

Отчет по лабораторной работе 1.4.8 ИЗМЕРЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА МЕТОДОМ АКУСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Максим Осипов, Б03-504

05.11.2025

1 Аннотация

Цель работы: исследовать явление акустического резонанса в тонком стержне; измерить скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов и различных размеров; измерить модули Юнга различных материалов.

В работе используются: генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитные излучатель и приёмник колебаний, набор стержней из различных материалов.

2 Теоретическая справка

2.1 Основные характеристики упругих свойств

Основной характеристикой упругих свойств твёрдого тела является его *модуль Юнга E* . Согласно закону Гука, если к элементу среды приложено некоторое механическое напряжение σ , действующее вдоль некоторой оси x (напряжения по другим осям при этом отсутствуют), то в этом элементе возникнет относительная деформация вдоль этой же оси $\varepsilon = \Delta x/x_0$, определяемая соотношением:

$$\sigma = \varepsilon E \quad (1)$$

Распространение акустических волн обеспечивается за счёт упругости и инерции среды. Волны сжатия/растяжения, распространяющиеся вдоль оси, по которой происходит деформация, называются *продольными*. Скорость распространения продольной акустической волны в простейшем случае длинного тонкого стержня определяется соотношением:

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2)$$

где ρ — плотность среды.

2.2 Собственные колебания стержня. Стоячие волны

В случае гармонического возбуждения колебаний с частотой f продольная волна в тонком стержне может быть представлена в виде суперпозиции двух бегущих навстречу гармонических волн:

$$\xi(x, t) = A_1 \sin(\omega t - kx + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + kx + \varphi_2) \quad (3)$$

где $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Для свободных (незакреплённых) концов стержня граничные условия:

$$\sigma(0) = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \sigma(L) = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (4)$$

Из граничных условий следует, что амплитуды и фазы падающей и отражённой волн одинаковы:

$$A_1 = A_2 \quad (5)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (6)$$

С учётом этих условий функция (3) преобразуется к виду гармонической стоячей волны:

$$\xi(x, t) = 2A \cos(kx) \sin(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

Второе граничное условие (4) приводит к уравнению $\sin kL = 0$, решения которого определяют набор допустимых значений волновых чисел:

$$k_n L = \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Выражая через длину волны $\lambda = 2\pi/k$:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (9)$$

Допустимые значения частот (собственные частоты колебаний):

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (10)$$

Именно при совпадении внешней частоты с одной из частот f_n в стержне возникает акустический резонанс.

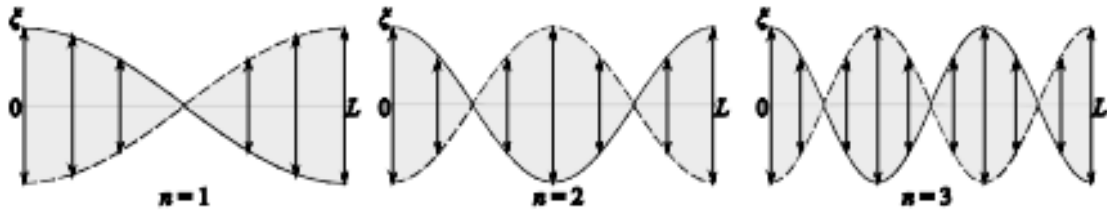


Рисунок 1: . Собственные продольные колебания стержня с незакреплёнными концами (для наглядности изображение дано не в масштабе, реальные смещения малы по сравнению с длиной стержня)

Амплитуда колебаний смещения среды распределена вдоль стержня по гармоническому закону: $\xi_0(x) = 2A \cos kx$. Точки с максимальной амплитудой называются *пучностями смещения*, точки с минимальной (нулевой) амплитудой — *узлами смещения*. Согласно закону Гука (1) в пучности смещения имеет место узел напряжения, и, наоборот, в узлах смещения имеется пучность напряжения.

3 Экспериментальная установка

Экспериментальная установка

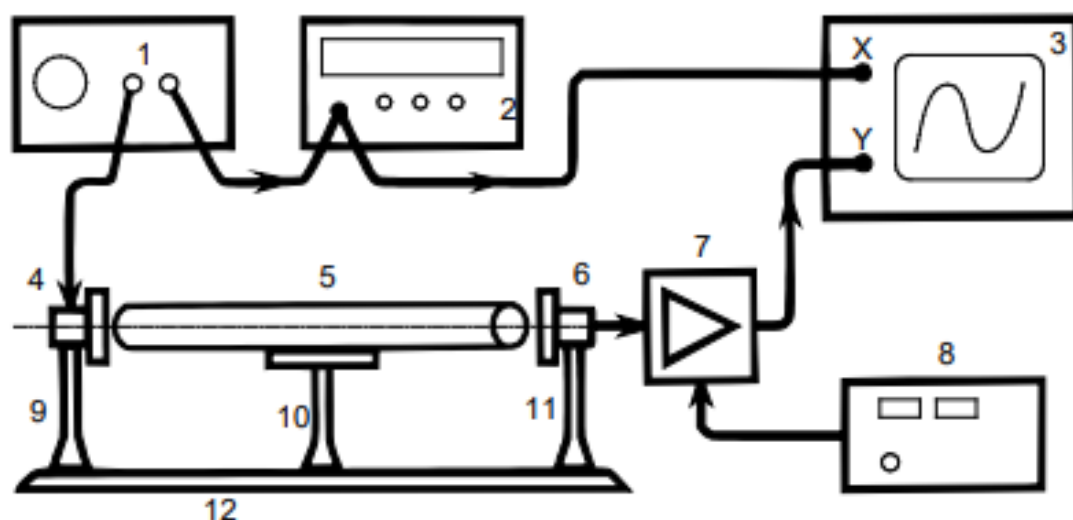


Рис. 3. Схема установки: 1 – генератор звуковой частоты, 2 – частотомер, 3 – осциллограф, 4 – электромагнит-возбудитель, 5 – образец, 6 – электромагнит-приёмник, 7 – усилитель звуковой частоты, 8 – блок питания усилителя, 9, 11 – стойки крепления электромагнитов, 10 – стойка крепления образца, 12 – направляющая

Исследуемый стержень 5 размещается на стойке 10. Возбуждение и приём колебаний в стержне осуществляются электромагнитными преобразователями 4 и 6, расположенными рядом с торцами стержня. Крепления 9, 11 электромагнитов дают возможность регулировать их расположение по высоте, а также перемещать вправо-влево по столу 12. Электромагнит 4 служит для возбуждения упругих механических продольных колебаний в стержне. На него с генератора звуковой частоты 1 подаётся сигнал синусоидальной формы: протекающий в катушке электромагнита ток создаёт пропорциональное ему магнитное поле, вызывающее периодическое воздействие заданной частоты на торец стержня (к торцам стержней из немагнитных материалов прикреплены тонкие стальные шайбы). Рядом с другим торцом стержня находится аналогичный электромагнитный датчик 6, который служит для преобразования механических колебаний в электрические. Принцип работы электромагнитных датчиков описан подробнее ниже. Сигнал с выхода генератора поступает на частотомер 2 и на вход канала X осциллографа 3. ЭДС, возбуждаемая в регистрирующем электромагните 6, пропорциональная амплитуде колебаний торца стержня, усиливается усилителем 7 и подаётся на вход канала Y осциллографа. Изменяя частоту генератора и наблюдая за амплитудой сигнала с регистрирующего датчика, можно определить частоту акустического резонанса в стержне. Наблюдения в режиме X–Y позволяют сравнить сигналы генератора и датчика, а также облегчает поиск резонанса при слабом сигнале.

4 Методика измерений

Для определения модуля Юнга материала E используется формула:

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (11)$$

где u – скорость распространения акустических волн, ρ – плотность стержня.

Скорость u определяется методом акустического резонанса. При совпадении частоты возбуждения с собственной частотой колебаний стержня f_n возникает стоячая волна с резким увеличением амплитуды. Скорость звука вычисляется по формуле:

$$u = 2L \frac{f_n}{n} \quad (12)$$

где L – длина стержня, n – номер гармоники.

В реальном стержне могут возбуждаться поперечные колебания, поэтому следует учитывать только резонансы, описываемые зависимостью (12).

Ширина резонансного максимума определяется добротностью системы:

$$\Delta f \sim f_{\text{рез}}/Q$$

Металлические стержни имеют высокую добротность ($Q \sim 10^2 \nabla \cdot 10^3$), что приводит к малой ширине резонанса ($\Delta f \sim 1$ Гц при $f \sim 5$ кГц) и большому времени установления колебаний ($T_{\text{уст}} \sim Q/f$). Поэтому поиск резонанса проводят, медленно изменяя частоту генератора.

5 Ход работы

5.1 Результаты измерений

Table 1: Результаты измерений частот для различных материалов

№	Медь, частота кГц			№	Сталь, частота кГц			№	Дюраль, частота кГц		
1	3.2512	3.2499	3.2501	1	4.132	4.1328	4.1326	1	4.2601	4.2589	4.2593
2	6.4982	6.4796	6.489	2	8.2485	8.2486	8.2509	2	8.4677	8.4714	8.4692
3	9.2815	9.3003	9.2914	3	12.583	12.585	12.581	3	12.785	12.781	12.784
4	12.9665	13.1415	12.9615	4	16.533	16.548	16.54	4	17.067	17.049	17.054
5	15.7493	15.6998	15.712	5	20.192	20.189	20.19	5	21.3	21.295	21.302

Table 2: Измерения параметров образцов

№	Медь			№	Сталь			№	Дюраль		
	d, мм	m, г	l, мм		d, мм	m, г	l, мм		d, мм	m, г	l, мм
1	11.89	41.315	41.5	1	11.97	35.139	40.9	1	11.66	8.999	30.3
2	11.90	41.317	41.6	2	11.98	36.136	40.9	2	11.67	8.999	30.2
3	11.89	41.315	41.5	3	11.96	35.137	41.0	3	11.68	8.998	30.1
ср	11.89	41.316	41.5	ср	11.97	35.137	40.9	ср	11.67	8.999	30.2

Плотности используемых стержней:

$$\sigma_\rho = \rho \sqrt{(\sigma_m/m)^2 + (\sigma_l/l)^2 + (\sigma_d/d)^2}$$

$$\sigma_m = 0,001\text{г}, \sigma_l = \sigma_d = 0,05\text{мм}$$

$$\rho_m = \frac{4m}{\pi d^2 l} = \frac{4 \cdot 41,316}{\pi \cdot (1,189)^2 \cdot 4,15} \approx (8,97 \pm 0,01) \text{ г/см}^3$$

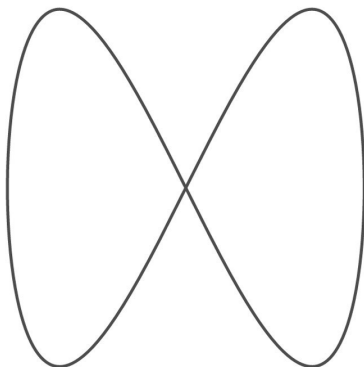
$$\rho_{st} \approx (7,638 \pm 0,009) \text{ г/см}^3$$

$$\rho_d \approx (2,787 \pm 0,002) \text{ г/см}^3$$

где ρ – плотность, m – масса, d – диаметр, l – длина.

5.2 Первая гармоника для дюрали

Модуляция на частоте $f = 2.1236$ кГц. При этой частоте стержень входит в резонанс. Ось X показывает колебания самого генератора, ось Y показывает колебания с датчика. Стержень имеет собственную частоту $f = 4.259$ кГц - такая же частота сигналов с датчика, а генератор имеет частоту $f/2$. Пока X совершает одно колебание, Y совершает 2 колебания, отсюда и такая фигура.



5.3 Добротность

Для Дюрали; Количество делений на осциллографе при первом резонансе: 12.

$$\frac{N}{\sqrt{2}} = 8.$$

Частоты при таком делении: $\nu = 4,2543$ кГц, $\nu = 4,2631$ кГц

$$\Delta f = 8,8 \text{ Гц.}$$

$$Q = \frac{f}{\Delta f} = 483.9.$$

Для стали: Количество делений на осциллографе при первом резонансе: 9.

$$\frac{N}{\sqrt{2}} = 6.$$

Частоты при таком делении: $\nu = 4,1307$ кГц, $\nu = 4,1341$ кГц

$$\Delta f = 3,4 \text{ Гц.}$$

$$Q = \frac{f}{\Delta f} = 1268,35.$$

5.4 Графики частот

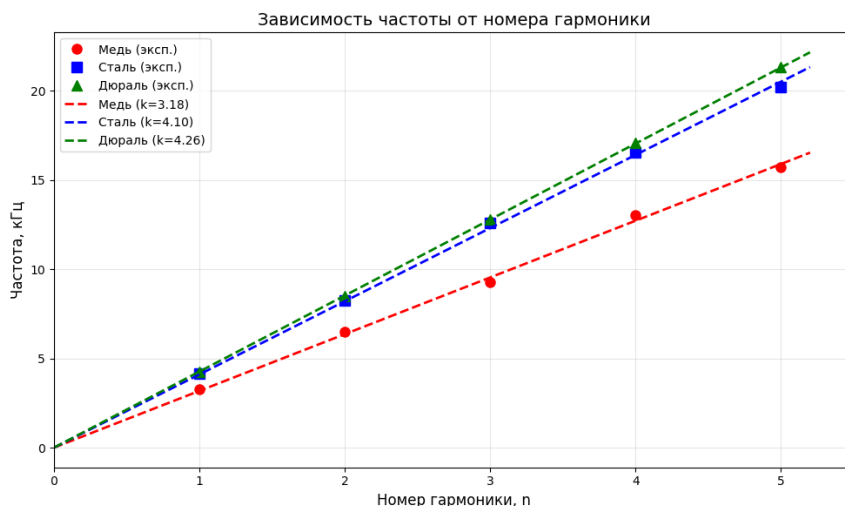


Рисунок 2: График Зависимости f от n

5.5 Вычисление модуля Юнга

Формула для расчета скорости звука:

$$u = 2L \frac{f_n}{n} \quad (13)$$

$$\sigma_u = 2L \cdot \sigma_k$$

$$u_m = 3900 \text{ м/с}$$

$$u_{st} = 4958 \text{ м/с}$$

$$u_d = 5112 \text{ м/с}$$

Формула для расчета модуля Юнга:

$$E = u_{\text{сг}}^2 \rho \quad (14)$$

$$\Delta E = E \sqrt{4 \left(\frac{\delta u_{\text{сг}}}{u_{\text{сг}}} \right)^2 + \left(\frac{\delta \rho}{\rho} \right)^2} \quad (15)$$

$$E_m = 136,433 \text{ ГПа}$$

$$E_{st} = 187,755 \text{ ГПа}$$

$$E_d = 71,080 \text{ ГПа}$$

6 Вывод

В ходе работы было исследовано явление акустического резонанса в тонком стержне, измерена скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов: $u_m = 3900 \text{ м/с}$, $u_{st} = 4958 \text{ м/с}$, $u_d = 5112 \text{ м/с}$.

А также измерены модули Юнга различных материалов: $E_m = 136,433 \text{ ГПа}$, $E_{st} = 187,755 \text{ ГПа}$, $E_d = 71,080 \text{ ГПа}$.