Лабораторная работа №4 «Кривые Безье»

Цель работы. Изучение методов построения и рисования кривых линий на примере кривых Безье, получение навыков программирования графики.

Теоретический материал

Задачи построения кривых по точкам возникают в проектировании и промышленном производстве, а также в машинной графике, обработке изображений и распознавании образов. Например, очертания кузова автомобиля могут быть заданы с помощью множества дискретных точек, выбранного на основе технических и эстетических соображений. Для того чтобы ЭВМ могла управлять обрабатывающими инструментами, необходимо располагать математическим описанием гладкой поверхности, проходящей через все заданные точки. Этот пример отражает одно из первых применений методов машинной графики в промышленности.

Другие возможности применения этих методов связаны с представлением экспериментальных данных для их последующего воспроизведения или автоматического распознавания. В последнем случае математическое описание контура объекта может содержать информацию о классе, к которому объект принадлежит. Точные требования, которым должны удовлетворять воспроизводимые кривые и поверхности, зависят от конкретной прикладной задачи, однако в целом решение подобных задач базируется на общей методологии.

С математической точки зрения задачи интерполирования, вероятно, решать легче, однако при решении многих прикладных задач аппроксимация оказывается более практичной, так как точные значения обрабатываемых данных искажаются из-за наличия шума. Компромиссным решением при выборе одного из этих методов служит выделение множества точек-ориентиров, которые могут быть определены пользователем в интерактивном режиме, и проведение кривой (или поверхности) вблизи этих точек. Ниже мы уделим внимание этому подходу. Удовлетворительное воспроизведение кривых требует решения ряда трудных задач из дискретной геометрии, однако обычно используются частные решения, дающие разнообразные качественные результаты.

Часто решающее значение при построении кривых по точкам приобретает выбор математического описания (функции). Хотя многочлены — первое, что приходит здесь в голову, их применение обычно дает плохое решение. Наибольшее распространение получили методы, предусматривающие использование кусочно-полиномиальных функций различных типов. При решении задач аппроксимации также следует уделять внимание выбору критерия, характеризующего качество приближения. Максимальное расстояние точек от кривой или поверхности представляется вполне разумным критерием, однако часто его использование порождает сложные вычислительные проблемы. В принципе, необходимо достижение некоторого компромисса между тем, что интуитивно кажется желательным, и тем, что оказывается реальным с вычислительной точки зрения.

Начнем с построения кривых по точкам при помощи многочленов. Для эффективного воспроизведения кривых необходимо, чтобы точки, составляющие отображение, порождались на одном из низших уровней, как правило, с помощью аппаратной части дисплея. Это обстоятельство ограничивает число классов кривых, поддающихся эффективному воспроизведению. Чаще мы имеем дело с кривыми двух классов: прямыми линиями и дугами окружностей. В случаях, когда путаница исключена, будем называть их линиями и дугами соответственно; для большинства прикладных задач достаточно этих двух типов кривых, поскольку на их основе можно воспроизводить и более сложные кривые.

Кривые Безье

Кривые Безье являются одним из основных методов построения векторных изображений. Кривая Безье является частным случаем многочленов Бернштейна.

Кривая Безье — параметрическая кривая, задаваемая выражением:

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i\, b_{i,n}(t), \qquad 0 \le t \le 1$$

где P_i- функция компонент векторов опорных вершин, а $b_{i,n}(t)$— базисные функции кривой Безье, называемые также полиномами Бернштейна.

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

где $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ - число сочетаний из n по i, где n - степень полинома, i - порядковый номер опорной вершины.

Кривые Безье различаются порядками, определяющимися значением n. Чем больше значение n, тем более сложную форму кривой можно построить.

Линейные кривые

При $n = 1$ кривая представляет собой отрезок прямой линии, ограниченный опорными точками P_0 и P_1 . Уравнение линейной кривой Безье будет выглядеть как:

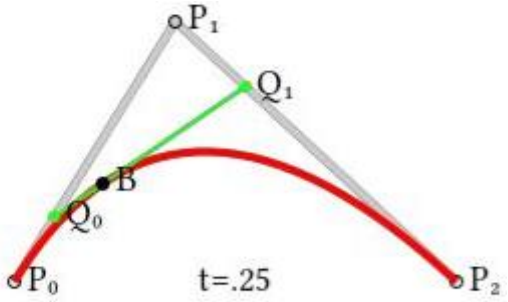
$$B(t) = (1-t)P_0 + tP_1, \quad t \in [0,1]$$

Таким образом, для построения линейной кривой Безье необходимо поставить две опорные точки.

Квадратичные кривые

При $n = 2$ будет построена квадратичная кривая Безье, форма которой задаётся тремя опорными точками: P_0, P_1 и P_2.

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0,1]$$



Для построения квадратичной кривой Безье необходимо поставить две опорные точки, определяющие начало и конец кривой и одну дополнительную опорную точку, определяющую ее форму. Метод построения кривой можно продемонстрировать следующим рисунком:

Построение квадратичных кривых Безье основывается на выделение двух промежуточных точек Q_0 и Q_1 из условия, чтобы параметр t изменялся от 0 до 1. Тогда:

Точка Q_0 двигается от P_0 до P_1 и описывает линейную кривую Безье.

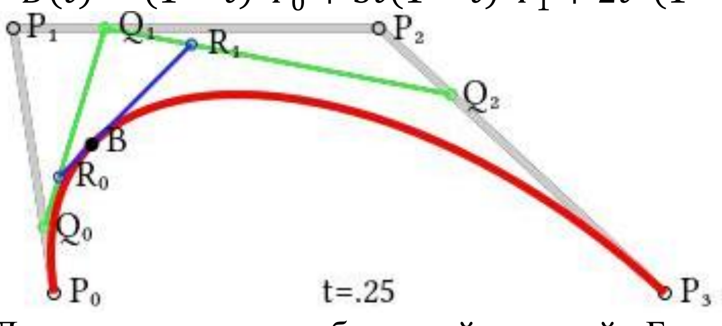
Точка Q_1 двигается от P_1 до P_2 и также описывает линейную кривую Безье.

Точка B (рисующая точка) двигается от Q_0 до Q_1 и описывает собственно саму квадратичную кривую Безье.

Кубические кривые

При $n = 2$ будет построена квадратичная кривая Безье, форма которой задаётся тремя опорными точками: P_0, P_1, P_2..и P_3..

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 2t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3, \quad t \in [0,1]$$



Для построения кубической кривой Безье необходимо поставить две опорные точки, определяющие начало и конец кривой и две дополнительные опорные точки, определяющие ее форму. Метод построения кривой можно продемонстрировать следующим рисунком:

Построение кубических кривых Безье основывается на выделение пяти промежуточных точек. Промежуточные точки Q_0, Q_1 и Q_2, описывают линейные кривые, а промежуточные точки R_0 и R_1, описывают квадратичные кривые. Наконец рисующая точка B описывает собственно кубическую кривую Безье.

Аналогично могут быть построены и кривые Безье более высоких порядков, но в существующих программных продуктах для создания векторной графики они, как правило, не используются в связи со сложностью управления и большими требованиями к вычислительным ресурсам. Для построения сложных кривых используется их разбиение на несколько сегментов, каждый из которых является кривой Безье первого, второго или третьего порядка.

Задание.

Разработать программу графического редактора кривых Безье, обеспечивающую:

a) выбор порядка используемых кривых Безье;

b) рисование кривых Безье на экране с возможностью их редактирования;

c) построение кривой Безье, аппроксимирующей последовательность точек (подгонка кривой Безье).

Замечание:

Программа, подготовленная в группе из 2-х участников, оценивается из 90% максимально возможного рейтинга для каждого из участников.

Сдача чужой программы (при условии полного изучения и комментария) оценивается из 50% максимально возможного рейтинга