# Laboratorium nr 3 – metody dokładne rozwiązywania układów równań liniowych

Postać ogólna układu $n$ równań liniowych z $n$ niewiadomymi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Postać macierzowa

$$A \cdot X = B$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$A$ – macierz główna układu

$B$ – wektor wyrazów wolnych

$X$ – wektor niewiadomych

Założenie $\det(A) \neq 0$ (macierz główna układu równań nie jest osobliwa).

## 1. Metoda eliminacji Gaussa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \rightarrow C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & c_{1,n+1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & c_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} & c_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

W poniższym wariancie algorytmu dokonując operacji na wierszach macierzy rozszerzonej $C = A|B$ dochodzimy do układu równoważnego , którego macierz główna ma postać macierzy trójkątnej górne. Następnie rozwiązania kolejne rozwiązania układu równań wyznaczamy „od dołu” (począwszy od $x_n$).

**Algorytm: metoda eliminacji Gaussa dla układu *n* równań liniowych z *n* niewiadomymi**

$(a_{ii} \neq 0, c_{ii} \neq 0, i = 1,2,\dots,n)$

```
Zmienne:
całkowite: i, j, n, s
rzeczywiste: suma
tablice (typu rzeczywistego): c[1..n, 1..n + 1], x[1..n]

Podać n
Dla i = 1, 2, …, n
      Dla j = 1, 2, …, n + 1
            Podać c_ij

Dla s = 1, 2, …, n - 1
      Dla i = s + 1, s + 2, …, n
            Dla j = s + 1, s + 2, …, n + 1
                 c_ij = c_ij – (c_is / c_ss)·c_sj

Podstawić x_n = c_n,n+1 / c_nn
Dla i = n - 1, n - 2, …, 1
      suma = 0
      Dla s = i + 1, i + 2, …, n
            suma = suma + c_is·x_s
      x_i = (c_i,n+1 - suma) / c_ii

Dla i = 1, 2, …, n
      Drukować x_i
```

### 2. Metoda Thomasa (metoda przeganiania) dla układów trójprzekątniowych

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & a_3 & b_b & c_3 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i,\ a_1 = 0,\ c_n = 0,\ i = 1, 2, \dots, n$

Rozwiązania będą poszukiwane w postaci

$$x_i = \beta_i x_{i+1} + \gamma_i$$

lub

$$x_{i-1} = \beta_{i-1} x_i + \gamma_{i-1}$$

$\beta_i, \gamma_i$ – nieznane współczynniki

Wzory:

$\beta_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \qquad \gamma_1 = -\frac{d_1}{b_1},$

$\beta_i = -\frac{c_i}{a_i \beta_{i-1} + b_i}, \qquad \gamma_i = \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{a_i \beta_{i-1} + b_i}, \qquad i = 2, 3, \dots, n,$

$x_n = \gamma_n,$

$x_i = \beta_i x_{i+1} + \gamma_i, \qquad i = n-1, n-2, \dots, 1$ .

Zatem rozpoczynamy od obliczenia współczynników $\beta_i$, $\gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, a następnie („od dołu”) wyznaczamy kolejne niewiadome $x_i$.

## Algorytm Thomasa dla trójdiagonalnego układu równań liniowych o *n* niewiadomych

**Zmienne:**

całkowite: $i$, $n$

tablice (typu rzeczywistego): $a[1..n]$, $b[1..n]$, $c[1..n]$, $d[1..n]$, $x[1..n]$, $bet[1..n]$, $gam[1..n]$

**Podać** $n$

**Dla** $i = 1, 2, \ldots, n$

  **Podać** $a_i$, $b_i$, $c_i$, $d_i$

$a_1 = c_n = 0$

**Obliczyć** $bet_1 = -c_1 / b_1$

**Obliczyć** $gam_1 = d_1 / b_1$

**Dla** $i = 2, \ldots, n$

  $bet_i = - c_i / (a_i \cdot bet_{i-1} + b_i)$

  $gam_i = (d_i - a_i \cdot gam_{i-1}) / (a_i \cdot bet_{i-1} + b_i)$

**Podstawić** $x_n = gam_n$

**Dla** $i = n - 1, n - 2, \ldots, 1$

  $x_i = bet_i \cdot x_{i+1} + gam_i$

**Dla** $i = 1, 2, \ldots, n$

  **Drukować** $x_i$

Materiał przygotowano na podstawie książki:

Ewa Majchrzak, Bohdan Mochnacki, *Metody numeryczne. Podstawy teoretyczne, aspekty praktyczne i algorytmy*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2004.