Laboratorium nr 2

Algorytm mnożenia macierzy $\boldsymbol{C_{m\times k} = A_{m\times n}B_{n\times k}}$

Zmienne:

całkowite: i, j, k, m, n, s

rzeczywiste: *suma*

tablice (typu rzeczywistego): $\boldsymbol{A}$[1..m, 1..n], $\boldsymbol{B}$[1..n, 1..k], $\boldsymbol{C}$[1..m, 1..k]

Podać m, n, k

Dla i = 1, 2, …, m
    Dla j = 1, 2, …, n
        Podać A_{ij}
Dla i = 1, 2, …, n
    Dla j = 1, 2, …, k
        Podać B_{ij}

Dla i = 1, 2, …, m
    Dla j = 1, 2, …, k
        Podstawić *suma* = 0
        Dla s = 1, 2, …, n
            suma = *suma* + A_{is} * B_{sj}
        C_{ij} = *suma*

Dla i = 1, 2, …, m
    Dla j = 1, 2, …, k
        Drukować C_{ij}

Przykład nr 1. Mnożenie macierzy

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Mamy zatem $C_{2\times2} = A_{2\times3}B_{3\times2}$, stąd

m = 2

n = 3

k = 2

$A_{1,1} = 2 \quad A_{1,2} = 3 \quad A_{1,3} = -1$
$A_{2,1} = 1 \quad A_{2,2} = -4 \quad A_{2,3} = 6$

$B_{1,1} = -1 \quad B_{1,2} = 1$
$B_{2,1} = 2 \quad B_{2,2} = 7$
$B_{3,1} = 3 \quad B_{3,2} = 5$

Przeprowadzamy mnożenie macierzy

```
i = 1 # pierwszy wiersz A
      j = 1 #pierwsza kolumna B
            suma = 0
            s = 1
                  suma = suma + A1,1B1,1 = 0 + 2 * (-1) = -2
            s = 2
                  suma = suma + A1,2B2,1 = -2 + 3 * 2 = 4
            s = 3
                  suma = suma + A1,3B3,1 = 4 + (-1) * 3 = 1
            C1,1 = suma = 1
      j = 2 #druga kolumna B
            suma = 0
            s = 1
                  suma = suma + A1,1B1,2 = 0 + 2 * 1 = 2
            s = 2
                  suma = suma + A1,2B2,2 = 2 + 3 * 7 = 23
            s = 3
                  suma = suma + A1,3B3,2 = 23 + (-1) * 5 = 18
            C1,2 = suma = 18
```

```
i = 2 #drugi wiersz A
    j = 1 #pierwsza kolumna B
        suma = 0
        s = 1
            suma = suma + A2,1B1,1 = 0 + 1 * (-1) = -1
        s = 2
            suma = suma + A2,2B2,1 = -1 + (-4) * 2 = -9
        s = 3
            suma = suma + A2,3B3,1 = -9 + 6 * 3 = 9
        C2,1 = suma = 9
    j = 2 #druga kolumna B
        suma = 0
        s = 1
            suma = suma + A2,1B1,2 = 0 + 1 * 1 = 1
        s = 2
            suma = suma + A2,2B2,2 = 1 + (-4) * 7 = -27
        s = 3
            suma = suma + A2,3B3,2 = -27 + 6 * 5 = 3
        C2,2 = suma = 3
```

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 18 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Algorytm obliczania wyznacznika macierzy kwadratowej $A_{n\times n}$ – wariant I (wykład)

Zmienne:

całkowite: *i, j, n, s*

rzeczywiste: *det*

tablica (typu rzeczywistego): ***A***[1..*n*, 1..*n*]

```
Podać n
Dla i = 1, 2, …, n
      Dla j = 1, 2, …, n
            Podać A_ij
Podstawić det = A_1,1

Dla s = 1, 2, …, n - 1
      Dla i = s + 1, s + 2, …, n
            Dla j = s + 1, s + 2, …, n
                  A_ij = A_ij – A_is * A_sj / A_ss
      det = det * A_s+1,s+1
Drukować det
```

Przedstawiony algorytm działa skutecznie pod warunkiem, że w wyznaczniku wyjściowym nie ma zer na głównej przekątnej. W razie niespełnienia tego warunku wyznacznik należy odpowiednio „przebudować” pamiętając o własnościach wyznacznika.

Przykład nr 2. Obliczanie wyznacznika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{1,1} = 2 \quad A_{1,2} = 2 \quad A_{1,3} = 3$$
$$A_{2,1} = 3 \quad A_{2,2} = 2 \quad A_{2,3} = -1$$
$$A_{3,1} = 4 \quad A_{3,2} = 2 \quad A_{3,3} = 1$$

n = 3

det = $A_{1,1}$ *= 2*

s = 1 #'wyzerowanie' – pierwsza kolumna

    i = s + 1 = 2 #drugi wiersz

        j = s + 1 = 2 #druga kolumna

            $A_{2,2} = A_{2,2} - A_{2,1} * A_{1,2} / A_{1,1} = 2 - 3 * 2 / 2 = -1$

        j = s + 2 = 3 #trzecia kolumna

            $A_{2,3} = A_{2,3} - A_{2,1} * A_{1,3} / A_{1,1} = -1 - 3 * 3 / 2 = -11/2$

    i = s + 2 = 3 #trzeci wiersz

        j = s + 1 = 2 #druga kolumna

            $A_{3,2} = A_{3,2} - A_{3,1} * A_{1,2} / A_{1,1} = 2 - 4 * 2 / 2 = -2$

        j = s + 2 = 3 #trzecia kolumna

            $A_{3,3} = A_{3,3} - A_{3,1} * A_{1,3} / A_{1,1} = 1 - 4 * 3 / 2 = -5$

*det = det ** $A_{2,2}$ *= 2 * (-1) = -2*

s = 2 #'wyzerowanie' – druga kolumna

    i = s + 2 = 3 #trzeci wiersz

        j = s + 1 = 3 #trzecia kolumna

            $A_{3,3} = A_{3,3} - A_{3,2} * A_{2,3} / A_{2,2} = -5 - (-2) * (-11/2) / (-1) = 6$

*det = det ** $A_{3,3}$ *= (-2) * 6 = -12*

A zatem $\det(A) = -12$.

Matematycznie można odzwierciedlić skutek zastosowania powyższego algorytmu za pomocą następujących operacji:

- Elementy pierwszego wiersza dzielimy przez $A_{1,1} = 2$ (wyciągamy 2 przed wyznacznik). Mamy zatem

$$A_{1,1}^{(1)} = \frac{A_{1,1}}{A_{1,1}} = \frac{2}{2} = 1 \qquad A_{1,2}^{(1)} = \frac{A_{1,2}}{A_{1,1}} = \frac{2}{2} = 1 \qquad A_{1,3}^{(1)} = \frac{A_{1,3}}{A_{1,1}} = \frac{3}{2}$$

- Zerujemy elementy pod $A_{1,1}$ (za pomocą pierwszego wiersza)

  (drugi wiersz)

$$A_{2,1}^{(1)} = A_{2,1} - A_{2,1} * A_{1,1}^{(1)} = 3 - 3 * 1 = 0$$
$$A_{2,2}^{(1)} = A_{2,2} - A_{2,1} * A_{1,2}^{(1)} = 2 - 3 * 1 = -1$$
$$A_{2,3}^{(1)} = A_{2,3} - A_{2,1} * A_{1,3}^{(1)} = -1 - 3 * \frac{3}{2} = -\frac{11}{2}$$

  (trzeci wiersz)

$$A_{3,1}^{(1)} = A_{3,1} - A_{3,1} * A_{1,1}^{(1)} = 4 - 4 * 1 = 0$$
$$A_{3,2}^{(1)} = A_{3,2} - A_{3,1} * A_{1,2}^{(1)} = 2 - 4 * 1 = -2$$
$$A_{3,3}^{(1)} = A_{3,3} - A_{3,1} * A_{1,3}^{(1)} = 1 - 4 * \frac{3}{2} = -5$$

- Drugi wiersz mnożymy przez $A_{2,2}^{(1)} = -1$. Wyciągamy -1 przed wyznacznik.

$$A_{2,1}^{(2)} = A_{2,1}^{(1)} * (-1) = 0$$
$$A_{2,2}^{(2)} = A_{2,2}^{(1)} * (-1) = 1$$
$$A_{2,3}^{(2)} = A_{2,3}^{(1)} * (-1) = \frac{11}{2}$$

- Zerujemy element pod $A_{2,2}$ (za pomocą drugiego wiersza)

  (trzeci wiersz)

$$A_{3,2}^{(2)} = A_{3,2}^{(1)} - A_{3,2}^{(1)} * A_{2,2}^{(2)} = -2 - (-2) * 1 = 0$$
$$A_{3,3}^{(2)} = A_{3,3}^{(1)} - A_{3,2}^{(1)} * A_{2,3}^{(2)} = -5 - (-2) * \frac{11}{2} = 6$$

- Dzielimy trzeci wiersz przez $A_{3,3}^{(2)} = 6$ i wyciągamy 6 przed wyznacznik. Ostatecznie otrzymujemy

$$\det(A) = 2 * (-1) * 6 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

  Jak widzimy wyznacznik został sprowadzony do postaci trójkątnej górnej.

Algorytm obliczania wyznacznika macierzy kwadratowej $A_{n\times n}$ – wariant II

Zmienne:

całkowite: i, j, n, s

rzeczywiste: *det*

tablice (typu rzeczywistego): ***A***[1..*n*, 1..*n*], ***B***[1..*n*, 1..*n*]

Podać *n*

Dla i = 1, 2, …, *n*

    Dla j = 1, 2, …, *n*

        Podać A_{ij}

Podstawić *det* = $A_{1,1}$

Dla s = 1, 2, …, *n* - *1*

    Dla $j = s + 1, s + 2, \ldots, n$

        $B_{sj} = A_{sj} / A_{ss}$

    Dla $i = s + 1, s + 2, \ldots, n$

        Dla $j = s + 1, s + 2, \ldots, n$

            $A_{ij} = A_{ij} - A_{is}B_{sj}$

    det = *det* * $A_{s+1,s+1}$

Drukować *det*

Algorytm odwracania nieosobliwej macierzy kwadratowej $A_{n\times n}$

Zmienne:

całkowite: i, j, n, s

rzeczywiste: c, d

tablica (typu rzeczywistego): $\boldsymbol{B}$[1..n, 1..2n]

```
Podać n
Dla i = 1, 2, …, n
      Dla j = 1, 2, …, n
            Podać B_ij

Dla i = 1, 2, …, n
      Dla j = n + 1, n + 2, …, 2n
            B_ij = 0

Dla i = 1, 2, …, n
      B_i,n+i = 1

Dla s = 1, 2, …, n
      c = B_ss
      B_ss = B_ss - 1
      Dla j = s + 1, s + 2, …, 2n
            d = B_sj / c
            Dla i = 1, 2, …, n
                  B_ij = B_ij – d * B_is
Dla i = 1, 2, …, n
      Dla j = n + 1, n + 2, …, 2n
            Drukować B_ij
```

W algorytmie tworzymy macierz rozszerzoną B o wymiarach $n \times 2n$. Podmacierz składająca się z n początkowych kolumn to nasza macierz $A_{n\times n}$, a podmacierz składająca się z n końcowych kolumn to macierz jednostkowa. Idea algorytmu sprowadza się do wykonywania operacji (na wierszach), w wyniku których podmacierz zawierająca n

początkowych kolumn przyjmuje postać macierzy jednostkowej, wówczas podmacierz składająca się z n końcowych kolumn to szukana macierz odwrotna. Przedstawiony algorytm będzie działał poprawnie pod warunkiem, że macierz A jest nieosobliwa (jej wyznacznik jest różny od 0) oraz nie ma elementów zerowych na głównej przekątnej. Jeżeli macierz A zawiera elementy na głównej przekątnej, należy odpowiednio przebudować macierz rozszerzoną B.

Przykład nr 3. Obliczanie macierzy odwrotnej

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

n = 3

Tworzymy macierz rozszerzoną B:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elementy pierwszego wiersza macierzy B dzielimy przez 2. Następnie elementy wiersza pierwszego:

- mnożymy przez -1 i dodajemy do elementów wiersza drugiego
- mnożymy przez -2 i dodajemy do elementów wiersza trzeciego

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B_1$$

Elementy drugiego wiersza (macierz B_1) dzielimy przez -1. Następnie elementy wiersza drugiego mnożymy przez -1 i dodajemy do elementów wiersza trzeciego.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3/2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = B_2$$

Elementy trzeciego wiersza (macierz B_2) dzielimy przez -2. Następnie elementy wiersza trzeciego:

- mnożymy przez -2 i dodajemy do elementów wiersza drugiego
- mnożymy przez -1 i dodajemy do elementów wiersza pierwszego

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = B_3$$

Elementy drugiego wiersza (macierz B_3) dodajemy do elementów wiersza pierwszego

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5/4 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotna jest zatem postaci

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5/4 & 1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3/4 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Obliczenie przykładu według algorytmu

Mamy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n = 3$$

A zatem

$$\begin{matrix} B_{11} = 2 & B_{12} = -2 & B_{13} = 2 & B_{14} = 1 & B_{15} = 0 & B_{16} = 0 \\ B_{21} = 1 & B_{22} = -2 & B_{23} = -1 & B_{24} = 0 & B_{25} = 1 & B_{26} = 0 \\ B_{31} = 2 & B_{32} = -1 & B_{33} = 2 & B_{34} = 0 & B_{35} = 0 & B_{36} = 1 \end{matrix}$$

s = 1

c = $B_{1,1}$ = 2

$B_{1,1}$ = $B_{1,1}$ – 1 = 2 - 1 = 1

j = *s* + 1 = 2 # działania na drugiej kolumnie

d = $B_{1,2}$ / *c* = -2 / 2 = -1

i = 1

$B_{1,2}$ = $B_{1,2}$ – *d* * $B_{1,1}$ = (-2) – (-1) * 1 = -1

i = 2

$B_{2,2}$ = $B_{2,2}$ – *d* * $B_{2,1}$ = (-2) – (-1) * 1 = -1

i = 3

$B_{3,2}$ = $B_{3,2}$ – *d* * $B_{3,1}$ = (-1) – (-1) * 2 = 1

j = *s* + 2 = 3# działania na trzeciej kolumnie

d = $B_{1,3}$ / *c* = 2 / 2 = 1

i = 1

$B_{1,3}$ = $B_{1,3}$ – *d* * $B_{1,1}$ = 2 – 1 * 1 = 1

i = 2

$B_{2,3} = B_{2,3} - d * B_{2,1} = (-1) - 1 * 1 = -2$

$i = 3$

$B_{3,3} = B_{3,3} - d * B_{3,1} = 2 - 1 * 2 = 0$

$j = s + 3 = 4$ # *działania na czwartej kolumnie*

$d = B_{1,4} / c = 1 / 2$

$i = 1$

$B_{1,4} = B_{1,4} - d * B_{1,1} = 1 - (1 / 2) * 1 = 1/2$

$i = 2$

$B_{2,4} = B_{2,4} - d * B_{2,1} = 0 - (1 / 2) * 1 = -1/2$

$i = 3$

$B_{3,4} = B_{3,4} - d * B_{3,1} = 0 - (1 / 2) * 2 = -1$

$j = s + 4 = 5$ # *działania na piątej kolumnie*

$d = B_{1,5} / c = 0 / 2 = 0$

$i = 1$

$B_{1,5} = B_{1,5} - d * B_{1,1} = 0 - 0 * 1 = 0$

$i = 2$

$B_{2,5} = B_{2,5} - d * B_{2,1} = 1 - 0 * 1 = 1$

$i = 3$

$B_{3,5} = B_{3,5} - d * B_{3,1} = 0 - 0 * 2 = 0$

$j = s + 5 = 6$ # *działania na szóstej kolumnie*

$d = B_{1,6} / c = 0 / 2 = 0$

$i = 1$

$B_{1,6} = B_{1,6} - d * B_{1,1} = 0 - 0 * 1 = 0$

$i = 2$

$B_{2,6} = B_{2,6} - d * B_{2,1} = 0 - 0 * 1 = 0$

$i = 3$

$B_{3,6} = B_{3,6} - d * B_{3,1} = 1 - 0 * 2 = 1$

Po pierwszym etapie obliczeń ($s = 1$) otrzymamy

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

s = 2

c = $B_{2,2}$ = -1

$B_{2,2}$ = $B_{2,2}$ – 1 = -2

j = s + 1 = 3 # działania na trzeciej kolumnie

d = $B_{2,3}$ / c = -2 / (-1) = 2

i = 1

*$B_{1,3}$ = $B_{1,3}$ – d * $B_{1,2}$ = 1 – 2 * (-1) = 3*

i = 2

*$B_{2,3}$ = $B_{2,3}$ – d * $B_{2,2}$ = (-2) – 2 * (-2) = 2*

i = 3

*$B_{3,3}$ = $B_{3,3}$ – d * $B_{3,2}$ = 0 – 2 * 1 = -2*

j = s + 2 = 4 # działania na czwartej kolumnie

d = $B_{2,4}$ / c = -1/2 / (-1) = 1/2

i = 1

*$B_{1,4}$ = $B_{1,4}$ – d * $B_{1,2}$ = 1/2 – (1/2) * (-1) = 1*

i = 2

*$B_{2,4}$ = $B_{2,4}$ – d * $B_{2,2}$ = (-1/2) – (1/2) * (-2) = 1/2*

i = 3

*$B_{3,4}$ = $B_{3,4}$ – d * $B_{3,2}$ = -1 – (1/2) * 1 = -3/2*

j = s + 3 = 5 # działania na piątej kolumnie

d = $B_{2,5}$ / c = 1 / (-1) = -1

i = 1

*$B_{1,5}$ = $B_{1,5}$ – d * $B_{1,2}$ = 0 – (-1) * (-1) = -1*

i = 2

*$B_{2,5}$ = $B_{2,5}$ – d * $B_{2,2}$ = 1 – (-1) * (-2) = -1*

i = 3

*$B_{3,5}$ = $B_{3,5}$ – d * $B_{3,2}$ = 0 – (-1) * 1 = 1*

j = s + 4 = 6 # działania na szóstej kolumnie

d = $B_{2,6}$ */ c = 0 / (-1) = 0*

i = 1

$B_{1,6}$ *=* $B_{1,6}$ *– d ** $B_{1,2}$ *= 0 – 0 * (-1) = 0*

i = 2

$B_{2,6}$ *=* $B_{2,6}$ *– d ** $B_{2,2}$ *= 0 – 0 * (-2) = 0*

i = 3

$B_{3,6}$ *=* $B_{3,6}$ *– d ** $B_{3,2}$ *= 1 – 0 * 1 = 1*

Po drugim etapie obliczeń ($s = 2$) otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

s = 3

c = $B_{3,3}$ *= -2*

$B_{3,3}$ *=* $B_{3,3}$ *– 1 = -3*

j = s + 1 = 4 # działania na czwartej kolumnie

d = $B_{3,4}$ */ c = -3/2 / (-2) = 3/4*

i = 1

$B_{1,4}$ *=* $B_{1,4}$ *– d ** $B_{1,3}$ *= 1 – (3/4) * 3 = -5 / 4*

i = 2

$B_{2,4}$ *=* $B_{2,4}$ *– d ** $B_{2,3}$ *= 1/2 – (3/4) * 2 = -1*

i = 3

$B_{3,4}$ *=* $B_{3,4}$ *– d ** $B_{3,3}$ *= -3/2 – (3/4) * (-3) = 3/4*

j = s + 2 = 5 # działania na piątej kolumnie

d = $B_{3,5}$ */ c = 1 / (-2) = -1 / 2*

i = 1

$B_{1,5}$ *=* $B_{1,5}$ *– d ** $B_{1,3}$ *= -1 – (-1 / 2) * 3 = 1 / 2*

i = 2

```
                B2,5 = B2,5 – d * B2,3 = -1 – (-1 / 2)  * 2 = 0
            i = 3
                B3,5 = B3,5 – d * B3,3 = 1 – (-1 / 2)  * (-3) = -1 / 2


        j = s + 3 = 6 # działania na szóstej kolumnie
            d = B3,6 / c = 1 / (-2) = -1 / 2
            i = 1
                B1,6 = B1,6 – d * B1,3 = 0 – (-1 / 2) * 3 = 3 / 2
            i = 2
                B2,6 = B2,6 – d * B2,3 = 0 – (-1 /2)  * 2 = 1
            i = 3
                B3,6 = B3,6 – d * B3,3 = 1 – (-1 / 2)  * (-3) = -1 / 2
```

Po trzecim etapie obliczeń ($s = 3$) otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5/4 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Trzy ostatnie kolumny macierzy to szukana macierz odwrotna:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5/4 & 1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3/4 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Pseudokody przygotowano na podstawie książki:

Ewa Majchrzak, Bohdan Mochnacki, *Metody numeryczne. Podstawy teoretyczne, aspekty praktyczne i algorytmy*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2004.