Laboratorium nr 9
Metody przybliżone rozwiązywania równań nieliniowych - część I

1 Metoda bisekcji (połowienia)

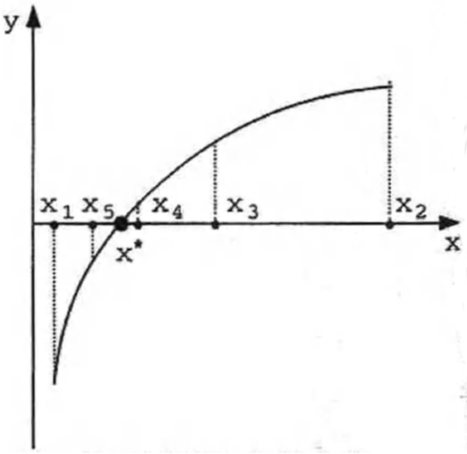
$[a, b]$ – przedział izolacji pierwiastka równania $f(x) = 0$.
$x_1 = a$, $x_2 = b$ – dwa początkowe wyrazy ciągu przybliżeń.
Kolejne przybliżenia wyznaczamy ze wzoru:

$$x_i = \frac{x_{i-1} + x_k}{2}, \quad k \in [1, (i-2)], i = 3, 4, \ldots \tag{1}$$

dobierając k w taki sposób, aby

$$|x_i - x_{i-1}| = |x_i - x_k| \tag{2}$$

$$f(x_{i-1}) f(x_k) < 0 \tag{3}$$



Rysunek 1: Metoda bisekcji – źródło [1]

2 Algorytm – metoda bisekcji

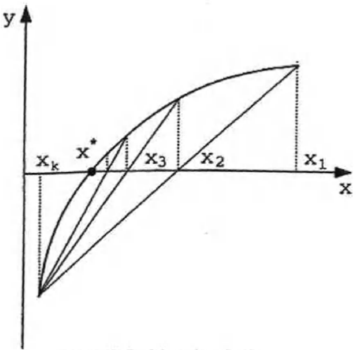
Algorytm rozwiązywania równania $f(x) = 0$ za pomocą metody bisekcji. Zakłada się, że $[a, b]$ jest przedziałem izolacji pierwiastka, a m jest zadaną liczbą kroków.

Zmienne
 całkowite: i, m
 rzeczywiste: a, b, $x1$, $x2$, x
Podać a, b, m
Zdefiniować $f(z)$
Podstawić $x1 = a$
Podstawić $x2 = b$
Dla $i = 1, 2, \ldots, m$
 Obliczyć $x = (x1 + x2)/2$
 Obliczyć $y = f(x)$
 Obliczyć $y1 = f(x1)$
 Jeżeli $y \cdot y1 > 0$ **to Podstawić** $x1 = x$
  w przeciwnym przypadku Podstawić $x2 = x$
Drukować x

3 Metoda cięciw (siecznych)

Założenia: funkcja $f(x)$ jest klasy C^2 na przedziale izolacji pierwiastka oraz jej pierwsza i druga pochodna mają stały znak na tym przedziale.
Rozwiązanie równania $f(x) = 0$ przybliża się ciągiem miejsc zerowych cięciw poprowadzonych między punktami $(x_k, f(x_k))$, $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, które stanowią końce przedziałów izolacji $[x_k, x_{i-1}]$ (Rysunek 2).
Kolejne przybliżenia otrzymujemy za pomocą wzoru

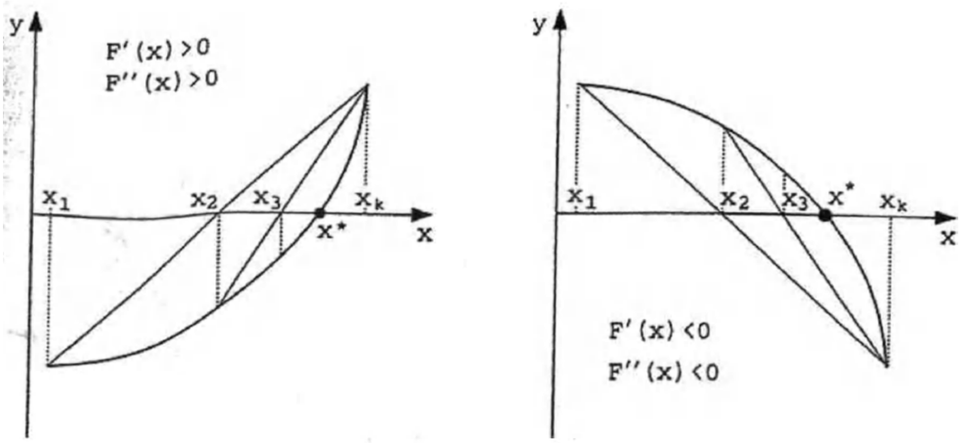
$$x_i = x_{i-1} - f(x_{i-1})\frac{x_k - x_{i-1}}{f(x_k) - f(x_{i-1})}, \quad i = 2, 3, \ldots \tag{4}$$



Rysunek 2: Metoda cięciw – źródło [1]

Przybliżenie pierwiastka z niedomiarem ($f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ lub $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ – zgodność znaków pierwszej i drugiej pochodnej) – zachodzi nierówność

$$x_i < x_{i+1} < x_{i+2} < \ldots < x^*. \tag{5}$$



Rysunek 3: Oszacowanie pierwiastka z niedomiarem – źródło [1]

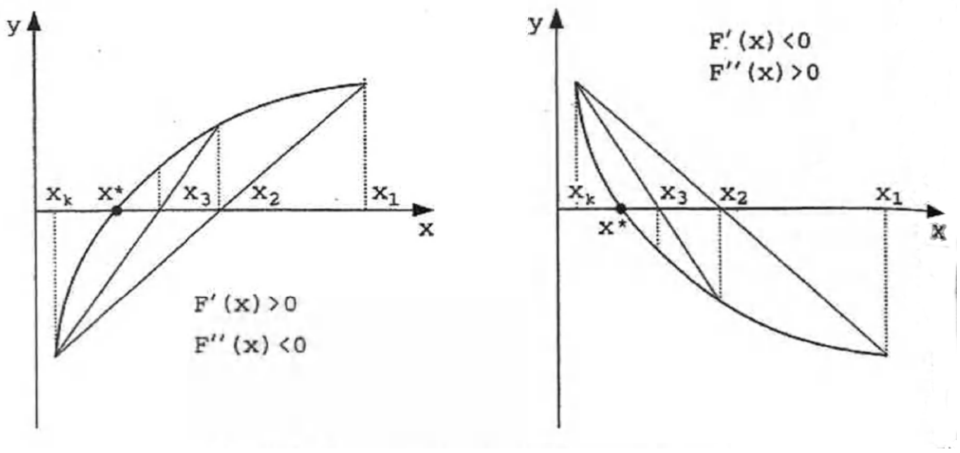
Przybliżenie pierwiastka z nadmiarem ($f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ lub $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ – niezgodność znaków pierwszej i drugiej pochodnej) – zachodzi nierówność

$$x_i > x_{i+1} > x_{i+2} > \ldots > x^*. \tag{6}$$

W założeniach mamy stały znak drugiej pochodnej w przedziale izolacji pierwiastka $[a, b]$, zatem

$$x \in [a, b], \quad f'(x) \cdot f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_k = a, \quad x_1 = b, \tag{7}$$

$$x \in [a, b], \quad f'(x) \cdot f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_k = b, \quad x_1 = a. \tag{8}$$



Rysunek 4: Oszacowanie pierwiastka z nadmiarem – źródło [1]

4 Algorytm – metoda cięciw

Algorytm rozwiązywania równania $f(x) = 0$ za pomocą metody cięciw. Zakłada się, że $[a, b]$ jest przedziałem izolacji pierwiastka, n jest zadaną liczbą kroków, a także zadany jest punkt stały pęku cieciw (zmienna xk – patrz wzory 7, 8)

Zmienne
  całkowite: i, n
  rzeczywiste: a, b, xk
  tablice (typu rzeczywistego): $x[1 \ldots n]$
Podać a, b, n, xk
Zdefiniować $f(z)$
Jeżeli $xk = a$ **to Podstawić** $x_1 = b$
  w przeciwnym przypadku Podstawić $x_1 = a$
Dla $i = 2, 3, \ldots, n$
  Obliczyć $x_i = x_{i-1} - f\left(x_{i-1}\right) \dfrac{xk - x_{i-1}}{f(xk) - f\left(x_{i-1}\right)}$
Drukować x_n

Uwaga! Przedstawiony wariant metody cięciw pochodzi z książki [1]. W ramach implementacji można również skorzystać z pseudokodu zaprezentowanego na wykładzie.

Literatura

[1] E. Majchrzak, B. Mochnacki, *Metody numeryczne. Podstawy teoretyczne, aspekty praktyczne*, Gliwice 2004.

Algorytm w pseudokodzie

Dane wejściowe: funkcja f, przedział $[a, b]$, tolerancja ε
if $f(a) \cdot f(b) \geq 0$ **then**
    Błąd: Nieprawidłowy przedział
    Zakończ
end if
while $|f(c)| > \varepsilon$ **lub** $(b - a) > \varepsilon$ **do**
    $c \leftarrow a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$
    if $f(c) = 0$ **then**
        Przerwij pętlę
    else if $f(a) \cdot f(c) < 0$ **then**
        $b \leftarrow c$
    else
        $a \leftarrow c$
    end if
end while
Zwróć c

Rysunek 5: Metoda cięciw – źródło: wykład prof. Adama Kulawika z Algorytmów numerycznych