

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 55

Студент
Родионов Максим Артемович
Р3131

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $3 < |x_1 1x_2 - x_3 x_4 x_5| < 6$ и неопределенное значение при $|x_1 1x_2 - x_3 x_4 x_5| = 1$

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_1 1x_2$	$x_3 x_4 x_5$	$x_1 1x_2$	$x_3 x_4 x_5$	f
0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0
1	0	0	0	0	1	2	1	2	1	d
2	0	0	0	1	0	2	2	2	2	0
3	0	0	0	1	1	2	3	2	3	d
4	0	0	1	0	0	2	4	2	4	0
5	0	0	1	0	1	2	5	2	5	0
6	0	0	1	1	0	2	6	2	6	1
7	0	0	1	1	1	2	7	2	7	1
8	0	1	0	0	0	3	0	3	0	0
9	0	1	0	0	1	3	1	3	1	0
10	0	1	0	1	0	3	2	3	2	d
11	0	1	0	1	1	3	3	3	3	0
12	0	1	1	0	0	3	4	3	4	d
13	0	1	1	0	1	3	5	3	5	0
14	0	1	1	1	0	3	6	3	6	0
15	0	1	1	1	1	3	7	3	7	1
16	1	0	0	0	0	6	0	6	0	0
17	1	0	0	0	1	6	1	6	1	1
18	1	0	0	1	0	6	2	6	2	1
19	1	0	0	1	1	6	3	6	3	0
20	1	0	1	0	0	6	4	6	4	0
21	1	0	1	0	1	6	5	6	5	d
22	1	0	1	1	0	6	6	6	6	0
23	1	0	1	1	1	6	7	6	7	d
24	1	1	0	0	0	7	0	7	0	0
25	1	1	0	0	1	7	1	7	1	0
26	1	1	0	1	0	7	2	7	2	1
27	1	1	0	1	1	7	3	7	3	1
28	1	1	1	0	0	7	4	7	4	0
29	1	1	1	0	1	7	5	7	5	0
30	1	1	1	1	0	7	6	7	6	d
31	1	1	1	1	1	7	7	7	7	0

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 x_5$$

Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$		$Z(f)$
m_1	00001	✓	m_1-m_3	000X1	01100
m_6	00110	✓	m_1-m_{17}	X0001	000X1
m_{17}	10001	✓	m_6-m_7	0011X	X0001
m_{18}	10010	✓	m_3-m_7	00X11	0011X
m_3	00011	✓	$m_{17}-m_{21}$	10X01	00X11
m_{10}	01010	✓	$m_{18}-m_{26}$	1X010	10X01
m_{12}	01100	✓	$m_{10}-m_{26}$	X1010	1X010
m_7	00111	✓	m_7-m_{15}	0X111	X1010
m_{26}	11010	✓	$m_{21}-m_{23}$	101X1	0X111
m_{21}	10101	✓	$m_{26}-m_{27}$	1101X	101X1
m_{15}	01111	✓	$m_{26}-m_{30}$	11X10	1101X
m_{27}	11011	✓	m_7-m_{23}	X0111	11X10
m_{23}	10111	✓			X0111
m_{30}	11110	✓			

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы							
		0	0	0	1	1	1	1	
		0	0	1	0	0	1	1	
		1	1	1	0	0	0	0	
		1	1	1	0	1	1	1	
		0	1	1	1	0	0	1	
		6	7	15	17	18	26	27	
	01100								
	000X1								
A	X0001				X				
	0011X	X	X						
	00X11		X						
B	10X01				X				
	1X010					X	X		
	X1010						X		
	0X111		X	X					
	101X1								
	1101X						X	X	
	11X10						X		
	X0111		X						

Ядро покрытия:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0011X \\ 0X111 \\ 1X010 \\ 1101X \end{array} \right\}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

		0-кубы
Простые импликанты		1
		0
		0
		0
		1
		17
A	X0001	X
B	10X01	X

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = (A \vee B)$$

Приведем выражение в ДНФ:

$$Y = A \vee B$$

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \begin{Bmatrix} T \\ A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0011X \\ 0X111 \\ 1X010 \\ 1101X \\ X0001 \end{Bmatrix} \quad C_2 = \begin{Bmatrix} T \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0011X \\ 0X111 \\ 1X010 \\ 1101X \\ 10X01 \end{Bmatrix}$$

$$S_1^a = 20 \quad S_2^a = 20$$

$$S_1^b = 25 \quad S_2^b = 25$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} 0011X \\ 0X111 \\ 1X010 \\ 1101X \\ X0001 \end{Bmatrix}$$

$$S^a = 20$$

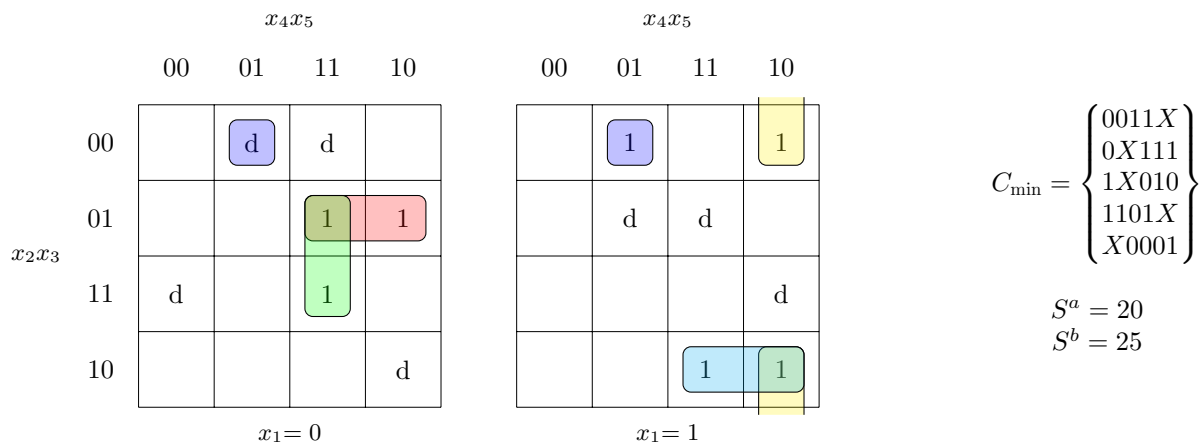
$$S^b = 25$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \vee \overline{x_1} x_3 x_4 x_5 \vee x_1 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5$$

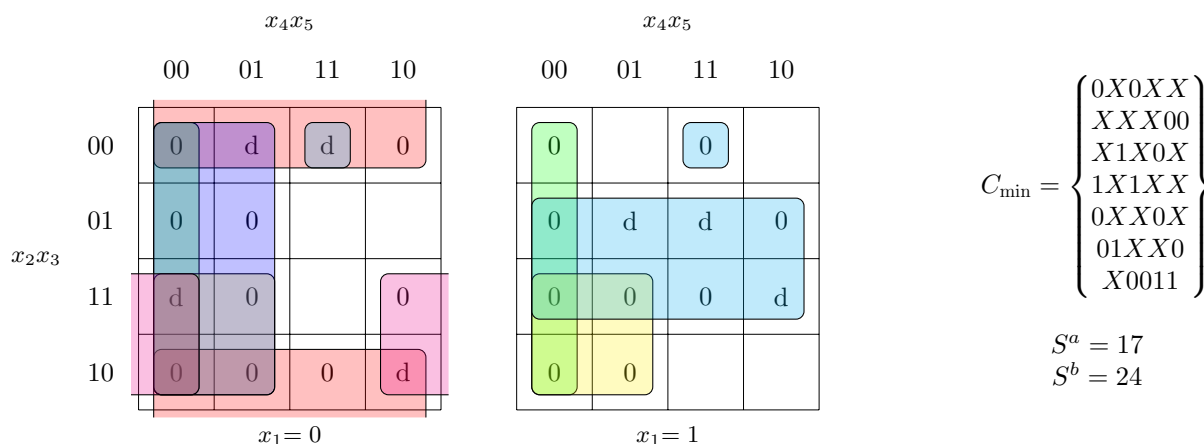
Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ



$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \vee \overline{x_1} x_3 x_4 x_5 \vee x_1 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5$$

Определение МКНФ



$$f = (x_1 \vee x_3) (x_4 \vee x_5) (\overline{x_2} \vee x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) (x_1 \vee x_4) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_5) (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \vee \overline{x_1} x_3 x_4 x_5 \vee x_1 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \quad S_Q = 25 \quad \tau = 2$$

$$f = x_1 \overline{x_3} x_4 (x_2 \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} x_3 x_4 (\overline{x_2} \vee x_5) \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \quad S_Q = 19 \quad \tau = 3$$

$$\varphi = \overline{x_2} x_5$$

$$\overline{\varphi} = x_2 \vee \overline{x_5}$$

$$f = x_1 \overline{x_3} x_4 \overline{\varphi} \vee \overline{x_1} x_3 x_4 (\overline{x_2} \vee x_5) \vee \varphi \overline{x_3} \overline{x_4} \quad S_Q = 19 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = x_1 \overline{x_3} x_4 (x_2 \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} x_3 x_4 (\overline{x_2} \vee x_5) \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \quad S_Q = 19 \quad \tau = 3$$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee x_3) (x_4 \vee x_5) (\overline{x_2} \vee x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) (x_1 \vee x_4) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_5) (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 24 \quad \tau = 2$$

$$f = (x_4 \vee \overline{x_2} x_5) (x_1 \vee x_3 x_4 (\overline{x_2} \vee x_5)) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 4$$

$$\varphi = \overline{x_2} x_5$$

$$\overline{\varphi} = x_2 \vee \overline{x_5}$$

$$f = (x_4 \vee \varphi) (x_1 \vee x_3 x_4 (\overline{x_2} \vee x_5)) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) (\overline{\varphi} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = (x_4 \vee x_1 \overline{x_2} x_5) (x_1 \vee x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_5) (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 3$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_1 \overline{x_3} x_4 (x_2 \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} x_3 x_4 (\overline{x_2} \vee x_5) \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \quad (S_Q = 19, \tau = 3)$$

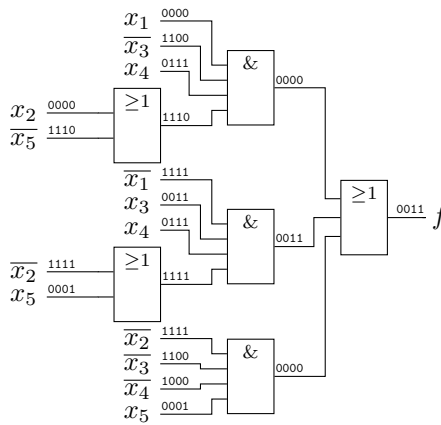
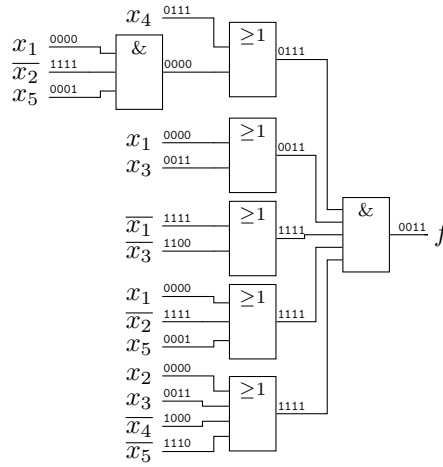


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_4 \vee x_1 \overline{x_2} x_5) (x_1 \vee x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_5) (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \quad (S_Q = 21, \tau = 3)$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_1 \overline{x_3} x_4 \overline{\varphi} \overline{x_1} x_3 x_4 x_2 \overline{x_5} \overline{\varphi} \overline{x_3} \overline{x_4}}}} \quad (S_Q = 24, \tau = 6)$$

$$\varphi = \overline{x_2} x_5$$

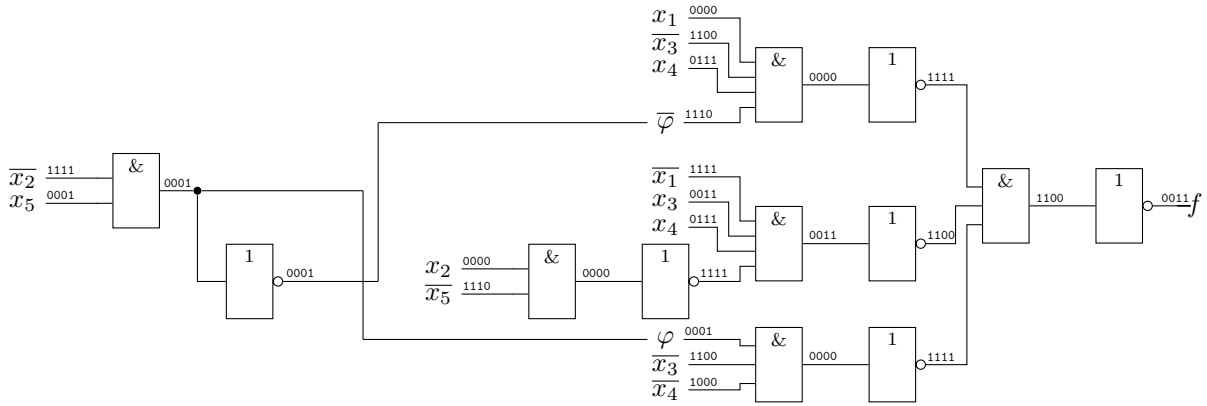
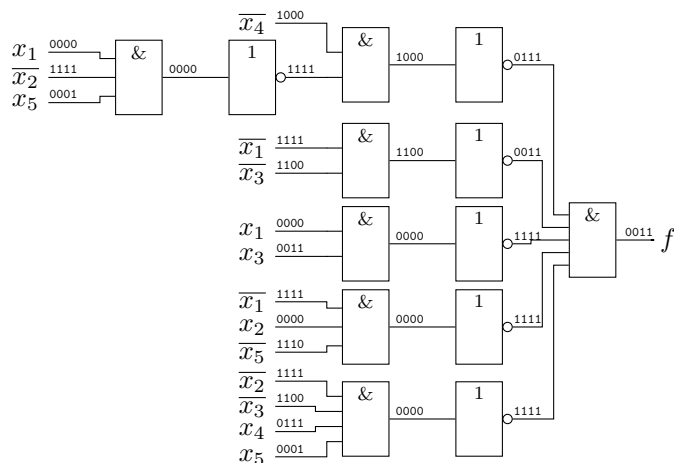


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_4} x_1 \overline{x_2} x_5} \overline{\overline{x_1} \overline{x_3} x_1 x_3} \overline{\overline{x_1} x_2 \overline{x_5} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5}} \quad (S_Q = 27, \tau = 5)$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

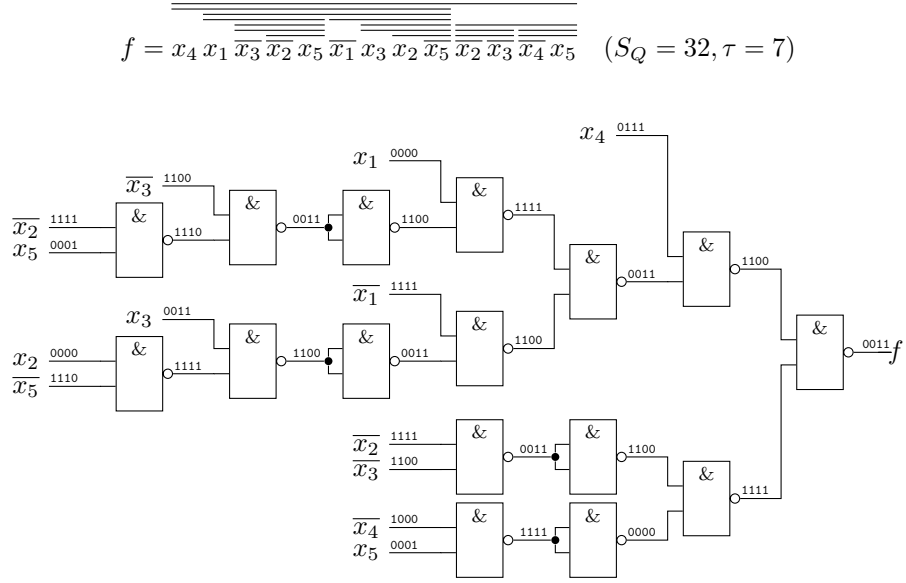


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

