Литература

1. Беклемишев Д.В. - Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник - Издательство "Лань" - 2020 - 448с. - ISBN: 978-5-8114-4748-0 - Текст электронный // ЭБС ЛАНЬ - URL: https://e.lanbook.com/book/126146.

2. Беклемишева Л.А., Беклемишев Д.В., Петрович А.Ю. - Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебное пособие - Издательство "Лань" - 2019 - 496с. - ISBN: 978-5-8114-4577-6 - Текст электронный // ЭБС ЛАНЬ - URL: https://e.lanbook.com/book/122183

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра учебник/В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 6-е изд. стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 280 с.

4. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейман В.Б. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебное пособие/ Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейман В.Б Под редакцией Воднева В.Т. – 2-е изд., Мн.: 1986. – 272 с.

1_DD-MM_Иванов - имя файла

veshaposhnikov@yandex.ru - электронный адрес

1.Матрицы

Матрицы

Понятие матрицы. Виды матриц

Прямоугольная матрица

$$dim(A) = m \times n$$

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

$$A = \|a_{ij}\| \equiv (a_{ij}) \qquad (\mathrm{i} = 1,2,\cdots,m\,; j = 1,2,\cdots,n)$$

$a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ij} \quad \cdots \quad a_{in}$ - *i*-ая строчка матрицы

$a_{1j} \quad a_{2j} \quad \cdots \quad a_{ij} \quad \cdots \quad a_{mj}$ - *j*-й столбец матрицы

a_{ij} - элемент матрицы, стоящий на пересечении *i*-й строчки и *j*-го столбца

Пример прямоугольной матрицы
Размерности $\dim(A) = 2 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix}
a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_j^1 & \cdots & a_n^1 \\
a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_j^2 & \cdots & a_n^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_1^i & a_2^i & \cdots & a_j^i & \cdots & a_n^i \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_1^m & a_2^m & \cdots & a_j^m & \cdots & a_n^m
\end{pmatrix} = A
$$

a_j^i

i – номер строки

j – номер столбца

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \end{pmatrix}$ - матрица строка длины n $\dim B = 1 \times n$

$$
B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdots \\ b_{i1} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}
$$
- матрица столбец высоты m $\dim B = m \times 1$

Транспонированная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\dim(A) = m \times n \qquad \dim(A^T) = n \times m$$

$$B \equiv A^T$$

$$B^T \equiv \left(A^T\right)^T = A$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 7 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \quad \left(A^T\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 7 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\dim(A) = 2 \times 3 \qquad \dim(A^T) = 3 \times 2$$

Квадратная матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad dim(B) = n \times n \qquad dim(B) = n$$

$a_{11} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{jj} \quad \cdots \quad a_{nn}$ - главная диагональ

$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{jj} + \cdots + a_{nn} \equiv trA \equiv SpA$ - след матрицы (tr=trace; Sp=spoor - след)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{jj} + \cdots + a_{nn}} \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = SpA}$$

Пример квадратной матрицы размерности $\dim(B) = 3$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad SpB = 0 + 4 + 8 = 12$$

Некоторые виды квадратных матриц

1. Симметричная матрица $A^T = A, \qquad a_{ij} = a_{ji} \quad (\forall\, i, j)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Кососимметричная (антисимметричная) матрица

$$B^T = -B, \qquad b_{ij} = -b_{ji} \quad (\forall\, i \neq j, \qquad b_{ii} = 0 \quad \forall\, i = j)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -6 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Треугольная матрица

Верхняя треугольная матрица $a_{ij} = 0 \quad i > j$

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Нижняя треугольная матрица $a_{ij} = 0 \quad i < j$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Диагональная матрица $\qquad a_{ij} = 0 \quad i \neq j$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \;\; i = j \\ 0, & \text{если} \;\; i \neq j \end{cases}$$

$$E\ (\equiv I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Нулевая матрица $\qquad a_{ij} = 0 \quad (\forall\, i, j)$

$$O_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim(O_1) = 2 \qquad \dim(O_2) = 2 \times 3$$

Линейные операции над матрицами

1. Равенство матриц

$A = (a_{ij}),\ \ B = (b_{ij}) \qquad \mathbf{dim}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{dim}(\boldsymbol{B}) \qquad \boldsymbol{a_{ij} = b_{ij}} \quad i = 1 \cdots m,\ \ j = 1 \cdots n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Сумма матриц $\quad A = (a_{ij}), \qquad B = (b_{ij}), \qquad C = (c_{ij})$

$C = A + B \qquad \mathbf{dim}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{dim}(\boldsymbol{B}) = \mathbf{dim}(\boldsymbol{C}) \qquad \boldsymbol{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}} \qquad i = 1 \cdots m,\ \ j = 1 \cdots n$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad C = A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+3 & 7+5 \\ 4+2 & 5+4 & 8+6 \end{pmatrix}$$

3. Произведение матрицы на число $A = (a_{ij}),\ \ B = (b_{ij}), \quad \dim(A) = \dim(B) = m \times n$

$B = \alpha A \qquad \boldsymbol{b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}} \qquad i = 1 \cdots m, \qquad j = 1 \cdots n$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad D = 3A = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\cdot 7 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot 8 \end{pmatrix}$$

Свойства линейных операций над матрицами

1. Переместительное свойство (коммутативность относительно операции сложения)

$$A + B = B + A$$

2. Сочетательное свойство (ассоциативность относительно операции сложения)

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

3. Сочетательное свойство относительно числового множителя (ассоциативность относительно операции с числовым множителем)

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A) = \beta \cdot (\alpha \cdot A)$$

4. Распределительное свойство (дистрибутивность, т.е. согласованность операций) относительно суммы матриц

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

5. Распределительное свойство (дистрибутивность) относительно суммы чисел

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

$A + O = A$ $\quad\quad$ $\mathbf{dim}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{dim}(\boldsymbol{O})$!

$C = (-1) \cdot A = -A$ $\quad$ $-A$ матрица противоположная матрице A

$A + (-A) = O$ $\quad\quad$ $\dim(O) = \dim(A)$

$B + (-A) = B - A$ $\quad\quad$ разность матриц B и A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad (-1) \cdot A = -A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B - A = B + (-1)A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 & 0-0 & 1-1 \\ 0+1 & 4-3 & 1-4 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n}$$ - обозначение для большого числа слагаемых

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) \equiv \sum_{i=1}^{m} b_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_m =$$

$$= a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} + a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{mn} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj}) \equiv \sum_{i=1}^{m} d_j = d_1 + d_2 + \cdots + d_n =$$

$$= a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{m1} + a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{mn}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}(a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \end{matrix}\right\| \begin{matrix} 4 \\ 11 \\ 15 \end{matrix} \\ \qquad\qquad\qquad 30 \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}(a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{3}{c}{\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \end{matrix}\right\|} & \\ 3 & 10 & 17 & 30 \end{array}$$

Перемножение матриц

$A = (a_{ij}) \qquad i = 1 \cdots m, \;\; j = 1 \cdots n \qquad \dim(A) = m \times n$

$B = (b_{ij}) \qquad i = 1 \cdots n, \;\; j = 1 \cdots p \qquad \dim(B) = n \times p$

$C = (c_{ij}) \qquad i = 1 \cdots m, \;\; j = 1 \cdots p \qquad \dim(C) = m \times p$

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{in}b_{nj} \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad C = A * B \qquad \cancel{C = B * A}$

$B * A \qquad \dim(B) = n \times m \qquad \dim(A) = m \times p$

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & C \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}}$$

Пример $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\dim(A) = 2 \times 2$ $\dim(X) = 2 \times 1$

$$A * X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{2} a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^{2} a_{2i}x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = C$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_{21} \end{cases}$$

Пример $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ $\dim(A) = 2 \times 2$ $\dim(X) = 1 \times 2$

$$\cancel{A * X}$$

$X * A$ $\dim(X) = 1 \times 2$ $\dim(A) = 2 \times 2$

$$X * A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{21} & x_1a_{12} + x_2a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{2} x_i a_{i1} & \sum_{i=1}^{2} x_i a_{i2} \end{pmatrix}$$

Пример $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ $\dim(A)=2\times 2$ $\dim(B)=2\times 2$

$$A*B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{2}a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{2}a_{1i}b_{i2}\\ \sum_{i=1}^{2}a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{2}a_{2i}b_{i2}\end{pmatrix}$$

Пример $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$

$$A*B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times 5+3\times 7 & 1\times 6+3\times 8\\ 4\times 5+2\times 7 & 4\times 6+2\times 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26 & 30\\ 34 & 40\end{pmatrix}$$

Свойства произведения матриц

1. Произведение матриц не коммутативно $A * B \neq B * A$

$A * B$ $B * A$ $\dim(A) = m \times n$ $\dim(B) = n \times m$

$C = A * B$ $\dim(C) = \dim(A * B) = m \times m$

$D = B * A$ $\dim(D) = \dim(B * A) = n \times n$

C и *D* квадратные матрицы

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = A * B = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+1 \\ 0+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = B * A = \begin{pmatrix} 0+0 & 0+0 \\ 1+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Если $A * B = B * A$, то эти матрицы называются перестановочными

Единичная матрица *E* является перестановочной с любой квадратной матрицей того же порядка

$$A * E = E * A = A \qquad \dim E = \dim A = n \times n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E, \qquad E'$$

$$A * E = E * A = A \;\Rightarrow \begin{cases} E' * E = E \\ E * E' = E' \end{cases} \Rightarrow \; E = E'$$

Нулевая матрица не является перестановочной

$$\dim(A) = m \times n \qquad A * O = O' \qquad \dim(O') = m \times m$$

$$\Rightarrow \quad O' \neq O''$$

$$\dim(O) = n \times m \qquad O * A = O'' \qquad \dim(O'') = n \times n$$

$$\dim A = 2 \times 3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dim O = 3 \times 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O' \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O''$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Сочетательное свойство

Если определены произведения $A * B$ и $(A * B) * C$, **то определены**

произведения матриц $B * C$ и $A * (B * C)$ и выполняется равенство

$$(A * B) * C = A * (B * C)$$

3. Распределительное свойство (дистрибутивность) относительно суммы матриц

$A * (B + C)$ ⟹ $A * (B + C) = A * B + A * C$

$(B + C) * A$ ⟹ $(B + C) * A = B * A + C * A$

4. Сочетательное свойство относительно числового множителя

$A * B$ ⟹ $\alpha \cdot (A * B) = (\alpha \cdot A) * B = A * (\alpha \cdot B)$

5. $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B}$ ⟹ $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}} * \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ ⟹ $(A * B)^T = B^T * A^T$

1.Матрицы

Детерминанты (определители) матриц -2

Минор второго типа -4

Минор первого типа - 8

Свойства определителя -11

Детерминанты (определители) матриц

$$\dim A = n \times n \ !$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(A) = \Delta$$

$$A = (a_{11}) \longrightarrow \det(A) = a_{11}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

$$\begin{array}{c} + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$\begin{array}{c} - \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} = -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \multicolumn{3}{|c|}{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}} & \multicolumn{2}{c}{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}} \\ - & - & - & & \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Минор второго типа

Минор второго типа порядка *n-1* матрицы A (минор элемента a_{ij})

Определение. Минором любого элемента a_{ij} матрицы *A* *n*-го порядка называют определитель порядка *n-1,* соответствующей той матрице, которая получается из матрицы *A* в результате вычеркивания *i*-ой строки и *j*-го столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\bar{M}_j^i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & n_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\dim\left(\bar{M}_j^i\right) = n - 1$$

Пример:

Минор второго типа порядка *3-1=2* матрицы (минор элемента a_{22})

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \longrightarrow \bar{M}_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\dim(A) = 3$$

$$dim(\bar{M}_2^2) = 2$$

Определение. Определителем (детерминантом) порядка ***n***, соответствующего матрицы *A* порядка *n* называется **число**, равное

$$\Delta = \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Вычисление определителя (детерминанта) по определению

$$\Delta = \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1 \quad -$$

Вычисление определителя (детерминанта) по теореме

Теорема 1. Каков бы не был номер строки i $(1, 2, 3, \cdots, n)$ для определителя *n*-го справедлива формула

$$\Delta = \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \bar{M}_j^i$$

Теорема 2. Каков бы не был номер столбца j $(1, 2, 3, \cdots, n)$ для определителя *n*-го справедлива формула

$$\Delta = \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \bar{M}_j^i$$

Пример 1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \bar{M}_1^1 + (-1)^{1+2} a_{12} \bar{M}_2^1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\bar{M}_1^1 = a_{22} \qquad \bar{M}_2^1 = a_{21}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} a_{12} \bar{M}_2^1 + (-1)^{2+2} a_{22} \bar{M}_2^2 = -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22}$$

$$\bar{M}_2^1 = a_{21} \qquad \bar{M}_2^2 = a_{11}$$

Пример 2. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 5 & 6 & 7\\ 7 & 0 & 8\end{pmatrix}$ $i=2;\ \mathrm{j}=2$ $a_{22}=6$ $\bar{M}_2^2=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 7 & 8\end{vmatrix}$

$$\det(A)=(-1)^{2+1}a_{21}\bar{M}_1^2+(-1)^{2+2}a_{22}\bar{M}_2^2+(-1)^{2+3}a_{23}\bar{M}_3^2=$$

$$=-1\cdot 5\cdot\begin{vmatrix}0 & 4\\ 0 & 8\end{vmatrix}+1\cdot 6\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 7 & 8\end{vmatrix}+(-1)\cdot 7\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 7 & 0\end{vmatrix}=6(8-28)=-120$$

$$\det(A)=(-1)^{1+2}a_{12}\bar{M}_2^1+(-1)^{2+2}a_{22}\bar{M}_2^2+(-1)^{3+2}a_{32}\bar{M}_2^3=$$

$$=-1\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}5 & 7\\ 7 & 8\end{vmatrix}+1\cdot 6\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 7 & 8\end{vmatrix}+(-1)\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & 7\end{vmatrix}=6(8-28)=-120$$

Минор 2-го типа *n-k*-го порядка матрицы A

Вычеркиваем k строк и k столбцов $\quad k < n$

$$\bar{M}_{j_1,j_2,\cdots j_k}^{i_1,i_2\cdots i_k} \qquad i_1 < i_2 < \cdots < i_k; \qquad j_1 < j_2 < \cdots < j_k$$

$$\dim\left(\bar{M}_{j_1,j_2,\cdots j_k}^{i_1,i_2\cdots i_k}\right) = n - k$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 30 & 31 & 32 & 33 & 34 \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 30 & 31 & 32 & 33 & 34 \end{vmatrix}$$

$$k = 2 \qquad \bar{M}_{3,4}^{2,4} = \begin{vmatrix} 10 & 11 & 14 \\ 20 & 21 & 24 \\ 30 & 31 & 34 \end{vmatrix}$$

Минор первого типа

Минор первого типа *1*-го порядка матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$M_j^i = |a_{ij}| \qquad \dim(M_j^i) = 1$$

$$\bar{M}_j^i \qquad \dim(\bar{M}_j^i) = n - 1$$

Минор первого типа *k*-го порядка матрицы A $\quad k < n$

$$\boxed{M_{j_1, j_2, \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k}} \qquad i_1 < i_2 < \cdots < i_k; \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_k \qquad \boxed{\dim\left(M_{j_1, j_2, \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k}\right) = k}$$

Минор второго типа *n*-*k*-го порядка матрицы A $\quad k < n$

$$\boxed{\bar{M}_{j_1, j_2, \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k}} \qquad i_1 < i_2 < \cdots < i_k; \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_k \qquad \boxed{\dim\left(\bar{M}_{j_1, j_2, \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k}\right) = n - k}$$

$$\dim(A) = 5$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 30 & 31 & 32 & 33 & 34 \end{pmatrix} \xrightarrow{k=2}$$

$$\dim(\Delta) = 5$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 30 & 31 & 32 & 33 & 34 \end{vmatrix}$$

Минор 2-го типа ***3***-го порядка матрицы *A*

$$\bar{M}_{3,4}^{2,4} = \begin{vmatrix} 10 & 11 & 14 \\ 20 & 21 & 24 \\ 30 & 31 & 34 \end{vmatrix}$$

$$\dim\left(\bar{M}_{3,4}^{2,4}\right) = 3$$

Минор 1-го типа ***2***-го порядка матрицы *A*

$$M_{3,4}^{2,4} = \begin{vmatrix} 17 & 18 \\ 27 & 28 \end{vmatrix}$$

$$\dim\left(M_{3,4}^{2,4}\right) = 2$$

1.Матрицы

Детерминанты (определители) матриц -2

Минор второго типа -4

Минор первого типа - 8

Свойства определителя -11

Детерминанты (определители) матриц

$$\dim A = n \times n \ \textcolor{red}{!}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(A) = \Delta$$

$$A = (a_{11}) \longrightarrow \det(A) = a_{11}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

$$\begin{array}{c} + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$\begin{array}{c} - \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} = -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & \quad + & \quad + \end{matrix} \\ \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ \begin{matrix} - & \quad - & \quad - \end{matrix} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Минор второго типа

Минор второго типа порядка *n-1* матрицы A (минор элемента a_{ij})

Определение. Минором любого элемента a_{ij} матрицы *A* *n*-го порядка называют определитель порядка *n-1,* соответствующей той матрице, которая получается из матрицы *A* в результате вычеркивания *i*-ой строки и *j*-го столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\overline{M}_j^i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & n_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\dim\left(\overline{M}_j^i\right) = n - 1$$

Пример:

Минор второго типа порядка *3-1=2* матрицы (минор элемента a_{22})

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \longrightarrow \overline{M}_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\dim(A) = 3$$

$$dim(\overline{M}_2^2) = 2$$

Определение. Определителем (детерминантом) порядка ***n***, соответствующего матрицы A порядка n называется **число**, равное

$$\Delta = \det(A) = \sum_{j=1}^{\boldsymbol{n}} (-1)^{1+j} a_{1j} \overline{M}_j^1$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Вычисление определителя (детерминанта) по определению

$$\Delta = \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1 \quad -$$

Вычисление определителя (детерминанта) по теореме

Теорема 1. Каков бы не был номер строки i $(1, 2,3\ , \cdots, n)$ для определителя n-го справедлива формула

$$\Delta = \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \bar{M}_j^i$$

Теорема 2. Каков бы не был номер столбца j $(1, 2,3\ , \cdots, n)$ для определителя n-го справедлива формула

$$\Delta = \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \bar{M}_j^i$$

Пример 1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \bar{M}_1^1 + (-1)^{1+2} a_{12} \bar{M}_2^1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\bar{M}_1^1 = a_{22} \qquad \bar{M}_2^1 = a_{21}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} a_{12} \bar{M}_2^1 + (-1)^{2+2} a_{22} \bar{M}_2^2 = -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22}$$

$$\bar{M}_2^1 = a_{21} \qquad \bar{M}_2^2 = a_{11}$$

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ $i = 2;\ \mathrm{j} = 2$ $a_{22} = 6$ $\bar{M}_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

$$\det(A) = (-1)^{2+1} a_{21} \bar{M}_1^2 + (-1)^{2+2} a_{22} \bar{M}_2^2 + (-1)^{2+3} a_{23} \bar{M}_3^2 =$$

$$= -1 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + 1 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 6(8 - 28) = -120$$

$$\det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} \bar{M}_2^1 + (-1)^{2+2} a_{22} \bar{M}_2^2 + (-1)^{3+2} a_{32} \bar{M}_2^3 =$$

$$= -1 \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 1 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 6(8 - 28) = -120$$

Минор 2-го типа *n-k*-го порядка матрицы A

Вычеркиваем k строк и k столбцов $\quad k < n$

$$\bar{M}^{i_1,i_2\cdots i_k}_{j_1,j_{2,}\cdots j_k} \qquad i_1 < i_2 < \cdots < i_k; \qquad j_1 < j_2 < \cdots < j_k$$

$$\dim\left(\bar{M}^{i_1,i_2\cdots i_k}_{j_1,j_{2,}\cdots j_k}\right) = n - k$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 30 & 31 & 32 & 33 & 34 \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 30 & 31 & 32 & 33 & 34 \end{vmatrix}$$

$$k = 2 \qquad \bar{M}^{2,4}_{3,4} = \begin{vmatrix} 10 & 11 & 14 \\ 20 & 21 & 24 \\ 30 & 31 & 34 \end{vmatrix}$$

Минор первого типа

Минор первого типа *1*-го порядка матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$M_j^i = |a_{ij}| \qquad \dim(M_j^i) = 1$$

$$\bar{M}_j^i \qquad \dim(\bar{M}_j^i) = n - 1$$

Минор первого типа *k*-го порядка матрицы A $\quad k < n$

$$\boxed{M_{j_1,j_{2,}\cdots j_k}^{i_1,i_2\cdots i_k}} \qquad i_1 < i_2 < \cdots < i_k; \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_k \qquad \boxed{\dim\left(M_{j_1,j_{2,}\cdots j_k}^{i_1,i_2\cdots i_k}\right) = k}$$

Минор второго типа *n*-*k*-го порядка матрицы A $\quad k < n$

$$\boxed{\bar{M}_{j_1,j_{2,}\cdots j_k}^{i_1,i_2\cdots i_k}} \qquad i_1 < i_2 < \cdots < i_k; \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_k \qquad \boxed{\dim\left(\bar{M}_{j_1,j_{2,}\cdots j_k}^{i_1,i_2\cdots i_k}\right) = n - k}$$

$$\dim(A) = 5$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 30 & 31 & 32 & 33 & 34 \end{pmatrix} \xrightarrow{k = 2}$$

$$\dim(\Delta) = 5$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 30 & 31 & 32 & 33 & 34 \end{vmatrix}$$

Минор 2-го типа ***3***-го порядка матрицы *A*

$$\bar{M}_{3,4}^{2,4} = \begin{vmatrix} 10 & 11 & 14 \\ 20 & 21 & 24 \\ 30 & 31 & 34 \end{vmatrix}$$

$$\dim\left(\bar{M}_{3,4}^{2,4}\right) = 3$$

Минор 1-го типа ***2***-го порядка матрицы *A*

$$M_{3,4}^{2,4} = \begin{vmatrix} 17 & 18 \\ 27 & 28 \end{vmatrix}$$

$$\dim\left(M_{3,4}^{2,4}\right) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Теорема 3 (Лапласа) При любом номере *к* меньшем *n* $(k < n)$ и при любых фиксированных номерах строк $i_1, i_2, \cdots, i_k$ и номерах столбцов $j_1, j_2, \cdots, j_k$ таких, что

$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ и $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ для определителя $n -$ порядка справедлива формула

$$\Delta = \det(A) = \sum_{j_1, j_2 \cdots j_k} (-1)^{i_1 + i_2 + \cdots + i_k + j_1 + j_2 + \cdots j_k} M_{j_1, j_2, \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k} \overline{M}_{j_1, j_2, \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k}$$

или

$$\Delta = \det(A) = \sum_{i_1, i \cdots i} (-1)^{i_1 + i_2 + \cdots + i_k + j_1 + j_2 + \cdots j_k} M_{j_1, j_2, \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k} \overline{M}_{j_1, j_2, \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k}$$

$$\boxed{\Delta = \det(A) = \sum_{j=1}^{n=4} (-1)^{i+j} a_{ij} \bar{M}_j^i}$$

$$i = 1$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3}(-3) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+1} M_1^1 \bar{M}_1^1 + (-1)^{1+2} M_2^1 \bar{M}_2^1 + (-1)^{1+3} M_3^1 \bar{M}_3^1 + (-1)^{1+4} M_4^1 \bar{M}_4^1$$

$$\boxed{\Delta = \det(A) = \sum_{i=1}^{n=4} (-1)^{i+j} a_{ij} \bar{M}_j^i}$$

$$j = 2$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2} 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+2} 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} 3 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+2} M_2^1 \bar{M}_2^1 + (-1)^{2+2} M_2^2 \bar{M}_2^2 + (-1)^{3+2} M_2^3 \bar{M}_2^3 + (-1)^{4+2} M_2^4 \bar{M}_2^4$$

$$\Delta = \det(A) = \sum_{j_1, j_2 \cdots j_k} (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots j_k} M_{j_1, j_2, \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k} \bar{M}_{j_1, j_2, \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k}$$

$k = 2$

$$\Delta = \det(A) = \sum_{j_1, j_2} (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} M_{j_1, j_2,}^{i_1, i_2} \bar{M}_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}$$

Пример.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +(-4) \cdot (-5) - (4) \cdot (-10) + (-4) \cdot (-3)$$

$$+(0) \cdot (-30) - (2) \cdot (-2) + (-2) \cdot (14) = 48$$

$$\Delta = \det(A) = \sum_{i_1, i_2 \cdots i_k} (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots j_k} M_{j_1, j_2, \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k} \overline{M}_{j_1, j_2, \cdots j_k}^{i_1, i_2 \cdots i_k}$$

$k = 2$

$$\Delta = \det(A) = \sum_{i_1, i_2} (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} M_{j_1, j_2,}^{i_1, i_2} \overline{M}_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}$$

Пример.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+3+1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} + \quad (-1)^{1+4+1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{2+3+1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} + \quad (-1)^{2+4+1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{3+4+1+2} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = +(-4) \cdot (-5) - (-14) \cdot (5) + (0) \cdot (-2)$$

$$+(-2) \cdot (15) - (4) \cdot (-4) + (14) \cdot (-2) = 48$$

Свойства определителя

1. Равноправность строк и столбцов. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \det(A^T)$$

2. Антисимметрия при перестановке двух строк (столбцов). При перестановке местами двух строк (или двух столбцов) определитель сохраняет свое абсолютное значение, но меняет знак на противоположный

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

Линейная комбинация столбцов (строк) определителя/матрицы

Столбец $(a_1, a_2, \cdots a_j, \cdots a_n)^T$ является линейной комбинацией столбцов

$(b_1, b_2, \cdots b_j, \cdots b_n)^T$, $(c_1, c_2, \cdots c_j, \cdots c_n)^T, \cdots$ $(d_1, d_2, \cdots d_j, \cdots d_n)^T$

с коэффициентами $\alpha, \beta, \cdots \gamma \neq 0$, если каждый элемент a_i столбца $(a_1, a_2, \cdots a_i, \cdots a_n)^T$ можно представить в виде суммы

$$a_i = \alpha \cdot b_i + \beta \cdot c_i + \cdots + \gamma \cdot d_i \qquad \forall i \in \overline{1, n}$$

$$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_i} \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_i} \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \qquad \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c_i} \\ \vdots \\ c_n \end{matrix} \qquad \cdots, \qquad \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{d_i} \\ \vdots \\ d_n \end{matrix}$$

Столбцы детерминанта

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_i} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_i} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c_i} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \qquad \cdots, \qquad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{d_i} \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Столбцы матрицы/матрица-столбец

$$\boldsymbol{a_i} = \alpha \cdot \boldsymbol{b_i} + \beta \cdot \boldsymbol{c_i} + \cdots + \gamma \cdot \boldsymbol{d_i} \qquad \forall i \in \overline{1, n}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \cdots + \gamma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad B \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad C \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$A = \alpha \cdot B + \beta \cdot C + \cdots + \gamma \cdot D$$

Пример 1. Пусть мы имеем **матрицу-столбец** $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, каждый элемент которой можно представить как сумму двух чисел b_i, c_i $(i = 1,2,3)$, умноженных на некоторые числовые коэффициенты α, β **одинаковые** для каждой суммы

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 = \alpha b_1 + \beta c_1 \\ a_2 = \alpha b_2 + \beta c_2 \\ a_3 = \alpha b_3 + \beta c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 \\ \alpha b_2 + \beta c_2 \\ \alpha b_3 + \beta c_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

При получении последней суммы было использовано правило сложение матриц и умножение матрицы на числовой коэффициент

Таким образом, матрица-столбец (столбец) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ была представлена как линейная комбинация двух матриц-столбцов (столбцов) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

Определение линейной комбинации столбцов (строчек), данное ранее, это обобщение Примера 1 на случай любого числа слагаемых и любого числа элементов в столбце или строке.

Аналогичные действия можно провести и для **матрицы-строчки**

Пример 2. Пусть мы имеем **матрицу-строчку** $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$, каждый элемент которой можно представить как сумму двух чисел b_i, c_i $(i = 1,2,3)$, умноженных на некоторые числовые коэффициенты α, β **одинаковые** для каждой суммы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 = \alpha b_1 + \beta c_1 & a_2 = \alpha b_2 + \beta c_2 & a_3 = \alpha b_3 + \beta c_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

При получении последней суммы было использовано правило сложение матриц и умножение матрицы на числовой коэффициент

Таким образом, матрица-строчка (строчка)$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ была представлена как линейная комбинация двух матриц-строек (строчек) $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.

3.1. Линейное свойство определителя. Если в определителе n-порядка Δ некоторая i-я строка $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ является линейной комбинацией двух строк $b_1, b_2, \cdots, b_n$ и $c_1, c_2, \cdots, c_n$ с коэффициентами α и β ,

$$a_{i1} = \alpha b_1 + \beta c_1,\ a_{i2} = \alpha b_2 + \beta c_2, \cdots,\ a_{ij} = \alpha b_j + \beta c_j, \cdots,\ a_{in} = \alpha b_n + \beta c_n$$

то определитель Δ можно представить в виде линейной комбинации $\Delta = \alpha\Delta_1 + \beta\Delta_2$, где Δ_1- определитель, у которого i-строка равна $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, а все остальные те же , что и у определителя Δ, а Δ_2- у которого i-строка равна $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$, а все остальные те же , что и у определителя Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \dim(\Delta) = n$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_j & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_j & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.2. Линейное свойство определителя. Если в определителе n-порядка Δ некоторый j-й столбец $(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})^T$ является линейной комбинацией двух столбцов $(c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$ и $(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ с коэффициентами α и β ,

$$(a_{1j} = \alpha b_1 + \beta c_1,\ a_{2j} = \alpha b_2 + \beta c_2, \cdots,\ a_{ij} = \alpha b_i + \beta c_i, \cdots,\ a_{nj} = \alpha b_n + \beta c_n)^T$$

то определитель Δ можно представить в виде линейной комбинации $\Delta = \alpha\Delta_1 + \beta\Delta_2$, где Δ_1- определитель, у которого j-столбец равен $(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$, а все остальные те же , что и у определителя Δ, а Δ_2- у которого j-столбец равен $(c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$, а все остальные те же , что и у определителя Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} = \alpha b_1 + \beta c_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} = \alpha b_2 + \beta c_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} = \alpha b_i + \beta c_i & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} = \alpha b_n + \beta c_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \dim(\Delta) = n$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & b_i & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & c_j & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример 1. Пусть мы имеем определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

элементы второго столбца которой $\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix}$

можно представить как сумму двух чисел b_i, c_i $(i = 1{,}2{,}3)$, умноженных на некоторые числовые коэффициенты α, β **одинаковые** для всех сумм

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} = \alpha b_1 + \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} = \alpha b_2 + \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} = \alpha b_3 + \beta c_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha b_1 + \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha b_2 + \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha b_3 + \beta c_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Покажем, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha b_1 + \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha b_2 + \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha b_3 + \beta c_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_2 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} = \alpha b_1 + \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} = \alpha b_2 + \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} = \alpha b_3 + \beta c_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha b_1 + \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha b_2 + \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha b_3 + \beta c_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha b_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha b_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \equiv \widetilde{\Delta}_1 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & \beta c_2 & a_{33} \end{vmatrix} \equiv \widetilde{\Delta}_2$$

Вычислим Δ

$$(*)\ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha b_1 + \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha b_2 + \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha b_3 + \beta c_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(\alpha b_2 + \beta c_2)a_{33} + (\alpha b_1 + \beta c_1)a_{23}\, a_{31} + a_{21}(\alpha b_3 + \beta c_3)a_{13} - a_{31}(\alpha b_2 + \beta c_2)a_{13}$$
$$- (\alpha b_3 + \beta c_3)a_{23}\, a_{11}$$
$$- a_{21}(\alpha b_1 + \beta c_1)a_{33}$$
$$= (a_{11}\alpha b_2 a_{33} + \alpha b_1 a_{23} a_{31} + a_{21}\alpha b_3 a_{13} - a_{31}\alpha b_2 a_{13} - \alpha b_3 a_{23} a_{11} - a_{21}\alpha b_1 a_{33})$$
$$+ (a_{11}\beta c_2 a_{33} + \beta c_1 a_{23} a_{31} + a_{21}\beta c_3 a_{13} - a_{31}\beta c_2 a_{13} - \beta c_3 a_{23} a_{11} - a_{21}\beta c_1 a_{33})$$
$$= \alpha(a_{11} b_2 a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} + a_{21} b_3 a_{13} - a_{31} b_2 a_{13} - b_3 a_{23} a_{11} - a_{21} b_1 a_{33})$$
$$+ \beta(a_{11} c_2 a_{33} + c_1 a_{23} a_{31} + a_{21} c_3 a_{13} - a_{31} c_2 a_{13} - c_3 a_{23} a_{11} - a_{21} c_1 a_{33})$$

Вычислим $\widetilde{\Delta}_1$ и $\widetilde{\Delta}_2$

$$(**)\ \widetilde{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha b_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha b_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\alpha b_2 a_{33} + \alpha b_1 a_{23} a_{31} + a_{21}\alpha b_3 a_{13} - a_{31}\alpha b_2 a_{13} - \alpha b_3 a_{23} a_{11} - a_{21}\alpha b_1 a_{33}$$
$$= \alpha(a_{11} b_2 a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} + a_{21} b_3 a_{13} - a_{31} b_2 a_{13} - b_3 a_{23} a_{11} - a_{21} b_1 a_{33}) =$$

$$\alpha \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha\Delta_1, \quad \text{где} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(***)\ \widetilde{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & \beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & \beta c_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\beta c_2 a_{33} + \beta c_1 a_{23} a_{31} + a_{21}\beta c_3 a_{13} - a_{31}\beta c_2 a_{13} - \beta c_3 a_{23} a_{11} - a_{21}\beta c_1 a_{33}$$
$$= \beta(a_{11} c_2 a_{33} + c_1 a_{23} a_{31} + a_{21} c_3 a_{13} - a_{31} c_2 a_{13} - c_3 a_{23} a_{11} - a_{21} c_1 a_{33}) =$$

$$\beta \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \beta\Delta_2, \quad \text{где} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Сравним соотношения (*), (**) и (***)

$$(*)\quad \alpha(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{21}b_3a_{13}-a_{31}b_2a_{13}-b_3a_{23}a_{11}-a_{21}b_1a_{33})$$
$$+\beta(a_{11}c_2a_{33}+c_1a_{23}a_{31}+a_{21}c_3a_{13}-a_{31}c_2a_{13}-c_3a_{23}a_{11}-a_{21}c_1a_{33})$$

$$(**)\quad \alpha(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{21}b_3a_{13}-a_{31}b_2a_{13}-b_3a_{23}a_{11}-a_{21}b_1a_{33})$$

$$(***)\quad \beta(a_{11}c_2a_{33}+c_1a_{23}a_{31}+a_{21}c_3a_{13}-a_{31}c_2a_{13}-c_3a_{23}a_{11}-a_{21}c_1a_{33})$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha b_1+\beta c_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha b_2+\beta c_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha b_3+\beta c_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_2 & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\Delta = \alpha\Delta_1 + \beta\Delta_2}$$

Числа b_i и c_i $i = 1, 2, 3$ могут являться элементами какого-либо столбца определителя Δ, а могут быть просто какими то числами.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример 1.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 18 & 14 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2\cdot 1 + 3\cdot 3 & 2\cdot 3 + 3\cdot 4 & 2\cdot 4 + 3\cdot 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Пример 2.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 134 & 20 \\ 15 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\cdot 1 + 3\cdot 1 & 99 & 83 & 1 \\ 1\cdot 0 + 3\cdot 0 & 8 & 16 & 0 \\ 1\cdot 0 + 3\cdot 20 & 17 & 134 & 20 \\ 1\cdot 0 + 3\cdot 5 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 17 & 134 & 20 \\ 0 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 20 & 17 & 134 & 20 \\ 5 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 17 & 134 & 20 \\ 0 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot 0$$

Следствие 1. Определители с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

$$\Delta = -\Delta \implies 2\Delta = 0 \implies \Delta = 0$$

Следствие 2. Умножение всех элементов некоторой строки (столбца) определителя на число *a* равносильно умножению определителя на это число

Это следствие вытекает из свойства 3, в котором надо положить один из коэффициентов, например, $\beta = 0$.

Следствие 3. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Это следствие вытекает из свойства 3, когда один из коэффициентов, например, $\beta = 0$.

Следствие 4. Если элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, то определитель равен нулю

Следствие 5. Если к элементам некоторой строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца) умноженные на произвольный множитель *a* , то величина определителя не изменится.

Следует из свойства 3 и следствия 4

1.Матрицы

Алгебраическое дополнение

$(-1)^{i+j}\overline{M}_j^i$- алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя n-ого порядка

$$(-1)^{i+j}\overline{M}_j^i = A_{ij}$$

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \forall i \in \overline{i,n}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \forall j \in \overline{i,n}$$

Свойство алгебраического дополнения

Сумма произведений элементов какой-либо строки (или какого-либо столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю

$$A_{11}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{11}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Свойство алгебраического дополнения

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \text{для} \quad \forall i \in \overline{i,n} \qquad \text{возьмем} \quad i = 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \cdots + a_{2j}A_{1j} + \cdots + a_{2n}A_{1n} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Пример. $1\text{стл} - 3\cdot 4\text{стл}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 134 & 20 \\ 15 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 17 & 134 & 20 \\ 0 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} =$$

$2\text{стл} - 2\cdot 1\text{стл}$

$$= a_{11}A_{11} + 0A_{21} + 0A_{31} + 0A_{41} = a_{11}A_{11} = \begin{vmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 17 & 134 & 20 \\ 43 & 106 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 17 & 100 & 20 \\ 43 & 20 & 5 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} =$$

$$8\cdot\begin{vmatrix} 100 & 20 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 8\cdot 20\cdot\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 8\cdot 20\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8\cdot 20\cdot 5\cdot(5-4) = 800$$

Теорема (перемножение определителей)**.** Для любых двух квадратных матриц одного порядка определитель произведения матриц равен произведению их определителей $\det(A * B) = \det(A)\cdot\det(B)$

Обратная матрица

Определение. Квадратную матрицу B называют обратной матрице A и обозначают A^{-1}, если $A * B = B * A = E$, где E – единичная матрица.

$$B = A^{-1}$$

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$$

матрица A^{-1} единственная

$$A_1^{-1} * A = E \qquad\qquad \longrightarrow \qquad (A_1^{-1} - A_2^{-1}) * A = O$$

$$A_2^{-1} * A = E$$

A – не нулевая матрица $\Rightarrow$ $A_1^{-1} - A_2^{-1} = O$

$$A_1^{-1} = A_1^{-1} - A_2^{-1} + A_2^{-1} = O + A_2^{-1} \Rightarrow A_1^{-1} = A_2^{-1}$$

Теорема. $A * A^{-1} = E \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Необходимость $A * A^{-1} = E \Rightarrow \det(A) \neq 0$

$$A * A^{-1} = E \to \det(A * A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(E) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0$$

Достаточность $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A * A^{-1} = E$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \to D = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \to D^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$C = A * B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \Delta$$

$$c_{12} = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{23} + \cdots + a_{1n}A_{2n} = 0$$

$$C = A * B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E \qquad A * B = E$$

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Delta(A) \equiv \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$A \to A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \to A_1^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \to B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Delta \neq 0$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = A * B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$c_{11} = \frac{1}{\Delta}(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) = \frac{1}{\Delta}\Delta = 1$$

$$c_{22} = \frac{1}{\Delta}(a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}) = \frac{1}{\Delta}\Delta = 1$$

$$c_{12} = \frac{1}{\Delta}(a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{23}A_{13}) = \frac{1}{\Delta}0 = 0$$

$$c_{13} = \frac{1}{\Delta}(a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{23}A_{33}) = \frac{1}{\Delta}0 = 0$$

Элементарные преобразования матриц

1. Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.
2. Прибавление одной строки (столбца) к другой строке (столбцу).

$$A \sim A' \sim A$$

Пример 1 (прибавление умноженной на коэффициент одной строки к другой).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c + \alpha a & d + \alpha b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c + \alpha a & d + \alpha b \end{pmatrix} = A'$$

$$A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c + \alpha a & d + \alpha b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\alpha a & -\alpha b \\ c + \alpha a & d + \alpha b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\alpha a & -\alpha b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

Пример 2 (меняем строки местами).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a + \mathrm{c} & b + d \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -a - \mathrm{c} & -b - d \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -a - \mathrm{c} & -b - d \\ c - a - c & d - b - d \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -a - \mathrm{c} & -b - d \\ -a & -b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -a - \mathrm{c} & -b - d \\ a & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -a - \mathrm{c} + a & -b - d + b \\ a & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\mathrm{c} & -d \\ a & b \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

Теорема. (Об обратимости элементарных преобразований)
Если матрица A' получается из матрицы A при помощи конечного числа элементарных преобразований, то и наоборот, матрицу A можно получить из матрицы A' при помощи конечного числа элементарных преобразований.

Каждое элементарное преобразование строк матрицы A размером $\dim(A) = m \times n$ равносильно умножению матрицы A слева на некоторую **квадратную** матрицу S размером $\dim(S) = m$.

Каждое элементарное преобразование столбцов матрицы A размером $\dim(A) = m \times n$ равносильно умножению матрицы A справа на некоторую **квадратную** матрицу S размером $\dim(S) = n$.

Матрица S не зависит от матрицы A и полностью определяется преобразованием, которое матрица S осуществляет.

Определение. Матрица S, умножением на которую осуществляется элементарное преобразование называется элементарной матрицей.

$$\dim(A) = m \times n \qquad \dim(S_1) = m$$

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} \qquad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \dim(A) = 3 \times 4 \quad \dim(S_1) = 3$$

$$s_{22} = 4$$

$$S_1 * A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 \cdot 4 & 5 \cdot 4 & 6 \cdot 4 & 5 \cdot 4 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{i = 2, \qquad j = 2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \dim(B) = 3 \times 4 \quad \dim(S_1) = 3$$

$$s_{22} = 4$$

$$B * S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 4 & 3 \\ 4 & 5 \cdot 4 & 6 \\ 7 & 8 \cdot 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{i = 2, \qquad j = 2}$$

Пример 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{i = 2, \quad j = 1}$$

$$S_2 * A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4+1 & 5+2 & 6+3 & 5+2 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B * S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2 & 3 \\ 4+5 & 5 & 6 \\ 7+8 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \boxed{i = 2, \quad j = 1}$$

Умножение строки с индексом *i* матрицы на число

Умножение слева матрицы A размерности $\dim(A) = m \times n$ на элементарную матрицу S, которая получена из единичной матрицы E порядка m заменой i-ой единицы на диагонали на число $\alpha \neq 0$, приводит к матрице $S * A$, отличающейся от матрицы A тем, что ее i-я строка умножена на α.

Прибавление к строке с индексом *i* строку с индексом *j*

Умножение слева матрицы A размерности $\dim(A) = m \times n$ на элементарную матрицу S, которая получена из единичной матрицы E порядка m заменой нуля, который стоит на пересечении i-ой строки с j-м столбцом на единицу , приводит к матрице $S * A$, отличающейся от матрицы A тем, что к i-ой строке прибавляется строка j.

Пример 3.

$$S_2 * S_1 * A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 \cdot 4 & 5 \cdot 4 & 6 \cdot 4 & 5 \cdot 4 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 \cdot 4 + 1 & 5 \cdot 4 + 2 & 6 \cdot 4 + 3 & 5 \cdot 4 + 2 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Последовательность выполнения нескольких элементарных преобразований строк осуществляется умножением слева на произведение соответствующих элементарных матриц, причем множитель, который соответствует преобразованию, выполненному позже стоит левее.

Умножение столбца с индексом j матрицы на число

Умножение справа матрицы A размерности $\dim(A) = m \times n$ на элементарную матрицу S, которая получена из единичной матрицы E порядка n заменой j-ой единицы на диагонали на число $\alpha \neq 0$, приводит к матрице $A * S$, отличающейся от матрицы A тем, что ее j-й столбец умножен на α.

Прибавление к столбцу с индексом *j* строку с индексом *i*

Умножение справа матрицы A размерности $\dim(A) = m \times n$ на элементарную матрицу S, которая получена из единичной матрицы E порядка n заменой нуля, который стоит на пересечении i-ой строки с j-м столбцом на единицу , приводит к матрице $A * S$, отличающейся от матрицы A тем, что к j-му столбцу прибавляется столбец i.

Пример 4.

$$A * S_1 * S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 4 & 3 \\ 4 & 5 \cdot 4 & 6 \\ 7 & 8 \cdot 4 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 4 & 2 \cdot 4 & 3 \\ 4 + 5 \cdot 4 & 5 \cdot 4 & 6 \\ 7 + 8 \cdot 4 & 8 \cdot 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Последовательность выполнения нескольких элементарных преобразований столбцов осуществляется умножением справа на произведение соответствующих элементарных матриц, причем множитель, который соответствует преобразованию, выполненному позже стоит правее.

Определение. Квадратная матрица A , определитель которой $\det(A) \neq 0$, называется невырожденной матрицей, а у которой $\det(A) = 0$ называется вырожденной матрицей.

Теорема. Матрица A невырождена тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде произведения элементарных матриц.

Миноры неквадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad dim(A) = m \times n$$

$$k \le \min(m, n)$$

Минором *к*-порядка матрицы *A* называется определитель **квадратной** матрицы порядка k (т.е. его размер $\dim(M) = k \times k$), составленный из элементов матрицы A, которые находятся на пересечении заранее выбранных k строчек и k столбцов. Причем расположение элементов матрицы сохраняется

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \end{pmatrix} dim(A) = 3 \times 4 \qquad k = 2 < \min(3,4) = 3 \qquad M_{2,3}^{23} = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 11 & 10 \end{vmatrix}$$

$$k = 3 = \min(3,4) \qquad M_{2,3,4}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 11 & 10 & 9 \end{vmatrix} \qquad \cancel{k > 3}$$

Определение. Рангом матрицы A называется наивысший порядок минора матрицы отличной от нуля.

Обозначение $rank(A)$ $\qquad N_k = C_m^k \cdot C_n^k \qquad k = 1,2,\cdots \min(m,n)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad k \le 4$$

$$M_1^1 \equiv M(1) = 1 \neq 0 \qquad M(2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$M(3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 = 12 \neq 0$$

$$M(4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = +3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -56 \neq 0$$

$$rank(A) = 4$$

Метод окаймляющих миноров

<u>Определение.</u> Минор $M_{\text{ок}}\,(\,k+1\,)$порядка $k+1$ называется **окаймляющим минором** минора $M(k)$ порядка k , если матрица соответствующая окаймляющему минору, $M_{\text{ок}}\,(\,k+1\,)$ содержит матрицу соответствующую минору $M(k)$.

$$M_{ok}(4)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$M(3)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_1^1 \equiv M(1) = 1 \qquad M_{\text{ок}}(2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_{\text{ок}}(2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad M_{\text{ок}}(2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$ и т.д.

$$M(2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$M_{\text{ок}}(3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad M_{\text{ок}}(3) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \qquad M_{\text{ок}}(3) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_{\text{ок}}(3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \qquad M_{\text{ок}}(3) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} \qquad M_{\text{ок}}(3) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Теорема. Если миноры, окаймляющие минор *k*-ого порядка матрицы *A* размерности $dim(A) = m \times n$ равны нулю, то все миноры (*k+1*) матрицы *A* равны нулю.

<u>Пример.</u> Вычисление ранга матрицы A методом окаймляющих миноров

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow rank(A) \leq \min(3,4) = 3$$

1. $a_{11} = 1 \neq 0 \Longrightarrow rank(A) \geq 1$

2. $M(2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow rank(A) \geq 2$

3. $M(3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 8 \neq 0 \Longrightarrow rank(A) = 3$

Основные свойства ранга матрицы

1. При транспонировании матрицы ее ранг не изменится.

2. Ранг матрицы не изменится, если из нее удалить строку, состоящую из нулей.

A – исходная матрица, имеющая строку, целиком состоящую из нулей.

B – матрица, которая получена из матрицы A в результате удаления из матрицы A строки, целиком состоящие из нулей.

Все миноры матрицы A, не входящие в матрицу B, содержат нулевую строку и, следовательно, равны нулю. Поэтому наибольший из порядков отличных от нуля миноров этих матриц одинаков.

3. Ранг матрицы не изменится, если из нее удалить строку, являющуюся линейной комбинацией других строк.

С помощью элементарных преобразований эту строку можно преобразовать в нулевую. По теореме об инвариантности ранга матрицы относительно элементарных преобразований ранг матрицы не изменится. Дальше используем свойство 2.

4. Ранг матрицы не изменится, если из нее удалить строку, пропорциональную другой строке.

Следствие свойства 3 (коэффициент пропорциональности равен единице).

Из первого свойства следует, что все сказанное справедливо и для столбцов.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 10 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{pmatrix} \overset{\frac{1\text{стр}}{a_{11}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{pmatrix} \underset{\text{стр3-5стр1}}{\overset{\text{стр2-3стр1}}{\sim}}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \end{pmatrix} \overset{\text{стр3-стр2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \end{pmatrix}$$

$$rank(A) = rank(B) = 2$$

Метод Гаусса (нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований).

Метод Гаусса заключается в приведении матрицы, ранг которой вычисляем к трапециевидной (в случае прямоугольной матрицы) или к треугольной (в случае квадратной матрицы)

$$dim(A) = m \times n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim$$

$$1\text{стр} \times \frac{1}{a_{11}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{2n} - \frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \cdots \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1r} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2r} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{rank(A) = rank(B) = r}$$

Приведение матрицы к каноническому виду

Матрица, у которой вначале главной диагонали стоят подряд единицы, а остальные элементы нули называется матрица канонического вида.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Теорема</u>. Если матрица $\boldsymbol{A}$ **невырожденная** и определены произведения матриц
$A * B$ и $B * A$, то $rank(A * B) = rank(B)$; $rank(B * A) = rank(B)$

Доказательство базируется на теоремах.

<u>Теорема.</u> Матрица A является невырожденной тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде произведения элементарных матриц.

<u>Теорема.</u> (*об инвариантности ранга матрицы относительно элементарных преобразований*). Ранг матрицы *C* полученной из матрицы *B* элементарными преобразованиями равен рангу матрицы *B*.

$$\begin{matrix} A * B = S_1 * S_2 \cdots S_K * B = C \\ B * A = B * S_1 * S_2 \cdots S_K = C \end{matrix} \Rightarrow rank(C) = rank(B) \Rightarrow \begin{matrix} rank(A * B) = rank(B) \\ rank(B * A) = rank(B) \end{matrix}$$

<u>Теорема.</u> Ранг **произведения двух матриц** не превосходит рангов сомножителей

$$rank(A * B) \leq \min(rank(A), rank(B))$$

Линейная зависимость строк (столбцов) матрицы

<u>Определение.</u> Строка $A = (a_1, a_2 \cdots a_n)$ является линейной комбинацией других строк

$B = (b_1, b_2 \cdots b_n), C = (c_1, c_2 \cdots c_n)$, $D = (d_1, d_2 \cdots d_n) \cdots F = (f_1, f_2 \cdots f_n)$, если

найдутся такие числа $\alpha, \beta, \gamma \cdots \delta$ не все равные нулю, т.е. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \cdots + \delta^2 \neq 0$, что справедливы равенства

$$a_j = \alpha b_j + \beta c_j + \delta d_j \cdots \gamma f_j \qquad j = 1,2, \cdots n$$

<u>Определение.</u> Строки $A = (a_1, a_2 \cdots a_n)$, $B = (b_1, b_2 \cdots b_n)$, $C = (c_1, c_2 \cdots c_n)$,

$D = (d_1, d_2 \cdots d_n) \cdots F = (f_1, f_2 \cdots f_n)$ называются линейно зависимыми, если

найдутся такие числа $\mu, \alpha, \beta, \gamma \cdots \delta$ не все равные нулю, что справедливы равенства

$$(*) \qquad \mu a_j + \alpha b_j + \beta c_j + \delta d_j + \cdots + \gamma f_j = 0 \qquad j = 1,2, \cdots n$$

$$(**) \qquad \mu A + \alpha B + \beta C + \delta D + \cdots + \gamma F = 0$$

$$\mu^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + \cdots + \gamma^2 \neq 0$$

Определение. Строки $A, B, C, D, \cdots F$ называются линейно независимыми, если

равенство (**)возможно лишь в случае, когда все числа $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \cdots = \mu = 0$.

$$(**) \qquad \mu A + \alpha B + \beta C + \delta D + \cdots + \gamma F = 0$$

Теорема. Для того, чтобы строки $A, B, C, D, \cdots F$ были линейно зависимыми,

необходимо и достаточно, чтобы одна из этих строк являлась линейной комбинацией

остальных строк

Доказательство. Необходимость.

$$\mu A + \alpha B + \beta C + \delta D + \cdots + \gamma F = 0 \qquad \mu \neq 0$$

$$A = -\frac{\alpha}{\mu} B - \frac{\beta}{\mu} C - \frac{\delta}{\mu} D - \cdots - \frac{\gamma}{\mu} F$$

$$A = \varepsilon B + \theta C + \rho D + \cdots + \sigma F \qquad (***)$$

Достаточность

$$-1A + \varepsilon B + \theta C + \rho D + \cdots + \sigma F = O \qquad (****)$$

$$\mu = -1 \neq 0$$

Пример (линейная комбинация третьей строки).

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3 = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2$$

$$8 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3$$

$$-4 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2)$$

Линейная независимость матриц

$A_1, A_2, \cdots A_k$ - матрицы одинакового размера

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ - числа

$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k$ - линейная комбинация матриц

$B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k$ разложение матрицы B по матрицам $A_1, A_2, \cdots, A_k$

Определение (линейной независимости матриц). Система матриц **одинакового размера** $A_1, A_2, \cdots A_k$ линейно независима, если нулевая матрица раскладывается по ней однозначно, т.е. из равенства

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k = O \qquad (**)$$

следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

В противоположном случае, т.е. если существуют $\boldsymbol{k}$ чисел $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ одновременно неравные нулю и такие, что выполняется равенство $(**)$, система матриц называется линейно зависимой.

Теорема. Если матрица B разложена по линейной независимой системе матриц $A_1, A_2, \cdots A_k$ ($\text{т. е.} \, B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k$), то коэффициенты разложения определены однозначно.

<u>Доказательство</u>. Пусть коэффициенты разложения определения неоднозначно, т.е. есть два набора коэффициентов разложения матрицы B по матрицам $A_1, A_2, \cdots A_k$ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k$ и $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_k$

$$- \begin{array}{l} B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_k A_k \\ B = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \cdots + \beta_k A_k \end{array}$$

$$O = (\alpha_1 - \beta_1) A_1 + (\alpha_2 - \beta_2) A_2 + \cdots + (\alpha_k - \beta_{k)} A_k$$

$A_1, A_2, \cdots A_k$ - линейно независимая система. Следовательно, согласно определению линейной независимости матриц

$$(\alpha_1 - \beta_1) = (\alpha_2 - \beta_2) = \cdots (\alpha_k - \beta_k) = 0$$

$$\alpha_1 = \beta_1; \quad \alpha_2 = \beta_2; \quad \cdots; \quad \alpha_k = \beta_k$$

Базисный минор

Определение. Базисным минором матрицы A называется ее минор, отличный от нуля, порядок которого равен рангу матрицы A.

Определение. Строки и столбцы матрицы A, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются базисными

Теорема (о базисном миноре)

1. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

2. Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы.

1. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad dim(A) = m \times n \qquad rank(A) = r$$

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$ - базисный минор $\qquad \dim(M) = r$

Возьмем некоторое число j $\quad (1 \leq j \leq n)$ и $i = \overline{1, m}$

Пусть $\boxed{1)\ i \text{ или } j \leq r}$

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

т.к. имеем или две одинаковые строчки или два одинаковых столбца

Пусть $\boxed{2)\ i > r \text{ и } j > r}$

$$\Delta_{ij} = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1r} \quad a_{1j}}}^{r+1} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & \boxed{a_{ij}} \end{vmatrix} \end{array} = 0$$

Получили минор $r+1$ порядка $\quad \dim(\Delta_{ij}) = r + 1$

Разложим определитель по последней строке

$$\Delta_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{ir}A_{ir} + a_{ij}A_{ij} = 0$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j}M(r) \neq 0$ т.к. $M(r)$ это базисный минор

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{ir}\alpha_r + a_{ij}\alpha_{r+1} = 0 \qquad \forall\, i = \overline{1,m}$$

$$\alpha_{r+1} = A_{ij} \neq 0$$

$$a_{ij} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{r+1}}a_{i1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_{r+1}}a_{i2} - \cdots - \frac{\alpha_r}{\alpha_{r+1}}a_{ir} \qquad \beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_{r+1}} \qquad \forall\, i = \overline{1,m}$$

$$(*) \qquad a_{ij} = \beta_1 a_{i1} + \beta_2 a_{i2} + \cdots + \beta_r a_{ir}$$

2. Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы.

Предположим, что базисные строки (столбцы) линейно зависимы. Тогда одна из базисных строк (столбцов) является линейной комбинацией остальных базисных строк (столбцов). Отсюда, из свойств определителя следует, что определитель (базисный минор) равен нулю, что противоречит определению базисного минора $(\Delta = \alpha\Delta_1 + \beta\Delta_2)$

Следствие 1. Всякая не базисная строка (столбец) является линейно комбинацией **всех строк (столбцов)** этой матрицы.

Следствие 2. Максимальное число линейно независимых строк (столбцов) равно рангу матрицы.

Следствие 3. (критерий равенства нулю определителя) Для того, чтобы определитель квадратной матрицы был равен нулю необходимо и достаточно, чтобы некоторая его строка (столбец) была линейной комбинацией других его строк (столбцов)

Система линейных уравнений (СЛУ)

СЛУ общего вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ - неизвестные величины

$a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{mn}$ - коэффициенты системы

$b_1, b_2, \cdots, b_m$ - свободные члены

a_{ij}

i - номер уравнения

j - номер неизвестного, при котором стоит коэффициент a_{ij}

Определение (решение системы). Упорядоченная система чисел $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ называется решением системы линейных уравнений (1), если каждое из уравнений системы (1) обращается в тождество при подстановке $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ в систему уравнений (1).

$$
\begin{gathered}
a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n \equiv b_1 \\
a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n \equiv b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n \equiv b_m
\end{gathered}
$$

Определение. Система уравнений (1) называется совместной, если она имеет <u>хотя бы одно</u> решение и несовместной, если у нее <u>нет ни одного решения</u>.

Пример системы не имеющей решения (несовместная система)

$$
\begin{gathered}
x_1 + x_2 = 1 \\
x_1 + x_2 = 2
\end{gathered}
$$

Определение. Совместная система уравнений (1) называется определенной, если она имеет единственное решение.

Определение. Совместная система уравнений (1) называется неопределенной, если она имеет по крайней мере два решения.

Определение. Два решения совместной системы (1) $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \cdots c_n^{(1)}$ и $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \cdots c_n^{(2)}$ называются различными, если нарушается хотя бы одно из равенств $c_1^{(1)} = c_1^{(2)}, c_2^{(1)} = c_2^{(2)}, \cdots c_n^{(1)} = c_n^{(2)}$.

Решение можно записать в виде матрицы-столбца

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Такая запись называется вектор-решение

Матричное представление системы линейных уравнений

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A * X = B \qquad (2)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ - расширенная матрица системы

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{c}_1 \\ \mathrm{c}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{c}_n \end{pmatrix}$$ - решение, записанное в виде матрицы-столбца

Определение. Две системы линейных уравнений называются эквивалентными или равносильными, если всякое решение одной из них является решением другой и наоборот, т.е. если они имеют одно и тоже множество решений.

Элементарные преобразования системы линейных уравнений

1. Умножение некоторого уравнения системы на число, отличное от нуля.
2. Прибавление к одному уравнению системы другого ее уравнения, умноженное на произвольное число.
3. Перестановку местами двух уравнений системы.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Элементарные преобразования системы линейных уравнений приводят к системе эквивалентной исходной.

Решение невырожденных линейных систем. Формула Крамера.

Пусть дана линейная система $\boldsymbol{n}$ уравнений с $\boldsymbol{n}$ неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots&\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1')$$

Матричная форма записи этой системы

$$A * X = B \qquad (3)$$

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \dim(A) = n \times n$$

$$(5) \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Решение системы (1’)

$$A * X = B$$

$$(6) \qquad A^{-1} * A * X = A^{-1} * B$$

$$E * X = A^{-1} * B$$

$$X = A^{-1} * B$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$(7') \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n} \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

$$(8') \quad x_1 = \frac{1}{\Delta}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n)$$
$$= \frac{1}{\Delta}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots$$
$$+ b_nA_{n1})$$

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1})$$

$$x_j = \frac{1}{\Delta}\left(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}\right)$$

$$x_n = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn})$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1})$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \equiv \Delta_1$$

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}}$$

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}} \qquad \boxed{\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \qquad \boxed{j = \overline{1, n}}$$

$$A * X = B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \; ; \; \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = a_{11}$$

$$A_{11} = a_{22}$$

$$A_{12} = -a_{21}$$

$$A_{21} = -a_{12}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{22} & A_{21} \\ A_{12} & A_{11} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b_1 A_{22} + b_2 A_{21} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b_1 a_{11} - b_2 a_{12} \\ -b_1 a_{21} + b_2 a_{22} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(b_1 a_{11} - b_2 a_{12}); \qquad x_2 = \frac{1}{\Delta}(-b_1 a_{21} + b_2 a_{22})$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \Delta \cdot x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{21} = \Delta \cdot x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$A * X = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Формула Крамера

$$\Delta \neq 0 \quad \rightarrow \quad A^{-1} \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B \quad \rightarrow \quad x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение.

$$X = A^{-1} * B$$

B – матрица свободных членов. Она единственная.

A^{-1} – обратная матрица матрицы A, составленной из коэффициентов системы. Матрица A единственная. Обратная к ней матрица тоже единственная (доказывали).

Следовательно матрица X тоже единственная.

Пример. $\begin{matrix} 3x_1+5x_2-2x_3=1 \\ x_1-3x_2+2x_3=2 \\ 6x_1+7x_2-3x_3=-1 \end{matrix}$ $\quad A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 14 & -8 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 14 & -8 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=10\neq 0$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 7 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & -13 & 6 \\ 0 & 12 & -5 \end{vmatrix}=-7 \qquad x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-7}{10}=-0{,}7$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 0 & 6 \\ 9 & 0 & -5 \end{vmatrix}=29 \qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{29}{10}=2{,}9$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -5 & -13 & 0 \\ 9 & 12 & 0 \end{vmatrix}=57 \qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{57}{10}=5{,}7$$

Теорема Кронекера-Капелли. Для совместимости системы m линейных уравнений с n неизвестными необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.

Необходимость.

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \qquad (1)$$

Система совместна. $\Longrightarrow$ имеет хотя бы одно решение. Пусть $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ решение

$$\begin{matrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m \end{matrix} \qquad (9)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

$rank(\tilde{A}_1) = rank(\tilde{A})$ $\qquad rank(\tilde{A}_1) = rank(A)$ $\qquad \Longrightarrow \qquad rank(\tilde{A}) = rank(A)$

Достаточность. Пусть $rank(A) = rank(\tilde{A}) = r$

Докажем, что система совместна

Так как $rank(A) = rank(\tilde{A})$

$$M_{bA} = M_{b\tilde{A}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \dim(M_{bA}) = r$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & & a_{rr} & a_{m,r+1} & & a_{rn} & b_r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{m,r} & a_{m,r+1} & & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

По следствию 1 теоремы о базисном миноре (Всякий не базисный столбец матрицы является линейной комбинацией всех столбцов матрицы) последний столбец матрицы $\tilde{A}$, т.е. (b_i) является линейной комбинацией всех столбцов матрицы A

Таким образом, существуют числа $c_1, c_2, \cdots, c_n$ такие, что

$$\begin{gathered} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_n \end{gathered}$$

т.е. выполнены равенства (9). А это означает, что $c_1, c_2, \cdots, c_n$ решение системы (1).

Решение произвольных линейных систем.

Теорема. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то множество решений система бесконечно.

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r + a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \\ a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \cdots + a_{r+1r}x_r + a_{r+1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{r+1n}x_n = b_{r+1} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mr}x_r + a_{m,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \qquad (***)$$

Пусть система совместна и $rank(A) = rank(\tilde{A}) = r < n$

$$M_б = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$ Базисный минор

Любая строка матрицы *A* является линейной комбинацией базисных строк (теорема о базисном миноре)

Поэтому система уравнений $(***)$ равносильна системе (следующий слайд)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots & & \cdots & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ a_{r+11} & a_{r+12} & \cdots & a_{r+1r} & a_{r+1r+1} & \cdots & a_{r+1n} \\ & & \cdots & & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & a_{1r+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ Линейными преобразованиями

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots & & \cdots & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r &+ a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r &+ a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots & \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r &+ a_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}\,x_n \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r &= b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\
&\cdots\ \cdots\ \cdots \\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n
\end{aligned}
$$

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \quad x_i = \frac{\Delta_{xi}}{\Delta} \qquad i = \overline{1, r}
$$

$$
\Delta_{xi} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}\,x_n) \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots & \cdots \\ a_{r1} & & (b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n) \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}
$$

$x_i = f_i(a_{ij}, b_1, \cdots b_r, x_{r+1}, \cdots x_n)$ $\qquad x_{r+1}, \cdots x_n$ принимают любые значения из *R*

$i = \overline{1, r}$ $\qquad j = \overline{1, r}$ кроме $j = i$

$x_{r+1} = c_1; x_{r+2} = c_2; \ \cdots x_n = c_{n-r};$

$\boxed{x_i = f_i(a_{ij}, b_1, \cdots b_r, c_1, \cdots c_{n-r})}$ $\boxed{i = \overline{1, r}}$ $\boxed{j = \overline{1, r}}$ $\boxed{\text{кроме } j = i}$

Пример.

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7$$
$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2$$
$$5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 11$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 10 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 7 & 2 & 11 \end{pmatrix} \qquad rank(A) = rank(\tilde{A}) = 2$$

$$M_б = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \qquad \dim(M_б) = 2$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7$$
$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2$$

$$2x_2 - 3x_3 = 7 - x_1 - 4x_4$$
$$4x_2 + 5x_3 = 2 - 2x_1 + -x_4$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 - x_1 - 4x_4 & -3 \\ 2 - 2x_1 + x_4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{41 - 11x_1 - 17x_4}{22}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 - x_1 - 4x_4 \\ 4 & 2 - 2x_1 + -x_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-24 + 18x_4}{22}$$

$$\left\{ c_1; \quad \frac{41 - 11c_1 - 17c_2}{22}; \quad \frac{-24 + 18c_2}{22}; \quad c_2 \right\} \qquad \forall c_1, c_2 \in R$$

Теорема. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\ \dots\ \dots \\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \qquad (****)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$rank(A) = rank(\tilde{A}) = n$$

$$\begin{matrix} m > n\ ? & & m > n \\ m = n\ ? & \rightarrow & m = n \\ m < n\ ? & & \cancel{m < n} \end{matrix}$$

Тогда существует минор

$$M_b = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

который является базисным и для A и для $\tilde{A}$

Так как каждая не базисная строка матрицы $\tilde{A}$ является линейной комбинацией ее базисных строк, то система $(****)$ эквивалентна системе, состоящей только из тех n уравнений, коэффициенты при неизвестных в которых образуют базисный минор M_b.

$$\boxed{m = n}$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\ \dots\ \dots \\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{gathered}$$

Это невырожденная система n уравнений с n неизвестными. Она имеет единственное решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \quad x_i = \frac{\Delta_{xi}}{\Delta}$$

Следовательно и исходная система $(*)$ имеет единственное решение.

Теорема. Если совместная система произвольных линейных уравнений имеет единственное решение, то ранг матрицы системы равен числу неизвестных.

Теорема. Если совместная система произвольных линейных уравнений имеет бесконечное множество решений, то ранг матрицы системы меньше числа неизвестных.

Схема решения системы линейных уравнений

1. Находят ранг матрицы A $(rank(A))$ и ранг расширенной матрицы $\tilde{A}$ $\left(rank(\tilde{A})\right)$,
Если $rank(A) \neq rank(\tilde{A})$, то система несовместна.

2. Если $rank(A) = rank\left(\tilde{A}\right) = r$, то выделяют базисный минор и базисные неизвестные.

3. Данную систему заменяют системой, состоящей из тех r уравнений, в которую вошли элементы базисного минора.

4. Если число базисных неизвестных равно числу неизвестных системы, то система имеет единственное решение. Решение можно найти по формуле Крамера.

5. Если число базисных неизвестных меньше числа неизвестных системы, то находят выражение базисных неизвестных через свободные неизвестные, например, по формуле Крамера.

Теорема. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (****)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$rank(A) = rank(\tilde{A}) = n$$

$$\begin{matrix} m > n \ ? & & m > n \\ m = n \ ? & \rightarrow & m = n \\ m < n \ ? & & \cancel{m < n} \end{matrix}$$

Тогда существует минор

$$M_b = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

который является базисным и для A и для $\tilde{A}$

Так как каждая не базисная строка матрицы $\tilde{A}$ является линейной комбинацией ее базисных строк, то система $(****)$ эквивалентна системе, состоящей только из тех n уравнений, коэффициенты при неизвестных в которых образуют базисный минор M_b.

$$\boxed{m = n}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Это невырожденная система n уравнений с n неизвестными. Она имеет единственное решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \quad x_i = \frac{\Delta_{xi}}{\Delta}$$

Следовательно и исходная система $(*)$ имеет единственное решение.

Теорема. Если совместная система произвольных линейных уравнений имеет единственное решение, то ранг матрицы системы равен числу неизвестных.

Теорема. Если совместная система произвольных линейных уравнений имеет бесконечное множество решений, то ранг матрицы системы меньше числа неизвестных.

Схема решения системы линейных уравнений

1. Находят ранг матрицы A $(rank(A))$ и ранг расширенной матрицы $\tilde{A}$ $\left(rank(\tilde{A})\right)$,
Если $rank(A) \neq rank(\tilde{A})$, то система несовместна.

2. Если $rank(A) = rank\left(\tilde{A}\right) = r$, то выделяют базисный минор и базисные неизвестные.

3. Данную систему заменяют системой, состоящей из тех r уравнений, в которую вошли элементы базисного минора.

4. Если число базисных неизвестных равно числу неизвестных системы, то система имеет единственное решение. Решение можно найти по формуле Крамера.

5. Если число базисных неизвестных меньше числа неизвестных системы, то находят выражение базисных неизвестных через свободные неизвестные, например, по формуле Крамера.

Пример.

$$\begin{gathered} 3x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 5x_1 + 4x_3 = 9 \end{gathered}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M_б = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \qquad \dim(M_б) = 3$$

$$M'_{ok}(4) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 14 & -2 & -30 \\ 1 & -5 & 1 & 12 \\ 0 & 14 & -2 & -30 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$M''_{ok}(4) = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 12 \\ 0 & 14 & -2 & -30 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 12 \\ 0 & 7 & -1 & -15 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 12 \\ 0 & 7 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times$$

$$3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & 1 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

$$rank(A) = rank(\tilde{A}) = 3$$

$$\cancel{3x_1 - x_2 + x_3 = 6}$$
$$x_1 - 5x_2 + x_3 = 12$$
$$2x_1 + 4x_2 = -6$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$$
$$\cancel{5x_1 + 4x_3 = 9}$$

$$x_1 - 5x_2 + x_3 = 12$$
$$2x_1 + 4x_2 = -6$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 1$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 10 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 7 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$rankA = rank\tilde{A} = 2$$

$$M_{\text{б}} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = 7 - x_1 - 4x_4 \\ 4x_2 + 5x_3 = 2 - 2x_1 + x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_2 \quad - 3x_3 = 7 - x_1 - 4x_4 \\ 4x_2 + 5x_3 = 2 - 2x_1 + x_4 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 - x_1 - 4x_4 & -3 \\ 2 - 2x_1 + x_4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{41 - 11x_1 - 17x_4}{22}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 - x_1 - 4x_4 \\ 4 & 2 - 2x_1 + x_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-24 + 18x_4}{22}$$

$$x_1 = c_1 \qquad c_1 \in R$$

$$x_4 = c_2 \qquad c_2 \in R$$

$$\left\{ c_1, \quad \frac{41 - 11c_1 - 17c_2}{22}, \quad \frac{-24 + 18c_2}{22}, \quad c_2 \qquad \forall c_1, c_2 \in R \right\}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dfrac{41 - 11c_1 - 17c_2}{22} \\ \dfrac{-24 + 18c_2}{22} \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{41}{22} \\ \dfrac{-24}{22} \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-11}{22} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-17}{22} \\ \dfrac{18}{22} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \forall c_1, c_2 \in R$$

Система линейных однородных уравнений (СЛОУ)
Фундаментальная система решений

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \qquad (2)$$

<u>Определение.</u> Система линейных уравнений называется однородной, если свободный член в каждом уравнении равен нулю

(3) $\quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \quad$ - решение (при любых a_{ij})

Из теоремы о единственности решения совместной системы (*Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.*) следует, что однородная система имеет <u>только</u> тривиальное решение, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных .

$$rank(A) = n \qquad \leftrightarrow \qquad M_б \equiv \Delta$$

Т.е. , если определитель системы $\Delta \neq 0$, то существует только тривиальное решение.

Из теоремы о бесчисленном множестве решений совместной системы (*Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.*) следует, что однородная система имеет нетривиальное решение, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных .

$$rank(A) = r < n \qquad \leftrightarrow \qquad M_{б} \neq \Delta$$

Т.е. , если определитель системы $\Delta = 0$, то существует нетривиальное решение и даже больше – бесчисленное множество решений.

Пример.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ - базисный минор $\qquad x_1, x_2$ - базисные переменные

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -x_3 - x_4 \\ 4x_1 + x_2 &= -2x_3 + 3x_4 \end{aligned} \qquad x_1 = \frac{-3x_3 + 2x_4}{6} \qquad x_2 = \frac{5}{3}x_4 \qquad \begin{aligned} x_3 &= c_1 \\ x_4 &= c_2 \end{aligned}$$ - обозначение

$$\forall c_1, c_2 \in R$$

$$\left\{ \left(\frac{-3c_1 + 2c_2}{6}, \frac{5}{3}c_2, c_1, c_2 \right) \quad \forall c_1, c_2 \in R \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \forall c_1, c_2 \in R$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3c_1 + 2c_2}{6} \\ \frac{5}{3}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = D$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{-3c_1 + 2c_2}{6} \\ \frac{5}{3}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 D_1 + c_2 D_2$$

$$D = c_1 D_1 + c_2 D_2 \qquad (5)$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 \equiv x_3 = 1, \quad c_2 \equiv x_4 = 0 \quad \Longrightarrow D_1$$

$$c_1 \equiv x_3 = 0, \quad c_2 \equiv x_4 = 1 \quad \Longrightarrow D_2$$

$$c_1 = x_3 = 1, \qquad c_2 = x_4 = 0$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -1 \\ 4x_1 + x_2 &= -2 \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1-2}{6} = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4+4}{6} = 0$$

Решение

$$x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = 0;\ x_3 = 1;\ x_4 = 0 \sim (-\frac{1}{2}, 0, 1.0) \Longrightarrow \quad D_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = x_3 = 0, \qquad c_2 = x_4 = 1$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -1 \\ 4x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6+4}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Решение $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 0, 1\right) \Longrightarrow D_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

D_1и D_2 - вектор-решения

Решения D_1 и D_2 это частные решения однородной системы линейных уравнений и они линейно независимы.

A и B линейно зависимы, если $\alpha A + \beta B = 0$ только при $\alpha = \beta = 0$

$r = rank(A) = 2,$ $n = 4$ $n - r = 2$ Два линейно независимых частных решений

$$\boxed{X = c_1 D_1 + c_2 D_2}$$

$D_1, D_2, \cdots, D_k$ - вектор-решения системы СЛОУ

$$\alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \cdots + \alpha_k D_k$$

если $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0 \equiv \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| = 0 \equiv \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 = 0,$

то $\alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \cdots + \alpha_k D_k$ тривиальная комбинация

Вектор решения $D_1, D_2, \cdots, D_k$ называются линейно зависимыми, если хотя бы одно из них является линейной комбинацией остальных. В противном случае эти вектор решения называются линейно независимыми.

Теорема. Любая линейная комбинация конечного числа вектор-решений системы однородных линейных уравнений является вектор-решением этой системы.

Теорема. Пусть дана система линейных однородных уравнений с рангом матрицы меньше числа неизвестных, $rank(A) = r < n$. Тогда существует $n - r$ линейно независимых вектор-решений $D_1, D_2, \cdots, D_{n-r}$ данной системы и любое вектор-решение системы является линейной комбинацией $D_1, D_2, \cdots, D_{n-r}$.

$$(7) \quad D_1 = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ \vdots \\ d_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \cdots D_{n-r} = \begin{pmatrix} d_{1,n-r} \\ d_{2,n-r} \\ \vdots \\ d_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Число решений $n - r$ – это максимальное число линейно независимых вектор-решений.

Определение. Совокупность максимального числа линейно независимых вектор-решений (7) системы линейных однородных уравнений называется фундаментальной системой решений системы линейных однородных уравнений.

$D_1, D_2, \cdots, D_{n-r}$ фундаментальная система решений лин. однородных уравнений

(8) $D = \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \cdots + \alpha_{n-r} D_{n-r}$ общее решение СЛОУ

Связь между общими решениями неоднородной системы линейных уравнений и соответствующей ей системой однородных уравнений

(9) $A * X = B$ $\quad \dim(A) = m \times n$ $\quad rank(A) = r < n$

(10) $A * X = 0$

Теорема. Сумма любого решения неоднородной системы и любого решения соответствующей ей однородной системы является решением неоднородной системы.

Доказательство. C – вектор-решение системы (10), D – вектор-решение системы (9)

$A * C = O,$ $\quad A * D = B,$ $\quad A * (C + D) = A * C + A * D = O + B = B$

$$A * (C + D) = B$$

Теорема. Разность двух произвольных решений неоднородной системы (9) является решением соответствующей ей однородной системы.

Доказательство. D_1 и D_2 – вектор-решене системы (9)

$A * D_1 = B,$ $\quad A * D_2 = B,$ $\quad A * (D_1 - D_2) = A * D_1 - A * D_2 = B - B = O$

$$A * (D_1 - D_2) = O$$