Пример 1.

Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти:

а) $D = 2B * C - A * C$;

б) $G = 2C * B - C * A$.

Пример 2.

Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Найти:

а) $D = -A * C + 2B^T * C$;

б) $G = C^T 2 * A^T - 2C^T * B$.

Пример 3.

Найдите матрицу A

$$A = (1\ 2\ 3) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.

Дано

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & x & 2 \\ -3 & 1 & y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 1 & z \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 3 \\ v & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Найти значения $x,\ y,\ z,\ v$.

Пример5.

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$. Докажите, что $A * A = 0$.

Пример 6.

Найти значение матричного многочлена $2A * A + 3A + 5E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Используя свойства операций над матрицами вычислить:

1) $G = A^T * C + 3C * B$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$; $\quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2) Значение многочлена $f(A)$

$$f(x) = x^2 - x,$$

где $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Пример 2

Вычислить n-степень матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 3

Вычислить детерминанты матриц.

$$A = (7), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} a & 7 & 0 & 3 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 1 & 2 & c & 4 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Пример 1. Вычислить детерминанты матриц, предварительно упростив их, используя свойства детерминантов.

$$A=\begin{pmatrix}7 & 5 & 3\\ 14 & 10 & 27\\ 21 & -25 & -18\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}246 & 427 & 327\\ 1014 & 543 & 443\\ -342 & 721 & 621\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}2/3 & 3/8 & -3 & 4\\ 2/3 & 1/8 & -1 & 2\\ 2 & 1/4 & 1 & 0\\ 2/3 & 3/8 & 0 & -5\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 3 & 4\\ 0 & 6 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 4 & 9 & 16 & 25\end{pmatrix}$$

Пример 2. Вычислить определитель, используя теорему Лапласа

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 9 & 16 & 25\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 7 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 3 & 9 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0\\ 2 & 8 & 4 & 7 & 5\\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

Пример 3.

Справедливо ли утверждение: определитель не изменится, если к какой-либо строке, умноженной на некоторое число α , прибавить другую строку? Ответ обосновать.

Примечание. Свои действия обосновать (ссылками на определения, свойства и т.д.)

Пример 1.

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

Доказать, что она имеет обратную матрицу A^{-1} и найти ее. Результат проверить.

Пример 2.

Найти $(A^2)^{-1}$ и $(A^{-1})^2$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Пример 3.

Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} * X * \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 11 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Результат проверить.

Пример 4.

Найти решение систем линейных уравнений, записанных в матричной форме.

$$a) \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{б)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Что такое алгебраическое дополнение? Сформулировать свойство алгебраического дополнения.

5. Какие преобразования матриц называются элементарными?

6. С помощью элементарных преобразований преобразовать матрицу A в матрицу с максимальным количеством нулевых элементов.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} * X * \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 11 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = -\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 11 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -21 \\ -11 & -8 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A * X * B = C$$

$$X = A^{-1} * C * B^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -12 & 3 & 8 \\ -5 & 0 & 5 \\ 9 & -1 & -6 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} * C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -12 & 3 & 8 \\ -5 & 0 & 5 \\ 9 & -1 & -6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -7 & -21 \\ -11 & -8 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -13 & 196 \\ -5 & 85 \\ -4 & -157 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} * C * B^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -13 & 196 \\ -5 & 85 \\ -4 & -157 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -405 & 575 \\ -175 & 250 \\ 310 & -475 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16.2 & 23 \\ -7 & 10 \\ 12.4 & -19 \end{pmatrix}$$

Задание к семинару 29 сентября 2021

1. Найти ранг матрицы А двумя методами: методом окаймляющих миноров и методом элементарных преобразований.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 11 & 6 & 1 & 10 \\ 5 & 12 & 5 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Найти обратную матрицу методом элементарных преобразований.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 10 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

3. Доказать теорему.

Если матрица A невырождена и определены произведения матриц $A * B$ и $B * A$, то $rank\ (A * B) = rank(B * A) = rank(B)$.

4. Доказать теорему.

Для того чтобы строки $A, B, \cdots F$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы одна из этих строк являлась линейной комбинацией остальных строк.

1. Доказать совместность системы линейных уравнений и найти решение по формулам Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

2. Доказать совместность и решить систему методом элементарных преобразований (методом Гаусса)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

3. Проверить на совместность и найти решение

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 10 \end{cases}$$

4. Проверить на совместность. Найти решение

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8 \end{cases}$$

5. Какая система матриц линейно независима?

6. Что такое невырожденная система линейных уравнений?

7. Сформулировать теорему Кронекера-Капелли.