Отчет по лабораторной работе 1.3.2
Определение модуля кручения

Максим Осипов, Б03-504

01.10.2025

1 Аннотация

Цель работы: измерение углов закручивания в зависимости от приложенного момента сил, расчет модулей кручения и сдвига при статическом закручивании стержня, определение тех же модулей для проволоки по измерениям периодов крутильных колебаний подвешенного на ней маятника (ди намическим методом).

В работе используются: в первой части: исследуемый стержень, отсчетная труба со шкалой, рулетка, микрометр, набор грузов; во второй части: проволока из исследуемого материала, грузы, секундомер, микрометр, рулетка, линейка.

2 Теоретическая справка

1. Чистое кручение цилиндрического стержня

При закручивании цилиндрических стержней круглого сечения в областях, удаленных от мест приложения закручивающих моментов, возникает напряженное состояние, называемое чистым кручением. В этом состоянии каждое поперечное сечение поворачивается как жесткое целое, при этом: - Частицы материала не смещаются с радиальных линий - Все радиальные линии поворачиваются на одинаковый угол - Касательные напряжения увеличиваются пропорционально расстоянию от оси вращения

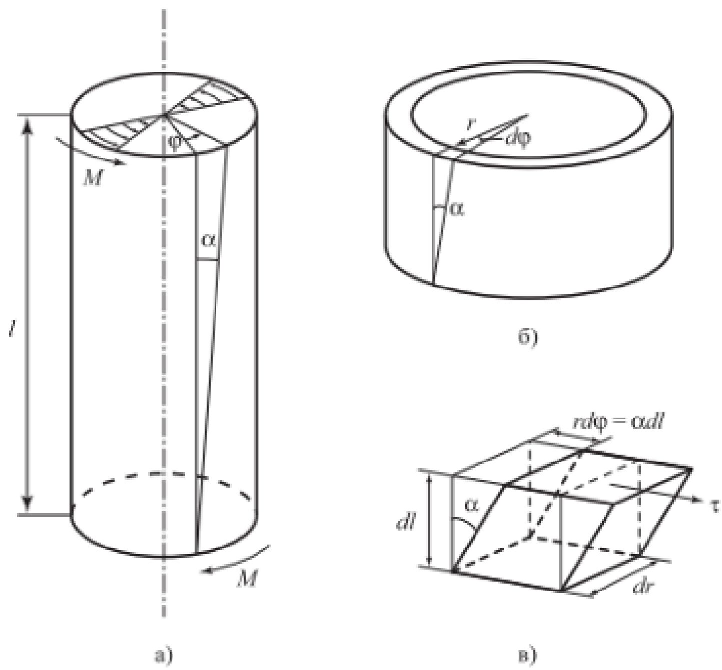

Рисунок 1: Закручивание цилиндра

2. Основные соотношения при кручении

Рассмотрим цилиндр длиной l, у которого сечения, находящиеся на расстоянии l, повернуты на угол φ. Для элементарного колечка радиуса r с толщиной dr и высотой dl выполняется соотношение:

$$\alpha dl = rd\varphi. \tag{1}$$

где α - угол сдвига, характеризующий наклон образующей цилиндрической поверхности.

Касательное напряжение τ связано с углом сдвига α через модуль сдвига G:

$$\tau = G\alpha. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что касательное напряжение пропорционально расстоянию от оси:

$$\tau = Gr\frac{d\varphi}{dl}. \tag{3}$$

3. Момент сил при кручении
Элементарный момент сил, создаваемый касательными напряжениями на кольце радиуса r:

$$dM = 2\pi r dr \cdot \tau \cdot r. \tag{4}$$

Суммарный момент сил по всему поперечному сечению:

$$M = 2\pi G\frac{d\varphi}{dl}\int_0^R r^3 dr = \pi G\frac{d\varphi}{dl}\frac{R^4}{2}. \tag{5}$$

4. Модуль кручения
Из (5) получаем линейную зависимость между моментом сил M и углом закручивания φ:

$$M = \frac{\pi R^4 G}{2l}\varphi = f\varphi. \tag{6}$$

где введен модуль кручения f, связанный с модулем сдвига G:

$$f = \frac{\pi R^4 G}{2l}. \tag{7}$$

2.1 Крутильные колебания

Для системы, совершающей крутильные колебания на проволоке, уравнение движения имеет вид:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -M. \tag{8}$$

где I - момент инерции системы относительно оси вращения.
При малых углах закручивания, используя (6), получаем:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0. \tag{10}$$

где

$$\omega^2 = \frac{f}{I}.$$

Решение уравнения (10) описывает гармонические колебания:

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \theta). \tag{11}$$

Период крутильных колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}. \tag{12}$$

5. Роль теоретических положений в эксперименте

- Формула (6) является рабочей для статического метода: измеряя угол закручивания φ при известном моменте M, можно определить модуль кручения f, а затем по (7) вычислить модуль сдвига G
- Формула (12) является рабочей для динамического метода: измеряя период колебаний T системы с известным моментом инерции I, можно определить модуль кручения f, а затем модуль сдвига G
- Условие малых углов α обеспечивает применимость линейной зависимости (2) и выполнение закона Гука для сдвига
- Условие незатухающих колебаний (уменьшение амплитуды менее чем в 2 раза за 10 периодов) позволяет использовать формулу (12) для точного определения периода
- Независимость периода от амплитуды подтверждает применимость теории малых колебаний

3 Установка

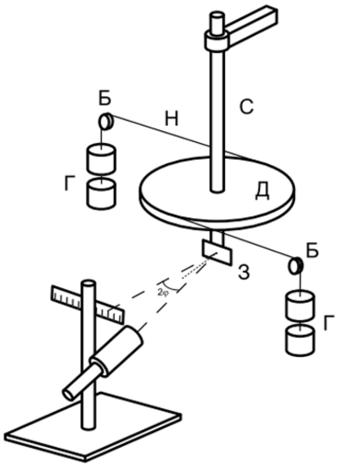

Рисунок 2: Схема установки для статического закручивания

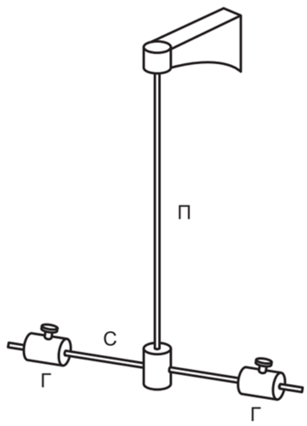

Рисунок 3: Схема установки для крутильных колебаний