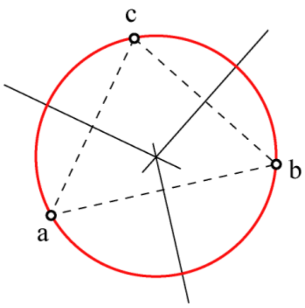
VI. Triangulation de Delaunay

Afin d'étudier la triangulation la plus régulière d'un ensemble de points, nous commençons par rappeler quelques propriétés des cercles.

Rappelons d'abord que par 3 points non alignés du plan passe un et un seul cercle. Cela implique que deux cercles différents ne peuvent pas se couper en plus de deux points. Par conséquence, si deux cercles se coupent en deux points a et b alors, d'un côté de la droite ab le premier cercle est à l'intérieur du deuxième cercle et de l'autre côté de la droite ab c'est le deuxième cercle qui est à l'intérieur du premier cercle (voir la figure).



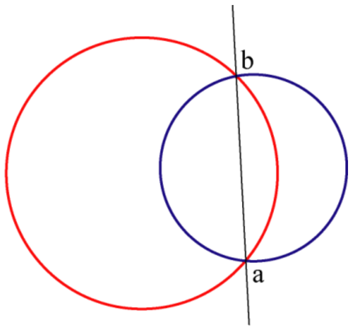
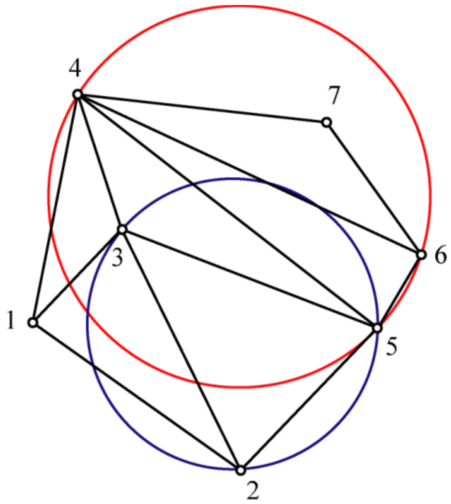


Figure de gauche : construction de l'unique cercle passant par les trois points a, b et c.
Figure de droite : d'un côté de la droite (ab) le cercle bleu est dans le cercle rouge alors que de l'autre côté de la droite (ab) c'est le cercle rouge qui est dans le cercle bleu.

Comme les trois sommets d'un triangle ne sont jamais alignés, il existe exactement un cercle qui passe par ces trois sommets. Ce cercle est appelé le cercle **circonscrit** au triangle. On dit aussi que le triangle est **inscrit** dans le cercle.

On appelle **triangulation de Delaunay** d'un ensemble de points P, une triangulation de P dont tous les triangles sont inscrits dans des cercles vides, c'est-à-dire des cercles qui ne contiennent aucun point de P en leurs intérieurs.



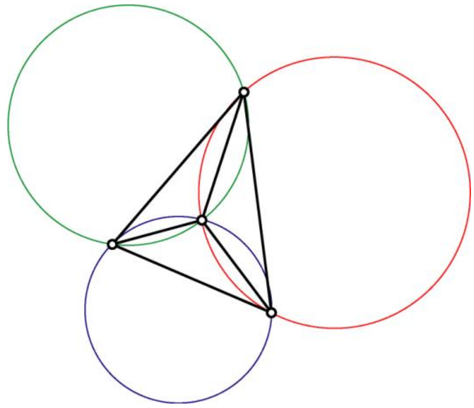
Le cercle bleu circonscrit au triangle 325 est vide mais le cercle rouge circonscrit au triangle 456 n'est pas vide (il contient les points 3 et 7). Cette triangulation n'est donc pas de Delaunay.

On peut démontrer qu'il est possible de construire une triangulation de Delaunay pour tout ensemble de points P. De plus, la triangulation de Delaunay est unique lorsque P ne contient pas 4 points cocycliques, c'est-à-dire 4 points qui sont sur un même cercle.

En guise d'exemple, nous allons étudier toutes les triangulations possibles d'un ensemble de 4 points.

Cas où l'un des points est à l'intérieur de l'enveloppe convexe des 4 points :

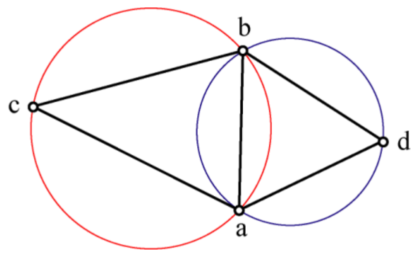
Il n'existe qu'une seule triangulation d'un tel ensemble de points. Elle est obtenue en reliant le point qui est à l'intérieur de l'enveloppe convexe aux trois autres points. Elle est de Delaunay.



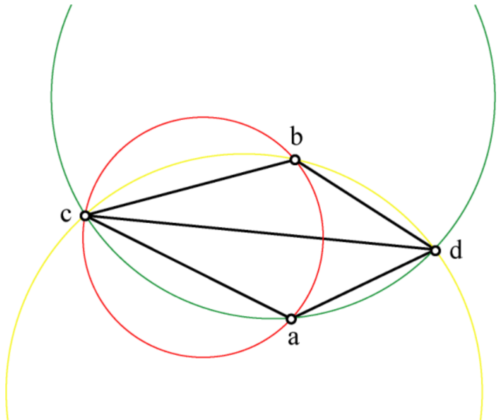
Les cercles circonscrits aux trois triangles ne contiennent aucun point en leurs intérieurs. Cette triangulation est donc de Delaunay.

Cas où les 4 points forment un quadrilatère convexe mais ne sont pas cocycliques :

On peut construire deux triangulations de cet ensemble de points en traçant l'une ou l'autre des deux diagonales du quadrilatère. L'une des triangulations est de Delaunay, l'autre pas.



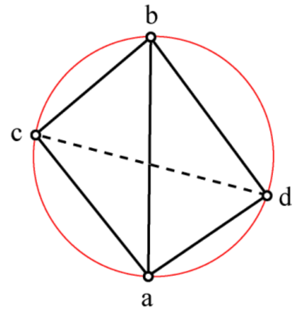
Si le cercle rouge circonscrit au triangle abc ne contient pas le point d en son intérieur alors le cercle bleu circonscrit au triangle abd ne contient pas non plus le point c en son intérieur. En effet, à droite de la droite (ab) le cercle bleu est à l'extérieur du cercle rouge puisqu'il doit passer par le point d. Par conséquence, à gauche de la droite (ab) le cercle bleu est à l'intérieur du cercle rouge et ne peut donc pas contenir le point c. Il en résulte que cette triangulation est de Delaunay.



Comme le cercle rouge ne contient pas le point d, le cercle vert circonscrit au triangle cad contient nécessairement le point b. En effet, comme les deux cercles se coupent en a et en c et que d est à l'extérieur du cercle rouge, la partie du cercle rouge qui est du même côté de la droite ac que le point d est à l'intérieur du cercle vert. Le point b est donc aussi dans le cercle vert. Pour les mêmes raisons, le point a est à l'intérieur du cercle jaune circonscrit au triangle dbc. Il en résulte que cette triangulation n'est pas de Delaunay.

Cas où les 4 points sont cocycliques :

On peut également construire deux triangulations de cet ensemble de points en traçant l'une ou l'autre des deux diagonales du quadrilatère. Les deux triangulations sont de Delaunay.



Les quatre triangles qu'on peut former avec ces 4 points sont tous inscrits dans le même cercle. Comme ce cercle ne contient aucun point en son intérieur, les deux triangulations qu'on peut former sont de Delaunay.

Il a été démontré que parmi toutes les triangulations d'un ensemble de points, les triangulations de Delaunay sont les plus régulières, dans ce sens que leurs triangles sont « les plus équilatéraux possibles ». De ce fait, les triangulations de Delaunay sont les triangulations les plus utilisées dans la pratique. Il est donc fondamental d'avoir des algorithmes efficaces pour construire les triangulations de Delaunay.

VII. Tester si une triangulation est de Delaunay

Supposons qu'une triangulation d'un ensemble de n points a été construite et que nous souhaitons savoir s'il s'agit d'une triangulation de Delaunay. D'après la définition des triangulations de Delaunay, cela revient à calculer le cercle circonscrit à chaque triangle de la triangulation et à vérifier si aucun sommet de la triangulation n'est à l'intérieur de ce cercle. Comme une triangulation de n points contient 2n-n'-2 triangles (avec n' le nombre de sommets de l'enveloppe convexe) et que pour chaque triangle il faut tester si les n-3 autres points sont à l'extérieur du cercle circonscrit au triangle, le nombre total de tests à effectuer est égal à (2n-n'-2)(n-3). Lorsque n est grand, ce nombre est à peu près égal à (2n-n')n, ce qui est compris entre n^2 et $2n^2$ puisque $n' \leq n$. Il en résulte que la complexité de l'algorithme est en $O(n^2)$. Cela signifie que l'algorithme est lent lorsque le nombre de points est élevé.

La complexité de l'algorithme peut être réduite en utilisant une propriété plus forte des triangulations Delaunay. Considérons deux triangles abc et abd qui ont le côté ab en commun. On dit que le côté ab est **illégal** si le cercle circonscrit à abc contient le point d en son intérieur. Ceci est équivalent à dire que le cercle circonscrit au triangle abd contient le point c en son intérieur (voir l'exemple des 4 points qui forment un quadrilatère convexe dans la section VI). Par définition, une triangulation de Delaunay ne contient aucun côté illégal. Réciproquement, on peut démontrer que toute triangulation qui n'est pas de Delaunay contient au-moins un côté illégal. Il faut bien voir que ce résultat n'est pas une conséquence immédiate de la définition des triangulations de Delaunay. La seule chose que nous dit la définition, c'est que si une triangulation n'est pas de Delaunay alors le cercle circonscrit à l'un de ses triangles contient un point en son intérieur. Mais ce point peut être n'importe où dans la triangulation. La propriété des côtés illégaux est beaucoup plus forte puisqu'elle nous dit que si une triangulation n'est pas de Delaunay alors il existe un triangle t dont le cercle circonscrit contient un sommet d'un des trois triangles qui ont un côté commun avec le triangle t.

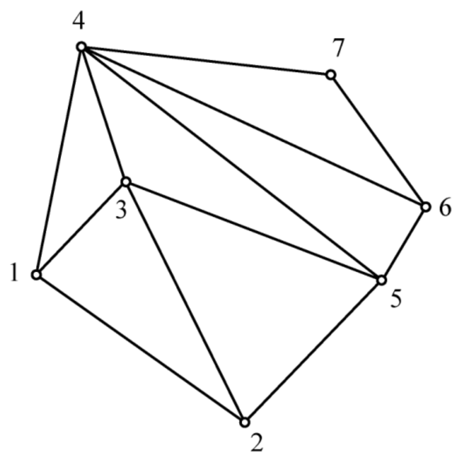
La propriété des côtés illégaux nous permet maintenant de trouver un algorithme beaucoup plus efficace pour tester si une triangulation est de Delaunay. Pour chaque côté interne de la triangulation (c'est-à-dire les côtés qui ne sont pas des côtés de l'enveloppe convexe), on considère les deux triangles qui sont de part et d'autre de ce côté. On calcule le cercle circonscrit à l'un des triangles et on vérifie que le troisième sommet de l'autre triangle n'est pas à l'intérieur du cercle. Or, une triangulation de n points contient 3n-2n'-3 côtés internes, puisqu'elle contient 3n-n'-3 côtés en tout dont n' sont des côtés de l'enveloppe convexe. Comme pour chaque côté interne il n'y a qu'un cercle à calculer et qu'un point à tester, le nombre total de tests à effectuer est égal à 3n-2n'-3. La complexité de l'algorithme est donc en O(n).

VIII. Construction d'une triangulation de Delaunay

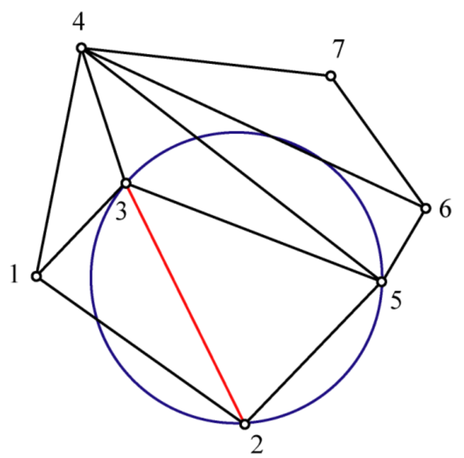
L'algorithme de construction de triangulation de Delaunay que nous allons étudier ici part d'une triangulation qui a déjà été construite et la transforme progressivement en une triangulation de Delaunay en supprimant les côtés illégaux et en les remplaçant par des côtés légaux.

Ce type d'algorithme est appelé un algorithme de **« flip »** (un côté illégal est « flippé » en un côté légal).

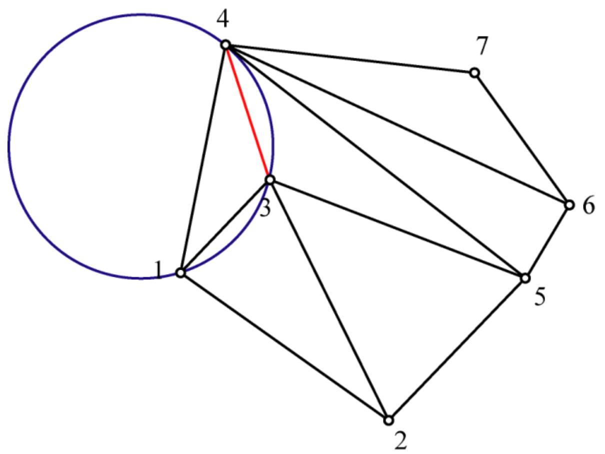
Exemple de déroulement de l'algorithme



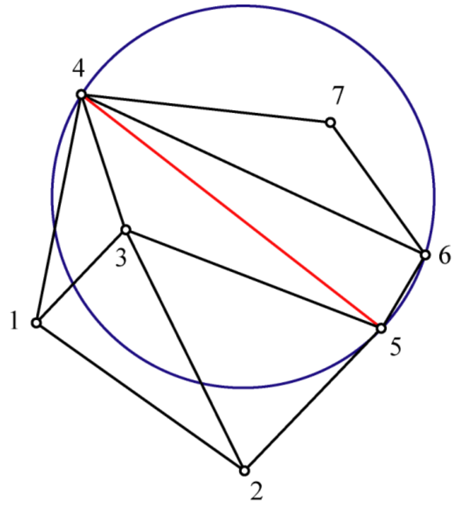
L'algorithme commence avec une triangulation quelconque de l'ensemble de points. Les côtés sont testés dans n'importe quel ordre pour savoir s'ils sont légaux.



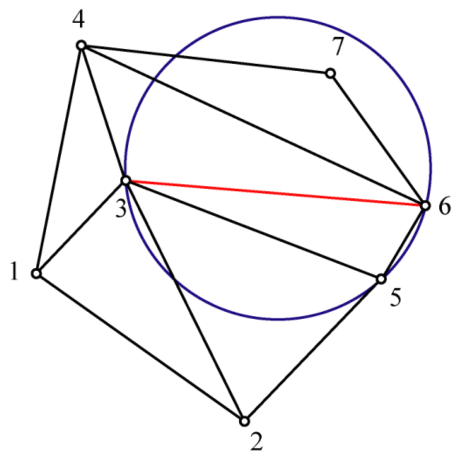
Commençons par exemple par le côté 23. Comme le cercle circonscrit au triangle 235 ne contient pas le point 1 en son intérieur, le côté 23 est légal. On le laisse donc en place.



On teste ensuite un autre côté, par exemple 34. Comme le cercle circonscrit au triangle 341 ne contient pas le point 5 en son intérieur, le côté 34 est légal. On le laisse donc en place.



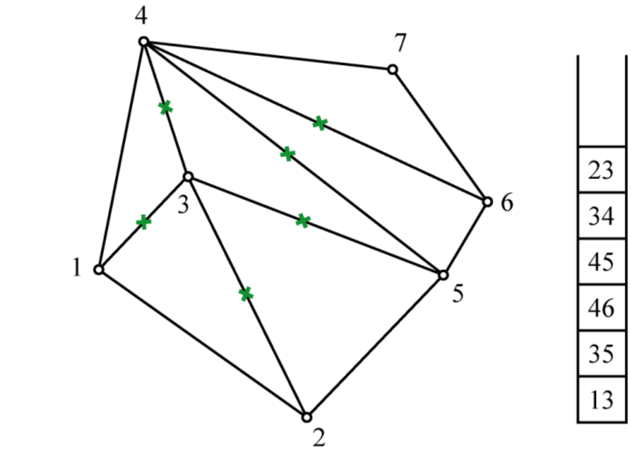
Si on teste ensuite le côté 45, on s'aperçoit que le cercle circonscrit au triangle 456 contient le point 3 en son intérieur. Le côté 45 est donc illégal et n'a pas sa place dans une triangulation de Delaunay. On supprime alors ce côté et on le remplace par le côté 36 qui est l'autre diagonale du quadrilatère 4356. Cette opération est appelée le flip du côté 45.



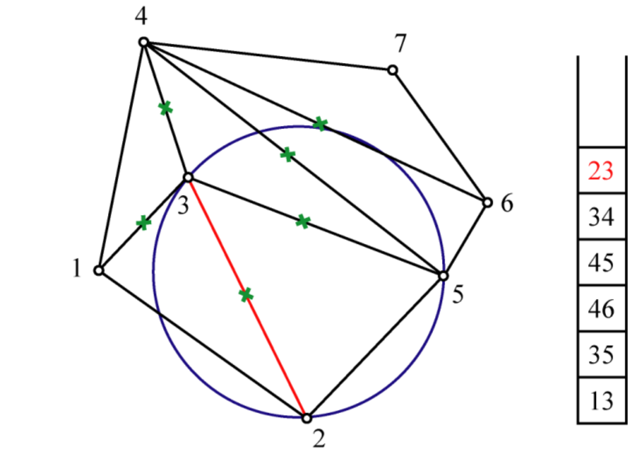
Comme le cercle 356 ne peut pas contenir le point 4, le côté 36 que nous venons de créer est légal (voir l'exemple des 4 points qui forment un quadrilatère convexe dans la section VI). Mais la création de ce côté peut avoir rendu d'autres côtés illégaux, par exemple le côté 34. En effet, les deux triangles de part et d'autre de 34 ne sont plus les mêmes qu'avant le flip et il faut retester si le côté 34 est toujours légal.

Comme un même côté est amené à être testé plusieurs fois, il faut maintenir une liste des côtés à tester. La structure de données la plus adaptée ici est une pile. Au départ tous les côtés internes de la triangulation sont placés dans la pile. Quand un côté est testé, il est sorti de la pile. Après le flip d'un côté tous les côtés qui ont pu devenir illégaux doivent être ajoutés dans la pile, s'ils n'y sont pas encore. Dans l'exemple ci-dessus, le flip du côté 45 crée 2 nouveaux triangles dans la triangulation : les triangles 365 et 364. Tous les côtés de ces triangles qui sont des côtés internes de la triangulation, à part le côté 36 nouvellement créé, peuvent être devenus illégaux et doivent être replacés dans la pile s'ils n'y sont pas déjà. Ainsi le côté 34 est replacé dans la pile. En revanche le côté 56 n'est pas placé dans la pile car ce n'est pas un côté interne de la triangulation. Les deux côtés 35 et 46 ne sont pas non plus replacés dans la pile car ils y sont encore au moment où le côté 45 est flippé. Il nous faut donc un moyen de savoir si un côté est déjà présent dans la pile. Le parcours systématique de la pile n'est clairement pas une méthode efficace. Une méthode efficace consiste à ajouter une marque sur chaque côté qui est dans la pile. En un seul test nous pouvons ainsi savoir si un côté est déjà présent dans la pile ou pas.

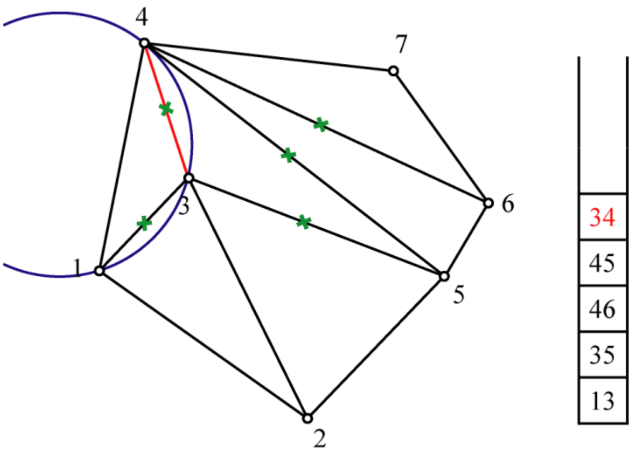
Reprenons donc le déroulement de l'algorithme depuis le début en utilisant une pile et des marques.



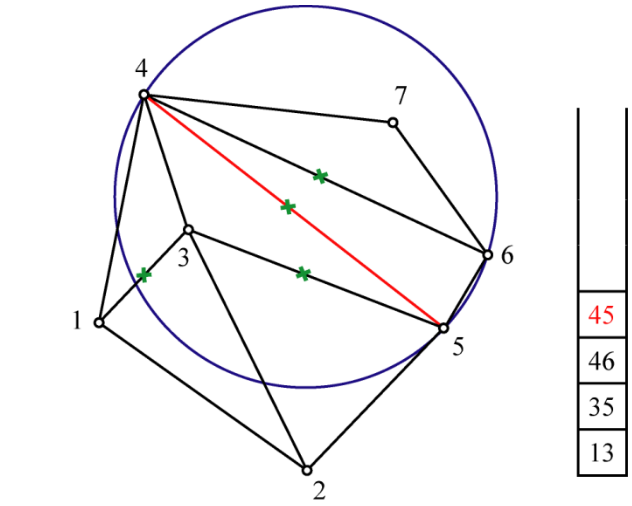
On place d'abord tous les côtés internes de la triangulation dans une pile dans un ordre quelconque et on les marque (les marques sont représentées par les croix vertes).



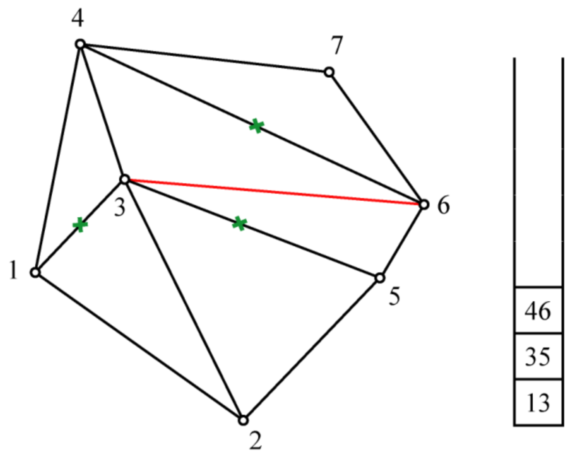
Le côté 23 est le premier côté traité car il est au sommet de la pile. On le sort de la pile, on enlève sa marque et on teste s'il est illégal. Comme il est légal, il reste dans la triangulation et il n'y a donc rien à faire.



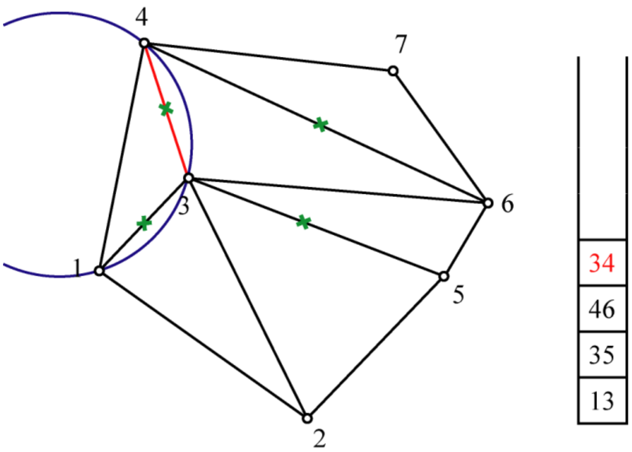
Le côté suivant dans la pile est le côté 34. On le sort de la pile, on le démarque et on teste s'il est illégal. Comme il est légal, il n'y a rien à faire.



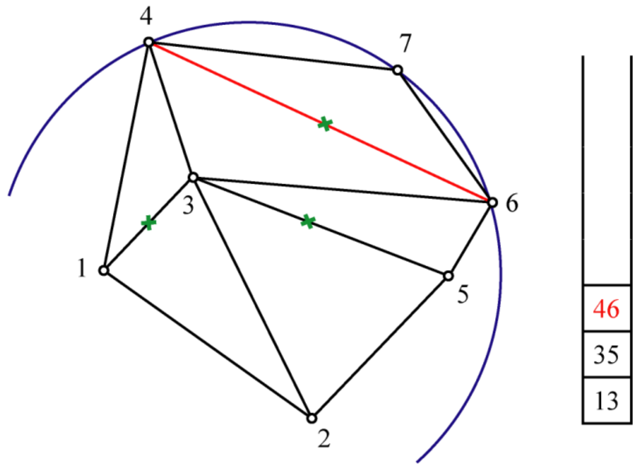
On traite maintenant le côté 45. On le sort de la pile, on le démarque et on teste s'il est illégal. Comme il est effectivement illégal, on le flippe. C'est-à-dire qu'on le supprime de la triangulation et on le remplace par le côté 36.



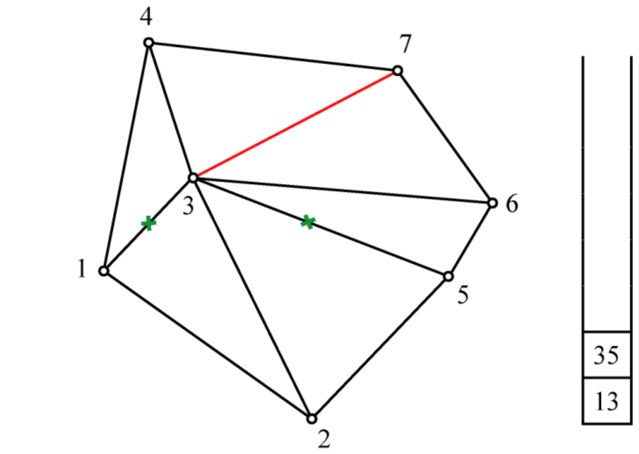
Comme le côté 36 est nécessairement légal, il n'est pas placé dans la pile et n'est pas marqué. Mais la légalité des quatre côtés du quadrilatère 4356 devra être retestée. Comme le côté 34 n'est pas marqué, ça signifie qu'il n'est pas dans la pile. On le met donc dans la pile et on le marque. Comme les côtés 35 et 46 sont marqués, ils sont déjà dans la pile. On ne les y remet donc pas. Comme le côté 56 n'est pas un côté interne, on ne le met pas dans la pile non plus.



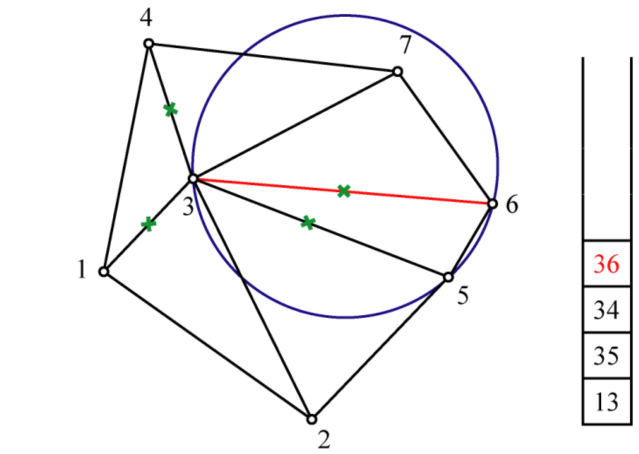
Le côté au sommet de la pile est donc maintenant le côté 34. Il est extrait de la pile, est démarqué et sa légalité est testée. Comme le cercle circonscrit au triangle 134 ne contient pas le point 6, le côté 34 est encore légal. Il n'y a donc rien à faire.



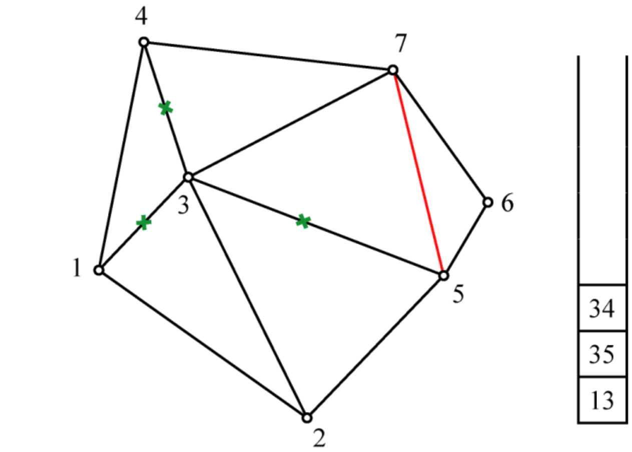
On traite maintenant le côté 46. On le sort de la pile, on enlève sa marque et on teste s'il est illégal. Comme le cercle circonscrit au triangle 467 contient le point 3, le côté 46 est illégal et doit être flippé. Il est donc remplacé dans la triangulation par le côté 37 qui est nécessairement légal.



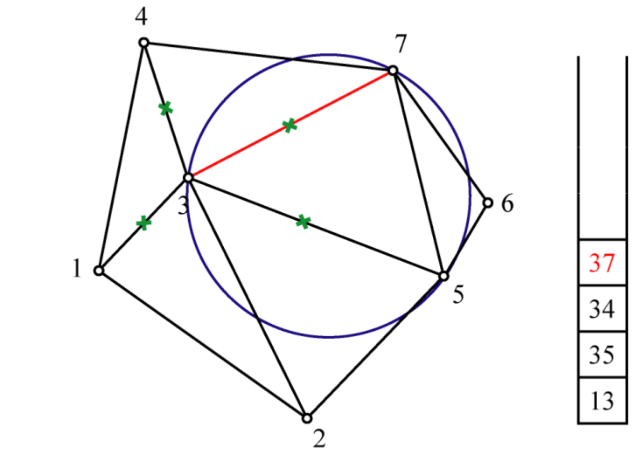
Les quatre côtés du quadrilatère 4367 ont pu devenir illégaux lors de cette opération de flip. Ce n'est pas le cas des deux côtés 67 et 47 puisque ce ne sont pas des côtés internes de la triangulation. En revanche, les deux côtés 34 et 36 sont des côtés internes et, comme ils ne sont pas marqués, il doivent être placés dans la pile (dans n'importe quel ordre) et marqués.



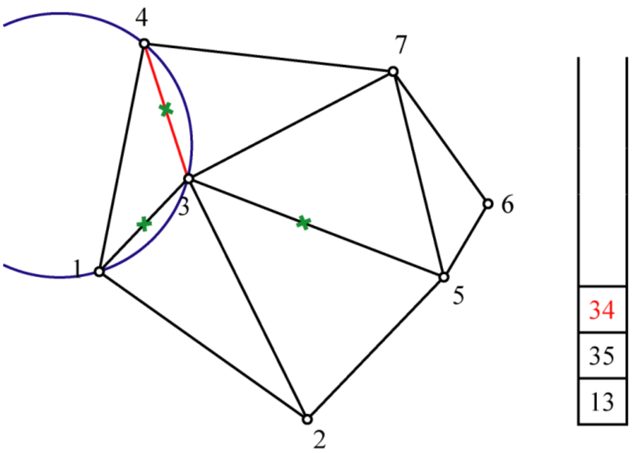
On traite le côté 36 qui est au sommet de la pile. On le sort de la pile, on enlève sa marque et on teste s'il est illégal. Comme le cercle circonscrit au triangle 356 contient le point 7, le côté 36 est devenu illégal. Remarquons que le côté 36 avait été créé lors d'une étape précédente et qu'à ce moment-là il était légal. Le côté 36 est donc maintenant flippé, c'est-à-dire remplacé dans la triangulation par le côté 57 qui est nécessairement légal.



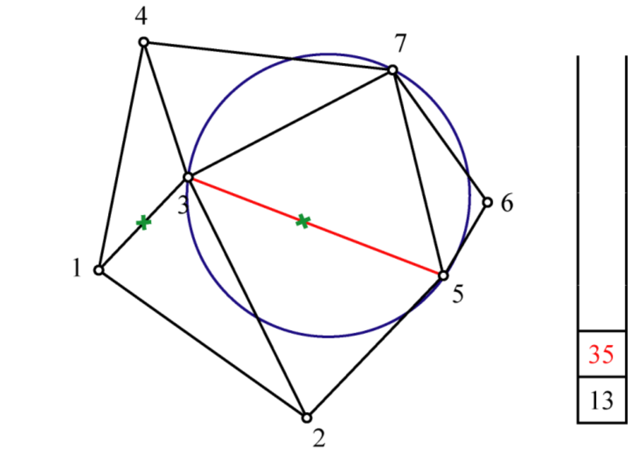
Parmi les quatre côtés du quadrilatère 3567 seul le côté 37 est un côté interne qui n'est pas marqué. On place donc uniquement ce côté dans la pile et on le marque.



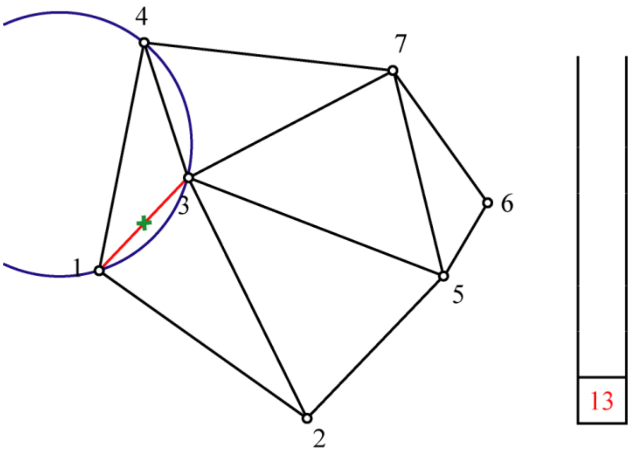
Le côté au sommet de la pile est maintenant le côté 37. Il est dépilé et démarqué et sa légalité est testée. Comme le cercle circonscrit au triangle 357 ne contient pas le point 4, le côté 37 est légal. Il n'y a donc rien à faire.



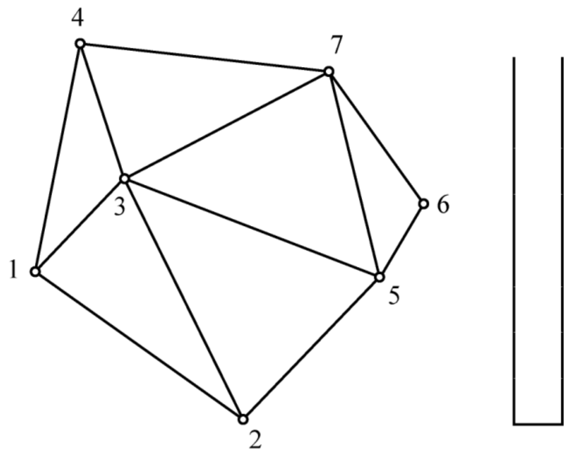
Le côté 34 est traité pour la troisième fois car l'un des triangles auquel il est adjacent a changé trois fois. Le côté est donc à nouveau dépilé et démarqué et sa légalité est testée. Comme le cercle circonscrit au triangle 134 ne contient pas le point 7, le côté 34 est toujours légal. Il n'y a donc rien à faire.



Le côté 35 est dépilé et démarqué et sa légalité est testée. Comme le cercle circonscrit au triangle 357 ne contient pas le point 2, le côté 35 est légal et il n'y a rien à faire.



De la même manière le côté 13 est dépilé et démarqué et, comme le cercle circonscrit au triangle 134 ne contient pas le point 2, le côté 13 est légal.



Comme la pile est maintenant vide cela signifie que tous les côtés présents dans la triangulation actuelle ont été testés et sont légaux. Il en résulte que la triangulation obtenue est une triangulation de Delaunay.

Les grandes lignes de l'algorithme de flip qui transforme une triangulation quelconque en triangulation de Delaunay sont donc les suivantes :

- placer tous les côtés internes de la triangulation dans une pile et les marquer comme appartenant à la pile.
- **tant que** la pile n'est pas vide

  dépiler le côté ab au sommet de la pile et le démarquer

  si le côté ab est illégal

  - soient abc et abd les deux triangles de part et d'autre de ab
  - remplacer le côté ab par le côté cd dans la triangulation
  - marquer ceux des côtés ac, cb, bd et da qui sont des côtés internes et qui ne sont pas déjà marqués et les empiler

  fin si

  fin tant que

On peut démontrer que la pile finit toujours par se vider et que, dans le pire des cas, la complexité de l'algorithme est en $O(n^2)$. En pratique les performances de l'algorithme sont bonnes si la triangulation initiale n'est pas trop irrégulière.

Il existe des algorithmes de construction de triangulation de Delaunay dont la complexité est en O(n log n) dans le pire des cas, mais ces algorithmes sont plus compliqués à implémenter.

Exercice 3 :

Écrire la méthode `void Carte::flip(DemiCote *d)` qui effectue dans la carte à laquelle elle est appliquée le flip du côté formé par le demi-côté `d` et son demi-côté opposé. On suppose que `d` est bien un demi-côté de la carte et que le flip est réalisable. À la sortie de la méthode, le demi-côté `d` et son opposé seront les deux demi-côtés du côté créé.

Exercice 4 :

Écrire la méthode de la classe point

```
int Point::dansCercle( const Point &a, const Point &b,
                       const Point &c) const
```

qui, étant donnés trois points `a`, `b` et `c`, renvoie 1, 0 ou -1 selon que le point auquel la méthode est appliquée est à l'intérieur du, sur le, ou à l'extérieur du cercle qui passe par les points `a`, `b`, `c`. Les points `a`, `b`, `c` doivent être donnés dans le sens trigonométrique.

La technique la plus simple et la plus efficace pour tester la position d'un point `d` par rapport à un cercle passant par des points `a`, `b`, `c` donnés dans le sens trigonométrique consiste à calculer le déterminant 3×3 suivant :

$$\begin{vmatrix} x_a - x_d & y_a - y_d & (x_a - x_d)^2 + (y_a - y_d)^2 \\ x_b - x_d & y_b - y_d & (x_b - x_d)^2 + (y_b - y_d)^2 \\ x_c - x_d & y_c - y_d & (x_c - x_d)^2 + (y_c - y_d)^2 \end{vmatrix}$$

Si ce déterminant est positif alors `d` est dans le cercle, s'il est négatif alors `d` est à l'extérieur du cercle, s'il est nul alors d est sur le cercle.

Exercice 5 :

Écrire la fonction `void delaunay(Carte &C)` qui, étant donnée une carte combinatoire `C` qui contient une triangulation d'un ensemble de points, modifie la carte `C` avec l'algorithme de flip ci-dessus pour construire une triangulation de Delaunay.

Remarques :
La manière la plus simple de traiter les côtés de la face externe consiste à tous les marquer dès le départ mais sans les placer dans la pile. Ils ne seront ainsi jamais placés dans la pile puisqu'ils sont déjà marqués et ne seront jamais démarqués puisqu'ils ne sont pas dans la pile.