

План занятия

1. Модели временных рядов и их характеристики: вычисление и анализ стационарности.
2. ACF и PACF: определение, построение, анализ. Анализ стационарности ВР на основе ACF и PACF.

1. **Модели временных рядов и их характеристики.** Изучите простейшие модели временных рядов и их характеристики

белый шум (БШ)	$y_t = \varepsilon_t$
линейный тренд	$tr1_t = 0.1 + 0.1 \cdot t + \varepsilon_t$
параболический тренд	$tr2_t = 0.1 + 0.0002t^2 + \varepsilon_t$
случайное блуждание	$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$
случайное блуждание с дрейфом	$y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t$
случайный процесс как скользящее среднее для БШ	$Z_t = 1/3(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})$

Вычислите *аналитически* математическое ожидание и дисперсию для рассматриваемых процессов. Сделайте вывод о стационарности.

Пример (из лекции):

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t = (y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = (y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \dots = y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i}$$

$$E(y_t) = E(y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i}) = y_0 + 0 = const$$

$$V(y_t) = V(y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i}) = 0 + t\sigma^2 \neq const$$

Вывод: процесс случайного блуждания не является стационарным.

2. Автокорреляционные функции ACF/PACF процессов.

2.1. Как вычислить автокорреляционную функцию? Рассчитайте по формулам значение ACF/PACF 1, 2, 3-го порядка для TFR (в Excel). Схематично постройте график ACF/PACF.

t	Yt (TFR)		Лаг (τ)	ACF ρτ	PACF φτ
2015	1,78		1		
2016	1,76		2		
2017	1,62		3		
2018	1,58				

Формулы: ACF - автокорреляционная функция

$$\hat{\rho}_1 = cor(y_t, y_{t-1});$$

$$\hat{\rho}(1) = \hat{\rho}_1 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (y_t - \bar{y}_t)(y_{t-1} - \bar{y}_t)$$

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \sum_{t=\tau+1}^T (y_t - \bar{y}_t)(y_{t-\tau} - \bar{y}_t)$$

Родионова Л.А. Матрица «Прикладной статистический анализ временных рядов и их практическое применение»

РАСФ – Частная автокорреляционная функция

$$\phi_1 = \rho_{\text{част}}(1) = \text{Cor}(Y_t, Y_{t+1}) = \rho_1$$

$$\phi_2 = \text{Cor}(Y_t, Y_{t+2} \mid Y_{t+1} = \mu) = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\phi_3 = \dots$$

2.2. Для выполнения дальнейшего анализа используйте сгенерированные данные (файл TS2).

Обозначение	Случайный процесс
wn	белый шум
tr1	линейный тренд
tr2	параболический тренд
rw	случайное блуждание
rwd	случайное блуждание с дрейфом
cos	случайный процесс с периодической составляющей $Y_t = 3\cos(2\pi t/20) + \varepsilon_t$
s_wn	случайный процесс как скользящее среднее для БШ $Z_t = 1/3(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})$

Проанализируйте временные ряды, используя команды:

Простейшие команды R

Работа с временными рядами	
y=c(1, 2, 3)	Создание вектора
yt <- ts(y, start=2017)	Создание ts объекта
remove(yt)	Удалить вектор/объект
plot(yt) plot.ts(yt)	Построить график временного ряда yt
acf(y)	построить автокорреляционную функцию для y
acf(y, type="partial")	построить частную автокорреляционную функцию для y
Box.test(S2\$wn, lag=10, type="Lj")	Тест Льюинга-Бокса на автокорреляцию

2.3. Для белого шума вычислите в R значения автокорреляции 1-го, 2-го и 3-го порядка 2 разными способами:

- как корреляцию между y_t и y_{t-i} (через лаговый оператор)

Команда R:

```
d1 <- data.frame(wn=S2$wn, L1wn=lag(S2$wn))
cor(d1)
```

```
> cor(d1, use = "complete.obs")
```

```
      wn      L1wn      L2wn      L3wn      L4wn
wn    1.000  0.117 -0.053 -0.155 -0.067
L1wn  0.117  1.000  0.113 -0.052 -0.147
L2wn -0.053  0.113  1.000  0.113 -0.052
L3wn -0.155 -0.052  0.113  1.000  0.114
L4wn -0.067 -0.147 -0.052  0.114  1.000
```

Autocorrelations of series 's2\$wn', by lag

```
      0      1      2      3      4
1.000  0.115 -0.052 -0.148 -0.067
```

- используя встроенную процедуру ACF. Сравните результаты.

Команда R:

```
acf(S2$wn)
```

2.4. Проведите тест Льюинга-Бокса на наличие автокорреляции. В дальнейшем будет использоваться для анализа остатков.

Команда R:

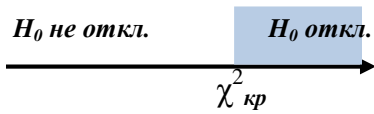
Box.test(S2\$wn, lag=10, type="Lj")

Box-Pierce test

data: S2\$wn

x-squared = 11, df = 10, p-value = 0.4

Тест Льюинга-Бокса (Ljung-Box): Тест на автокорреляцию

Нулевая гипотеза	Статистика критерия
$H_0: \rho_1 = \dots = \rho_k = 0$ («автокорреляция до лага k отсутствует»)	$Q = T(T+2) \sum_{j=1}^k \frac{1}{T-j} \hat{\rho}_j^2 \sim \chi^2(k)$ Т- длина временного ряда
Сравнение $Q_{набл}$ и $\chi^2_{кр}$ удобно рассматривать в виде схемы: <div style="text-align: center;">  </div>	
Если $Q_{набл} > \chi^2_{кр}$, то нулевая гипотеза об отсутствии автокорреляции отклоняется на уровне значимости α .	

2.5. Вычислите ACF и PACF для всех процессов, используя встроенные процедуры. Как ведут себя графики ACF и PACF для рассмотренных выше стационарных и нестационарных процессов? Сделайте вывод.

2.6. Повторите пункт 2.3 и 2.5 для других изучаемых случайных процессов. Напишите do-файл и краткий отчет с выводами и полученными графиками.

2.7. Проведите аналогичный анализ в Gretl.

Текущее домашнее задание (ТДЗ) 2. «Временной ряд: введение»

!!!См дедлайн в SmartLMS Срок выполнения – 1 неделя.

Файл: WB_Russia.xls (закладка Data)

Источник: <https://data.worldbank.org/country/russian-federation?locale=ru>

! можно взять свои данные по другой стране.

1. Опишите показатель:

показатель	
страна	
период	

Рассчитайте: приросты (разности), темпы прироста. Заполните таблицу (расчет по формулам для последнего года обязательно), приведите необходимые формулы расчета, опишите полученные результаты. Как изменился выбранный Вами показатель за рассматриваемый период? За

последний год? (расчет можно сделать в Excel/любом пакете, обязательно к результатам дать пояснения!)

t	Y _t	Y _{t-1}	Y _{t-2}	Y _{t-3}	ΔY _t (прирост, разность)	Темп прироста	Δln Y _t

2. Рассчитайте **по формулам** значения ACF 1, 2, 3-го порядка для выбранного Вами показателя. Приведите подробные расчеты в виде формул вычислений. Какие сложности возникли для маленькой выборки? Схематично постройте график ACF. Опишите поведение ACF.
3. Рассчитайте **по формулам** значения PACF 1, 2, 3-го порядка для выбранного Вами показателя. Приведите подробные расчеты в виде формул вычислений. Схематично постройте график PACF. Опишите поведение PACF.

Лag (τ)	ACF ρ _τ	PACF φ _τ
1		
2		
3		

Требования к оформлению ДЗ:

- Выполненная домашняя работа загружается в SmartLMS в формате pdf.
- Расчеты в Excel (других пакетах) приложить. Не забываем для каждого ДЗ писать выводы, ответы на вопросы и рассуждения.
- Сдача работы в группе по 2 человека (не забывайте указывать авторов в тексте работы).