

Семинар 5. Исследование свойств стационарных процессов: МА-процессы

План

1. Анализ свойств МА-процессов (по сгенерированным данным).
2. Решение задач: обратимость и основные свойства МА-процессов.

1. Анализ свойств МА-процессов в Gretl.

Файл: **МА.dta**.

Были сгенерированы белый шум и МА-процессы 1, 2,3-го порядков (N=200):
y1, y2, y3, y4, y5 .

Процесс	Уравнение	Переменная
белый шум	$y_t = \varepsilon_t$	
МА(1)	$y_t = \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$	
МА(1) с константой	$y_t = 2 - 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$	Подсказка: $E(y_t)=2$
МА(2)	$y_t = 1.3\varepsilon_{t-1} + 1.4\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$	
МА(3) с константой	$y_t = 10 + \varepsilon_{t-1} + 0.1\varepsilon_{t-2} + 3\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$	Подсказка: $E(y_t)=10$

Вопросы:

- Какими свойствами обладают ACF/PACF для МА-процессов, как порядок МА влияет на поведение ACF/PACF? Как различить МА-процессы разных порядков?

Процесс	ACF (характер функции)	PACF (характер функции)
Белый шум	Равна нулю	Равна нулю
МА(1)		
МА(2)		
МА(3)		

- Как константа в уравнении процесса влияет на математическое ожидание процесса?

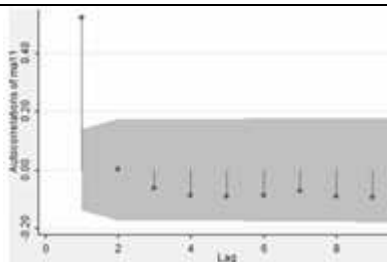
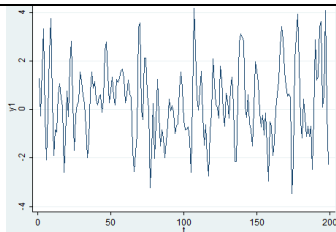
Пример вычисления математического ожидания:

$$y_t = 2 - 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \rightarrow E(y_t) = E(2) - E(0.8\varepsilon_{t-1}) + E(\varepsilon_t) = 2$$

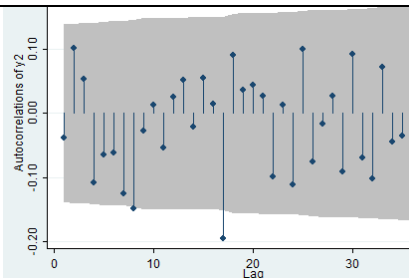
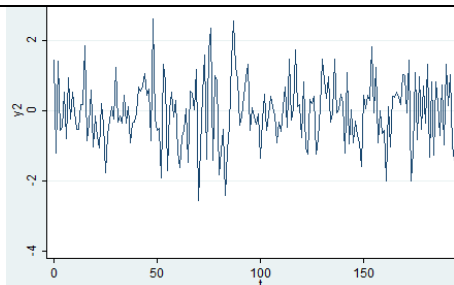
$$E(\varepsilon_t) = 0$$

По виду графика, ACF и PACF определите, к какому МА-процессу относятся сгенерированные процессы? Обоснуйте почему.

Поведение графика процесса	Поведение графика ACF/ PACF	Предполагаемый процесс
----------------------------	-----------------------------	------------------------



Пик на лаге 1



Все значения ACF равны 0

Самостоятельно. Проанализируйте поведение временных рядов

- постройте график временного ряда;
- постройте графики автокорреляционной и частной автокорреляционной функции;
- Сравните с теоретическими свойствами ACF/PACF MA-процессов.

2. Решение задач: обратимость и основные свойства МА-процессов.

Рассмотрите основные свойства стационарных процессов.

2.1. **МА(1).** Что можно сказать про стационарность МА-процесса?

$$y_t = 5 - 0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Показать, обратим ли МА-процесс, и представить МА-процесс в виде $AR(\infty)$, если это возможно.

2.2. **МА(1).** Сравните характеристики процессов. Как меняются характеристики процессов (математическое ожидание, дисперсия, ковариация, корреляция) при добавлении в уравнение константы?

$$y_t = 5 - 0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{и} \quad y_t = -0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Рассчитайте $E(y_t)$, $V(y_t)$, $\gamma(k)$, $\rho(k)$, $\rho_{\text{част}}(k)$, $k=1,2,3$. Постройте схематично графики ACF и PACF. Опишите поведение коррелограмм и обобщите на случай ACF **МА(q)**-процесса.

2.3. **МА(2).** Показать, обратим ли МА-процесс:

$$y_t = 5 + 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.1\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

- Рассчитайте $E(y_t)$, $V(y_t)$, $\gamma(k)$, $\rho(k)$, $\rho_{\text{част}}(k)$, $k=1,2,3$. Постройте схематично графики ACF и PACF. Опишите поведение коррелограмм.

- Рассчитайте прогноз на 3 шага вперед, ошибку прогноза, дисперсию ошибки прогноза и постройте 95 % доверительный интервал прогноза, предположив, что $\varepsilon_T = 0.5$; $\varepsilon_{T-1} = 0.25$; $\sigma^2 = 1$.

Домашнее задание (ТДЗ) 5. МА-процессы (самоконтроль)

Дан процесс

$$y_t = 5 + \varepsilon_t - 0.2\varepsilon_{t-1} - 0.1\varepsilon_{t-2}$$

1. Показать, обратим ли МА-процесс, и представить МА-процесс в виде $AR(\infty)$, если это возможно.
2. Рассчитайте $E(y_t)$, $V(y_t)$, $\gamma(k)$, $k=1,2,3$. Сравните с $E(y_t)$ для $y_t = \varepsilon_t - 0.2\varepsilon_{t-1} - 0.1\varepsilon_{t-2}$ (для процесса без константы).
3. Рассчитайте $\rho(k)$, $\rho_{част}(k)$, $k=1,2,3$. Постройте схематично графики ACF и PACF.