НУС: $\lim a_n = 0$ — любое; $\frac{\infty}{\neq}$ const — расход.

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha \leq 1 \to$ расход; $\alpha > 1 \to$ сход. (Дирихле)

$\sum b_n \to$ сход $\oplus$ $a_n \leq b_n \Rightarrow \sum a_n$ — сход

$\to$ расход $\oplus$ $a_n \geq b_n \Rightarrow \sum a_n$ — расх.

$\begin{cases} \sum a_n; \sum b_n \to \oplus \\ \lim \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0, \neq \infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ оба ряда сход or расход.

Даламб

$\lim\limits_{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$: $<1 \to$ сход; $>1 \to$ расход; $=1 \to$ нет отв.

$a$; $a!$; $()!$...

Радикальн.: $\lim\limits_{\infty} \sqrt[n]{a_n} = D$

$a^n$; $\sqrt{a}$

Интегр.: $\int^{\infty} u_n(x) = \begin{cases} const \to \text{сход.} \\ \infty \to \text{расх.} \end{cases}$

~~const~~

степ. ряды: $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \upsilon \cdot x$

$k \neq 0 \to |\upsilon| < 1$

$= 0 \to x \in (-\infty; +\infty)$

$\infty \to$ расход.

Знакочеред.:

$\sum |a_n|$ — НУС — Лейбниц: знакочеред, $\lim |u_n| = 0$, $|a_{n+1}| < |a_n|$

абс. — расх

$\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ | $\cos(\pm\pi n) = (-1)^n$, $\sin \pi n = 0$

| ° | $\pi$ | sin | cos | tg | ctg |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | – |
| 30 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt3}{2}$ | $\frac{\sqrt3}{3}$ | $\sqrt3$ |
| 45 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt2}{2}$ | $\frac{\sqrt2}{2}$ | 1 | 1 |
| 60 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt3$ | $\frac{\sqrt3}{3}$ |
| 90 | $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 | – | 0 |
| 120 | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\sqrt3$ | $-\frac{\sqrt3}{3}$ |
| 135 | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt2}{2}$ | $-\frac{\sqrt2}{2}$ | $-1$ | $-1$ |
| 150 | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt3}{2}$ | $-\frac{\sqrt3}{3}$ | $-\sqrt3$ |
| 180 | $\pi$ | 0 | $-1$ | 0 | – |

Лейбниц

Ряд Лорана:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}_{\text{правильн.}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n}_{\text{главная}}$$

Особые т.:

$z_0$ — устран.: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = const$

ГЧЛ отсутствует

$z_0$ — полюс: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$

ГЧЛ содержит $(n)$ членов — порядок

$z_0$ — существен.: $\lim f(z)$ — $\nexists$

ГЧЛ содержит $\infty$ членов

$\left.\begin{aligned} f(z) &= \sin \frac{a}{z-z_0} \\ f(z) &= \cos \frac{a}{z-z_0} \\ f(z) &= e^{\frac{a}{z-z_0}} \end{aligned}\right\} z_0$ — ос. т.

Вычеты:

$z_0$ — устран.: $\operatorname{res} f(z_0) = 0$

$z_0$ — существ.: $\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$

$f(z) = (z-5)^3 \cos \frac{2}{z-5}$

$(z-5)^3 \left(1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{2^4}{4!(z-z_0)}\right)$

$z_0 = 5$ — сущ.

$\Rightarrow \operatorname{res} f(z_0) = \frac{2^4}{4!}$

$z_0$ — полюс

порядок: $\frac{1}{(z-z_0)^k}$

$n(1)$: $\operatorname{res} f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \left(f(z)(z-z_0)\right)$

$n(2)$: $\operatorname{res} f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \left(\left(f(z)(z-z_0)^2\right)'\right)$

$n(n)$: $\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim\limits_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(f(z)(z-z_0)^n\right)$

$\left.\begin{matrix} \sin x & \operatorname{tg} x \\ \arcsin x & \operatorname{arctg} x \\ e^x - 1 & \ln(1+x) \end{matrix}\right\} \sim x$

$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

$b^x - 1 \sim x \ln b$

$\log_b(1+x) \sim \frac{x}{\ln b}$

$(1+x)^b - 1 \sim bx$

$Z = x + iy = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = re^{i\varphi}$

$\arg Z = \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, x > 0 & \text{I; IV} \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{II} \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{III} \\ \frac{\pi}{2} \quad x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \quad x = 0, y < 0 \end{cases}$

$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$; $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

Эйлера: $e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$

$\sin(iz) = i \operatorname{sh} z$ | $\operatorname{ch}(iz) = \cos z$

$\cos(iz) = \operatorname{ch} z$ | $\operatorname{sh}(iz) = i \sin z$

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$

$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$, $a \in \mathbb{C}$

$f(z) = u(x;y) + i v(x;y)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ | $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$\sin(\alpha + \beta i) = \sin\alpha \operatorname{ch}\beta + i \cos\alpha \operatorname{sh}\beta$

$\cos(\alpha + \beta i) = \cos\alpha \operatorname{ch}\beta - i \sin\alpha \operatorname{sh}\beta$

$z^3 = x^3 + 3x^2 yi - 3xy^2 - y^3 i$

Муавра: $w = \sqrt[n]{z}$, $z_k = |z| \left[\cos\left(\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right) + i \sin(\ldots\right.$