Laboratorium nr 11
Całkowanie numeryczne

$f(x)$ – funkcja ciągła i ograniczona na przedziale domkniętym $[a, b]$.
Przedział $[a, b]$ dzielimy na n podprzedziałów za pomocą punktów siatki (węzłów) x_i, $0 \le i \le n$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

W przypadku równomiernej siatki (równy odstęp pomiędzy punktami) mamy $h = x_i - x_{i-1} = \text{const}$ i wtedy krok siatki wynosi $h = (b - a)/n$.
Będziemy wyznaczać przybliżoną wartość całki

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

Przedstawione poniżej wzory dotyczą przypadku równego kroku siatki h.

1 Metoda prostokątów (wariant → metoda lewych prostokątów)

W metodzie prostokątów sumujemy pola prostokątów o podstawie długości h i wysokościach $y_i = f(x_i)$ – zatem funkcję $f(x)$ na podprzedziale (odcinku) $[x_i, x_{i+1}]$ zastępujemy linią poziomą $y = y_i$. Wzór prostokątów z niedomiarem:

$$\int_a^b f(x)dx \approx P_n(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \tag{3}$$

2 Metoda trapezów

W metodzie trapezów funkcję $f(x)$ na odcinku $[x_i, x_{i+1}]$ przybliżamy funkcją liniową przechodzącą przez punkty x_i i x_{i+1} (zastosowanie interpolacji liniowej). Wzór trapezów przyjmuje postać:

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n(f) = h \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] \tag{4}$$

Algorytm nr 1 – obliczanie całki oznaczonej metodą trapezów

Zmienne
    całkowite: i, n
    rzeczywiste: a, b, $calkaT$, h, $suma$
    tablice (typu rzeczywistego): $x[0 \dots n]$
Podać a, b, n
Zdefiniować $f(z)$
Obliczyć $suma = 0.5 * (f(a) + f(b))$
Obliczyć $h = (b - a)/n$
Dla $i = 0, 1, 2, \dots, n$
    Obliczyć $x_i = a + i * h$
Dla $i = 1, 2, \dots, n-1$
    Obliczyć $suma = suma + f(x_i)$
Obliczyć $calkaT = h * suma$
Wyświetlić $calkaT$

3 Metoda Simpsona

W ramach metody Simpsona korzystamy z interpolacji kwadratowej, zatem wymagana jest parzysta liczba podprzedziałów, a wzór Simpsona jest postaci:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) \tag{5}$$

Algorytm nr 2 – obliczanie całki oznaczonej metodą Simpsona

Zmienne
    całkowite: i, n
    rzeczywiste: a, b, $calkaS$, h, $suma2$, $suma4$, x
Zdefiniować $f(z)$
Podać a, b, n
Jeżeli $(n \mod 2)! = 0$ **to**
    Drukować "Nieparzysta liczba podprzedziałów"
    Zakończ
Obliczyć $calkaS = f(a) + f(b)$
Obliczyć $h = (b - a)/n$
Obliczyć $suma4 = 0.0$, $suma2 = 0.0$
Dla $i = 1, 3, 5, \dots, n-1$
    Obliczyć $x = a + i * h$
    Obliczyć $suma4 = suma4 + f(x)$
Dla $i = 2, 4, 6, \dots, n-2$
    Obliczyć $x = a + i * h$
    Obliczyć $suma2 = suma2 + f(x)$
Obliczyć $calkaS = (h/3.0) * (calkaS + 4 * suma4 + 2 * suma2)$
Wyświetlić $calkaS$

*Uwaga. Druga pętla **for** z powyższego pseudokodu ma sens tylko wtedy, gdy $n \geq 4$. Dla każdego parzystego indeksu i, przybliżenie wartości całki na przedziale $[x_i, x_{i+2}]$ uzyskujemy ze wzoru lokalnego:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = \sigma_i \approx \frac{h}{3}\left(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right) \tag{6}$$

n	$P_n(f)$	$I(f) - P_n(f)$
2	1.324360635350	3.93921×10^{-1}
4	1.512436676000	2.05845×10^{-1}
8	1.613125977886	1.05156×10^{-1}
16	1.665144821441	5.31370×10^{-2}
32	1.691573506747	2.67083×10^{-2}
64	1.704892710065	1.33891×10^{-2}
128	1.711578529691	6.70330×10^{-3}
256	1.714927994171	3.35383×10^{-3}
512	1.716604365088	1.67746×10^{-3}
1024	1.717442960217	8.38868×10^{-4}

Tabela 1: Metoda prostokątów zastosowana do $f(x) = e^x$, $[a, b] = [0, 1]$.

n	$T_n(f)$	$I(f) - T_n(f)$
2	1.753931092465	-3.56493×10^{-2}
4	1.727221904558	-8.94008×10^{-3}
8	1.720518592164	-2.23676×10^{-3}
16	1.718841128580	-5.59300×10^{-4}
32	1.718421660316	-1.39832×10^{-4}
64	1.718316786850	-3.49584×10^{-5}
128	1.718290568083	-8.73962×10^{-6}
256	1.718284013367	-2.18491×10^{-6}
512	1.718282374686	-5.46227×10^{-7}
1024	1.718281965016	-1.36557×10^{-7}

Tabela 2: Metoda trapezów zastosowana do $f(x) = e^x$, $[a, b] = [0, 1]$.

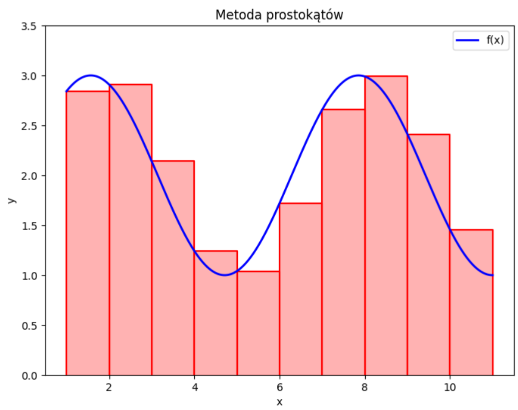
Literatura

[1] E. Majchrzak, B. Mochnacki, *Metody numeryczne. Podstawy teoretyczne, aspekty praktyczne*, Gliwice 2004.

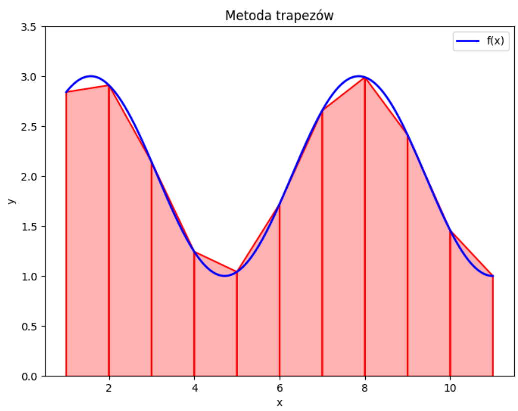
[2] J. F. Epperson, *An introduction to numerical methods and analysis*, Wiley, Hoboken, New Jersey, 2013.

n	$S_n(f)$	$I(f) - S_n(f)$
2	1.718861151877	-5.79323×10^{-4}
4	1.718318841922	-3.70135×10^{-5}
8	1.718284154700	-2.32624×10^{-6}
16	1.718281974052	-1.45593×10^{-7}
32	1.718281837562	-9.10273×10^{-9}
64	1.718281829028	-5.68970×10^{-10}
128	1.718281828495	-3.55616×10^{-11}
256	1.718281828461	-2.22222×10^{-12}
512	1.718281828459	-1.38334×10^{-13}
1024	1.718281828459	-9.54792×10^{-15}

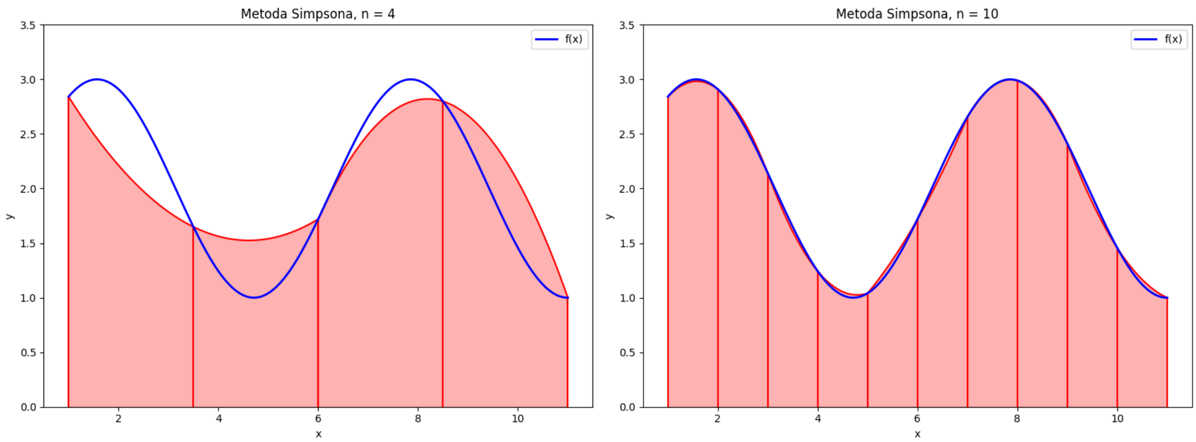
Tabela 3: Metoda Simpsona zastosowana do $f(x) = e^x$, $[a, b] = [0, 1]$.



Rysunek 1: Metoda prostokątów dla funkcji $f(x) = 2 + \sin(x)$ na przedziale $[a, b] = [1, 11]$, $n = 10$.



Rysunek 2: Metoda trapezów dla funkcji $f(x) = 2 + \sin(x)$ na przedziale $[a, b] = [1, 11]$, $n = 10$.



Rysunek 3: Metoda Simpsona dla funkcji $f(x) = 2 + \sin(x)$ na przedziale $[a, b] = [1, 11]$.