?

Atividade 10.9.2. Na seção 10.4 comentamos que é válido o uso de argumentos plausíveis no ensino do Princípio de Cavalieri, desde que: *(i) a demonstração omitida não tenha papel central no assunto; (ii) os estudantes tenham atividades prévias que os leva a acreditar no argumento; (iii) o professor esteja preparado para suprir o que estiver faltando.* Imagine atividades prévias que possam facilitar a compreensão dos princípios de Cavalieri (para áreas e volumes).

Atividade 10.9.3. Imagine uma atividade para estudantes que começa assim: *Operários rolam um cubo de granito de 1 m de aresta ...*

Atividade 10.9.4. Em [93] o autor relata uma estratégia de um estudante para calcular a área do triângulo parabólico sob a parábola $f(x) = x^2$. Estude essa estratégia, que parece ser uma estranha mistura dos Princípios de Cavalieri no plano e no espaço. Esse método se adapta para áreas de triângulos parabólicos sob a parábola $f(x) = ax^2$? De que forma você, como professor, analisa essa proposta?

1) No triângulo parabólico delimitado pelo eixo Ox, pela reta vertical $x = d > 0$ e pelo gráfico de $f(x) = x^2$ (Figura 10.16), considere todos os segmentos verticais de $(x, 0)$ a (x, x^2), com $0 \leq x \leq d$.
2) O comprimento de cada um desses segmentos é x^2, medida essa igual à área de um quadrado de lado x. Consideremos então todas as regiões quadradas de lado x, com $0 \leq x \leq d$.
3) A reunião desses quadrados forma uma pirâmide cuja base é um quadrado de lado d e altura d ("já que a variável da função cresceu de zero até d"). Então a área do triângulo parabólico é igual ao volume da pirâmide, portanto igual a $d^3/3$.

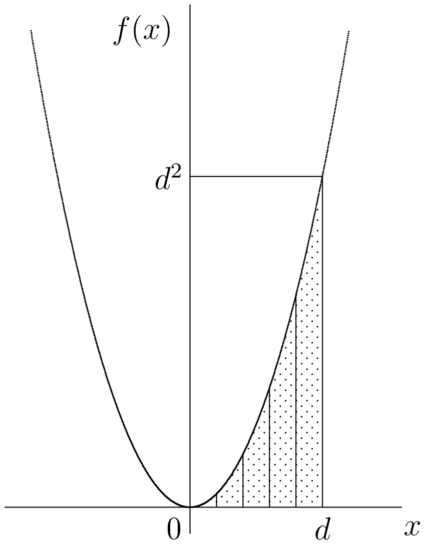


Figura 10.16: Triângulo parabólico

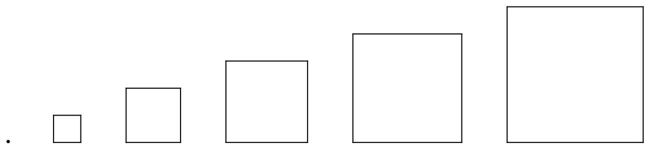


Figura 10.17: Quadrados “equivalentes” aos segmentos

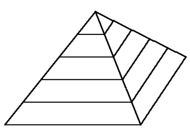


Figura 10.18: Pirâmide

Apêndice A

Respostas e sugestões para alguns problemas

Problemas 1.6

1.6.3 Dado um número natural qualquer n, podemos dividi-lo por β e escrever $n = q\beta + r$, com $0 \leq r < \beta$. Nessas condições, q e r são únicos.
1.6.10 a) Conclua mais do que simplesmente "no final da brincadeira resta uma bola na jarra" !
1.6.11 Calcule $i!\binom{p}{i}$
1.6.12 Um resultado importante chamado de "Pequeno" ! (*Sugestão*: Seja p um primo e considere a seguinte afirmação $A(a)$: para todo número natural a se tem $p|(a^p - a)$. Depois de demonstrar $A(a)$ para todo $a \geq 0$ considere a negativo.)

Problemas 2.6

2.6.3 $-17/19$
2.6.4 a) não.
2.6.5 $2/3$
2.6.11 $\iff 17 \nmid x$
2.6.12 Use o Teorema 1.17.
2.6.17 a) $0,1\overline{6}$ b) $0,\overline{4705882352941176}$
2.6.19 a) $13/990$ b) $806/2475$
2.6.27 $[3;7]$ e $[9;2,2,1,2]$
2.6.28 $[1;1,1,1,\ldots,1]$ (n convergentes)

Problemas 3.6

3.6.1 c) 414212 e 962.
3.6.2 Prove primeiro que $ADB \sim DCB$.
3.6.3 Use o Corolário 1.10, na página 15.
3.6.7 $k = 2$
3.6.9 b) k par não múltiplo de 4.
3.6.11 Escreva $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ como uma fração irredutível e chegue a uma contradição. Ou então prove primeiro que $\sqrt{6}$ não é racional.
3.6.20 a) Confira a demonstração 1 do Teorema 1.9, na página 15.
3.6.24 A expansão é infinita (e periódica).
3.6.26 $[1;\overline{1,2}]$
3.6.27 $[4;\overline{8}]$
3.6.28 $(1+\sqrt{5})/2$
3.6.29 $[7;\overline{7}] = (7+\sqrt{53})/2$

Problemas 4.8

4.8.5 Demonstre por contradição.

4.8.2 Mesma quantidade nos dois casos.
4.8.3 Demonstre por contradição.
4.8.9 Use o Princípio de Eudoxo e o Princípio do Menor Número Natural.
4.8.10 Seja $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e considere dois casos: a é racional ou a é irracional
4.8.12 Seja n tal que $(n+1)\varepsilon > a_0$.
4.8.19 0 e 1.

Problemas 5.7

5.7.1 Para a recíproca use o Segundo Princípio da Indução Completa.
5.7.6 Multiplique e divida por $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$
5.7.9 a) não b) sim c) não
5.7.10 Se uma sequência converge para a então toda subsequência converge para a.
5.7.11 Considere $0 < \varepsilon < a$.
5.7.12 Use $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
5.7.13
5.7.14 a) 3/4 b) 0 c) 1/2 d) 7/2
5.7.15 zero
5.7.18 $1/2$ $\sqrt{2}/3$ 0
5.7.19 49
5.7.21 a) crescente b) crescente c) decrescente d) crescente e) decrescente
5.7.22
5.7.23 Depois de provar que o limite existe, para encontrá-lo use $100a_n = 27 + a_{n-1}$.
5.7.24
5.7.25 Usando o Método da Indução Completa prove que a sequência é crescente, e depois que $a_n < 2$.
5.7.26 Idem.
5.7.27 (i) Use a desigualdade demonstrada no Teorema 3.6. (ii) $a_0 \neq \sqrt{r} \Rightarrow a_n - \sqrt{r} > 0 \Rightarrow r/a_n < a_n$
5.7.30 a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ se $r > 0$, e $-\infty$ se $r < 0$ d) $+\infty$
5.7.32 Use que $(1+h)^n > 1 + nh$ para todo número real $h > -1$.
5.7.35 Use a fórmula do Problema 5.7.34 $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$.
5.7.37 Esse problema pode ser resolvido usando expansão decimal ou não. (no Capítulo 8 provamos que todo número real tem expansão decimal).

Problemas 6.11

6.11.1 63
6.11.2 39709 km
6.11.3 107 515 km/h
6.11.4 Não.
6.11.6 Dado um polígono regular de n lados cincunscrito a $\mathcal{C}$, construa um conveniente polígono regular de $2n$ lados.
6.11.7 Use que em um triângulo qualquer ao maior ângulo se opõe o maior lado. Ou então use trigonometria.
6.11.8 Use triângulos semelhantes.
6.11.11 Use polígonos regulares inscritos de 2^n lados com um vértice no extremo de um diâmetro.
6.11.13 Use o Problema 6.11.8.
6.11.14 a) $2\sqrt{2} < \pi < 4$ b) $3{,}061 < \pi < 3{,}313$ c) $3{,}121 < \pi < 3{,}182$
6.11.15 Use polígonos regulares inscritos de 2^n lados com um vértice no extremo de um diâmetro.
6.11.16 Use que a área de um quarto de um disco é 1/4 da área do disco (prove se achar necessário).
6.11.17 Ache a, a_k e calcule o limite. Comece determinando uma relação entre L e o raio r dos discos.
6.11.18 $P_{12} = 24(2 - \sqrt{3})$ e $p_{12} = 6(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
6.11.21 Desenhe uma figura mostrando l_n e l_{2n}, e use duas vezes o Teorema de Pitágoras.
6.11.24 $\pi = 3{,}125$
6.11.25 5
6.11.27 9
6.11.28 $\pi \approx 3{,}1111$.

Problemas 7.6

7.6.1 2807

7.6.2 2800
7.6.4 d)
7.6.5 Não.
7.6.6 a) Diverge b) 1715/342 c) $e/(e-1)$ d) 25/12 e) 6 f) $-15/4$ g) 55/9063 h) 162
7.6.7 a) Diverge b) 16/27 c) 343/960
7.6.8 Use a sequência das somas parciais.
7.6.9 Aplique os cálculos feitos no início da Seção 7.4.
7.6.10 Aplique os cálculos feitos no início da Seção 7.4.
7.6.11 A Atividade 7.8.1 tem relação com esse Problema.
7.6.12 b) $7/11 \approx 0{,}6363636363$
7.6.13 $2{,}82 \times 10^{12}$
7.6.14 $1{,}25 \times 10^{7}$
7.6.15 Total 450 calorias. Em 21,85 minutos.
7.6.16 Área $\sqrt{3}\, l^2/3$ perímetro $6l$
7.6.17 $(1/(1+r^2),\ r/(1+r^2))$
7.6.18 Reencontre a série dentro dela mesma.

Problemas 8.6

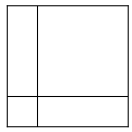
8.6.1 Use série geométrica.
8.6.9 É racional.
8.6.11 Similar à demonstração do Teorema 2.5.
8.6.12 a) $(0{,}2)_{oito}$ b) $(0{,}\overline{25})_{oito}$
8.6.13 a) 11/27 b) $(0{,}4\overline{6})_{dez}$
8.6.14 Não existe tal exemplo.
8.6.18 Dados números x_1 e x_2, sua soma $x_1 + x_2$ e seu produto $x_1 x_2$ são o que?

Problemas 9.9

9.9.1 (a)
9.9.2 10^{110}
9.9.3 Use o Método da Indução Completa sobre n.
9.9.5 Comece com $1 = a^0 = \ldots$
9.9.6 Use a parte da unicidade do Problema Resolvido 4.35. (ii) Use que $0 < u < v \Rightarrow u^n < v^n$.
9.9.7 Prove primeiro que $\sqrt[n]{1/x} = 1/\sqrt[n]{x}$.
9.9.8 Use que $\mathbb{Q}$ é enumerável, e $\mathbb{R}_+$ não.
9.9.11 A propriedade já foi verificada no texto para x racional. Se x é real, uma forma de fazer é tomar uma sequência de racionais convergindo para ele.
9.9.12 Use que a função $x \mapsto (b/a)^x$ é crescente, o Lema 9.14 e o Problema 9.9.11.
9.9.13 (i) Escreva $f(y) = f(y-x)f(x)$. (viii) Se f é estritamente crescente, $a > 1$. Se x é real e $f(x) < a^x$, use o Lema 9.17 e tome r racional tal que $f(x) < a^r < a^x$.
9.9.14 Seja $A \subset \mathbb{R}$ e a um ponto de aderência de A. Seja $f : A \mapsto \mathbb{R}$. Dizemos que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ quando, dado M real, existe $\delta > 0$ tal que $|x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. Dizemos que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ quando, dado M real, existe $\delta > 0$ tal que $|x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$.
9.9.15 Suponha f estritamente crescente. Note que $f(1) = 0$. Seja $b = f(2) > 0$. Seja $g(x) = f(x)/b$. Prove que $g(x) = \log_2 x$. Se $a = 2^{1/b}$ então $a^{f(x)} = x$.
9.9.16 $P(h) = 76 \times 0,9761921220^{h/200} \approx 76 \times 0,886^{h/1000}$.
9.9.18 $\approx 8,7$
9.9.19 $\approx 0,308$.
9.9.20 a) $\approx 115,2$ cm; b) $\approx 26,2$ kg.
9.9.21 $\approx 0,495$.
9.9.22 a) 12 b) 25 c) $4,45 \times 10^{25}$ ergs e) 1 f) 100
9.9.23 a) 5 b) $10^{4,5}$ c) 7,32 d) entre 36×10^{-9} e 42×10^{-9}
9.9.26 Calcule $\lim_{m\to\infty}(s_m - s_n)$. Essa desigualdade permite obter uma cota para o erro da aproximação $e \approx s_n$.

Problemas 10.7

10.7.1 O texto oferece várias sugestões para provar que a área de um quadrado de lado a é a^2. Essas mesmas técnicas podem ser usadas neste problema. Também pode ser usada a figura



10.7.2 O texto oferece várias sugestões para provar que a área de um quadrado de lado a é a^2. Essas mesmas técnicas podem ser usadas neste problema.
10.7.4 Na parte a) prove primeiro o caso em que r é racional. Depois use que entre dois números reais quaisquer sempre existe um racional.
10.7.6 9,75
10.7.11 1, 1, 2, 4, 6, ...

Referências Bibliográficas

[1] Aaboe, A. *Episódios da História Antiga da Matemática.* Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

[2] Anton, H. *Cálculo, um novo horizonte.* Porto Alegre, Bookman, 2000.

[3] Association mathématique du Quebec, *Concurs de l'Association mathématique du Quebec.* `http://www.schoolnet.ca/vp-pv/amq/`

[4] Ávila, G. *Análise Matemática para Licenciatura.* 3ª edição. São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda, 2006.

[5] Ávila, G. *Introdução à Análise Matemática.* 2ª edição. São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda, 2003.

[6] Ávila, G. *Números muito grandes.* Revista do Professor de Matemática, nº 25, 1994, págs. 1 a 9.

[7] Ávila, G. *Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de Matemática.* Revista do Professor de Matemática, nº 7, 1985, págs. 5 a 10.

[8] Bailey, D. H., Borwein, P. B. e Plouffe, S. *On The Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants.* Mathematics of Computation, v. 66, n. 218 (1997), p. 903 a 913.

[9] Baldin, Y. Y. e Furuya, Y. K. S. *Geometra Analítica para todos, e atividades com Octave e Geogebra.* São Carlos, EdUFSCar, 2012.

[10] Barbeau, E. J., Klamkin, S. e Moser, W. O. J. *Five Hundred Mathematical Challenges.* Washington, The Mathematical Association of America, 1995.

[11] Barbosa, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana.* Décima Edição. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[12] Bastos, W. D. e Silva, A. F. *A área do círculo.* Revista do Professor de Matemática, nº 40, 1999, págs. 46 a 48.

[13] Batschelet, E. *Introdução à Matemática para Biocientistas.* Tradução de da Silva, V. M. A. P. Rio de Janeiro, Editora Interciência e Editora da Universidade de São Paulo, 1978.

[14] Beigel, R. *Irrationality Without Number Theory.* Am. Math. Monthly, 98, p. 332-335, 1991.

[15] Borwein, J. M. Borwein, P. B. *Pi and the AGM. A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity.* Canadian Mathematical Society. Series of Monographs and Advanced Texts, v. 4. New York, Wiley-Interscience Publication, 1987.

[16] Borwein, J. M. Borwein, P. B. e Bailey, D. H. *Ramanujan, Modular Equations, and Approximations to Pi or How to Compute One Billion Digits of Pi.* Amer. Math. Monthly, v. 96, n. 3 (1989), p. 201 a 219.

[17] Boyer, C. B. *História da Matemática.* Tradução de Gomide, E. F. São Paulo, Editora Edgard Blücher LTDA, 1974.

[18] Brasil. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática, 5ª a 8ª séries. Brasília, Ministério da Educação, 1998.

[19] Collette, J. P. *Histoire des mathématiques.* Ottawa, Editions du renouveau Pedagogique INC, 1973.

[20] CONMETRO. *Resolução nº 12/88.* `http://www.inmetro.gov.br/` Consultado em 20/01/2008.

[21] Cooke, R. *The History of Mathematics.* New York, John Wiley & Sons, 1997.

[22] Dolce, O. e Pompeo, J. N. *Geometria Espacial, posição e métrica.* São Paulo, Atual Editora, 1995.

[23] Ebbinghaus, H.-D. *et alii. Numbers.* New York, Springer Verlag, 1991.

[24] Edwards, C. H. *The Historical Development of the Calculus.* New York, Springer Verlag, 1979.

[25] Edwards, H. M. *Fermat's Last Theorem, a Genetic Introduction to Algebraic Number Theory.* New York, Springer Verlag, 1977.

[26] *Encyclopaedia Britannica do Brasil Publicações Ltda.* Enciclopedia mirador internacional. Antonio Houaiss (Ed.). São Paulo, Encyclopaedia Britannica do Brasil Publicações Ltda, 1976.

[27] Eves, H. *Introdução à História da Matemática.* Tradução de Domingues, H. H. Campinas, Editora UNICAMP, 2004.

[28] Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE) `http://www.inep.gov.br/superior/enade/` Consultado em 04/03/2008.

[29] Figueiredo, D. G. *Números Irracionais e Transcendentes.* Terceira Edição. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

[30] Fowler, D. H. *The Mathematics of Plato's Academy. A new reconstruction.* Oxford, Clarendon Press, 1990.

[31] Franks, R. L. e Marzec, R. P. *A theorem on mean-value iterations.* Proc. Amer.Math. Soc., 30, p. 324-326, 1971.

[32] Goldstine, H. H. *A History of Numerical Analysis.* New York, Springer Verlag, 1977.

[33] Gomes, O. R. *Professor, vê se tem lógica?* Revista do Professor de Matemática, nº 68, 2009, pág. 13.

[34] Graham, R. L. Knuth, D. E. e Patashnik, O. *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley, 1990.

[35] Grant, M. A. *Approximating square roots.* The Mathematical Gazette, 66, p. 230-231, 1982.

[36] Guidorizzi, H. L. *Um Curso de Cálculo.* volumes 1 e 3, 5ª edição. Rio de Janeiro, LTC Editora, 2002.

[37] Hammack R. e Lyons D. *A simple way to teach logarithms.* The Mathematics Teacher, vol. 88, n. 5, maio de 1995, páginas 374 e 375.

[38] Heath, T. L. *A Manual of Greek Mathematics.* New York, Dover Publications, 1963.

[39] Hiratsuka, P. I. *Fazendo uma divisão de frações significativa.* Revista do Professor de Matemática, nº 30, 1996, págs. 23 a 25.

[40] Hitotsumatsu, S. (editor supervisor). *Mathematics for Elementary School.* Tokio, Gakkoh Tosho, não datado.

[41] Honsberger, R. (ed.) *Mathematical Gems.* vol. I, II e III. Mathematical Association of America, 1973.

[42] Ifrah, G. *Os Números, história de uma grande invenção.* Tradução de Senra, S. M. F. 3ª edição. São Paulo, Editora Globo, 1989.

[43] Jacobs, H. R. *Geometry.* Third Edition. New York, W. H. Freeman Company, 2003.

[44] Karpinski, L. C. *The History of Mathematics.* New York, Russel & Russel, 1965.

[45] Keng, H. L. *Introduction to Number Theory.* New York, Springer Verlag, 1982.

[46] Kline, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Ed. Oxford University, 1972.

[47] Knorr, W. R. *The Method of Indivisibles in Ancient Geometry.* In Calinger, R. (ed.) Vita Mathematica, Mathematical Association of America, 1996.

[48] Landau, E. *Foundations of Analysis.* New York, Chelsea Publishing Company, 1966.

[49] Lang, S. *Analysis I.* Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1968.

[50] Lang, S. *Undergraduate Algebra.* New York, Springer Verlag, 1987.

[51] Lange, L. J. *An Elegant Continued Fraction for* π. Amer. Math. Monthly, v. 106, (1999), p. 456 a 458.

[52] Liberman, M. P. *Divisão de números racionais escritos na forma de fração.* Revista do Professor de Matemática, 3º, 1983, páginas 40 a 42.

[53] Lima, E. L. *Por que* $(-1)(-1) = 1$*?* Revista do Professor de Matemática, nº 1, 1982, págs. 6 a 7, e nº 3, 1983, páginas 39 e 40.

[54] Lima, E. L. *Logaritmos.* Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

[55] Lima, E. L. *Áreas e Volumes.* Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

[56] Lima, E. L. *Curso de Análise.* Volume 1. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1987.

[57] Lima, E. L. *et alii. A Matemática do Ensino Médio.* Volumes 1, 2 e 3. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

[58] Maor, E. *e: The Story of a Number.* Princeton, Princeton University Press, 1994.

[59] The Mathematics Teacher. Reston, National Council of Teachers of Mathematics. Seção *Calendar Problems* de vários fascículos.

[60] Mega, E. e Watanabe, R. *Olimpíadas Brasileiras de Matemática 1ª. a 8ª.* São Paulo, Editora Núcleo e Sociedade Brasileira de Matemática, 1988.

[61] Miel, G. *Of Calculations Past and Present: The Archimedean Algorithm.* Amer. Math. Monthly, v. 90, n. 1 (1983), p. 17 a 35.

[62] Mignotte, M. *Mathematics for Computer Algebra.* New York, Springer Verlag, 1992.

[63] Moise, E. E. *The Number Systems of Elementary Mathematics.* Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

[64] Moise, E. E. *Elementary Geometry from an advanced standpoint.* Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1963.

[65] Monteiro, L. H. J. *Elementos de Álgebra.* Coleção Elementos de Matemática. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidade de São Paulo e Ao Livro Técnico, 1969.

[66] Nara, T. (editor supervisor). *Mathematics for Elementary School.* Tokio, Gakkoh Tosho, não datado.

[67] Neugebauer, O. e Sachs, A. J. (eds.) *Mathematical Cuneiforms Texts.* New Haven, American Oriental Society, 1946, American Oriental Series, vol. 29.

[68] Niblo, G.A. *Mathematical Spectrum.* `http://www.maths.soton.ac.uk/~gan/MA111/slides/sld049.htm` Consultado em 22/06/2005.

[69] Olds, C. D. *Continued Fractions.* Nova York, Randon House, 1963.

[70] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) `http://www.obmep.org.br` Consultado em 04/03/2008.

[71] Oliveira, C. R. *Caos: um exemplo.* São Carlos, Departamento de Matemática da UFSCar, 2007.

[72] Palis, G. R. *Comprimento da Circunferência no Ensino Elementar.* Revista do Professor de Matemática, nº 14, 1989, págs. 29 a 37.

[73] Paterlini, R. R. *O que é o Método Genético para o ensino da Matemática.* `http://www2.dm.ufscar.br/Hp_2001/hp400/hp400.html` Consultado em 20/01/2008.

[74] Paterlini, R. R. *Aritmética dos números inteiros.* Disponível em `http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/` e em `http://arquivoescolar.org//handle/arquivo-e/181`

[75] Paterlini, R. R. *Sócrates e Mênon.* `http://www2.dm.ufscar.br/hp/hp157/hp157001/hp157001.html` Consultado em 19/08/2004.

[76] Pisa, Programa Internacional de Avaliação de Alunos. `http://www.inep.gov.br/internacional/pisa/Novo/oquee.htm` Consultado em 20/01/2008.

[77] Resnick, R. e Halliday, D. *Física.* Tradução de Cavallari, E. e Afini, B. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S. A. e Editora Universidade de são Paulo, 1967.

[78] Revista do Professor de Matemática. São Paulo, Sociedade Brasileira de Matemática. Seção *Problemas* de diversos números. Seção *Cartas* de diversos números.

[79] Rosen, K. H. *Elementary Number Theory and its Applications.* Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

[80] Rossi, P. R. S. *Logaritmos no ensino médio: construindo uma aprendizagem significativa.* Dissertação de Mestado. São Carlos, UFSCar, 2010. `http://www.ppgece.ufscar.br/index.php/por/content/view/full/173`

[81] Rudin, W. *Princípios de Análise Matemática.* Tradução de Brito, E. R. H. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S. A. e Editora Universidade de Brasília, 1971.

[82] Santos, A. L., Wagner, E. e Agostino, R. F. W. *Olimpíadas de Matemática do Estado do Rio de Janeiro.* São Paulo, Atual Editora e Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

[83] Santos, J. P. O. *Introdução à Teoria dos Números.* Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1998.

[84] Sebah, P. e Gourdon, X. *Pythagoras constant:* $\sqrt{2}$. `http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html`. Consultado em 19/08/2004.

[85] Sierpinski, W. *250 Problems in Elementary Number Theory.* New York, American Elsevier Publishing Company, 1970.

[86] Smith, D. E. *History of Mathematics.* volumes I e II. New York, Dover Publications, 1958.

[87] Sprows, D. J. *Irrationals and the Fundamental Theorem of Arithmetic.* Amer. Math. Monthly, 96, (1989) p. 732, 1989.

[88] Stillwell, J. *Mathematics and Its History.* New York, Springer-Verlag, 1987.

[89] Stillwell, J. *Elements of Algebra.* New York, Springer-Verlag, 1994.

[90] Stillwell, J. *Numbers and Geometry.* New York, Springer-Verlag, 1998.

[91] Struik, D. J. *A Concise History of Mathematics.* 3ª edição. New York, Dover Publications, 1967.

[92] Toeplitz, O. *The Calculus, a Genetic Approach.* Chicago, The University Press, 1963.

[93] Venâncio, Y. *Mente libertada, um cálculo intuitivo.* Revista do Professor de Matemática, 5º9, 2006, páginas 46 e 47.

[94] Waerden, B. L. van der. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Berlin, Springer Verlag, 1983.

[95] Waterhouse, W. C. *Why Square Roots are Irrational.* Amer. Math. Monthly, 96, p. 213-214,1986.

[96] Wendroff, B. *First Principles of Numerical Analysis: An Undergraduate Text.* Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[97] *Wikipedia.* `http://wikipedia.org/wiki/` Consultada em 2007-2008.

Índice de nomes próprios

Índice de assuntos