Metoda Milne'a dla liniowych równań różniczkowych drugiego rzędu.
Wartości początkowe y_1, y_2, y_3 należy obliczyć metodą Rungego-Kutty rzędu 4-go (wzór Gilla).

Wprowadzenie

W zadaniu zastosowane zostały następujące metody:

- **Metoda Rungego-Kutty rzędu 4-go** (wzór Gilla) – stosowana do obliczenia czterech początkowych punktów.
- **Metoda Milne'a** – stosowana do obliczenia kolejnych punktów na podstawie poprzednich wartości.

Wzór Gilla - Wprowadzenie

Wzór Gilla jest specjalnym przypadkiem metody Rungego-Kutty rzędu 4-go, który służy do obliczenia początkowych punktów rozwiązania równań różniczkowych. Jest to metoda wykorzystująca cztery wartości funkcji w każdym kroku, zapewniająca dużą dokładność w numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych.

Własności wzoru Gilla:

- **Dokładność lokalna** – wzór Gilla jest dokładny lokalnie do 5 rzędu, co oznacza, że globalny błąd obliczeń jest proporcjonalny do h^5, gdzie h to krok całkowania.
- **Dokładność globalna** – wzór Gilla jest dokładny globalnie do 4 rzędu, co oznacza, że globalny błąd obliczeń jest proporcjonalny do h^4, gdzie h to krok całkowania.
- **Stabilność** – pozwala na uzyskanie stabilnych wyników nawet przy większych krokach h.

Wzór Gilla wykorzystywany jest do obliczenia czterech początkowych punktów, które następnie stanowią podstawę dla innych metod numerycznych, takich jak metoda Milne'a.

Wzór Gilla

Wzór Gilla dla równania różniczkowego 1-rzędu postaci:

$$y' = f(x, y),$$

ma postać:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left[k_1 + (2 - \sqrt{2})k_2 + (2 + \sqrt{2})k_3 + k_4\right]$$

Gdzie:

- y_n to obecne przybliżenie,
- y_{n+1} to następne przybliżenie,
- h to krok,
- k_1, k_2, k_3, k_4 to kroki pośrednie.

Wzór Gilla - Pośrednie wartości

Pośrednie wartości k_1, k_2, k_3, k_4 określane są następująco:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2})k_1 + (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f\left(x_n + h, y_n - \frac{1}{2}\sqrt{2}k_2 + (1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})k_3\right)$$

Wzór Gilla - Równanie różniczkowe drugiego rzędu

Rozważamy równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

gdzie $a_2(x) \neq 0$.

Aby użyć wzoru Gilla, sprowadzamy równanie drugiego rzędu do układu równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = f(x, y, z), \end{cases}$$

gdzie:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{a_2(x)}\big(b(x) - a_1(x)z - a_0(x)y\big).$$

Następnie obliczamy rozwiązania obu równań za pomocą wzoru Gilla.

Wzór Gilla - Równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$k_1^y = h \cdot z_n, \quad k_1^z = h \cdot f(x_n, y_n, z_n),$$

$$k_2^y = h \cdot \left(z_n + \frac{1}{2} k_1^z \right), \quad k_2^z = h \cdot f \left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1^y, z_n + \frac{h}{2} k_1^z \right),$$

$$k_3^y = h \cdot \left(z_n + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2}) k_1^z + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) k_2^z \right),$$

$$\begin{aligned} k_3^z = h \cdot f \Bigg(& x_n + \frac{h}{2}, \\ & y_n + \frac{h}{2}(-1 + \sqrt{2}) k_1^y + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) k_2^y, \\ & z_n + \frac{h}{2}(-1 + \sqrt{2}) k_1^z + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) k_2^z \Bigg), \end{aligned}$$

$$k_4^y = h \cdot \left(z_n - \frac{1}{2}\sqrt{2} k_2^z + \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) k_3^z \right),$$

Wzór Gilla - Równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$
\begin{aligned}
k_4^z = h \cdot f \Bigg(& x_n + h, \\
& y_n - \frac{1}{2}\sqrt{2}k_2^y + \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) k_3^y, \\
& z_n - \frac{1}{2}\sqrt{2}k_2^z + \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) k_3^z \Bigg).
\end{aligned}
$$

Na koniec obliczamy następne wartości y i z:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1^y + (2 - \sqrt{2})k_2^y + (2 + \sqrt{2})k_3^y + k_4^y\right),$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}\left(k_1^z + (2 - \sqrt{2})k_2^z + (2 + \sqrt{2})k_3^z + k_4^z\right).$$

Metoda Milne'a - Wprowadzenie

Metoda Milne'a to metoda numeryczna używana do rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych. Jest to metoda predyktor-poprawiacz, która iteracyjnie oblicza kolejne wartości funkcji, wykorzystując wcześniejsze punkty rozwiązania.

Główne etapy metody:

- **Predyktor:** Ekstrapolacja wartości rozwiązania w punkcie y_{n+1} na podstawie wcześniejszych punktów $y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$.
- **Poprawiacz:** Korekta wartości na podstawie równania różniczkowego, uwzględniająca wartość przewidywaną oraz dodatkowe obliczenia. Możliwe jest iteracyjne stosowanie poprawiacza.

Metoda ta wymaga obliczenia 4 początkowych wartości, które mogą być uzyskane za pomocą metod takich jak metoda Rungego-Kutty.

Własności metody Milne'a

Metoda Milne'a jest jedną z metod numerycznych typu predyktor-poprawiacz wykorzystywanych do rozwiązywania równań różniczkowych drugiego rzędu.

Własności metody Milne'a:

- **Dokładność lokalna** – metoda Milne'a jest dokładna lokalnie do rzędu 4, co oznacza, że błąd jednego kroku całkowania jest proporcjonalny do h^4, gdzie h to krok całkowania.
- **Dokładność globalna** – globalna dokładność metody Milne'a jest rzędu 3, co oznacza, że błąd całkowity jest proporcjonalny do h^3.
- **Stabilność** – jest stosunkowo stabilna, szczególnie przy mniejszych krokach h, ale może wymagać szczególnej ostrożności w przypadku równań sztywnych.

Metoda Milne'a jest szczególnie przydatna w zadaniach, gdzie wymagana jest wysoka dokładność przy zachowaniu stosunkowo niskiego kosztu obliczeniowego.

Szczegóły metody Milne'a

Metoda Milne'a dla równania:

$$y' = f(x, y),$$

składa się z dwóch głównych elementów:

1. Predyktor: Służy do przewidywania wartości y_{n+1} na podstawie wcześniejszych czterech punktów.

$$y_{n+1} = y_{n-3} + 4h \cdot \frac{2f_{n-2} - f_{n-1} + 2f_n}{3},$$

2. Poprawiacz: Koryguje wartości y_{n+1} w oparciu o wartość funkcji różniczkowej.

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3} \cdot \left(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}\right),$$

Gdzie: $f_n = f(x_n, y_n)$

Meroda Milne'a - Równanie różniczkowe drugiego rzędu

Rozważamy równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

gdzie $a_2(x) \neq 0$.

Aby zastosować metodę Milne'a, sprowadzamy równanie drugiego rzędu do układu równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = f(x, y, z), \end{cases}$$

gdzie:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{a_2(x)} \big(b(x) - a_1(x)z - a_0(x)y \big).$$

Następnie obliczamy rozwiązania obu równań za pomocą metody Milne'a.

Predyktor Milne'a

Predyktor oblicza wstępne wartości y_{n+1} i z_{n+1}, na podstawie poprzednich 4 wartości y oraz z :

$$y_{n+1} = y_{n-3} + 4h \cdot \frac{2z_{n-2} - z_{n-1} + 2z_n}{3},$$

$$z_{n+1} = z_{n-3} + 4h \cdot \frac{2f_{n-2} - f_{n-1} + 2f_n}{3},$$

gdzie: $f_n = \frac{1}{a_2(x_n)}\big(b(x_n) - a_1(x_n)z_n - a_0(x_n)y_n\big)$.

Predyktor służy do wyznaczenia przybliżonych wartości rozwiązania w kolejnym kroku x_{n+1}.

Poprawiacz Milne'a

Poprawiacz Milne'a koryguje wartości y_{n+1} i z_{n+1}:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3} \cdot \big(z_n + 4z_{n+1} + z_{n-1}\big),$$

$$z_{n+1} = z_{n-1} + \frac{h}{3} \cdot \big(f_n + 4f_{n+1} + f_{n-1}\big).$$

Iteracja: Możliwe jest iteracyjne stosowanie korektora.

Opis Testu 1

Równanie:

$$y'' - y = 0$$

Przedział rozwiązania:

$$[0, 1]$$

Warunki początkowe:

$$y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Liczba kroków:

$$N = 1000$$

Dokładne rozwiązanie:

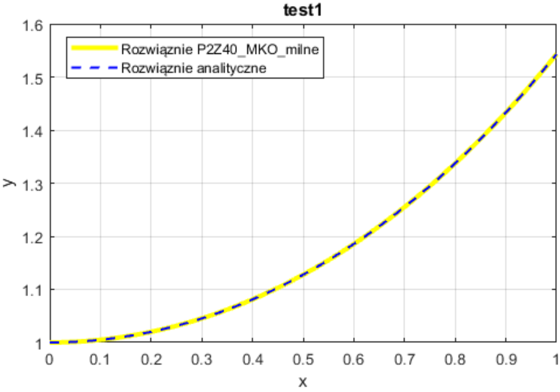
$$cosh(x)$$

Wyniki Testu 1

Błędy:

- Błąd globalny: 6.43929×10^{-15}
- Błąd wzoru Gill'a (4 początkowe punkty): 0
- Błąd metody Milne'a (pozostałe punkty): 6.43929×10^{-15}

Wykres Rozwiązań:



Opis Testu 2

Równanie:

$$y'' + 1000y = 0$$

Przedział rozwiązania:

$$[0, 1]$$

Warunki początkowe:

$$y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Liczba kroków:

$$N = 1000$$

Dokładne rozwiązanie:

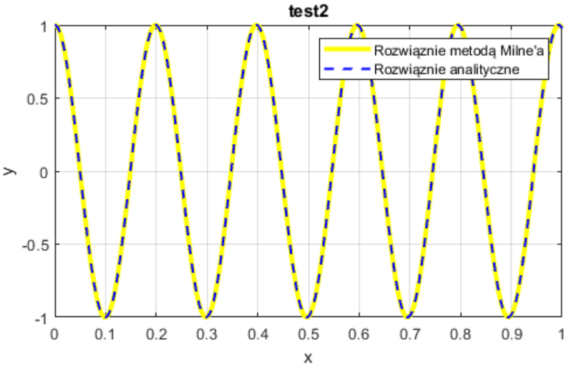
$$cos(\sqrt{1000}\, x)$$

Wyniki Testu 2

Błędy:

- Błąd globalny: 1.66204×10^{-7}
- Błąd wzoru Gill'a (4 początkowe punkty): 5.41236×10^{-11}
- Błąd metody Milne'a (pozostałe punkty): 1.66204×10^{-7}

Wykres Rozwiązań:



Opis Testu 3

Równanie:

$$y'' + cos(x)y' + sin(x)y = 1 - sin(x)$$

Przedział rozwiązania:

$$[0, 2\pi]$$

Warunki początkowe:

$$y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Liczba kroków:

$$N = 1000$$

Dokładne rozwiązanie:

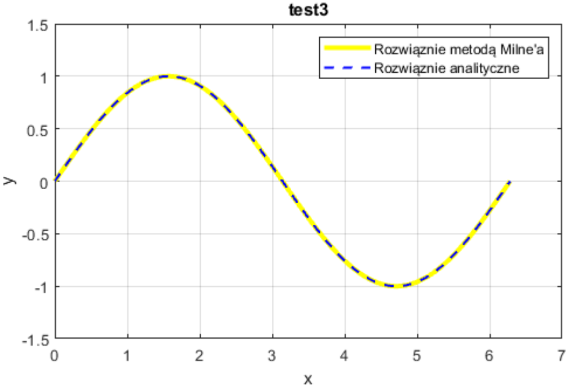
$$sin(x)$$

Wyniki Testu 3

Błędy:

- Błąd globalny: 7.24378×10^{-10}
- Błąd wzoru Gill'a (4 początkowe punkty): 2.62197×10^{-13}
- Błąd metody Milne'a (pozostałe punkty): 7.24378×10^{-10}

Wykres Rozwiązań:



Opis Testu 4

Równanie:

$$y'' + x^2 y' + xy = \frac{2}{x^3}$$

Przedział rozwiązania:

$$[0.01, 1]$$

Warunki początkowe:

$$y(0) = 100, y'(0) = -10000$$

Liczba kroków:

$$N = 2000$$

Dokładne rozwiązanie:

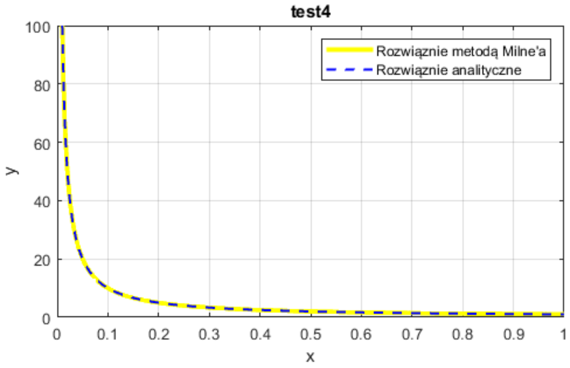
$$1/x$$

Wyniki Testu 4

Błędy:

- Błąd globalny: 1.84477×10^{-2}
- Błąd wzoru Gill'a (4 początkowe punkty): 1.11679×10^{-5}
- Błąd metody Milne'a (pozostałe punkty): 1.84477×10^{-2}

Wykres Rozwiązań:



Opis Testu Numerycznego 1

Cel testu:

- Badanie złożoności metody Milne'a.
- Analiza dokładności rozwiązania i czasu obliczeń w zależności od liczby podprzedziałów - N.

Opis problemu:

- Równanie różniczkowe: $y'' - y = 0$
- Przedział: $[0, 1]$
- Warunki początkowe: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- Dokładne rozwiązanie: $cosh(x)$
- Liczba podprzedziałów N zaczyna się od 3 i jest sukcesywnie podwajana, dopuki $N < 10^6$

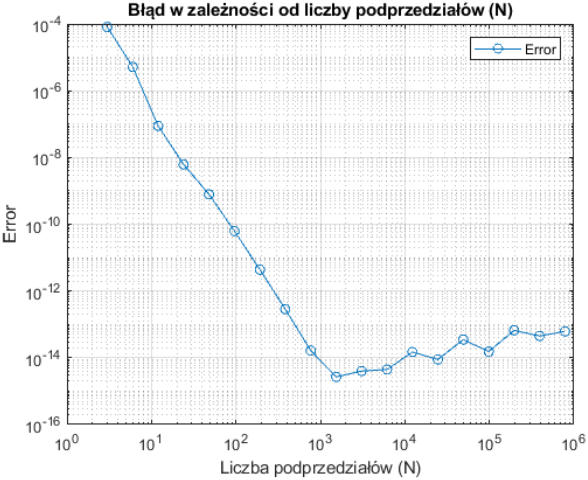
Wyniki Testu Numerycznego 1

Tabela wyników:

N	Błąd globalny	Błąd Gill'a	Czas wykonania (s)
3	8.10208e-05	8.10208e-05	1.91040e-02
6	5.16975e-06	1.18671e-06	1.06720e-03
12	8.82345e-08	1.82403e-08	1.51500e-04
24	6.14629e-09	2.83833e-10	1.52300e-04
48	7.86025e-10	4.43046e-12	2.00900e-04
96	6.26599e-11	6.90559e-14	2.88300e-04
192	4.35563e-12	1.11022e-15	4.55200e-04
384	2.85327e-13	0.00000e+00	8.87700e-04
768	1.64313e-14	2.22045e-16	1.56050e-03
1536	2.66454e-15	0.00000e+00	3.65430e-03
3072	3.99680e-15	2.22045e-16	6.65380e-03
6144	4.44089e-15	2.22045e-16	1.54394e-02
12288	1.48770e-14	0.00000e+00	2.34061e-02
24576	8.88178e-15	0.00000e+00	4.62414e-02
49152	3.50830e-14	2.22045e-16	9.19897e-02
98304	1.53211e-14	0.00000e+00	1.94011e-01
196608	6.61693e-14	0.00000e+00	3.59288e-01

Wyniki Testu Numerycznego 1

Wykres zależności błędu od liczby podprzedziałów N:



Opis Testu Numerycznego 2

Cel testu:

- Badanie jak ilość iteracji korektora wpływa na dokładność metody oraz czas rozwiązania.
- Analiza dokładności rozwiązania i czasu obliczeń w zależności od interacji korektora - m.

Opis problemu:

- Równanie różniczkowe: $y'' - y = 0$
- Przedział: $[0, 1]$
- Warunki początkowe: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- Dokładne rozwiązanie: $cosh(x)$
- Rozwiązujemy równanie dla 2 ilości podprzedziałów $N = 10$ oraz $N = 500$
- Liczba kroków iteracji m zaczyna się od 2 i jest sukcesywnie podwajana, dopuki $m < 10^3$

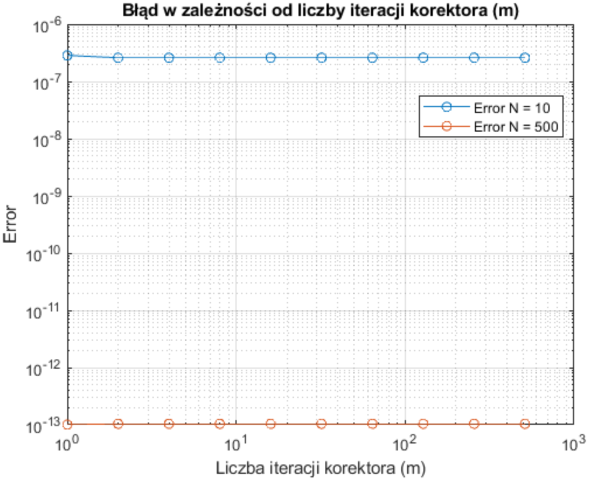
Wyniki Testu Numerycznego 2

Tabela wyników:

m	$N = 10$		$N = 500$	
	Błąd	Czas wykonania (s)	Błąd	Czas wykonania (s)
1	2.8498e-07	3.09496e-02	1.0036e-13	1.26360e-03
2	2.5927e-07	2.81960e-03	1.0392e-13	1.98190e-03
4	2.5987e-07	3.89100e-04	1.0392e-13	2.99510e-03
8	2.5987e-07	4.26600e-04	1.0392e-13	4.75750e-03
16	2.5987e-07	7.96600e-04	1.0392e-13	8.46930e-03
32	2.5987e-07	5.70900e-04	1.0392e-13	1.63099e-02
64	2.5987e-07	7.31300e-04	1.0392e-13	3.16419e-02
128	2.5987e-07	1.43150e-03	1.0392e-13	6.09082e-02
256	2.5987e-07	2.53430e-03	1.0392e-13	1.18951e-01
512	2.5987e-07	6.25300e-03	1.0392e-13	2.40166e-01

Wyniki Testu Numerycznego 2

Wykres zależności błędu od ilości iteracji korektora m:



Opis Testu Numerycznego 3

Cel testu:

- Badanie wpływu błędu w metodzie Gilla (błędu pierwszych 4 punktów) na wynik końcowy.
- Analiza zależności błędu rozwiązania od wartości przez jaką pomnożymy błąd pierwszych 4 punktów (err_mn).

Opis problemu:

- Równanie różniczkowe: $y'' - y = 0$
- Przedział: $[0, 1]$
- Warunki początkowe: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- Liczba podprzedziałów $N = 100$
- Dokładne rozwiązanie: $cosh(x)$
- Mnożnik błędu metody Gilla err_mn, czyli wartość, przez którą mnożymy błąd zmienia się od 10^{-6} do 10^{8}

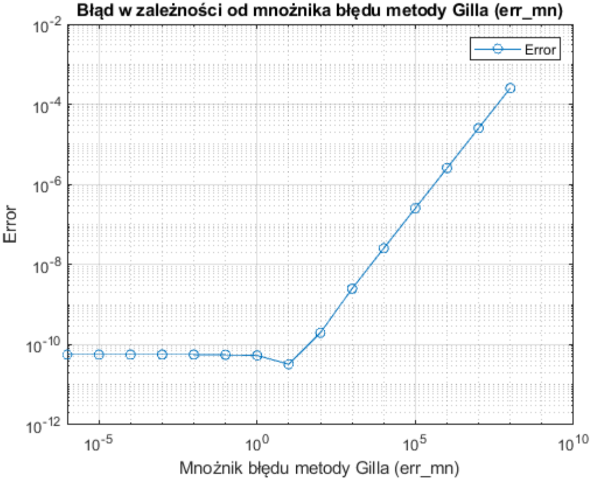
Wyniki Testu Numerycznego 3

Tabela wyników:

err_{mn}	Błąd globalny	Błąd Gill'a
1.0×10^{-6}	5.62392e-11	0.00000e+00
1.0×10^{-5}	5.62390e-11	0.00000e+00
1.0×10^{-4}	5.62390e-11	0.00000e+00
1.0×10^{-3}	5.62372e-11	0.00000e+00
1.0×10^{-2}	5.62133e-11	4.44089e-16
1.0×10^{-1}	5.59843e-11	5.32907e-15
1.0×10^{0}	5.36928e-11	5.41789e-14
1.0×10^{1}	3.25302e-11	5.41789e-13
1.0×10^{2}	1.98526e-10	5.41789e-12
1.0×10^{3}	2.49142e-09	5.41789e-11
1.0×10^{4}	2.54204e-08	5.41789e-10
1.0×10^{5}	2.54710e-07	5.41789e-09
1.0×10^{6}	2.54760e-06	5.41789e-08
1.0×10^{7}	2.54765e-05	5.41789e-07
1.0×10^{8}	2.54766e-04	5.41789e-06

Wyniki Testu Numerycznego 3

Wykres zależności błędu od mnożnika błędu metody Gilla (*err_mn*):



Opis Testu Numerycznego 4

Cel testu:

- Analiza zachowania metody w przypadku funkcji z asymptotą.
- Badanie, jak zmienia się błąd dla początków przedziałów x_0 różnie bliskich asymptocie x_0.

Opis problemu:

- Równanie różniczkowe: $y'' + x^2 y' + xy = \frac{2}{x^3}$
- Przedział: $[x_0, 1]$
- Warunki początkowe: $y(0) = \frac{1}{x_0}$, $y'(0) = -\frac{1}{{x_0}^2}$
- Liczba podprzedziałów $N = 100$
- Dokładne rozwiązanie: $1/x$
- Początek przedziału x_0 zmienia się od 0.01, dopuki $x_0 > 10^{-5}$

Wyniki Testu Numerycznego 4

Tabela wyników:

x_0	Błąd globalny
0.010000	1.84477e-02
0.005000	7.29597e-01
0.002500	2.20751e+01
0.001250	6.50154e+02
0.000625	2.30659e+04
0.000313	6.82499e+05
0.000156	1.32858e+07
0.000078	1.77434e+08
0.000039	1.84980e+09
0.000020	1.68453e+10

Opis Testu Numerycznego 5

Cel testu:

- Badanie efektywności metody Milne'a w przypadku funkcji szybko oscylujących.
- Analiza zmiany błędu w zależności od wartości a_0, która determinuje częstotliwość oscylacji funkcji.

Opis problemu:

- Równanie różniczkowe: $y'' + a_0 y = 0$
- Przedział: $[0, 1]$
- Warunki początkowe: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- Liczba podprzedziałów $N = 1000$
- Dokładne rozwiązanie: $cos(\sqrt{a0}\ x)$
- Wartość parametru a_0 zaczyna się od 1000 i jest podwajana, dopuki $a_0 < 10^6$

Wyniki Testu Numerycznego 5

Tabela wyników:

a_0	Błąd globalny
1000	1.66204e-07
2000	9.53799e-07
4000	5.61524e-06
8000	3.29325e-05
16000	3.56498e-04
32000	1.10754e+00
64000	3.16330e+06
128000	1.46519e+18
256000	1.83565e+38
512000	8.15238e+71

Opis Testu Numerycznego 6

Cel testu:

- Analiza wpływu zmiany współczynnika a_2 na dokładność rozwiązania w zadanym punkcie.
- Badanie, jak dokładność metody zmienia się w zależności od liczby podprzedziałów N.

Opis problemu:

- Równanie różniczkowe:
  $((x - 0.5)^2 + 10^{-10})y'' + 10^{-10}y = -(x - 0.5)^2 \sin(x)$
- Przedział: $[0, 1]$
- Warunki początkowe: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
- Dokładne rozwiązanie: $sin(x)$
- Liczba podprzedziałów N zaczyna się od 3 i jest sukcesywnie podwajana, dopuki $N < 10^6$

Wyniki Testu Numerycznego 6

Tabela wyników:

N	Błąd globalny
3	9.42830e-05
6	8.17724e-06
12	2.16042e-07
24	1.26031e-08
48	7.53121e-10
96	4.58991e-11
192	2.83129e-12
384	1.76303e-13
768	1.08802e-14
1536	1.44329e-15
3072	1.33227e-15
6144	2.10942e-15

Wyniki Testu Numerycznego 6