Laboratorium nr 13
Dyskretne metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych – wzory i algorytmy

Rozpatrujemy zwyczajne równanie różniczkowe (ODE, ang. *ordinary differential equation*) rzędu pierwszego z warunkiem początkowym (IVP, ang. *initial value problem*) postaci

$$y'(x) = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Odpowiednie założenia zostały podane na wykładzie.
Definiujemy sekwencję punktów x (tzw. siatkę, ang. *grid*) zgodnie ze wzorem $x_n = x_0 + nh$, gdzie h oznacza krok siatki (ang. *mesh spacing*). W niniejszym zestawieniu zakładamy stały krok siatki $h = \text{const}$.

Rozwiązywać będziemy następujące równanie

$$y\left(x_{i+1}\right) = y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} F\left(x, y(x)\right)\, dx \tag{2}$$

1 Metoda Eulera (łamanych)

Metoda Eulera, będąca szczególnym przypadkiem metod Rungego-Kutty (RK1) opiera się na wzorze rekurencyjnym

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot F\left(x_i, y_i\right), \quad y\left(x_0\right) = y_0 \tag{3}$$

Ulepszenia metody łamanych

- Pierwsze ulepszenie (metoda punktu pośredniego, ang. *midpoint method*, RK2)

$$\begin{aligned} x^* &= 0.5\left(x_i + x_{i+1}\right) \\ y^* &= y_i + 0.5h \cdot F\left(x_i, y_i\right) \\ m^* &= F\left(x^*, y^*\right) \\ y_{i+1} &= y_i + hm^* \end{aligned} \tag{4}$$

  po podstawieniu otrzymujemy

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot F\left(\frac{\left(x_i + x_{i+1}\right)}{2},\ y_i + \frac{h}{2} \cdot F(x_i, y_i)\right) \tag{5}$$

- Drugie ulepszenie (tzw. metoda Eulera-Cauchy'ego lub metoda Heuna)

$$\begin{aligned} x^* &= x_{i+1} = x_i + h \\ y^* &= y_i + hF\left(x_i, y_i\right) \\ m^* &= F\left(x^*, y^*\right) \\ y_{i+1} &= y_i + 0.5h\left(F\left(x_i, y_i\right) + m^*\right) \end{aligned} \tag{6}$$

po podstawieniu otrzymujemy

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{(F(x_i, y_i) + F(x_{i+1}, y_i + hF(x_i, y_i)))}{2} \tag{7}$$

*Uwaga. Odpowiednie ilustracje dla poszczególnych metod znajdują się w wykładzie.

2 Metoda Rungego-Kutty

- Wzory Rungego-Kutty rzędu trzeciego (RK3):

$$\begin{aligned} m_1 &= F(x_i, y_i) \\ m_2 &= F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h \cdot m_1}{2}\right) \\ m_3 &= F(x_i + h, y_i - h \cdot m_1 + 2h \cdot m_2) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(m_1 + 4m_2 + m_3) \end{aligned} \tag{8}$$

- Wzory Rungego-Kutty rzędu czwartego (RK4)

$$\begin{aligned} m_1 &= F(x_i, y_i) \\ m_2 &= F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h \cdot m_1}{2}\right) \\ m_3 &= F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h \cdot m_2}{2}\right) \\ m_4 &= F(x_i + h, y_i + h \cdot m_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \end{aligned} \tag{9}$$

3 Algorytmy

Algorytm nr 1 – pseudokod dla metody Eulera

Zmienne
  całkowite: i, n
  rzeczywiste: h
  tablice (typu rzeczywistego): $x[0 \dots n]$, $y[0 \dots n]$
Podać x_0, y_0, n, h
Zdefiniować $F(u, v)$
Dla $i = 0, 1, 2, \dots, n$
  Obliczyć $x_i = x_0 + i * h$
Dla $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$
  Obliczyć $y_{i+1} = y_i + h * F(x_i, y_i)$
Dla $i = 0, 1, 2, \dots, n$
  Wyświetlić x_i
  Wyświetlić y_i

Algorytm nr 2 – pseudokod dla pierwszego ulepszenia

Zmienne
 całkowite: i, n
 rzeczywiste: h, x^*, y^*, m^*
 tablice (typu rzeczywistego): $x[0 \ldots n]$, $y[0 \ldots n]$
Podać x_0, y_0, n, h
Zdefiniować $F(u, v)$
Dla $i = 1, 2, \ldots, n$
 Obliczyć $x_i = x_0 + i * h$
Dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$
 Obliczyć $x^* = 0.5\left(x_i + x_{i+1}\right)$
 Obliczyć $y^* = y_i + 0.5h \cdot F\left(x_i, y_i\right)$
 Obliczyć $m^* = F\left(x^*, y^*\right)$
 Obliczyć $y_{i+1} = y_i + hm^*$
Dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n$
 Wyświetlić x_i
 Wyświetlić y_i

Algorytm nr 3 – pseudokod dla drugiego ulepszenia

Zmienne
 całkowite: i, n
 rzeczywiste: h, x^*, y^*, m^*
 tablice (typu rzeczywistego): $x[0 \ldots n]$, $y[0 \ldots n]$
Podać x_0, y_0, n, h
Zdefiniować $F(u, v)$
Dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$
 Obliczyć $x_i = x_0 + i * h$
 Obliczyć $x^* = x_i + h$
 Obliczyć $y^* = y_i + hF\left(x_i, y_i\right)$
 Obliczyć $m^* = F\left(x^*, y^*\right)$
 Obliczyć $y_{i+1} = y_i + 0.5h\left(F\left(x_i, y_i\right) + m^*\right)$
Dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n$
 Wyświetlić x_i
 Wyświetlić y_i

Algorytm nr 4 – pseudokod dla metody Rungego-Kutty rzędu trzeciego

Zmienne
  całkowite: i, n
  rzeczywiste: h, m_1, m_2, m_3
  tablice (typu rzeczywistego): $x[0 \dots n]$, $y[0 \dots n]$
Podać x_0, y_0, n, h
Zdefiniować $F(u, v)$
Dla $i = 1, 2, \dots, n$
  Obliczyć $x_i = x_0 + i * h$
Dla $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$
  Obliczyć $m_1 = F\left(x_i, y_i\right)$
  Obliczyć $m_2 = F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h \cdot m_1}{2}\right)$
  Obliczyć $m_3 = F\left(x_i + h, y_i - h \cdot m_1 + 2h \cdot m_2\right)$
  Obliczyć $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(m_1 + 4m_2 + m_3\right)$
Dla $i = 0, 1, 2, \dots, n$
  Wyświetlić x_i
  Wyświetlić y_i

Tabela 1: Porównanie błędów lokalnych i globalnych dla poszczególnych metod

Metoda	**Błąd lokalny** (LTE)	**Błąd globalny** (GTE)	**Rząd dokładności**
Metoda Eulera	$\mathcal{O}(h^2)$	$\mathcal{O}(h)$	1
Pierwsze ulepszenie (punkt środkowy)	$\mathcal{O}(h^3)$	$\mathcal{O}(h^2)$	2
Drugie ulepszenie (Heun)	$\mathcal{O}(h^3)$	$\mathcal{O}(h^2)$	2
Rungego–Kutty rzędu 3 (RK3)	$\mathcal{O}(h^4)$	$\mathcal{O}(h^3)$	3
Rungego–Kutty rzędu 4 (RK4)	$\mathcal{O}(h^5)$	$\mathcal{O}(h^4)$	4

Literatura

[1] E. Majchrzak, B. Mochnacki, *Metody numeryczne. Podstawy teoretyczne, aspekty praktyczne*, Gliwice 2004.

[2] J. F. Epperson, *An introduction to numerical methods and analysis*, Wiley, Hoboken, New Jersey, 2013.