Лабораторная работа №2 «Взаимное расположение прямых, лучей, отрезков»

<u>Цель работы.</u> Изучить алгоритм установления факта пересечения двух прямых, лучей, отрезков на плоскости и нахождения координат точки их пересечения.

Теоретический материал

Данные задачи очень часто встречаются в компьютерной графике, в частности, при программировании компьютерных игр.

Легко выяснить, пересекаются ли две прямые или параллельны. Для этого необходимо знать условие коллинеарности двух векторов — это равенство нулю их косого произведения.

Замечание:

Для двух векторов $a = (a_x, a_y)$ и $b = (b_x, b_y)$ величина $a_x b_y - b_x a_y$ называется *косым (или псевдоскалярным) произведением* векторов a и b. Обозначение $[a, b]$.

Косое произведение удобно использовать при нахождении площади параллелограмма, построенного на векторах a и b, а также для нахождения угла между векторами.

$tg(\varphi) = \frac{[a,b]}{(a,b)}$, *где* (a, b) – скалярное произведение векторов a и b.

Если прямые заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, то удобно перейти к их нормалям $n_1 = (\mathrm{a}_1, b_1)$ и $n_2 = (\mathrm{a}_2, b_2)$. Тогда условие коллинеарности нормалей (а значит, и параллельности прямых) имеет вид:$[n_1, n_2] = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Если прямые заданы парами точек, то таким же способом проверяется коллинеарность направляющих векторов. Проверка наличия пересечения прямой и отрезка производится путем анализа взаимного расположения концов отрезка относительно прямой.

Пусть прямая $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и отрезок пересекаются в одной точке. Найдем ее, предварительно выписав уравнение прямой $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, проходящей через концы отрезка $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$. Для этого достаточно решить систему двух линейных уравнений, каждое из которых представляет собой уравнение соответствующей прямой относительно x и y:

$$x = (b_1c_2 - b_2c_1)/(a_1b_2 - a_2b_1)$$
$$y = (c_1a_2 - c_2a_1)/(a_1b_2 - a_2b_1)$$

Проверить наличие пересечения двух отрезков (а в компьютерной графике нас в основном интересует лишь сам факт пересечения) несложно опять же с использованием косого произведения. Пусть первый отрезок задан точками P_1 и P_2, а второй – P_3 и P_4. Обозначим x_{max1} и x_{min1} – максимальную и минимальную из первых координат первого отрезка, x_{max2} и x_{min2} – то же для второго отрезка. Для второй координаты аналогично имеем: y_{max1}, y_{min1} и y_{max2}, y_{min2}.

Упомянутые отрезки пересекаются тогда, когда одновременно выполняются следующие три условия:

1) пересекаются ограничивающие их прямоугольники, т.е. $x_{max1} \geq x_{min2}$, $x_{max2} \geq x_{min1}$, $y_{max1} \geq y_{min2}$ и $y_{max2} \geq y_{min1}$
2) косые произведения $[\overline{P_1P_3}, \overline{P_1P_2}]$ и $[\overline{P_1P_4}, \overline{P_1P_2}]$ имеют разные знаки, точнее $[\overline{P_1P_3}, \overline{P_1P_2}][\overline{P_1P_4}, \overline{P_1P_2}] \leq 0$;
3) $[\overline{P_3P_1}, \overline{P_3P_4}][\overline{P_3P_2}, \overline{P_3P_4}] \leq 0$.

Последние два условия означают, что концы одного отрезка лежат по разные стороны от прямой, которой принадлежит другой отрезок. А первое условие исключает из специального рассмотрения случай равенства нулю всех четырех косых произведений, при котором отрезки лежат на одной прямой и могут как пересекаться, так и нет.

Если же факт наличия пересечения нами установлен, то для отрезков, находящихся на пересекающихся прямых, точка пересечения ищется так же, как и в предыдущей задаче. Для отрезков одной прямой их пересечение (точка или отрезок) ищется путем подсчета значения нескольких скалярных произведений.

Для проверки наличия пересечения двух лучей P_1P_2 и P_3P_4следует изучить взаимное расположение соответствующих прямых. Равенство нулю косого произведения $[\overline{P_1P_2}, \overline{P_3P_4}]$означает принадлежность лучей параллельным прямым. Если эти прямые различны, то векторы $\overline{P_1P_3}$ и $\overline{P_1P_2}$ неколлинеарны и, значит, косое произведение $[\overline{P_1P_3}, \overline{P_1P_2}]$отлично от нуля. В этом случае лучи не пересекаются.

Когда лучи лежат на одной прямой, с помощью знака скалярного произведения $(\overline{P_1P_2}, \overline{P_3P_4})$ можно понять, в одну или в разные стороны они направлены. В первом случае скалярное произведение будет положительным, а во втором — отрицательным. Чтобы определить, какой из двух сонаправленных лучей является их пересечением, можно подсчитать значение скалярного произведения $(\overline{P_1P_2}, \overline{P_1P_3})$ Если оно больше нуля, то пересечением является луч P_3P_4,, в противном случае — луч P_1P_2- В случае противоположной направленности лучей их пересечение — либо отрезок P_1P_3, и тогда начало любого из двух лучей лежит внутри другого луча: $(\overline{P_1P_2}, \overline{P_1P_3}) > 0$, либо одна точка $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_3$: $(\overline{P_1P_2}, \overline{P_1P_3}) = 0$, либо оно пусто: $(\overline{P_1P_2}, \overline{P_1P_3}) < 0$.

Наконец, если прямые P_1P_2 и P_3P_4 пересекаются в одной точке M: $(\overline{P_1P_2}, \overline{P_3P_4}) \neq 0$, то найти эту точку можно так же, как выше. Затем следует проверить, что M принадлежит каждому из лучей:

$(\overline{P_1P_2}, \overline{P_1M}) \geq 0$ и $(\overline{P_3P_4}, \overline{P_1M}) \geq 0$.

Задание. Реализовать описанный в работе алгоритм определения пересечения прямых, лучей и отрезков. Программа должна включать графический интерфейс, поля для ввода координат точек и переключатель типа решаемой задачи. Также необходимо выполнить построение указанных графических объектов с указанием множества точек их пересечения.