Содержание

1 Билеты

1.1 Множества и операции над ними

(6-12)

Множество состоит из элементов

Если каждый элемент множества X принадлежит множеству Y, то говорят X подмножество Y $X \subset Y$.

$X = Y \Leftrightarrow X \subset Y \wedge Y \subset X$

Пустое множество $\varnothing$ — множество в котором нет элементов

Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство множеств. Объединением семейства $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется множество всех элементов, которые принаджежат хотя бы одному из множествX_n:

$\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x :\ \exists \alpha \in A\ x \in X_\alpha\}$

$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z), \quad X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cup X = X \cup \varnothing = X$

Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство множеств. Пересечением семейства $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется множество всеъ элементов, которые принадлежат каждому из множеств X_α

$\bigcap \alpha \in A X_\alpha = \{x :\ \forall \alpha \in A\ x \in X_\alpha\}$

$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z), \quad X \cap Y = Y \cap X, \quad X \cup \varnothing = \varnothing$

Разностью множеств X и Y называется множество всех элементов, которые принадлежат X, но не принадлежат Y.

$X \backslash Y = \{x : x \in X, x \notin Y\}$

Определение не предполагает, что $Y \subset X$. Если же $Y \subset X$, то разность $X \backslash Y$ называют дополнением множества X до множества Y и обозначают $CX, \overline{X}, X^c$

$(X^c)^c = X, \quad X \cup X^c = U, \quad X \cap X^c = \varnothing$

Декартовым или пряиыи произведением множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар, таких что первый элемент принадлежит X, а второй — Y

$X \times Y = \{(x, y) :\ x \in X\ y \in Y$

1.2 Аксиомы вещественных чисел

(13-17)

1. Аксиомы поля. В множестве $\mathbb{R}$ определены две операции называемые сложением и умножением, действующме из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ и удовлетворяющие следующим свойствам.

1.1. Сочетательный закон (ассоциативноть) сложения: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

1.2. Переместительный закон (коммутативность) сложения: $x + y = y + x$.

1.3. Существует число нуль (0, нейтрвльный элемент по сложению), такое что $x + 0 = x$ для всех x.

1.4. Для любого числа x существует такое число $\overline{x}$, что $x + \overline{x} = 0$ (это число называется противоположныи числу x и обозначается $-x$).

1.5. Сочетательный закон (ассоциативность) умножения: $(xy)z = x(yz)$.

1.6. Переместительный закон (коммутативность) умножения: $xy = yx$.

1.7. Существует вещественное число единица (1б нейтральный элемент по умеожению), отличный от нуля, такое что $x \cdot 1 = x$ для всех x.

1.8. Для любого числа x, отличного от нуля, существует такое x', что $xx' = 1$(это число называется обратным к x и обозначается x^{-1} или $\frac{1}{x}$).

1.9. Распределительный закон (дистрибутивность): $x(y + z) = xy + xz$.

2. Аксиомы порядка. Между элементами $\mathbb{R}$ определено отношение $\leq$ со следующими своствами.

2.1. Для любых x, y верно $x \leq y$ или $y \leq x$.

2.2 Транзитивность: если $x \leq y, y \leq z$, то $x \leq z$.

2.3. Если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$.

2.4. Если $x \leq y$, то $x + z \leq y + z$ для любого z.

2.5. Если $0 \leq x$ и $0 \leq y$, то $0 \leq xy$

3. Аксиома Архимеда. Каковы бы ни были положительные числа $x, y \in \mathbb{R}$, существует такое натуральное число n, что $nx > y$.

4. Аксиома Канторва о вложенных отрезках.
Пусть $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вложенных отрезков, то есть
$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$.
Тогда существует точка, принадлежащая одновременно всем отрезкам $[a_n, b_n]$, то ечть
$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$.
Важно, что в определение отрезки, так как в случае $(0, \frac{1}{n}]$ пересечение равно $\varnothing$.

1.3 Метод математической индукции. Бином Ньютона

(21-24)
Пусть $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность утверждений. Если
1) P_1 верно, 2) для любого $n \in \mathbb{N}$ из P_n следует P_{n+1}
то P_n верно для всех $n \in \mathbb{N}$.

Бином Ньютона. Если $n \in \mathbb{Z}_+$, $x, y \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то
$(x + y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$.
При $n = 0$ и $n = 1$ очевидно. $n = 1$ служит базой индукции.
$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} y^{n-k} +$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n+1-k} = C_n^n x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) x^k y^{n+1-k} + C_n^0 x^0 y^{n+1} = C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k} + C_{n+1}^0 x^0 y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k}.$$

1.4 Существование максимума и минимума конечного множества, следствия

(25-26)
Число M называется максимумом или наибольшим элементом множества $E \subset \mathbb{R}$, если $M \in E$ и $\forall x \in E\ x \leq M$, обозначается $\max E$.

Теорема. Во всяком конечном подмножестве $\mathbb{R}$ есть наибольший и наименьший элемент.

Доказательство. Проведем индукцию по числу n элементов сножества. База индукции $n = 1$: если в множестве всего один элемент, то он и наибольший, и наименьший. Для определённости индукционный переход проведём в случае максимума. Пусть всяке n-элементное подмножество $\mathbb{R}$ имеет максимум, E —$(n+1)$-элементное подмножество $\mathbb{R}$:
$E = \{x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$.
Обозначим
$c = \max\{x_1, \cdots, x_n\}$.
Если $c \leq x_{n+1}$, то очевидно $x_{n+1} = \max E$, иначе $c = maxE$.

Следствие 1. Во всяком непустом ограниченнои сверху (снизу) подмножестве $\mathbb{Z}$ есть наибольший (наименьший) элемент.

Доказательство. Пусть $E \subset \mathbb{Z}$, $E \neq \varnothing$, E ограничено сверху. Выберем какой-нибудь элемент $n_0 \in E$ положим
$E_1 = \{n \in E : n >\geq n_0\}$.
Поскольку E ограничено сверху, то множество E_1 конечно (в нем не более $M - n_0 + 1$ элементов, где M — верхняя граница E). По теореме в множестве E_1есть наибольший элемент, он же будет наибольшим элементом в E.

Следствие 2. Во всяком непустом подмножестве $\mathbb{N}$ есть наименьший элемент.

1.5 Целая часть числа. Плотность множества рациональных чисел

(26-27)

Определение. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Наибольшее целое число, не превосходящее x, называется целой частью x и обозначается $[x]$. Она существует так как подмножество целых чисел, имеющее верхнюю границу, имеет максимум.

Замечание 1. Из определения следует, что
$[x] \leq x < [x] + 1, \qquad x - 1 < [x] \leq x$

Теорема. Плотность множества рациональных чисел. Во всяком непустом иитервале есть рациональное число.

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, тогда $\frac{1}{b-a} > 0$ и по аксиме Архимеда найдётся такое $n \in N$, что $n > \frac{1}{b-a}$, то есть $\frac{1}{n} < b - a$. Положим $c = \frac{[na]+1}{n}$, тогда $c \in \mathbb{Q}$ и
$c \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + b - a = b$
$c > \frac{na-1+1}{n} = a$
то есть $c \in (a, b)$.

Следствие 3. Во всяком интервале бесконечно много рациональных чисел.

Доказательство. Пксть в некотором интервале (a, b) количество рациональных чисел конечно. Обозначим x_1 наименьшее из них. Тогда в интервале (a, x_1) нет ни одного рационпльного число, что противоречит теореме.

1.6 Две теоремы о "бедности"счетных множеств

(38)

Теорема. Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

Доказательство. Пусть множество A бесконечено. Тогда в нём есть элемент a_1. Множество $A \backslash \{a_1\}$ бесконечно, поэтому в нём есть элемент a_3. Ввиду бесконечности множества A этот процесс не оборвётся ни на каком шаге; продолжая его и далее, получим множество $B = \{a_1, a_2, \cdots\}$, которое по построению будет счётным одмножеством A.

Теорема. Всякое бесконечно подмножество счётного множества счётно: есди A счётно, $B \subset A$ и B бесконечно, то B счётно.

Доказательство. Расположим элементы A в виде последовательности: $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$.
Будем нусеровать элементы B в порядке их появления в этой последовательности. Тем самым каждый элемент B будет занумерован ровно один раз и, так как B бесконечено, для нумерации будет использован весь натуральный ряд.

1.7 Теорема об объединении не более чеи счетных множеств (с леммой)

(39)

Лемма. Пусть элементы множества A предстаимы в виде бесконечной в обоих направлениях матрицы (занумерованы с помощью упорядоченной пары натуральных чисел по одному разу с использованием всех возможных пар). Тогда A счётно.

Доказательство. Занумеруем элементы множества A по диагоналям $A = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, \cdots\}$.

Определение. Не более чем счётное множество — счётное, конечное или пустое множество

Теорема. Не больее чем счётное объединение не более чем счётных множеств.

Доказательство. Пусть $B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ или $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, множества A_k не более чем счётны. Запишем элементы A_1 в первую строку матрицы, элементы $A_2 \backslash A_1$ — во вторую строку и так далее, то есть если задано множество A_k, то элементы $A_k \backslash \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j$ запишем в k-тую строку матрицы. Таким образом все элементы множества B окажутся записанными в клетки матрицы (но при этом некоторые клетки могут остаться пустыми). Значит B Равномощно некоторому подмножеству счётного множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. А подмножество счётного либо счётно, либо конечно, либо пусто, то есть не более чем счётно.

1.8 Счетность множества рациональных чисел

(40)

Теорема. Множество рациональных чисел счётно.

Доказательство. Обозначим $\mathbb{Q}_+\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$, $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$
При всех $q \in \mathbb{N}$ множество $\mathbb{Q}_q = \{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \cdots\}$ счётно. По теореме $Q_+ = \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} \mathbb{Q}_q$ счётно. Аналогично $\mathbb{Q}_-$ счётно. По той же теореме $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$ счётно.

Следствие 1. Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, то $\mathbb{Q} \cap (a, b)$ счётно.

1.9 Несчетность отрезка

(40)

Теорема. Отрезок $[0, 1]$ несчётен.

Доказательство. Допустим противное пусть отрезок $[0, 1]$ счётен, то есть все числа отрезка $[0, 1]$ можно разположить в виде последовательности $[0,\ 1] = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$.
Разобъём отрезок $[0, 1]$ на три равных отрезка $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ и обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из них, который не содержит точки x_1. Далее разобъём отрезок $[a_1, b_1]$ на три отрезка и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот из них, который не содержит точки x_2. Этот процесс продолжим неограниченно. В результате мы построим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n\}_{n=1}^{\infty}$, причём $x_n \notin [a_n, b_n]$ при любом n. По аксиоме о вложенных отрезках существует точка x^*, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Но тогда $x^* = x_m$ при неко-

тором m. По построению $x^* \notin [a_m, b_m]$, что противоречит принадлежности x^* всем отрезкам.

Следствие 2. Множества вещественныз чисел $\mathbb{R}$ и иррациональных чисел $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ несчётны.

Определение. Если множество эквивалентно отрезку $[0, 1]$, то говорят, что оно имеет мощность континуума.

Замечание 1. Любой невырожденный отрезок имеет мощность континнума. Также как и любой промежуток, вся прямая $\mathbb{R}$ и всё пространство $\mathbb{R}^m$ $m \in \mathbb{N}$.

Замечание 2. Множество всех функций $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, более богато элементами, чем отрезок $[0, 1]$, то есть оно не равномощно отрезку, но имеет часть, равномощную отрезку.

Замечание 3. Мощность — класс эквивалентности. Два множества попадают в один класс, если они эквивалентны.

Замечание 4. Если из бесконечного множества удалить конесное число элемнтов, множество окажется бесконечным, то получится множество равномощное исходному. Поэтому любое бесконечное множество имеет равномощное подмножество, не совпадающее с исходным множеством.

1.10 Единственность предела последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности

(50)

Теорема. Единственность предела последовательности. Последовательность в метрическом пространстве не может иметь более одного предела: если $x_n \to a$, $x_n \to b$, то $a = b$.

Доказательство. Предположим противное: пусть $a \neq b$. Тогда по аксиоме $\rho(a,b) > 0$. Возьмём $\varepsilon = \frac{\rho(a,b)}{2}$. По определению предела, $\exists N_1, N_2$, что $\forall n > N_1$ $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ и $\forall n > n_2$ $\rho(x_n, b) < \varepsilon$. Тогда если $n > \max(N_1, N_2)$, то по аксилмам расстояния
$\rho(a,b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = \rho(a,b)$
Что невозможно.

Теорема. Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Взяв $\varepsilon = 1$ найдем N, что для всех номеров $n > N$ будет $\rho(x_n, a) < 1$. Пусть
$R = \max\{\rho(x1, a), \cdots, \rho(x_n, a), 1\}$,
тогда $\rho(x_n, a) \leq R$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

1.11 Предельный переход в неравенстве. Теорема о сжатой подпоследовательности

(51)

Теорема. Предельныйпереход в неравенстве. Пусть x_n, y_n — вещественные последовательности $x_n \leq y_n$ при всех натуральных n, $a, b \in \mathbb{R}$ $x_n \to a$, $y_n \to b$. Тогда $a \leq b$.

Доказательство. Предположим противное: пусть $a > b$. Тогда $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. По определению предела найдутся такие номера N_1, N_2, что $a = \varepsilon < x_n$ для всех $n > N_1$, а $y_n < b + \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Значит если $n > \max\{N_1, N_2\}$, то
$y_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < x_n$,
что противоречит условию.

Замечание 1. $x_n = -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}$ показывает, что из $x_n < y_n$ не следует $\lim x_n < \lim y_n$.

Следствие 1. 1. Если $x_n \leq b$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и существует $\lim x_N$, то $\lim x_n \leq b$.

2. Если $x_n \geq a$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и существует $\lim x_N$, то $\lim x_n \geq a$.
3. Если $x_n \in [a, b]$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и существует $\lim x_N$, то $\lim x_n \in [a, b]$.

Замечание 2. Свойство отрезка из утверждения 3 (неверное для других типов отрезков) называется замкнутостью.

Теорема. О сжатой последовательности (О двух милиционерах). Пусть $\{x_n\},\ \{y_n\}, \{z_n\}$ — вещественные последовательности, $x_n \leq y_n \leq z_n$, при всех $n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}$, $\lim x_n = \lim z_n = a$. Тогда предел $\{y_n\}$ существует и равен a.

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению, предела найдутся такие номера N_1, N_2, что $a - \varepsilon < x_n$ для всех $n > N_1$, а $z_n < a + \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N$
$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$.
В силу произвольности ε предел $\{y_n\}$ существует и равен a.

Замечание 2. Отметим, что если $|y_n| \leq z_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $z_n \to 0$, то $y_n \to 0$.

Замечание 3. В обеих теорема достаточно выполнения неравенств для всех номеров, начиная с некоторого.

1.12 Бесконечно малые. Арифметические действия над сходящимися последовательностями

(53)

Определение. Последовательность вещественных или комплексных чисел называется бесконечно малой, если она стремится к нулю.

Лемма. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая: $\{x_n\}$ — бесконечно малая числовая последовательность, $\{y_n\}$ — ограниченная числовая последовательность, тогда $\{x_n y_n\}$ — бесконечно малая.

Доказательство. В силу ограниченности $\{y_n\}$ Найдётся $K > 0$, что $|y_n| \leq K$ при всех n. Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению предела последовательности $\{x_n\}$ существует такой номер N, что $|x_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ для всех $n > N$. Но тогда для всех $n > N$;
$|x_n y_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon$.
В силу произвольности ε это и означает $x_n y_n \to 0$.

(57)

Теорема. Арифметические действия над сходящимися последовательностями в нормированном пространстве. Пусть $(X, ||\cdot||)$ — нормиованное пространство, $\{x_n\}, \ \{y_n\}$ в X, λ_n — числовая последовательность $x_0, \ y_0 \in X, \ \lambda_0 \in \mathbb{R}(или\mathbb{C})$, $x_n \to x_0, \ y_n \to y_0, \ \lambda_n \to \lambda_0$. Тогда
1. $x_n + y_n \to x_0 + y_0$
2. $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$
3. $x_n - y_n \to x_0 = y_0$ 4. $||x_n|| \to ||x_0||$

Теорема. Арифметические действия над сходящимися числовыми последовательностями. Gecnm $x_n, \ y_n$ — числовые последовательности, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ (или$\mathbb{C}$), $x_n \to x_0, \ y_n \to y_0$. Тогда
1. $x_n + y_n \to x_0 + y_0$ 2. $x_n y_n \to x_0 y_0$ 3. $x_n - y_n \to x_0 - y_0$ 4. $|x_n| \to |x_0|$
5. Если $y_n \neq 0$ при всех n и $y_0 \neq 0$, то $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x_0}{y_0}$.

Доказательство.

1. Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению предела найдутся такие номера N_1 и N_2, что $||x_n - x_0|| < \frac{\varepsilon}{2}$для всех $n > N_1$, а $||y_n - y_0|| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > \mathbb{N}_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при всех $n > N$ юудет
$||(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)|| \leq ||x_n - x_0|| + ||y_n - y_0|| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

2. По неравенству треугольника

$||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| = ||(\lambda_n - \lambda_0)x_n + \lambda_0(x_n - x_0)|| \leq |\lambda_n - \lambda_0|||x_n|| + ||\lambda_0||||x_n - x_0||$

$\{|\lambda_n - \lambda_0|\}$ и $\{||x_n - x_0||\}$ — бесконечно малые. $\{||x_n||\}$ — ограничена по теореме. А $\{|\lambda_0|\}$ — постоянная. Тогда оба слагаемых бесконечно малые, по лемме, тогда их сумма тоже бесконечно малая.

3. $x_n - y_n = x_n + (-1)y_n \to x_0 + (-1)(y_0) = x_0 - y_0$.

4. Следует из $|||x_n|| - ||| \leq ||x_n - x_0||$ и теоремы о двух милиционерах.

5. Достаточно доказать, что $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y_0}$. Поскольку

$\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} = (y_0 - y_n) \cdot \frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{y_n}$

$\{y_0 - y_n\}$ – бесконечно малая, $\{\frac{1}{y_0}\}$ — ограниченная. Осталось доказать ограниченность $\{\frac{1}{y_n}\}$.

По определению предела для $\varepsilon = \frac{|y_0|}{2} > 0$ существует номер N, что $||y_n - y_0|| < \varepsilon$ для всех $n > N$. Тогда при всех $n > N$ по свойствам модуля

$|y_n| = |y_0 + y_n - y_0| \geq |y_0| - |y_n - y_0| > |y_0| - \varepsilon = \frac{|y_0|}{2}$

Обозначим $k = \min\{|y_1|, \cdot, |y_n|, \frac{|y_0|}{2}\}$. $k > 0$ и $|y_n| \geq k$ при всех n. Следовательно $|\frac{1}{y_n}| \leq \frac{1}{k}$ при всех n, что и зощначает ограниченность $\{\frac{1}{y_n}\}$

1.13 Свойство скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Норма порожденная скалярным произведением

(59)

Определение. Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Функция $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) называется скалярным произведением в X (обозначаение $\varphi x, y = \langle a, b \rangle$), если она удовлетворяет следующим свойствам.

1. Линейность по первому аргументу: для всех $x_1, x_2, y \in X$ и всех $\lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
$\langle \lambda x_1 + \mu x_2, y\rangle = \lambda \cdot \langle x_1, y\rangle + \mu \cdot \langle x_2, y\rangle$.
2. Эрмитовская симметричность
$\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$
3. Положительная определённость:
$\langle x, x\rangle \geq 0; \quad \langle a, b\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

В вещественном случае черту можно опустить.

Некоторые свойства скалярного произведения:

1. $\langle x, y_1, +y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$.
2. $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$.
3. $\langle \theta, y\rangle = \langle x, \theta\rangle = 0$

Теорема. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.(59)
$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$
$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$, так как $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ ($\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение)

Доказательство. Если $y = \theta$ неравенство выполнено. Иначе положим
$\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$
Тогда в силу аксиом скаялярного произведения и равенства $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2$
$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + (-1 - 1 + 1)\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}$
Таким образом
$\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2 = \langle y, y\rangle\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geq$

Замечание 1. Неравенство обращается в равенство тогда и толко тогда, когда вектора коллинеарны.

Вункция $p(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ — норма в X.
Положительная определённость следёет из аксиом.

$p(\lambda x) = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle x, x \rangle} = |\lambda| p(x)$
Докажем неравество треугольника
$p^2(x+y) = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\Re\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \le \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \le p^2(x) + 2p(x)p(y) + p^2(y) = (p(x) + p(y))^2$

Замечание 2. Неравенство обращается в равенство тогда и толко тогда, когда вектора x, yсонаправлены.

Доказательство. Еслм один из векторов нулевой, равенство очевидно. Пусть $x, y \neq \theta$.Обращение неравенства в равенство равносильно тому, что
$\Re\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| = ||x|| \cdot ||y||$
Из второго равенства вектора коллинеарны, то есть $x = \lambda y$. Подставляя, получим $\Re\lambda\langle y, y \rangle == |\lambda|\langle y, y \rangle$. Отсюда $\lambda > 0$

1.14 Неравенство Коши-Буняковского в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$. Сходимость и покоординатная сходимость

(61)

Теорема. Неравенство Коши-Буняковског и неравенство трейгольника в $\mathbb{R}^m$. Для любых вещественных чисел $x_1, \cdots, x_m$, y_1, y_m
$$(\sum_{k=1}^{m} x_k y_k)^2 \le (\sum_{k-1}^{m} x_k^2)(\sum_{k=1}^{m} y_k^2).$$
$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k + y_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} + \sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^{m} y_k^2}.$$
Доказательство. Первое — КБШ, второе правило — треугольника.

Определение. Говорят, что послледовательность $\{x^{(n)}\}$ точек $\mathbb{R}^m$ сходится к пределу $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ покоординатно, если $x_j^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_j^{(0)}$, для всех $j \in [1:m]$

Лемма. В $\mathbb{R}^m$ покоординатная сходимость и сходимость по евклидовой норме равносильны

Доказательство. Утверждение следует из неравенств
$|x^{(n)} - x_j^{(0)}| \leq |x^{(n)} - x^{(0)}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k^{(n)} - x_k^{(0)})^2} \leq \sqrt{m} \max_{1\leq k\leq m} |x_l^{(n)} - x_k^{(0)}|$
и теоремы о предельном переходе в неравенствах.

Следствие . Сходимость последовательности комплексных чисел равносильна одновременной сходимости последовательности из их мнимых частей.

1.15 Бесконечно большие и бесконечно малые. Арифметические действия над бесконечно большими

Билет 15: Бесконечно большие и бесконечно малые. Арифметические действия над бесконечно большими (65-67)

Определение. Говорят, что вещественная последовательность $\{x_n\}$ стремится к
1) плюс бесконечености, и пишут
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, если
$\forall E > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : n > N \; x_n > E$;
2) минус бесконечности, и пишут
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, если

$\forall E > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n > N\ x_n < -E$;
3) бесконечности, и пишут
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, если
$\forall E > 0 \exists N \in \mathbb{N}\ \forall b \in \mathbb{N} : n > N\ |x_n| > E$

Замечание 1. Из определений 1 и 2 следует третье, обратно неверно $x_n = (-1)^n n$

Определение. Последовательность называется бесконечно большой, если стремится к бесконечности.

Замечание 2. Из определения следует, что если $x_n \to \infty$, то x_n неограничена. Обратное неверно $x_n = (1 + (-1)^n)n$ не ограничена и не стремится к бесконечности.

Замечание 3. Понятно, что последовательность не может стремится одновремнно к бескончености и к конечному пределу, а также к бесконечности разных знаков. Тогда предел единственный в $\overline{\mathbb{R}}$.

Замечание 4. Определение достаточно проверять лишь для достаточно больших E, можно также опустить требование $E > 0$.

Замечание 5. Определение сходящейся последовательности не меняется:: последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел. Бесконечно большие последовательности считаются расходящимися.

Лемма. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми. Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность $x_n \neq 0$ ни прикаком n. Тогда последовательность $\{x_n\}$ — бесконечно большая в том и только том случае когда $\{\frac{1}{x_n}\}$ — бесконечно малая.

Доказательство. Пусть $x_n \to \infty$. Возьмём $\varepsilon > 0$ и для числа $E = \frac{1}{\varepsilon}$ подберееём N, что для всех $n > N\ |x_n| > E$. Последнее равносильно $|\frac{1}{x_n} < \varepsilon|$, что и означает стремление $\frac{1}{x_n}$ к нулю. в обратную сторону аналогично.

Теорема. Арифметические действия над бесконечно большими. Пксть $\{x_n\}, \{y_n\}$ — числовые последовательности.
1. Если $x_n \to +\infty, \{y_n\}$ ограничена снизу, то $x_n + y_n \to +\infty$

2. Если $x_n \to -\infty, \{y_n\}$ ограничена сверху, то $x_n + y_n \to -\infty$
3. Если $x_n \to \infty, \{y_n\}$ ограничена, то $x_n + y_n \to \infty$
4. Если $x_n \to \pm\infty, y_n \geq b > 0$ для всех n (или $y_n \to b_1 > 0$), то $x_n \to \pm\infty$
5. Если $x_n \to \pm\infty, y_n \leq b < 0$ для всех n (или $y_n \to b_1 < 0$), то $x_n \to \mp\infty$
6. Если $x_n \to \infty, |y_n| \geq b > 0$ для всех n (или $y_n \to b_1 \neq 0$), то $x_n \to \infty$
7. Если $x_n \to a \neq 0, y_n \to 0, y_n \neq 0$; при всех n, то $\frac{x_n}{y_n} \to \infty$
8. Если $x_n \to a \in \mathbb{C}, y_n \to \infty$, то $\frac{x_n}{y_n} \to 0$
9. Если $x_N \to \infty, y_n \to b \in \mathbb{C}, y_n \neq 0$ при всех n, то $\frac{x_n}{y_n} \to \infty$.

Доказательство. Докажем отверждения 1, 6, 8
1. Возьмём $E > 0$. По определению ограниченности снизу ,найдётся такое число $m \in \mathbb{R}$, что $y_n \geq 0$ при всех n. По определени. бесконечного предела существует такой номер N, что $x_n > E - m$ для всех $n > N$. Тогда для всех $n > N$ $x_n + y_n > E - m + m > E$.
6. Пусть $|y_n| \geq b > 0$ для всех n. Возьмём $E > 0$. По определению бесконечного предела существует такой номер N, что $|x_n| > \frac{E}{b}$ для всех $n > N$. Тогда для всех $n > N$ $|x_n y_n| > \frac{E}{b} \cdot b = E$
Gecnm $y_n \to b_1 \neq 0$. Положим $b = \frac{|b_1|}{2}$, если b_1 — число и $b = 1$, если b_1 — бесконечность. Тогда начиная с некоторого номера $|y_n| \geq b$ и применимо толко что доказанное.
8. По теореме о пределе произведения и лемме $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \to a \cdot 0 = 0$

Замечание 1. Часть утверждений теорем об арифметических свойствах можно объединить следующей формулировкой. Есле $\{x_n\}, \{y_n\}$‘— вещественные последоватедьности, $x_n \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}, y_n\ toy_0, \in \overline{\mathbb{R}}$, знак $*$ означает одно из четырёх арифметических действий и $x_0 * y_0$ определено в $\overline{\mathbb{R}}$, то $x_n * y_n \to x_0 * y_0$
Теорема не позволет сделать заключение о значении в следующих четырёх случаях
1. $x_n \to +\infty, y_n \to -\infty \qquad x_n + y_n \to ?$

2. $x_n \to 0, y_n \to \infty \qquad x_n y_n \to ?$
3. $x_n \to 0, y_n \to 0 \qquad \frac{x_n}{y_n} \to ?$
4. $x_n to \infty, y_n \to \infty \qquad \frac{x_n}{y_n} \to ?$

1.16 Свойства открытых множеств. Открытость шара. Внутренность

(68-70)

Определение. Точка a называется внутренней точкой множества D, если существует окрестность точки a, содержащаяся в D.

Определение. Множество D называется открытым, если все его точки внутренние.

Определение. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $a \in X, r > 0$. Множество
$B(a, r = \{x \in X : \rho()x, a < r\})$
называются открытым шаром радиуса r с центром в точке a или окрестностью (r-окрестностью) точки a и обозначается $V_a(r)$ или V_a, если значение r несущественно.

Покажем, что открытый шар $B(a, r)$ — открытое множество.
Пусть $p \in B(a, r)$, то есть $\rho(p, a) < r$
Положим $h = r - \rho(p, a)$ $(h > 0)$ и проверим что $B(p, h) \subset B(a, r)$.
Пусть $x \in B(p, h)$, то есть $\rho(x, p) < h$, тогда
$\rho(x, a) \leq \rho(x, p) + \rho(p, a) < h + r - h = r$
То есть $x \in B(a, r)$.

Теорема. Свойства открытых множеств.

1. Объежинение любого семейства открытых множеств открыто.
2. Перечечение конечного семейства открытых множеств открыто

Доказательство. 1. Пусть задано семейство открытых множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $G = \bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$, $x \in G$. Докажем, что x — внутренняя точка G. Так как $x \in G$, найдётся $\alpha : x \in G_\alpha$, тогда существует шар $B(x,r) \subset G_\alpha$, тогда $B(x,r) \subset G$

2. Пусть задано конечное семейство открытых множество $\{G\}_{k=1}^n$, $G = \bigcup\limits_{k=1}^n G_k$, $x \in G$. Тогда x принадлежит каждому из множеств и в силу открытости найдутся такие $r_1, r_2, \cdots, r_n$, что $B(x, r_k) \subset G_k$. При $r = \min\{r_1, \cdots, r_n\}$ $B(x,r) \subset G_k$ для любого $k \in [1:n]$. Тогда, по определению, $B(x,r) \subset G$.

Замечание 1. Пересечени бесконечного семейства открытых множеств не обязано быть открытым. Например

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$$

а одноточечное мнодество не является открытым в $\mathbb{R}$.

Определение. Множество всех внутренних точне множества D называется внутренностью D и обозначается $\overset{\circ}{D}$ или $\operatorname{Int} D$

Замечание 2. Внутренность D есть:

а) объединение всех открытых подмножеств D

б) максимальное по включению открытое подмножество D.

Доказательство. Пусть G — объединение всех открытых подмножеств D, тогда $G \subset D$, G содержит любое открытое подмножество G и открыто по теореме, то есть G — максимальное по включению открытое подмножество D. Если x — внутренняя точка D, то D содержит окрестность V_x точки x, а тогда $x \in V_x \subset G$. С другой стороны, если $x \in G$, то x принадлежит некоторому открытому подмножеству D и значит является его внутренней точкой и, тем более, внутренней точкой D.

Замечание 3. Множество открыто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью.

1.17 Предельный точки. Связь Открытости и замкнутости. Свойство замкнутых множеств. Замыкание

(70-75)

Определение. Точка a называется предельной точкой или точкой сгущения множества D, если в любой окрестности точки a найдётся точка множества D, отличная от a.
$\forall \dot{V}_a \ \exists x \in \dot{V}_a \cap D$

Определение. Множество D называется замкнутым (в X), если он содержит все свои предельные точки.

Теорема. Множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.

Доказательство. Пусть D^c замкнуто. Возьмём точку $x \in D$ и докажем, что x — внутренняя точка D; в силу произвольности x это и будет обозначать открытость D. Поскольку $x \notin D^c$, а D^c замкнуто x не является прелельнойточкой D^c, то есть существует такая окрестность $\dot{V}_x \cap D^c = \varnothing$, тогда $V_x \cap D^c = \varnothing$, то есть $V_x \in D$, то есть x — внутрення точка.
Пусть D открыто. Возьмём точку x, предельную для D^c, и докажем, что $x \in D^c$; в силу произвольности x это и будет означать замкнутость D^c. Поскольку в любой окрестности точки X найдётся точка D^c, x не является внутренней точкой D, $x \notin D \Rightarrow x \in D^c$

Теорема. Свойства замкнутых множеств.
1. Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.
2. Объединение конечного семейства замкнутых множеств замкнуто.

Доказательство. Следует из аналогичной теоремы для открытых множеств и формул.

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = (\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^c)^c \qquad \bigcup_{k=1}^{n} F_k = (\bigcap_{k=1}^{n} F_k^c)^c$$

Замечание 1. $\bigcup\limits_{q\in\mathbb{Q}}\{q\} = \mathbb{Q}$ не замкнуто в $\mathbb{R}$. Так как в любом интервале есть рациональное число, все точки числовой прямой являются предельными.

Определение. Точка a называется точкой прикосновения множества D, если в любой её окрестности есть точка множества D

Определение. Множество всех точек соприкосновения называется замыканием D и обозначается $\overline{D}$ или $\mathrm{Cl}D$.

Замечание 2. Точки соприкосновения — объединени множества предельных и изолированых точек D.

Замечание 4. Точка a — точка прикосновения множества D тогда и толко тогда, когда существует последовательность $\{x_n\}$ точек множества D стремящаяся к a.

Доказательство. Пусть a — точка прикосновения D/Если $a \in D$, то можно взять станционарную последовательность, все члены которой равны a. Иначе a — предельная точка D и искомая последовательность сущесивует по замечанию к определению предельной точки.

Обратно, если существует последовательность $\{x_n\}$ с перечисленными свойствами, то по определению предела в любой окрестности точки a найдётся член этой последовательности (туда даже попадают все члены, начиная с некоторого номера), то есть точка множества D.

Замечание 4. Замыкание D есть:

а) Пересечение всех замкнцтых множеств, содержащих D

б) Минимальное по включению замкнутое множество, содержащее D.

Доказательство. Пусть F — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих D. Тогда $D \subset F$, F содержится в любом замкнутом множестве, содержащем D, и F замкнуто по теореме, то есть F — минимальное по включению замкнутое множество содержащее D. Если $x \in \overline{D}$, то есть x точка прикосновения F, а тогда $x \in F$ в силу замкнутости F. С другой стороны , если $x \notin \overline{D}$, то у точки x существует окрестность V_x, содержащаяся в D^c. Тогда её дополнение V_x^c замкнуто и содержит D, поэтому $F \subset V_x^c$, то есть $V_x \subset F^c$, тогда $x \notin F$;

Замечание 5 Множество замкнуто тогда и толко тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.

Определение. Внутренность дополнения множества D называется внешностью D и обозначается $\mathrm{Ext}D$

Определение. Точка a называется граничной точкой множества D, если
$\forall V_a \exists x_1 \in D,\ x_2 \in D^c : \{x_1, x_2\} \subset V_a.$

Определение. множество всезх граничных точек называется границей и обозначается $\mathrm{Fr}D$ или δD

Определение. Множество всех предельных точек множества D называется производным множеством множества D и обозначается D'

Замечание 6. 1. $\mathrm{Ext}D = (\overline{D})^c$
2. $\delta D = \overline{D} \backslash \mathring{D}$
3. Граница замкнута
4. Множество D' замкнуто

1.18 Открытость и замкнутость относительно пространства и подпространчтва

(75)

Теорема. Открытость и замкнутость в пространстве и подпространстве. Пусть (x, p) — метрическое пространствоб $D \subset$

$Y \subset X$.
1. D открыто в Y тогда и только тогда, когда существует множество G, открытое в X, что $D = G \cap Y$
2. D замкнуто в Y тогда и только тогда, когда существует такое множество F, замкнутое в X, что $D = F \cap Y$

Доказательство. 1. Пусть $D = Y \subset G$, где G открыто в X. Возьмём точку $a \in D$. В силу открытости G в X существует окрестность V_a^X точки a в $X : V_a^X \subset G$. Тогда $V_a^Y = V_a^X \cap Y$ — окрестность содержащаяся в D. В силу произвольности a множество D открыто в Y.
Обратно, пусть D открыто в Y. Тогда для каждой точки $a \in D$ найдётся её окрестность в Y, содержащаяся в $D : V_a^Y = B^Y(a, r_a) \subset D$. Обозначим $G = \bigcup\limits_{a \in D} B^X(a, r_a)$. Тогда G открыто в X как объединение открытых множеств и $G \cap Y = \bigcup\limits_{a \in D} (B^x(a, r_a) \cap Y) = \bigcup\limits_{a \in D} B^Y(a, r_a) = D$
2. По теореме замкнутость D в Y равносильна открытости $Y \backslash D$ в Y. По доказанному, последнее равносильно существованию такого открытого в X множества G, что $Y \backslash D = G \cap Y$. Осталось обозначить $F = G^c$ и учесть, что соотношения $S = F \cap Y$ и $Y \backslash D = G \backslash Y$ равносильны.

1.19 Компактность относительно пространства и подпространства

(77)

Определение. Семейство множество $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется покрытием множества K, если $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$

Определение. Пусть (X, p) — метрическое пространство, $K \subset X$. Покрытие $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ иножество K нахывается открытым если при любом $\alpha \in A$ множество G_a открыто в X.

Определение. Подмножество K метрического пространства X называется компактным, если из люього открытого покрытия K можно извлечь конечное подпокрытие:

$\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_1, \cdots, \alpha_N \in A\ K = \bigcup\limits_{i=1}^{N} G_{\alpha_i}$, G_α Открыты в X.

Лемма. Пусть (X, p) — метрическое пространство, Y — подпространство X, $K \subset Y$. Тогда свойства компактности K в X и Y равносильны.

Доказательство. Пусть K компактно в X. Возьмём покрытие K множествами V_α открытыми в Y. По теореме $V_\alpha = G_\alpha \cap Y$, где множества G_α открыты в X. Множества G_α образуют покрытие K:

$K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in N} V_\alpha \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha.$

Пользуясь компактностью K в X, извлечём из покрытия $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ конечное подпокрытие $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} G_{\alpha_i}$, но поскольку $K \subset Y$,

$K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} (G_{\alpha_i} \cap Y) = \bigcup\limits_{i=1}^{N} V_{a_i}$

Итак, из произвольного покрытия K множествами, открытыми в Y можно извлечь конечное подпокрытие, что и означает компатность K в Y.

Пусть теперь K компактно Y. Возьмём покрытие K множествами G_α, открытыми в X. Положим $V_\alpha - G_\alpha \cap Y$; Тогда иножества Kв Y

из него можно извлечь конечное подпокрытие $\{V_{\alpha_i}\}_i^N = 1$. Но тогда $\{V_{\alpha_i}\}_i^N = 1$ тоже покрытие K и компактность K в X доказана.

1.20 Компактность, замкнутость и ограниченность

(78)

Теорема. Простейшие свойства компактов. Пусть (X, p) — метрическое пространство, $K \subset X$
1. Если K компатно, то K замкнуто и ограничено.
2. Если X компактно, а K замкнуто, то K компакт.

Доказательство. 1. Докажем, что K^c открыто. Возьмём точку $a \in K^c$ и докажем, что a — внутренняя точка K^c; в силу произвольности a это и будет означать, что K^c открыто. Для каждой точки $q \in K$ положим
$r_q = \frac{p(q,a)}{2}, \quad V_q = B(a, r_q) \quad W_q = B(q, r_q)$
Тогда $V_q \cap W_q = \varnothing$. Семейство $\{W_q\}_{q \in K}$ — открытое покрытие компакта K. Извлечем из него конечное подпокрытие $\{W_{q_i}\}_{i=1}^N$: $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} W_{q_i} = W$. Тогда $V = \bigcap\limits_{i=1}^{N} V_{q_i}$ — окрестность точки a, причём $V \cap W = \varnothing$. Тем более $V \cap K = \varnothing$, то есть $V \in K^c$.
Докажем, что K ограничено. Зафиксируем точку $a \in X$ и рассмотрим покрытие множества K открытыми шарами $\{B(a, n)\}_{n=1}^{\infty}$. В силу компактности K покрывается конечным набором шаров $\{B(a, n_i)\}_{i=1}^{N}$ и, следовательно, содержится в шаре $B(a, \max\limits_{1 \le \le N} n_i)$.
2. Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие K. Тогда, поскольку K замкнуто, $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \cap \{K^c\}$ — открытое покрытие X. Пользуясь компактностью X извлечём из него конечное подпокрытие X: $X =$

$\bigcap\limits_{i=1}^{N} G_{\alpha_i} \cup K^c$. Но тогда $\{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^{N}$ — покрытие K.

1.21 Две леммы о подпоследовательностях

(81)

Замечание 1. Для строго возрастающей последовательности $\{n_k\}$ при всех k будет $n_k \geq k$. Действительно, $n_1 \geq 1$ и из неравенства $n_k \geq k$ следует, что $n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1$.

Лемма. Всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, и притом к тому же пределу: если $\{x_n\}$ — последовательность в метрическом пространстве X, x_{n_k} — её подпоследовательность, $a \in X, x_a$, То $x_{n_k} \to a$.

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению предела существует такой номер N, что $p(x_n, a) < \varepsilon$ для всех $n > N$. Но тогда, если $K > N$, то по замечанию и $n_k > N$, а значит $p(x_{n_k}, a) < \varepsilon$.

Лемма. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в метричеком пространстве X, $\{x_{n_k}\}$ и $\{x_{m_t}\}$ — её подпоследовательностьи, причём объединение множеств их индексов равно $\mathbb{N}, a \in X$. Тогда, если $x_{n_k} \to a,\ x_{m_l} \to a$, то и $x_n \to a$.

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$. По определнию предела одной и другой подпоследовательности найдутся такие номера k и L, что

$\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \quad$ для всех $k > K$

$\rho(x_{m_l}, a) < \varepsilon \quad$ для всех $l > L$

Положим $N = \max\{n_k, m_l\}$. Если $n > N$, то или n равно некоторому n_k, причём $k > K$, а тогда $\rho(x_n, a) < \varepsilon$, или n равно некоторому m_l, причём $l > L$, а тогда $\rho(x_n, a) < \varepsilon$.

Замечание 2. Леммы сохраняют силу для $a = \infty$ в нормированном пространстве и для $a = \pm\infty$ для вещественных последовательностей. В доказательстве следует заменить неравенство вида $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ на $|x_n| > E$ и т. п.

1.22 Лемма о вложенных параллелепипедах. Компактность куба

(79)

Лемма. Пусть $\{[a^{(n)}, b^{(n)}]\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вложенных параллелепипедов в $\mathbb{R}^m$, то есть
$a_k^{(n)} \leq a_{k+1}^{(n)} \leq b_{k+1}^{(n)} \leq b_k^{(n)}$ при всех $n \in N$ и $j \in [1 : m]$
Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a^{(n)}, b(n)] \neq \varnothing$.

Доказательство. При каждом $k \in [1 : m]$ имеем последовательность вложенных отрезков $\{[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]\}_{n=1}^{\infty}$. По аксиоме Кантора, найдётся точка x_k^*, принадлежащая всем отрезкам. Тогда m-мерная точка $x^* = (x_1^*, \cdots x_m^*)$ принадлежит всем параллелепипедам $[a^{(n)}, b^{(n)}]$.

Лемма. Замкнутый куб в $\mathbb{R}^m$ компактен.

Доказательство. Пусть $I = [a, b]$ — куб в $\mathbb{R}^m$, δ — его диагональ. Допустим, тчо I не компатен. Обозначим через $\{G_\alpha\}$ такое открытое покрытие I, из которого нельзя изввлечь конечное подпокрытие. Разделив каждый отрезок $[a_k, b_k]$ пополам, разобъём куб I на 2^m кубов. Среди них найдётся тот, который не покрывается никаким конечным наборо множеств из семества $\{G_\alpha\}$ (так как иначе куб I покрывается конечным набором множеств из этого семейства). Обозначим этот куб I_1. Продолжая процесс деления и далее

получим последовательность вложенных замкнутых кубов $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ со следующими свойствами:
1) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$.
2) I_n не покрывается никаким конечным набором множеств из семейства G_α
3) Если $x, y \in I_n$, то $|x - y| < \frac{\delta}{2^n}$
По лемме существует точка x^*, принадлежащая одновременно всем кубам. Следовательно, $x^* \subset I$. Тогда x^* принадлежит некотороиу элементу покрытия G_{α^*}. Поскольку G_{α^*} открыто, найдётся такое $r > 0$, что $B(x^*, r) \subset G_\alpha$. Так как $\frac{\delta}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, найдётся такое n, что $\frac{\delta}{2^n} < r$, то есть $I_n \subset B(x*, r)$. Значит куб I_n покрывается одним множеством, что противоречит свойству 2.

1.23 Характеристика компактов в $\mathbb{R}^m$. Принцип выбора

(82)

Теорема. Характеристика компактов в $\mathbb{R}^m$. пусть $K \subset \mathbb{R}^m$. Тогда следующи утверждения равносильны
1. K замкнуто и ограничено
2. K компатно
3. Из всякой плследовательности точек K, можно извлечь подпоследовательность, имеющую предел, принадлежащий K.

Доказательство. проведём по схемк $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$. Поскольку K ограничено, K содержится в некотором замкнутом кубе I. Тогда K замкнуто и по теореме, так как $K = K \cap I$ и K замкнуто в $\mathbb{R}^m$. Куб I компактен по лемме. По теореме заключаем, что K компатно как замкнутое подмножество компакта.

$2 \Rightarrow 3$ Пусть $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность в K; обозначим через D множество её значений. Если D конечно, то из $(\{x^{(n)}\})$ можно выделить станционарную подпоследовательность, причём её предел будет совпадать со значением и, значит, приадлежать K.
Содержателен случай, когда D бесконечно. Докажем от противного, что в этом случае в K есть предельная точка D. Если в K нет предельных точек D, то у каждой точки $q \in K$ найдётся окрестность V_q, содержащая не более одной точки множества D. Тогда получаем противоречие с компатностью K : $\{V_q\}_{q \in K}$ — открытое покрытие K, из которого нельзя извлечь конечное подпокрытия не только K, но даже D.
Пусть $a \in K$ — предельная точка D. Тогда найдётся номер n_1, для которого $p(x^{(n_1)}, a) < 1$. Так как множество $B(a, \frac{1}{2}) \cap D$ бесконечно, найдётся номер $n_2 > n_1$, для которого $p(x^{(n_2)}, a) < \frac{1}{2}$. Этот процесс можно продолжать неограниченно: на шаге с номером k, поскольку множество $B(a, \frac{1}{k}) \cap D$ бесконечно, найдётся номер $n_k > n_{k-1}$, для которого $p(x^{n_k}, a) < \frac{1}{k}$. По построению $\{x^{(n_k)}\}$ — подпоследовательность и $x^{(n_k)} \to a$.

$3 \Rightarrow 1$. Если K не ограничено, то для каждого натурального n найдётся такая точка $y^{(n)} \in K$, что $|y^{(n)}| > n$. Последовательность $\{y^{(n)}\}$ стремится к бескончности, а тогда из ней нельзя выделить сходящуюс подпоследовательность, так как по лемме любая её полпоследовательность стрмится к бесконечности.
Если же K не замкнуто, то у K есть предельная точка b, не принадлежащая K. Следовательно, существует последовательность точек K, стремящаяся к b. Но тогда любая её подпоследовательность стремится к b и, значит, не имеет предела, принадлежащего K.

Замечание 2. Утверждение о том, что в $\mathbb{R}^m$ всякое замкнутое ограниченное множество компактно и его частный случай лемму называют **Теоремой Гейне-Бореля.**

Замечание 2. Как уже отмечалось, $2 \Rightarrow 1$ верна в любом метрическом пространстве, а $1 \Rightarrow 2$ — не в любом. На самом деле, утверждения 2 и 3 равносильны в любом метрическом пространстве. Утверждение $3 \Rightarrow 2$ оставим без доказательства. Свойство 3 называется секвенциальной компактоностью.

Замечание 3. В ходе доказательства теоремы установлено, что всякое бесконечное подмножество компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ имеет предельную точку, принадлежащую K.

Следствие 1. Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса. Из всякой ограниченной подпоследовательности в R^m можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. В силу ограниченности все члены последвоательности принадлжат некоторому замкнутому кубу I. Поскольку I компактен, из этой подпоследовательности можно извлечь подпоследовательность, имеющуь предел, принадлежащий I.

Замечание 4. Если вещественная последовательность неограничена (сверху, снизу) то из неё можно извлечь подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности(плюс-минус бесконечности). Для бесконечности без знака утверждение верно и в нормированном пространстве.

Доказательство. Для определённость докажем для $+\infty$. Так как последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, найдётся номер n_1, для которого $x_{n_1} > 1$. Далее найдётся номер $n_2 > n_1$, для которого $X_{n_2} > 2$ (иначе $\{x_n\}$ была бы ограниченв сверху числом $\max\{x_1, \cdots, x_{n_1}, 2\}$). Жтот процесс продолжаем неограниченно: на k-том шаге найдётся номер $n_k > n_{k-1}$, ля которого $x_{n_k} > k$. Тогда $x_{n_k} \to +\infty$.

1.24 Сходимость и сходимость в себе. Полнота $\mathbb{R}^m$

(84)

Определение. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность в метрическом пространстве X. Говорят, что последователбность x_n сходится в себе, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, l > N\ \rho(x_n, x_l) < \varepsilon.$

Лемма. 1. Сходящаяся в себе последователность ограничена

2. Если у сходящейся в себе последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то сама последовательность сходится.

Доказательство. 1. Пользуясь сходимостью $\{x_n\}$ в себе, подберём такой номер, что для всех $n, l > N$ будет $\rho(x_n, x_l) < 1$. В частночти, тогда $\rho(x_n, x_{N+1}) < 1$ для всех $n > N$. Пусть $b \in X$. Следовательно, для всех $n > N$ по неравенству треугольника $\rho(x_n, b) < 1 + \rho(x_n + 1, b)$. Положим

$\mathbb{R} = \max\{\rho(x_1, b), \cdots, \rho(x_N, b), 1 + \rho(x_{N+1}, b)\}$

Тогда $\rho(x_n, b) \leq R$ для всех номеров n.

2. Пусть $\{x_n\}$ сходится в сеюе $x_{n_k} \to a$. Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению предела, найдётся такой нмер K, что $\rho(x_{n_k}, q) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $k > K$, а по определнию сходимости в себе, найдётся такой номер N, что $\rho(x_n, x_l) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n, l > N$. Покажем, что найженное N — требуемое для ε из определения предела. Пусть $n > N$ Положим $M = \max\{N+1, K+1\}$; тогда $b_M \geq n_{N+1} \geq N$ и аналогично $n_M \geq K$. Следовательно,

$\rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_M}) + \rho(x_{n_M}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

В силу произвольности ε это и означает, что $x_n \to a$.

Теорема. 1. Во всяком метрическом пространстве любая сходящаяся помледовательность сходится в себе.

2. В $\mathbb{R}^m$ любая сходящаяся в себе последовательность сходится.

Доказательство. 1. Обозначим $\lim x_n = a$. Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению предела, найдётся такой номер N, что $\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N$. Тогда для всех $n, m > N$
$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
В силу произвольности ε это и значит, что $\{x_n\}$ сходится в себе.
2. Пусть $x^{(n)}$ — сходящаяся в себе последовательность в $\mathbb{R}^m$. По пункту 1 леммы, она ограничена. По принципу выбора Болцано-Вейерштрасса из неё можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, а тогда по пункту 2 леммы она сама сходится.

Определение. Если в метрическом протсранстве X любая сходящаяся в себе последователбность сходится, то это пространство называется полным.

Замечание 1. Второе утверждение теоремы можно сформулировать так: пространство $\mathbb{R}^m$ полно.
Пример неполног пространства $\mathbb{Q}$, как подпротсранство $\mathbb{R}$. Если взять десятичные приближения к $\sqrt{2}$, то она будет сходиться в себе, но небудет иметь предела в $\mathbb{Q}$.

Замечание 2. Утвержение о том, что в $\mathbb{R}^m$ сходимость и сходимость в себе равносильны, называют критерием Больцано - Коши сходимости последовательности
В пространстве $\mathbb{R}^m$ последовательность $\{x^{(n)}\}$ сходится тогда и только тогда, когда
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n, l > N |x^{(n)} - x^{(l)}| < \varepsilon$
Критерий позволяет доказывать существавание предела, не используя само значения предела.

1.25 Теорема о стягивающихся отрезках. Существование точной верхней границы

(86)

Теорема. О стягивающихся отрезках. Пусть $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность стягивающихся отрезков. Тогда пересечение всех этих отрезков состоит из одной точки, то есть

$$\exists c \in \mathbb{R} : \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$$

при этом $a_n \to c,\ b_n \to c$

Доказательство. То, что пересечение не пусто, следует из аксиомы о вложенных отрезках. Пусть $c, d \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Докажем, что $c = d$. Поскольку $a_n \leq c \leq b_n$ и $a_n \leq d \leq b_n$, имеем

$$a_n - b_n \leq c - d \leq b_n - a_n$$

. По теореме о предельном переходе в неравенстве, $0 \leq c - d \leq 0$, то есть $c = d$. Так как

$$0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \quad 0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n$$

по теореме о сжатой последовательности $a_n \to c$ и $b_n \to c$.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R},\ E \neq \varnothing,\ E$ ограничено сверху. Наименьшая из верхних границ множества E называется точной верхней границей, или верхней гранью, или супремумом множества E и обозначается $\sup E$.

Теорема. Существование верхней грани. Всякое непустое ограниченное сверху множетво имеет верхнюю грань.

Доказательство. По условию, существует точка $x_0 \in E$ и M — верхняя граница E, $x_0 \leq M$. Обозначим $[a_1, b_1] = [x_0, M]$. Отрезок $[a_1, b_1]$ Удовлетворяет двум условиям:

1. $[a_1, b_1] \cap E \neq \varnothing$
2. $(b_!, +\infty) \cap E = \varnothing$

Рассмотрим середину отрезка $[a_1, b_1]$ — точку $\frac{a_1+b_1}{2}$. Положим $[a_2, b_2] = [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, если $(\frac{a_1+b_1}{2}, b_1] \cap E = \varnothing$, и $[a_2, b_2] = [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$, если $(\frac{a_1+b_1}{2}, b_1] \cap E \neq \varnothing$. В обоих случаях условия сохраняются.

Будем продолжать этот процесс неограниченно, при этом оставляя выполняться эти условия. При этом, $b_n - a_n = \frac{b_1-a_1}{2^{n-1}} \to 0$. По теореме о стягивающихся отрезках существует единственная точка c, принадлежащая одновременно всем отрезкам, причём $a_n \to c,\ b_n \to c$ Проверим, что $c = \sup E$. Если $x \in E, n \in N$, то $x \le b$ по свойству 2. По теореме о предельном переход в неравенстве $x \le c$. То есть c – верхняя граница E. Возьмём $\varepsilon > 0$ и дркажем, что $c - \varepsilon$ не является верхней гранцей E. Так как $a_n \to c$, найдётсяноммер N, для которого $a_N > c - \varepsilon$ (по определению предела все элементы с некоторого номера удовлетворяют этому неравенству). По свойству 1, найдётся точка $x \in [a_N, b_N] \cap E$, а тогда $x > x - \varepsilon$.

Замечание 2. Если множество E не ограничено сверху считают, что $\sup E = +\infty$, при этом определение супремума в $\overline{\mathbb{R}}$ существует у любого непустого множества. Ограниченночть Y сверху равносильна неравенству $\sup E < +\infty$

Замечание 3. Если $D \subset E \subset \mathbb{R},\ D \neq \varnothing$, то $\sup D \le \sup E$

Доказательство. Если $supE = +\infty$, то неравенство тривиально. Пусть $\sup E < +\infty$. Если $x \in D$, то $x \in E$ и, слеедовательно, $x \le \sup E$, то есть $\sup E$ какая-то верхняя граница D. Но $\sup D$ — наименьшая верхняя граница D, поэтому $\sup D \le \sup E$.

Замечание 4. Если $E, F \subset \mathbb{R},\ E, F \neq \varnothing, t > 0$, то
$\sup(E + F) = \sup E + \sup F$
$\sup(tE) = t \sup E$
$\sup(-E) = -\inf E$

1.26 Предел монотонной последовательности

(91)

Теорема. Предел монотонной последовательности.
1. Всякая возрастающая ограниченная сверху последовательность сходится.
2. Всякая убывающая ограниченная снизу последовательность сходится.
3. Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху. По теореме существует $\sup x_n = c \in \mathbb{R}$. Докажем, что $c = \lim x_n$. Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению супремума (так как $c - \varepsilon$ не является верхней границей последовательности), найдётся такой номер N, что $x_N > c - \varepsilon$. В силу возрастания поледовательности, при любом $n > N$ будет $x_n \geq x_N$. Снова по определению супремума $x_n \leq c$ при всех n. Итак для любого $n > N$

$$c - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq c < c + \varepsilon$$

В силу произвольности ε это значит $c = \lim x_n$.
Второе утверждение доказываетя аналогично. Третье следует из первых двух.

Замечание 1. Если последовательность возрастает и не ограничена сверху, то она стремится к плюс бесконечности.

Доказательство. Возьмём $E > 0$. Так как $\{x_i\}$ не ограничена сверху, найдется такой номер N, что $x_N > E$. Тогда для любого номера $n > N$, в силу возрастания последовательности, тем более $x_n > E$.

Замечание 2. Доказано, что любая монотонная последовательность имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, при этом для всех возрастающих последовательностей

$$\lim x_n = \sup x_n$$

а для убывающих

$$\lim x_n = \inf x_n$$

1.27 Неравенство Я. Бернулли, $\lim z^n$, число e, формула Герона

(92)

Лемма. Неравенство Я. Бернулли. Если $n \in \mathbb{Z}_+,\ x > -1$, то

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

.

Доказательство. При $n = 0, n = 1$ (база индукции) неравенство очевидно, обращается в равенство. Сделаем переход: Пусть неравенство верно для номера n. Тогда

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

Пример 1. Пусть $x \in \mathbb{C},\ |z| < 1$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$.

В самом деле, последоватедность $\{|z|^n\}$ убывает и ограничена снизу нулём. Следовательно, существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} |z|^n = a$. Перейдя в равенство $|z|^{n+1} = |z||z|^n$ к пределу, получим $a = |z|a \Leftrightarrow (1-|z|)a = 0$, отсюда $a = 0$, поскольку $|z| < 1$, таким образом $z^n \to 0$, что равносильно $x^n \to 0$.

Пример 2. Число e. Докажем, что последовательность $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ сходится.

Положим $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Ясно, что последовательность $\{y_n\}$ ограничена снизу единицей, кроме того она убывает

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = (\frac{n^2}{n^2-1})^{n+1}\frac{n-1}{n} = (1+\frac{1}{n^2-1})^{n+1}\frac{n-1}{n} \geq (1+\frac{n+1}{n^2-1})\frac{n-1}{n} \geq 1$$

Следовательно, $\{y_n\}$ сходится, а тогда по теореме о пределе частного и $x_n = \frac{y_n}{1+1/n}$. сходится к этому же пределу.

Пример 3. Формула Герона. Пусть $a>0, x_0>0$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$$

Ясно, что $x_n > 0$ при всех n и значит, $\{x_n\}$ ограничена снизу. Воспользоваашись очевидным неравенством

$$t + \frac{1}{t} \geq 2, \quad t > 0$$

получим, что при всех $n \in \mathbb{Z}_+$

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{a}{x_n}) \geq \frac{\sqrt{a}}{2}2 = \sqrt{a}$$

Поэтом у для всех $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2}(1 + \frac{a}{x_n^2}) \leq x_n$$

То есть последовательность $\{x_n\}$ убывает. Следовательно, она сходится; обозначим $\lim x_n = \beta$. Перейдя к пределу в равенстве получим

$$\beta = \frac{1}{2}(\beta + \frac{a}{\beta})$$

Откуда $\beta = \sqrt{a}$, так как $\beta \geq 0$
Равенство $\lim x_n = \sqrt{a}$ называется формулой герона и используется для приближенного вычисления корня.

Замечание 3. Пусть $x_n > 0$ при всех n, $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ тогда $x_n \to 0$.
Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad a > 1,\ k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

1.28 Верхний и нижний пределы последовательностей

(95)

Определение. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, стремящаяся к a.

Определение. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху. Величина

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$$

называется верхним пределом последовательности $\{x_n\}$

Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу. Величина

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$$

называется нижним пределом последовательности $\{x_n\}$

Замечание 1. Последовательности $z_n - \sup\limits_{k\geq n} x_k$ и $y_n = \inf\limits_{k\geq n} x_k$ иногда называют верхней и нижней огибающими последовательности $\{x_n\}$.

Если $\{x_n\}$не ограничена сверху, то $z_n = +\infty$ при всех n и поэтому полагают $\overline{\lim} x_n = +\infty$. Аналогично, если $\{x_n\}$ не ограничена снизу полагают $\underline{\lim} x_n = -\infty$.

Замечание 2. Верхний и нижний пределы вещественной последовательности $\{x_n\}$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$, причем $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ ограничена и сверху и снизу. Так как при переходе к подмножеству супремум не увеличивается, а инфинум не уменьшается $\{y_n\}$ возрастает, а $\{z_n\}$ убывает. При всех n $y_q \leq y_n \leq z_n \leq z_1$. По теореме о преле монотонной последовательности $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ сходятся, то есть существуют конечные пределы $\lim b$. Если хотя бы одна последовательность неограничена, то очевидно.

Теорема. О верхнем и нижнем пределе последовательности. Пусть $\{x_n\}$ — вещественная последовательность, тогда справедливы следующий утверждения

1. Верхний предел — наибольший, а нижний — наименьший из частичных пределов $\{x_n\}$

2. Предел $\{x_n\}$ в $\overline{\mathbb{R}}$ существует тогда и только тогда, когда $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$, при этом $\lim x_n$ равен этому значению.

Доказательство. I. Пусть $\{x_n\}$ ограничена и сверху и снизу

1. Обозначим $b = \overline{\lim} x_n$. Докажем, что b — частичный предел $\{x_n\}$, для чего построим полпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, стремящуюся к b. При всех n будет $z_n \geq b$. Поскольку

$$z_1 = \sup\{x_1, x_2, \cdots\} > b - 1$$

найдётся номер n_1, для которого $x_{n_1} > b - 1$. Поскольку

$$z_{n_1+1} = \sup\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \cdots\} > b - \tfrac{1}{2}$$

найдется номер $n_2 > n_1$, для которого $x_{n_2} > b - \frac{1}{2}$. Этот процесс может продолжаться неограничено. Таким образом, построена подпоследовательность $\{x_n\}$, члены которой удовлетворяют неравенству

$$b - \tfrac{1}{k} < x_{n_k} \leq z_{n_k}$$

Подпоследоватеьность $\{z_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, стремящейся к b тоже стремится к b. По теореме о сжатой последоавтельности и $x_{n_k} \to b$.
Если $\{x_{m_l}\}$ — подпоследовательность $\{x_n\}$, $\{x_{m_l}\} \to \beta$, то, сделав предельный переход в неравенстве $x_{m_l} \leq z_{m_l}$, получим, что $\beta \leq b$, то есть b — наибольший частичный предел $\{x_n\}$.
Аналогично для $\underline{\lim} x_n$ — наименьшего частичного предела. 2. По определению y_n и z_n, при всех n будет

$$y_n \leq x_n \leq z_n$$

Если $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$, то по теореме о сжатой последовательности существует $\lim x_n$ и $\lim x_n = \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$

II. Пусть $\{x_n\}$ ограничена сверху, но не снизу. Тогда, по определению, $\underline{\lim} x_n = -\infty$. По замечанию 2 к принципу выбора, из $\{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к $-\infty$, то есть $-\infty$ — частный предел $\{x_n\}$. Разумеется $-\infty$ меньше любого другого частичного предела, если они есть. То что $\overline{\lim} x_n$ — наибольший частичный предел, доказано в пункте I. Если $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$, то есть $z_n \to -\infty$, то и $x_n \to -\infty$, так как $x_n \leq z_n$. Обратно, если $\lim x_n = -\infty$, то и $\overline{\lim} x_n = -\infty$, как частичный период.

III. Если x_n не ограничена ни сверху, ни снизу, то превое утверждение очевидно, а второе не реализуется

1.29 Равносильность определений предела отображения по Коши и по Гейне

(99)

Определение. на ε-языке (по Коши)
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in D\backslash\{a\} : \rho_X(x, a) < \delta\ \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$.

Определение. на языке последовательностей (по Гейне)
$\forall\{x_n\} : x_n \in D\backslash\{a\}, x_n \to a f(x_n) \to A$.

(102) **Теорема.** Определения предела отображения по Коши и по Гейне эквивалентны.

Доказательство. Для определённости докажем теорему при $a \in X, A \in Y$.

1. Пусть A — предел отображения f в точке a по Коши; докажем, что тогда A — предел и по Гейне. Возьмём последовательность $\{x_n\}$ со свойствами из определения Гейне: $x_n \in D,\ x_n \neq a,\ x_n \to a$. Требуется доказать, что $f(x_n) \to A$. Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению Коши подберём такое $\delta > 0$, что для всех $x \in D$, для которых $x \neq a$ и $p_X(x, a) < \delta$ будет $p_Y(f(X), A) < \varepsilon$. По определению предела последовательности $\{x_n\}$ для числа δ найдётся такой номер N, что при всех $n > N$ верно неравенство $p_X(x_n, a) < \delta$. Но тогда $p_Y(d(x_n), A) < \varepsilon$ Для всех $n > N$ В силу произвольности ε это значит, что $f(x_n) \to A$.

2. Пусть A — предел отображения f в точке a по Гейне; докажем, что тогда A — предел f по Коши. Предположим противное: пусть A не есть предел по Коши. Записывая отрицание определения Коши, получаем

$$\exists\varepsilon^* > 0\ \forall\delta > 0 \exists x \in D\backslash\{a\} : p_X(x, a) < \delta,\ p_Y(f(X), A) \geq \varepsilon^*$$

Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ по число $\delta = \frac{1}{n}$ найдётся такая точка x_n, что

$$x_n \in D\backslash\{a\} \quad p_X(x_n, a) < \tfrac{1}{n}, \quad p_Y(f(x_n), A) \geq \varepsilon^*$$

По теореме о сжатой последовательности, построенная последоввательность x_n стремится к a, так как

$$0 < p_X(x_n, a) < \frac{1}{n}.$$

Тогда, по определению Геёне, $f(x_n) \to A$. По определению предела последовательности $\{f(x_n)\}$ для числа ε^* найдётся такой номер N, что для всех номеров $n > N$ будет $p_Y(f(x_n), A) < \varepsilon^*$, что противоречит условию.

1.30 Простейшие свойства отображений, имеющих предел (единственность предела, локальная ограниченность, арифметические действия)

(103-106)

Теорема. Единственность предела отображения. Отображение в данной точке не может иметь более одного предела: если X, Y — метрические пространства, $f : D \subset X \to Y, a$ — предельная точка D, $A, B \in Y$, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A$, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} B$, то $A = B$.

Доказательство. Возьмём последовательность $\{x_n\} : x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. По определению Гейне $f(x_n) \to A$ и $f(x_n) \to B$. По единственности предела последовательности, $A = B$.

Замечание 1. Если $Y = \mathbb{R}$, то, как и для последовательностей, а теореме можно считать, что $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$.

Теорема. . Локальная ограниченность отображения имеющего предел. Пусть X, Y — метрические пространства, $f : D \subset X \to Y$, a — предельная точка D, $a \in Y$, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A$. Тогда существует такая окрестность V_a точки a, что f ограниченв в $V_a \cap D$ (то есть $f(V_a \cap D)$ содержится в некотором шаре в Y).

Доказательство. Возьмём окрестность $V_A = B(A,1)$. По определению предела на языке окрестностей, найдётся такая окрестность V_a точки a, что $f(V_a \cap D) \subset B(A,1)$. Если $a \notin D$, то на этом доказательство заканчивается. Иначе

$$f(V_a \cap D) \subset B(A,R), \text{ где } R = \max\{1, \rho_Y(f(a),A)\}$$

Замечание 2. Отображение, имеющее предел в точке не обязано быть ограниченным. Например функция $f(x) = x$. Поэтому в названии теоремы присутствуетс лово "локальная".

Замечание 3. Если X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство с нулём θ, $D \subset X$, a — предельная точка D, $g : D \to Y$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, $B \neq \theta$, то существует такая окрестность V_a, что $g(x) \neq \theta$ для всех $x \in \dot{V}_a \cap D$.

Доказательство. Пусть не так: тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in V_a(\frac{1}{n}) \cap D$, для которогй $g(x_n) = \theta$. Построенная последовательность $\{x_n\}$ стремиться к a. По определению предела $g(x_n) \to B$, откуда $B = \theta$, что протмворечит условию.

Теорема. Арифмметические действия над отображениями, имеющими предел. Пусть X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство, $D \subset X$, $f, g : D \to Y$, $\lambda : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, a — предельная точка D, $A, B \in Y$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A$, $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} B$, $\lambda(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda_0$. Тогда
1. $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} A + B$;
2. $\lambda(x) f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda_0 A$;
3. $f(x) - g(X) \to A - B$;
4. $\|f(x)\| \xrightarrow[x\to a]{} \|A\|$

Теорема. Арифметические действия над функциями, имеющими предел. Пусть X — метрическое пространство, $f, g : D \subset X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, a — предельная точка D, $a, b \in \mathbb{R}$, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A$, $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} B$. Тогда

1. $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} A + B$;
2. $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} AB$;
3. $f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to a]{} A - B$;
4. $|f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} |A|$;
5. Если $B \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{A}{B}$.

Доказательство. С помощью определения на языке последовательностей эти теоремы сводятся к аналогичным про последовательности. Докажем, например, первое утверждение. Возьмём последовательность $\{x_n\}$ со свойствами $x_n \in D,\ x_n \neq a, x_n \to a$. Тогда по определению Гейне $f(x_n) \to A, g(x_n) \to B$. По теореме о пределе суммы для последовательностей $f(x_n) + g(x_n) \to A + B$. В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ это и означает, что $f(X) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} A + B$. При доказательстве утверждения о пределе частного следует учесть, что, по замечанию 3, существует такая окрестность V_a, что частное $\frac{f}{g}$ определено по крайней мере на множестве $V_a \cap D$.

Замечание 4. Теорема про функции верна и для бесконечных пределов, за исключением случаев неопределённости вида $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Замечание 5. Определение бесконечно малой и бесконечно большой переносятся на функции (и отображения со значениями в нормированно пространстве). Так, функция, стремящаяся к нулю в точке a называется бесконечно малой в точке a. Утверждение о том, что произведение бесконечно малой функции на ограниченнуб есть бесконечно малая, и о связи иежду бесконечно большими и бесконечно малыми сохраняют свою силу.

1.31 Предельный переход в неравенстве для функций. Теорема о сжатой функции

(106)

Теорема. Предельный переход в неравенстве для функций. Пусть X — метрическое пространство, $f, g : D \subset X \to \mathbb{R}$, a — предельная точка D, $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in D \backslash \{a\}$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}, f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$, $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} B$. Тогда $A \leq B$

Доказательство. Возьмём последовательность $\{x_n\}$ со свойствами $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Тогда, по определению Гейне, $f(x_n) \to A$, $g(x_n) \to B$. По теореме о предельном переходе в неравенстве для последовательностей $A \leq B$.

Теорема. О сжатой функции. Пусть X — метрическое пространство, $f, g, h : D \subset X \to \mathbb{R}, a$ — предельная точка D, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ для всех $x \in D \backslash \{a\}$, $A \in \mathbb{R}$, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$, $h(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$. Тогда и $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$.

Доказательство. Возьмём последовательность $\{x_n\}$ со свойствами $x_n \in D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Тогда, по определению Гейне $f(x_n) \to A$, $h(x_n) \to A$. Кроме того, по условию для всех $n \in N$

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n).$$

По теореме о сжатой последовательности $g(x_n) \to A$. В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ это и значит, что $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$.

Замечание 1. Аналогично доказывается, что если $f(x) \leq g(z)$ для всех $x \in D\{a\}$ и $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty (g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty)$,то и $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +infty (f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty)$.

Замечание 2. В теоремах и замечании достаточно выполнения неравенств на множестве $\dot{V}_a \cap D$, где V_a — какая-нибудь окрестность точки a.

Пусть $f : D \subset X \to Y$, $D_1 \subset S$, a — предельная точка D_1 (а следовательно и D). Тогда если предел f в точке a существует и равен A, то предел сужения f на D_1 в точке a также существует и равен A. В самом деле, если соотношение $f(X) \in V_A$ выполняется для всех $x \in \dot{V}_a \cap D$, то оно тем более выполняется для всех x из $\dot{V}_a \cap D_1$. Однако возможна ситуация, когда предел сужения существует, а предел отображения нет.

1.32 Предел монотонной функции

(108)

Теорема. О пределе монотонной функции. Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in (-\infty, +\infty),\ D_1 = D \cap (-\infty, a), a$ — предельная точка D_1.
1. Если f возрастает и ограничена сверху на D_1, то существует конечный предел $f(a-)$.
2. Если f убывает и ограничена снизу на D_1, то существует конечный предел $f(a-)$.

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе доказыается аналогично. Положим $A = \sup\limits_{x \in D_1} f(x)$; тогда $A \in \mathbb{R}$ в силу ограниченности функции свурху. Докажем, что $f(a-) = A$. Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению верхней грани существует такая точка $x_0 \in D_1$, что $f(x_0) > A - \varepsilon$. Но тогда для всех таких $x \in D_1$, что $x > x_0$, в силу возрастания f

$$A - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq A < A + \varepsilon.$$

Теперь положим $\delta = a - x_0$ при $a \in \mathbb{R}$ или $\Delta = \max\{x_0, 1\}$ при $a = +\infty$; Тогда неравенство из определения предела выполнено для всех таких $x \in D$, что $0 < a - x < \delta$ (соответсвенно, $x > \Delta$).

Замечание 2. Аналогично утверждениям теоремы доказываются
3. Если f возрастает и не ограничена сверху на D_1, то предел $f(a-)$ существует и равен $+\infty$.
4. Если f убывает и не ограничена снизу на D_1, то предел $f(a-)$ существует и равен $-\infty$.

Замечание 2. Аналогично формулируется и доказывается теорема для правостороннего предела.
Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in (-\infty, +\infty),\ D_2 = D \cap (a, +\infty), a$ — предельная точка D_2. 1. Если f возрастает и ограничена снизу на D_2, то существует конечный предел $f(a+)$.
2. Если f убывает и ограничена сверху на D_2, то существует конечный предел $f(a+)$.
3. Если f возрастает и не ограничена снизу на D_2, то предел $f(a+)$ существует и равен $-\infty$.
4. Если f убывает и не ограничена сверху на D_2, то предел $f(a+)$ существует и равен $+\infty$.

1.33 Критерий Больцано-Коши для отображений

(110)

Теорема. Критерий Больцано-Коши для отображений. Пусть X, Y — метрические пространства, Y полно, $f : D \subset X \to Y$, a — предельная точка D. Тогда существование в точке a предела f, принадлежащего Y, равносильно следующему утверждению.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists V_a \ \ \forall \overline{x}, \overline{\overline{x}} \in \dot{V}_a \cap D \ \ \rho_Y(f(\overline{x}), f(\overline{\overline{x}})) < \varepsilon.$$

Доказательство. 1. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in Y$. Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению предела, найдётся такая окрестность V_a точки a, что $p_Y(f(X), A) < \frac{\varepsilon}{2}$ Для всех $x \in \dot{V}_a \cap D$. Тогда если $\overline{x}, \overline{\overline{x}} \in \dot{V}_a \cap D$, то

$$\rho_Y(f(\overline{x}), f(\overline{\overline{x}})) \leq \rho_Y(f(\overline{x}), A) + \rho_Y(A, f(\overline{\overline{x}})) < \varepsilon$$

В силу произвольности ε формула выполнена.

2. Пусть выполнена формула. Докажем существование предела f в точке a на языке последовательностей. Возьмём последовательность $\{x_n\}$ со свойствами $x_n \in D,\ \ x_n \neq a,\ \ x_n \to a$, и докажем, что существует $\lim f(x_n) \in Y$. Возьмём $\varepsilon > 0$ и подберём окрестность V_a из формулы. По орпеделению предела $\{x_n\}$ найдётся такой номер N, что $x_n \in V_a$ для всех $n > N$; тогда $x_n \in \dot{V}_a \cap D$ для тех же n. По выбору V_a, для всех $n, l > N$ будет $\rho_y(f(x_n), f(x_1)) < \varepsilon$. таким образом последовательность сходится в себе, а, значит, в силу полноты Y, сходится к некоторому пределу, принадлежащему Y. Тогда, в силу замечания к определению предела существует $\lim\limits_{x \to a} f(X) \in Y$.

Замечание 1. Полнота Y использовалась только во второй части доказательства.

1.34 Двойной и повторный пределы, примеры

(111)

Определение. Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{R},\ \ a$ — предельная точка $D_1,\ \ b$ — предельная точка $D_2,\ \ \ D \supset (D_1 \backslash \{a\}) \times (D_2 \backslash \{b\}),\ \ \ f : D \to \mathbb{R}$.

1. Если для каждого $x \in D_1 \backslash \{a\}$ существует конечный предел

$$\varphi(X) = \lim_{y \to b} f(x, y),$$

то предел функции φ в точке a называется повторным пределом функции f в точке (a, b):

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x,y)$$

2. Аналогично для $y\in D_2\backslash\{b\}$ $\widehat{(}\lim_{y\to b}\psi(x)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y))/$

3. Точку A называют двойным пределом функции f в точке (a,b) и пишут

$$\lim_{x\to a, y\to b}f(x,y)=A, \qquad f(x,y)\xrightarrow[x\to a, y\to b]{}A,$$

если для любой окрестности V_a точки A существуют такие окрестности V_a и V_b точек a,b, что $f(x,y)\in V_A$ для всех $x\in\dot{V}_a\cap D_1,\ \ y\in\dot{V}_b\cap D_2$.

Теорема. О двойном и повторном пределе. Пусть $D_1, D_2\subset\mathbb{R},\ \ a$ — предельная точка $D_q,\ \ b$ — предельная точка $D_2,\ \ D\supset(D_1\backslash\{a\})\times(D_2\backslash\{b\}),\ \ f:D\to\mathbb{R}$ и выполнены условия:
1. существует конечный или бесконечный двойной предел $\lim\limits_{x\to a, y\to b}f(x,y)=A$;
2. для каждого $x\in D_1\backslash\{a\}$ существует конечный предел

$$\varphi(x)=\lim_{y\to b}f(x,y).$$

Тогда повторный предел $\overset{\varphi}{\lim\limits_{x\to a}}(x)$ существует и равен A.

Доказательство. Для определённости пусть $A\in\mathbb{R}$. Возьмём $\varepsilon>0$. По определению, двойного предела, найдутся такие окрестности V_a, V_b, что для всех $x\in\dot{V}_a\cap D_1,\ \ y\in\dot{V}_b\cap D_2$ выполняется неравенство

$$|f(x,y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Устремляя в нём y к b и пользуюясь непрерывностью модуля, получаем

$$|\varphi(x)-A|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

для всех $x \in \dot{V}_A \cap D_1$, что и означает требуемое. В случае бесконечного предела следует изменить неравенство на соответсвующее.

Следствие 1. При выполнении всех трёх условий оба повторных предела существуют и равны двойному.

Пример 1. Пусть $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, тогда в точке $(0,0)$ повторные пределы различны и равны 1 и -1 соответсвенно, двойного предела не существует.

Пример 2. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ в точке $(0,\ 0)$ повторные пределы равны 0, но двойного предела не существует, так как по прямой $y = x$ предел равен $\frac{1}{2}$.

Пример 3. $f(x,y) = x\sin\frac{1}{y} + y\frac{1}{x}$ в $(0,\ 0)$ повторных пределов нет, а двойной существует и равен 0, так как $|f(x,y)| \leq |x| + |y|$

1.35 Замена на эквивалентную при вычислении пределов. Асимптоты

(163)

Теорема. Замена на эквивалентную при вычислении пределов. Пусть X — метрическон пространство, $f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \subset X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, x_0 — предельная точка D,

$$f(x) \sim \tilde{f}(x), \quad g(x) \sim \tilde{g}(x), \quad x \to x_0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$.

2. Если x_0 — предельная точка области определения $\frac{f}{g}$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g(x)}}$$

В обоих утверждениях пределы одновременно существуют и равны или не существуют.

Замечание 1. Если $g(x) \not\equiv 0$ в $\dot{V}_a \cap D$, то и $\tilde{g}(x) \not\equiv 0$ в $\dot{\tilde{V}}_{x_0} \cap D$ и обратно. Поэтому точка x_0 одновременно является или не является предельной для областей определения $\frac{f}{g}$ и $\frac{\tilde{f}}{\tilde{g}}$.

Доказательство. По определению эквивалентной функции, существуют окрестности U_{x_0}, V_{x_0} и функции φ, ψ, стремящиеся к 1 при $x \to x_0$, такие, что

$$f = \varphi \tilde{f} \text{ на } \dot{U}_{x_0} \cap D, \quad g = \psi \tilde{g} на \dot{V}_{x_0} \cap D.$$

Тогда на множестве $\dot{W}_{x_0} \cap D$, где $W_{x_0} = U_{x_0} \cap V_{x_0}$, верны оба равенства. Значит, на $\dot{W}_{x_0} \cap D$

$$fg = (\varphi\psi)(\tilde{f}\tilde{g})$$

. Следовательно если $\lim\limits_{x \to x_0} \tilde{f}\tilde{g}$ существует и равно A, то по теореме о пределе произведения $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$ существует и равен A. Верно и обратное. Аналогично доказыается для предела частного (может понадобиться сузить окрестность, чтобы φ, ψ не обращались в ней в нуль).

Пусть $f \sim g, f \sim h$. Если $f - h = o(f - g)$, то говорят, что асимптотически равенство $f \sim h$ точнее чем $f \sim g$.

(167)

Определение. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, функция f задана по крайненй мере на $\langle a, x_0 \rangle$ или $\langle x_0, b \rangle$ и действует в $\mathbb{R}$ прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой функции f, если $f(x_0+)$ или $f(x_0-)$ равны $+\infty$ или $-\infty$.

Определение. Пусть $\langle a, +\infty) \subset D \subset \mathbb{R}, \ f : D \to \mathbb{R}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Прямая $y = \alpha x + \beta$ называется наклонной асимптотой функции f при $x \to +\infty$, если

$$f(x) = \alpha x + \beta + o(1), \quad x \to +\infty$$

Аналогично определяется наклонная асимптота при $x \to -\infty$ функции заданной по крайней мере на $(-\infty, b)$.

1.36 Единственность асимптотического разложения

(166)

Теорема. Единственность асимптотического разложения. Пусть X — метрическое пространство, $D \subset X$, x_0 — предельная точка D, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f, g_k : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})(k \in [0 : n])$, при всех $k \in [0 : n-1]$

$$g_{k+1}(x) = o(g_k(X)) \quad x \to x_0,$$

и для любой окрестности V_{x_0} существует точка $t \in \dot{V}_{x_0} \cap D$, в которой $g_n(t) \neq 0$. Тогда, если асимптотическое разложение f по системе $\{g_k\}$ существует, то оно едиственное: из равенств

$$\sum_{k=0}^{n} c_k g_k(x) + o(g_n(x)), \quad x \to x_0,$$

$$\sum_{k=0}^{n} d_k g_k(x) + o(g_n(x)), \quad x \to x_0,$$

следует, что $c_k = d_k$ при всех $k \in [0 : n]$.

Доказательство. По индукции заключаем, что

$$g_k(x) = o(g_l(x)), \quad x \to x_0, \quad l < k.$$

Обозначим

$$E_k = \{x \in D : g_k(x) \neq 0\}, \quad k \in [0 : n].$$

Если бы функция g_k тождественно обращалась в ноль на множестве вида $\dot{U}_{x_0} \cap D$, то и функция $g_n = \varphi_k g_k$, где φ_k — функция из определения символа o , обращалась бы в тождественный ноль а множестве $\dot{V}_{x_0} \cap D$, что противоречит условию. Следовательно, x_0 — предельная точка каждого E_k.
Допустим противное: пусть $c_k = d_k$ не при всех $k \in [0 : n]$. Положим

$$m = \min\{k \in [0 : n] : c_k \neq d_k\}$$

. Из разложений следует, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k g_k(x) + o(g_n(x)), \quad x \to x_0,$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} d_k g_k(x) + o(g_n(x)), \quad x \to x_0.$$

Вычтя получим

$$0 = (c_m - d_m) g_m(x) + o(g_m(x)), \quad x \to x_0.$$

Поделив на $g_m(x)$ при $x \in E_m$ и перейдя к пределу по множеству $_m$, получим $c_m = d_m$, что противоречит определению m.

1.37 Непрерывность. Точки разрыва и их классификации, примеры

(114)
Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $f : D \subset X \to Y$, $x_0 \in D$. Отображение f назывется непрерывным в точке x_0 если выполняется одно из следующих утверждений.
1. Предел отображения f в точке x_0 существует и равен $f(x_0)$. (Применимо, если x_0 — предельная точка D).
2. На ε-языке или по Коши.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : \ \rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. На языке окрестностей.
$\forall V_{f(x_0)}\ \exists V_{x_0}\ f(V_{x_0} \cap D) \subset V_{f(x_0)}$
4. На языке последовательностей или по Гейне.
$\forall \{x_n\} : \ x_n \in D, x_n \to x_0\ f(x_n) \to f(x_0)$
5. Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение отображения. $\Delta y \xrightarrow[\Delta x \to \theta_X]{} \theta_Y$

Отображение называется непрерывным на множестве D, если оно непрерывно в каждой точке множества D.
Множество отображений $f : D \subset X \to Y$ непрерывных на множестве D, обозначают $C(D \subset X \to Y)$ или $C(D \to Y)$

Замечание 1. Равносильность определений, когда x_0 предельная точка D, следует из равносильности различных определений предела. Под номерами 2, 3, 4 записан тот факт, что точка $a = f(x_0)$ является пределом отображения f в точке x_0 с одним отличием в каждом случае. 2: опущено условие $x \neq x_0$; 3: окрестность не проколота; 4: опущено условие $x \neq x_0$. Так как это ничего не портит. Определение 5 на любом из языков записывается также, как и определение 1.

Определение. пусть $f : D \subset X \to Y, x_0 \to D$. Если отображение f не является непрерывным в точке x_0, то говорят, что f

разрывно (терпит разрыв, испытывает разрыв) вточке x_0, а точку x_0 называют точкой разрыва.

Пример 1. Функция сигнум

$$\mathrm{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Тогда $f(0+) = 1, \quad f(0-) = 1, \quad 0$ — точка неустранимого разрыва превого рода.

Пример 2. $f(x) = |\mathrm{sign}(x)|$ Тогда $f(0+) = f(0-) = 1$ и 0 — точка рустранимого разрыва первого рода.

Пример 3. $f(x) = \frac{1}{x}$ ТОгда $f(0+) = +\infty, \quad f(0-) = -\infty$ и 0 — точка разрыва второго рода.

Пример 4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Тогда $f(0+) = f(0-) = +\infty$ и 0 — точка разрыва второго рода

Пример 5. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, тогда f определена на $\mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$ и на области определения $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Точка –1 — точка разрыва второго рода, 1 — точка устранимого разрыва. положим $f(1) = \frac{1}{2}$. получим непрерывную точке 1 функцию.

1.38 Арифметические действия над напрерывными отображениями. Стабилизация знака непрерывной функции.

(122)

Теорема. Арифметические действия над непрерывными отображениями. Пусть X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство, $D \subset X, \ \ x_0 \in D$, отобрадения $f, g : D \to$

$Y, \quad \lambda : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ нерперывны в точке x_0ю Тогда отображения $f+g, \quad f-g, \quad \lambda f, |f|$, непрерывны в точке x_0.

Доказательство. Если x_0 — изолированнач точка D, то утверждение тривиально. Если же x_0 — предельная точка D, то теоремы о непрерывности следуют из теорем о пределах.

Замечание 1. О стабилизации знака непрерывной функции. Если функция $g : D \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0, причём $g(x_0) \neq 0$, то существует такая окрестность V_{x_a}, что $\mathrm{sign} g(x) = sign g(x_0)$ для всех $x \in V_{x_0} \cap D$.

Доказательство. Для определённости рассмотрим случай, когда $g(x_0) > 0$. Допустим противное: пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in V_{x_0}(\frac{1}{n}) \cap D$, для которой $g(x_n) \leq 0$. Построенная последовательность $\{x_n\}$ стремится к x_0. По определению непрерывности $g(x_n) \to g(x_0)$. по теореме о предельном переходе в неравенстве, $g(x_0) \leq 0$, что противоречит условию.

1.39 Непрерывность и предел композиции

(124)

Теорема. Непрерывность композиции. Пусть X, Y, Z — метрические пространства, $f : D \subset X \to Y, \quad g : E \subset Y \to Z, \quad f(D) \subset E, f$ непрерывно в точке $x_0 \in D, \quad g$ непрерывно в точке $f(x_0)$. Тогда $g \circ f$ непрерывно в точке x_0.

Доказательство. Возьмём последовательность $\{x_n\}$, такую что $x_n \in D, \quad x_n \to x_0$. Обозначим $y_n = f(x_n), \quad y_0 = f(x_0)$; тогда $y_n, y_0 \in E$. По определению непрерывности f в точке x_0 на языке последовательностей $y_n \to y_0$. По определению непрерывности g в точке y_0 на языке последоватeлбностей $g(y_n) \to g(y_0)$. то есть

$(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$. Последнее в силу проивольности $\{x_n\}$ и означает непрерывность $g \circ f$ в точке x_0.

Замечание 2. Пусть $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $g(y) = |\mathrm{sign} y|$. Тогда $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, $g(y) \xrightarrow[y \to 0]{} 1$, но композиция $g \circ f$ не имеет предела в нуле, так как $(g \circ f)(\frac{1}{n\pi}) = 0 \to 0$, а $(g \circ f)(\frac{1}{(n+1/2)\pi}) = 1 \to 1$. Этот пример показывает, что утверждение "если $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A, g(x) \xrightarrow[x \to A]{} B$, то $g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} B$"может не выполняться. Если же запертить $f(x)$ принимать значение A, то утверждение становится верным.

Пусть X, Y, Z — метрические пространства, $f : D \subset X \to Y$, $g : E \subset Y \to Z$, $f(D) \subset E$ и выполнены условия:

1. a — предельная точка D, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$;
2. A — предельная точка E, $g(x) \xrightarrow[x \to A]{} B$;
3. Существует такая окрестность V_a точки a, что $f(X) \neq A$ для любого $x \in \dot{V}_a \cap D$.

Тогда $(g \circ f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} B$.

1.40 Характеристика непрерывности отображения с помощью прообразов

(125)

Теорема. Характеристика непрерывности отображения с помощью прообразов. Пусть X, Y — метрические пространства, $f : X \to Y$. Тогда для непрерывности f на X необходимо и достаточно, чтобы при отображении f прообраз любого открытого в Y множества был открыт в X.

Доказательство. 1. Пусть f непрерывно и множество U открыто в Y. Докажем, что множество $f^{-1}(U)$ открыто в X. Для этого возьмём точку $a \in f^{-1}(U)$ и докажем, что a — внутренняя точка $f^{-1}(U)$. Так как $f(a) \in U$, а U открыто, существует окрестность $V_{f(a)}$, содержащаяся в U. По определению непрерывности f в точке a найдётся окрестность V_a такая, что $f(V_a) \subset V_{f(a)} \subset U$. Следовательно $V_a \subset f^{-1}(U)$, то есть a — внутренняя точка $f^{-1}(U)$.

2. Пусть прообраз любого открытого множества открыт, $a \in X$. Докажем, что f непрерывно в точке a; в силу произвольности a это и будет означать непрерывность f на всём X. Возьмём окрестностть $V_{f(a)} \subset Y$. По условию её прообраз $G = f^{-1}(V_{f(a)})$ открыт в X, при этом $a \in G$. Значит, найдётся окрестность $V_a : V_a \subset G$. Осталось проверить, что $f(V_a) \subset V_{f(a)}$. Тогда определение непрерывности f в точке a на языке окрестностей будет выполнено. Действительно, если $y \in f(V_a)$, то, по определению образа, $y = f(x)$ для некоторого $x \in V_a$; тем более $x \in G$. По определению прообраза $f(x) \in V_{f(a)}$, то есть $y \in V_f(a)$

Замечание 1. Пусть $f : [0, 2] \to \mathbb{R}, \quad f(X) = x$. Тогда

$$f^{-1}(1, +\infty) = (1, 2].$$

Противоречий с теоремой нет: полуинтервал $(1, 2]$ открыт в $X = [0, 2]$, хотя и не является открытым в $\mathbb{R}$.

1.41 Теорема Вейерштрасса о непрерывных отображениях, следствия

(126)

Теорема. Вейерштрасса О непрерывных отображениях. Пусть X, Y — метрические пространчтва, X — компактно, $f \in C(X \to Y)$. Тогда $f(x)$ компактно. Другими словами: непрерывный образ компакта — компакт.

Доказательство. Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие множества $f(X): f(X) \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$. По теореме о характеристике непрерывности с помощью прообразов, при всех $\alpha \in A$ множества $f^{-1}(G_\alpha)$ открыты в X. Проверим, что

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(G_\alpha).$$

В самом деле, если $a \in X$, то $f(A) \in Y$ и, значит, $f(a) \in G_\alpha$ при некотором α, то есть $a \in f^{-1}(G_\alpha)$ при некотором α. Следовательно, X содержится в объединении $f^{-1}(G_\alpha)$. Обратное включение тривиально.

Пользуясь компактностью X, выделим из его откытого покрытия $\{f^{-1}(G_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ конечное подпокрытие: найдётся такой конечный нобор индексов $\alpha_1, \cdots, \alpha_N \in A$, что

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} f^{-1}(G_{\alpha_i}).$$

Осталось проверить, что

$$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{N} G_{\alpha_i};$$

это и будет означать, что из произвольного открытого покрытия удастся извлечь конечное подпокрытие. Действительно, если $y \in f(X)$, то $y = f(x)$ для некоторого $x \in X$. Тогда найдётся такой номер $i \in [1:N]$, что $x \in f^{-1}(G_{\alpha_i})$. Последнее означает, что $f(x) \in G_{\alpha_i}$, то есть $y \in G_{\alpha_i}$.

Следствие 1. Непрерывный образ компакта замкнут и ораничен.

Следствие 2. Первая теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях. Функция непрерывная на отрезке ограничена.

Замечание 1. Оба условия: и непрерывность, и то, что область определения отрезок — существенны. Так, функции $f(x) = x$, $g(x)\frac{1}{x}$ непрерывны, но не ограничены, соответсвенно, на $\mathbb{R}$ и $(0, 1]$. Функция

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Задана на $[0, 1]$, разрывна в точке 0, но не ограничена.

Следствие 3. Пусть X компактно, $f \in C(X \to \mathbb{R})$. Тогда существует $\max\limits_{x \in X} f(X), \min\limits_{x \in X}$. Другими словами: непрерывная на компакте функция принимает наибольшее и наименьшее значение.

Доказательство. Остаётся доказать, что компактно подмножество E числовой прямой ($E = F(X)$) имеет наибольший и наименьший элемент. Существует $\sup E = b \in \mathbb{R}$. Докажем, что $b \in E$: это и будет означать, что $b = \max E$. По определению супремум для любого $n \in N$ найдётся такая точка $x_n \in E$, что $b - \frac{1}{n} < x_n \leq b$. Построенная последовательность стремится к b. Следовательно, $b \in E$ в силу замкнутости E. Доказательство для минимума аналогично.

Следствие 4. Вторая теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях. Функция, непрерывная на отрезке, принимает наибольшее и наименьшее значение.

Замечание 2. И здесь оба условия существенны. Так как функции f, g, h из замечания 1 не имеют наибольшего значения. Наибольшего значения не имеет и ограниченная непрерывная функция $f_1(x) = x$ на $[0, 1)$.

1.42 Теорема Кантора

(129)

Определение. Пусть X, Y — метрические пространства $f : X \to Y$. Отображение f называется равномерно непрерывным на X, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \overline{x}, \overline{\overline{x}} \in X : p_X(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) < \delta \;\; p_Y(f(\overline{x}), f(\overline{\overline{x}})) < \varepsilon.$$

Ясно, что всякое раномерно непрерывное отображение непрерывно.

Теорема. Кантор. Непрерывное на компакте отображение равномерно непрерывно.

Доказательство. Пусть X — компактно, $f \in C(X \to Y)$. Предположим, что f не являетс яравномерно непрерывным. Тогда существует такое $\varepsilon^* > 0$, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ для числа $\delta = \frac{1}{n}$ найдутся точки $\overline{x}_n, \overline{\overline{x}}_n \in X$:

$$\rho_X(\overline{x}_n, \overline{\overline{x}}_n) < \tfrac{1}{n}, \quad \rho_Y(\overline{y}_n, \overline{\overline{y}}_n) \geq \varepsilon^*,$$

где $\overline{y}_n = f(\overline{x}_n), \;\; \overline{\overline{y}}_n = f(\overline{\overline{x}}_n)$.

Пользуясь секвенциальной компактностью X, выделим из последовательности $\{\overline{x}_n\}$ точек X подпоследовательность $\{\overline{x}_{n_k}\}$, имеющую предел в X: $\overline{x}_{n_k} \to c \in X$. Тогда и $\overline{\overline{x}}_{n_k} \to c$, так как

$$\rho_X(\overline{\overline{x}}_{n_k}, c) \leq \rho_X(\overline{\overline{x}}_{n_k}, \overline{x}_{n_k}) + \rho_X(\overline{x}_{n_k}, c) < \tfrac{1}{n_k} + \rho_X(\overline{x}_{n_k}, c) \to 0$$

. По непрерывности f в точке c

$$\overline{y}_{n_k} \to f(c), \quad \overline{\overline{y}}_{n_k} \to f(c).$$

Следовательно, $\rho_Y(\overline{y}_{n_k}, \overline{\overline{y}}_{n,k}) \to 0$ и, начиная с некоторого номера $\rho_Y(\overline{y}_{n_k}, \overline{\overline{y}}_{n,k}) < \varepsilon^*$, что противоречит построению.

1.43 Теорема Больцано-Коши о непрерывных функциях

(130)

Теорема. Больцано-Коши О промежуточном значении непрерывной функции. Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда для любого числа C, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$ найдётся такое $c \in (a, b)$, что $f(c) = C$.

Доказательство. 1. Пусть числа $f(X), f(b)$ разных знаков: $f(a)f(b) < 0$; докажем, что существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = 0$. Не умаляя общности, будем считать, сто $f(a) < 0 < f(b)$; второй случай рассматривается аналогично. Рассмотрим середину отрезка $[a, b]$ — точку $\frac{a+b}{2}$. Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то теорема доказана — можно положить $c = \frac{a+b}{2}$. Иначе

$$[a_1, b_1 = \begin{cases} [\frac{a+b}{2}, b], & f(\frac{a+b}{2}) < 0, \\ [a, \frac{a+b}{2}], & f(\frac{a+b}{2}) < 0. \end{cases}$$

В обоих случаях $f(a_1) < 0 < f(b_1)$. Продолжим этот процесс построения помежутков. Если процес не завершится (не будет найдена точка c), то будкт построена последовательность вложенных отрезков, таких что $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. При этом отрезки стягивающиеся, так как $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$. По теореме о стягивающихся отрезках существует единственная точка c принадлежащая одновременно всем отрезкам, при этом $a_b \to c, \quad b_n \to c$. По теореме о предельном переходе в неравенстве $f(c) \leq 0 \leq f(c)$, то есть $f(c) = 0$.

2. Докажем теорему в общем случае. Пусть $\varphi = f - C$. Тогда $\varphi \in C[a, b]$ как разность непрерывных функций, $\varphi(a)\varphi(b) < 0$. По доказанному существует такая точка $c \in (a, b)$, что $\varphi(c) = 0$, то есть $f(c) = C$.

Замечание 1. Теорему можно переформулировать так: если непрерывная на промежутке функция принимает два какие-то два значения, то она принимает все значения, лежащие между ними. Здесь существенно и то, что функция непрерывна, и то, что она задана на промежутке. Функция sign, заданная на $\mathbb{R}$, разрывна в 0. Она принимает значения –1 и 1, но из чисел между ними только 0. Сужение функции на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ непрерывно, но не принимает значений, лежвщих между -1 и 1.

Замечание 4. Другой способ доказательства теоремы Больцано-Коши — поверить, что если $f \in C[a,b], \quad f(a) < 0 < f(b)$, то точка

$$c = \sup\{x \in [a,b] : f(X) < 0\}$$

есть корень функции f.

1.44 Сохранение промежутка (с леммой о характере промежутков). Сохранение отрезка

Билет 44: Сохранение промежутка (с леммой о характере промежутков). Сохранение отрезка (131)

Лемма. Характеристика промежутков. Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Тогда следующие утверждения равносильны.

1. E — промежуток (возможно вырожденный).
2. Для любых x, y, принадлежащих $E \ \ (x < y), \quad [x,y] \subset E$

Доказательство. Второе утверждение следует из первого тривиально. Докажем обратный переход. Пусть $e \neq \varnothing$. Обозначим $m = \inf R, \quad M = \sup E$. Ясно, что $E \subset [m,M]$. Докажем, что $(m,M) \subset E$. Пусть $m < z < M$. Тогда по определению граней существуют точки $x, y \in E : x < z < y$. По условию $z \in E$

Теорема. О сохранении промежутка. Непрерывный образ промежутка — промежуток.

Доказательство. Пусть $f \in C\langle a,b\rangle$,

$$m = \inf_{x \in \langle a,b \rangle} f(x), \quad M = \sup_{x \in \langle a,b \rangle} f(x) \quad (m, M \in \mathbb{R}).$$

По теореме Больцано-Коши о промеуточных значениях непрерывной функции, множество $E = f(\langle a, b \rangle)$ выпукло, а, по лемме, E — промежуток, то есть $f(\langle a, , \rangle b) = \langle m, M \rangle$.

Замечание 2. Промежуток $\langle m, M \rangle$ может быть другого типа, нежели $\langle a, b \rangle$

Следствие 1. О сохранении отрезка. Непрерывный образ отрезка — отрезок.

Доказательство. Действительно, множество $f([a, b])$ — промежуток, а, по теореме Вейерштрасса, имеет наибольший и наименьший элемент.

Замечание 3. Наибольшее и наименьшее значения не обязательно достигаются на концах отрезка.

1.45 Теорема Больцано-Коши о непрерывных отображениях

(133)

Определение. Пусть Y — метрическое пространство, $E \subset Y$. Непрерывное отображение отрезка в множество E:

$$\gamma \in C([a, b]) \subset \mathbb{R} \to E$$

называется путём в E. Точка $\gamma(a)$ называется началом, $\gamma(b)$ — концом пути.

Определение. Пусть Y — метрическое пространство, $E \subset Y$. Множество E называется линейн связным, если любые две его точки соединены путём.

$$\forall A, b \in E \ \ \exists \gamma \in C([a,b] \subset \mathbb{R} \to E): \quad \gamma(a) = A, \quad \gamma(b) = B$$

Теорема. Больцано-Коши О непрерывных отображениях. Пусть X, Y — метрические пространства, X линейно связно, $f \in C(X \to Y)$. Тогда $f(X)$ линейно связно. Другими словами: непрерывный образ линейно свзного множества линейно связен.

Доказательство. Пусть $A, B \in f(X)$. Тогда, по определению образа, существуют точки $\alpha, \beta \in X : a = f(\alpha), \quad B = f(\beta)$. Так как X линейно связно, точки α, β можно соединить путём в X, то есть существует путь $\gamma \in C([a,b] \to X) : \gamma(a) = \alpha, \quad \gamma(b) = \beta$. Но тогда, по теореме о непрерывности композиции $f \circ \gamma$ — путь в $f(X)$; при этом $(f \circ \gamma)(a) = A, \quad (f \circ \gamma)(b) = B$.

Замечание 4. Согласно лемме, на прямой линейно связными могут быть толко промежутки.

Замечание 4. Теорема о сохранении промежутка, вообще говоря, не допускает обращения. Так, множество значений функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ 0, & x \in (1,2]. \end{cases}$$

есть отрезок $[0,1]$. Однако для монотонной функции обратное утверждение верно.

1.46 Разрывы и непрерывность монотонной функции

(134)

Теорема. О разрывах и непрерывностях монотонной функции. Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}, \quad f$ монотонна. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. f не может иметь разрывов второго рода.
2. Непрерывность f равносильна тому, что её множество значений — промежуток.

Доказательство. Пусть для определения f возрастает.

1. Пусть $x_0 \in (a, b), \quad x_1 \in \langle a, x_0)$. Тогда $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0)$ для всех $x \in (x_1, x_0)$, пожтому f возрастает и ограничена сверху на $\langle a, x_0)$. По теореме о пределе монотонной функции, существует конечный предел $f(x_0-)$, причем, по теореме о предельно переходе в неравенстве, $f(x_1) \leq f(x_0-) \leq f(x_0)$. Аналогично доказывается, что для любой точки $x_0 \in \langle a, b)$ существует конечный предел $f(x_0+)$, причём $f(x_0) \leq f(x_0+) \leq f(x_2)$ для всех $x_2 \in (x_0, b\rangle$.

2. Ввиду следствия о сохранении промежутка остается доказать достаточность. Пусть $f(\langle a, b\rangle)$ — промежуток. Докажем непрерывность f слева в любой точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ от противного. Пусть $f(x_0-) < f(x_0)$ (существование конечного левостороннего предела уже доказано). Возьмём $y \in (f(x_0-), f(x_0))$. Тогда если $a < x_1 < x_0$, то $y \in [f(x_1), f(x_0)]$. Следовательно, $y \in f(\langle a, b\rangle)$, то есть y — значение функции. С другой стороны, для всех $x \in \langle a, x_0)$ будет $f(X) \leq f(x_0-) < y$, а для всех $x \in [x_0, b\rangle$ будет $f(x) \geq f(x_0) > y$, то есть функция не принимает значение y. Полкченное противоречме доказывает, что $f(x_0-) = f(x_0)$. Аналогично f непрерывна справа в любой точке $x_0 \; in\langle a, b)$.

1.47 Существование и непрерывность обратной функции

(134)

Теорема. О существовании и непрерывности обратной функции. Gecnm $f : C(\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}), \quad f$ строго монотонна,

$$m = \inf_{x \in \langle a,b \rangle} f(x), \quad M = \sup_{x \in \langle a,b \rangle} f(x).$$

Тогда справедливы следующие утверждения.
1. f обратима, $f^{-1} : \langle m, M \rangle \to \langle a, b \rangle$ — биекция.
2. f^{-1} строго монотонна одноимённо с f.
3. f^{-1} непрерывна.

Доказательство. Пусть для определения f строго возрастает. Если $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle, \quad x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$; следовательно f обратима. По теореме о сохранении промежутка $f(\langle a, b \rangle) = \langle m, M \rangle$. По общим свойтсвам обратимого отображения f^{-1} — биекция $\langle m, M \rangle$ и $\langle a, b \rangle$.
Докажем, что f^-1 строго возрастает. Если $y_1, y_2 \in \langle m, , \rangle M, \quad y_1 < y_2$, то $y_1 = f(x_1), \; y_2 = f(x_2)$, где $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle, \; x_1 = f^{-1}(y_1), \; x_2 = f^{-1}(y_2)$. При этом $x_1 < x_2$, так как возможность $x_1 \geq x_2$ исключена в силу строгого возрастания f.
Возрастающая функция f^{-1} задана на промежутке $\langle m, M \rangle$, а её множество значений — промежуток $\langle a, b \rangle$. По теореме о разрывах и непрерывности монотонной функции, она непрерывна.

Замечание 1. Для обратимости строго омнотонной функции и строгой монотонности обратимой функции непрерывность не нужна.

Замечание 2. 1. Множество точек разрыва монотонной функции не более чем счётно.
2. Если функция задана на промежутке, непрерывна и обратима, то она строго монотонно и, следовательно, обратная функция непрерывна.
3. Отображение, обратное к непрерывному, может окад=заться разрывным. Сопоставим каждой точке x подуинтервала $[0, 2\pi)$ точку $f(x)$ единичной окружности S, такую что длина дуги, отсчитываемой от точки $f(0) = (1, 0)$ до точки $f(x)$, равна x (или, что тоже самое $\arg f(x) = x$). Отображение f биективно и непрерывно, но

f^{-1} терпит разрыв в точке $(1,0)$. Близким к ней точкам окружности с отрицательной ординатой соответствуют точки полуинтервала, близкие к 2π, а не к 0.
Но если отображение задано на компакте, непрерывно и обратимо, то обратное отображение непрерывно.
4. Существует обратимая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, непрерывная в точке 0, но такая, что f^{-1} разрывна в точке $f(0)$.

1.48 Степень с произвольным показателем

(136)

Степенную функцию с показателем α, которая x сопоставляет x^α, будем обозначать $\epsilon_\alpha : \epsilon(x) = x^\alpha$. Заранее отметим, что области определнения степенных функций могут быть различны при разных показателях.

При $\alpha = 1$ функция $\epsilon_1 = \mathrm{id}_\mathbb{R}$, как уже отмечалось, непрерывна на $\mathbb{R}$.

При $\alpha = n \in \mathbb{N}$ по определению, $x^n = x\cdot x\cdot\ldots\cdot x$ n раз $x\in\mathbb{R}$. Следовательно ϵ_nнепрерывна на $\mathbb{R}$, как произведение непрерывных.

При $\alpha = -n$, где $n\in\mathbb{N}$, полагаем

$$x^{-n} = \tfrac{1}{x^n},\quad x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$$

. Следовательно, функция ϵ_{-n} непрерывна на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ как частное непрерывных.

При $\alpha = 0$ по определению полагаем $x^0 = 0$ при всех $x \neq 0$, тогда можно в соответствии с общим соглашением доопределить по непрерывности $x^0 = 1$ и при $x = 0$.

Если $n \in \mathbb{N}$, $\;n$ нечётно, то функция ϵ_n строго возрастает на $\mathbb{R}$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \epsilon_n(x) = +\infty$, $\;\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} \epsilon_n(x) = -\infty$; по теореме о сохранении промежутка $\epsilon_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Если $n \in \mathbb{N}$, $\;n$ чётно, то функция ϵ_n строго возрастает на $\mathbb{R}_+$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} \epsilon_n(x) = +\infty$, $\;\min\limits_{x\in\mathbb{R}_+} \epsilon_n(x) = 0$; по теореме о сохранении промежутка $\epsilon_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. По теореме о существовании и непрерывности обратной функции существует и непрерывна функция

$$\epsilon_{\frac{1}{n}} = \begin{cases} \epsilon_n^{-1}, & n \text{ нечетно}, \\ (\epsilon_n\big|_{\mathbb{R}_+})^{-1}, & n \text{ чётно}, \end{cases}$$

которая называется корнем n-ной степени и обозначается ещё $\sqrt[n]{(\cdot)}$: $\epsilon_{1/n} = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$. Итак,

$$\epsilon_{1/n} : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}, \qquad n \text{ чётно},$$

$$\epsilon_{1/n} : \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}, \quad n \text{ чётно};$$

$\epsilon_{1/n}$ строго возрастает и непрерывна.

При $\alpha \in \mathbb{Q}$ $\alpha = r = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь $p \in \mathbb{Z}$, $\;q \in \mathbb{N}$. Полагаем

$$x^r = (x^p)^{1/q},$$

для всех x, для которых правая часть имеет смысл. Другими словами $\epsilon_r = \epsilon_(1/q) \circ \epsilon_p$. Тогда x^r определено в следующих случаях

$$x > 0, \quad r \text{ любое},$$

$$x = 0, \quad r \geq 0$$

$$x < 0, \quad q \text{ нечётно}.$$

Функция ϵ_r непрерывна на своей области определения; она строго возрастает на $[0,+\infty)$ при $r>0$, строго убывает на $(0,+\infty)$ при $r<0$.

(145)

При всех $x>o$, $a\in\mathbb{R}$ по свойству $a^{xy}=(a^x)^y$ верна формула $x^\alpha=e^{\alpha\ln x.}$ Поэтому степенная функция ϵ_α непрерывна на $(0,+\infty)$ при всех $\alpha\in\mathbb{R}$. Если α иррационально, то

$$\epsilon_\alpha:[0,+\infty)\xrightarrow{на}[0,+\infty),\quad \alpha>0,$$

$$\epsilon_\alpha:(a,+\infty)\xrightarrow{на}(0,+\infty),\quad \alpha<0.$$

Непрерывность ϵ_α в нуле при $\alpha>0$ также имеет место: если $x_n>0, x_n\to 0$, то $y_n=\ln x_n\to-\infty$ и $\epsilon_\alpha(x_n)=e^{\alpha y_n}\to 0=e_\alpha(0)$

1.49 Свойства показательной функции и логарифма

(140)

1. Функция $\exp_a$ строго возрастает на $\mathbb{R}$ при $a>1$ и строго убывает на $\mathbb{R}$ при $0<a<1$.

Доказательство. Пусть $a>1$, $x<y$. Докажем, что $a^x<a^y$. Возьмём рациональные числа $\overline{r},\overline{\overline{r}}$, такие что

$$x<\overline{r}<\overline{\overline{r}}<y$$

и две последовательности рациональных чисел $\{\overline{r}_n\}$ и $\{\overline{\overline{r}}_n\}$, такие что

$$\overline{r}_n<x<y<\overline{\overline{r}}_n\quad \overline{r}_n\to x,\ \ \overline{\overline{r}}_n\to y.$$

Тогда в силу строгой монотонности показательной функции рационального аргумента

$$a^{\overline{r}_n} < a^{\overline{r}} < a^{\overline{\overline{r}}} < a^{\overline{\overline{r}}_n}.$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве,

$$a^x \le a^{\overline{r}} < a^{\overline{\overline{r}}} \le a^y.$$

Случай $0 < a < 1$ разбирается аналогично.

2. $a^{x+y} = a^x a^y$. В частности $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Доказательство. Возьмём две последовательность рациональных чисел $\{\overline{r}_n\}$ и $\{\overline{\overline{r}}_n\}$, стремящиеся к x, y и перейдём к пределу в равенстве

$$a^{\overline{r}_n + \overline{\overline{r}}_n} = a^{\overline{r}_n} a^{\overline{\overline{r}}_n},$$

которое верно для рациональных чисел.

3. Показательная функция непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Непрерывность показательной функции в нуле доказывается на языке последовательностей. $\{x_n\}$ — последовательность вещественных чисед, $x_n \to 0$. Возьмём $\varepsilon > 0$ и зафиксируем номер N_0 для которого выполняется неравенство $1 - \varepsilon < a^{-1/N_0} < a^{1/N_0} < 1 + \varepsilon$. Тогда найдётся такой номер N,что для всех $n > N$ будет $-\frac{1}{N_0} < x_n < \frac{1}{N_0}$. В силу строгой монотонности показательной функции

$$1 - \varepsilon < a^{-1/N_0} < a^{x_n} < a^{a/N_0} < 1 + \varepsilon$$

для таких n. Это и означает, что $a^{x^n} \to 1$. Случай $0 < a < 1$ разбирается аналогично.

Непрерывность в произвольной точке x_0 следует из доказанной непрерывности в нуле

$$a^{r_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1) \to 0$$

.

4. $(a^x)^y = a^{xy}$.

Доказательство. Возьмём две последовательности рациональных чисел $\{x_n\}, \quad \{y_m\} : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x, \quad y_m \xrightarrow[m\to\infty]{} y$. По известному свойству степени с рациональным показателем $(a^{x_n})^{y_m} = a^{x_n y_m}$. Зафиксируем m и устремими n к ∞. Тогда, по определению показательной функции $a^{x_n y_m} \xrightarrow[n\to\infty]{a} {}^{xy_m}$ и $a^{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{a} {}^{x}$, а по непрерывности степенной функции с рациональным показателем $(a^{x_m})^{y_m} \xrightarrow[n\to\infty]{} (a^x)^{y_m}$. Поэтому $(a^x)^{y_m} = a^{xy_m}$. Осталось устремить mк ∞и воспользоваться непрерывностью показательной функции.

5. $(ab)^x = a^x b^x$

Доказательство. Сделаем предельный переход в равенстве для степеней с рациональным показателем.

6. $\exp_a : \mathbb{R} \overset{\text{на}}{\longrightarrow} (0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Функция exp_n строго возрастает, поэтому существуб пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty} a^x/$. по неравенству Бернулли

$$a^n = (1+\alpha)^n \geq 1 + na \to +\infty, \quad a^{-n} = \tfrac{1}{a^n} \to 0.$$

Значит по свойствам промежутака $\exp_a(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$. Кроме того, значение 0 не принимается в силу строгой монотонности: если $a^{x_0} = 0$, то $a^x < 0$ при $x < x_0$, чего быть не может. Доказательство при $0 < a < 1$ аналогично.

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ при всех $x, y > 0$.

Доказательство. По свойству 2,

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy.$$

2. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ при всех $x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ В частности $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$.

Доказательство. По свойству 4,

$$a^{\alpha \log_a x} = (a^{\log_a x})^{\alpha} = x^{\alpha}.$$

3. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ при всех $x > 0$. В частности, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Доказательство. По свойству 4

$$b^{\log_b a \log_a x} = (b^{\log_b a})^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x$$

.

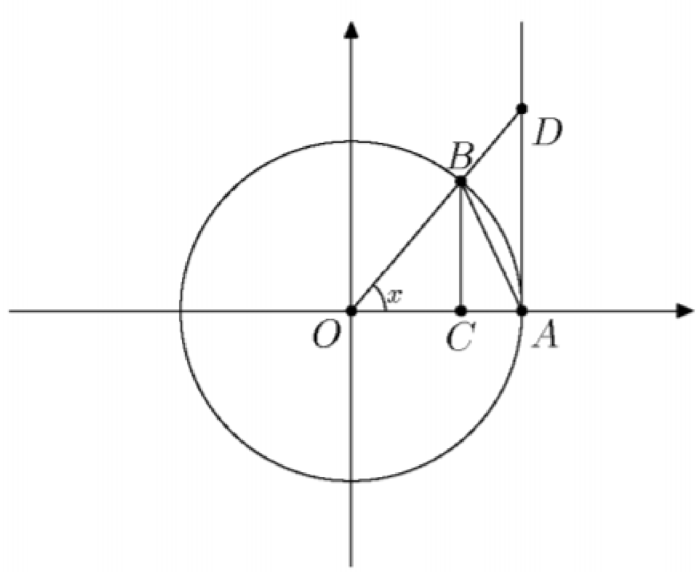
1.50 Непрерывность тригонометрических и обратных тригонометрических функций

(146-154)

Лемма. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Доказательство. Изобразим единичную окружность и угол в x радиан.



На рисунке

$$\triangle OAB \subset \textit{сект.}OAB \subset \triangle OAD.$$

Поэтому фигуры связаны неравенством

$$S_{\triangle OAB} < S_{\textit{сект.}OAB} < S_{\triangle OAD}$$

Учитывая, что

$$S_{\triangle OAB} = \tfrac{1}{2}|OA||BC|,$$

$$S_{\textit{сект.}OAB} = \tfrac{1}{2}|OA|^2 x, \quad S_{\triangle OAD} = \tfrac{1}{2}|OA||AD|$$

,

$$|OA = 1|, \;\; |BC| = \sin x, \;\; |AD| = \operatorname{tg} x.$$

Следствие 1. При всех $x \in \mathbb{R}$ $|\sin x| \le |x|$

Доказательство. При $|x| \in (0, \frac{\pi}{2})$ доказано по лемме, иначе $|sinx| < 1 < \frac{\pi}{2} \le x$

Следствие 2. Функции синус и косинус непрерывны на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ имеем:

$$|\sin x - \sin x_0| = |2 \sin \tfrac{x - x_0}{2} \cos \tfrac{x + x_0}{2} \le 2 \cdot \tfrac{|x - x_0|}{2} \cdot 1 = |x - x_0| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Непрерывность косинуса доказывается с помощью формулы приведения $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ и теоремы о непрерывности композиций.

Тангенс и котангенс непрерывны на своих областях определения, по теореме о непрерывности частного.

$\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}$. По теореме о существовании и непрерывности обратной функции, функция арксинус строго возрастает и непрерывна

$\arccos = (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}$. Аналогично функция арккосинус строго убывает и непрерывна.

$\operatorname{arctg} = (\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^-1$. Аналогично функция арктангенс строго возрастает и непрерывна.

$\operatorname{arcctg} = (\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)})^{-1}$. Аналогично функция арккотангенс строго убывает и непрерывна.

1.51 Замечательные пределы

Билет 51: Замечательные пределы (154-158)

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

По лемме $\sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, применяя предельный переход в неравенстве при $x \to 0$ $\frac{\sin x}{x} = 1$.

Следствие 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

2.

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

Доказательство. Напомним, что $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$. Разница между этим и доказываемым в том, что теперь речь идёт о пределе не последовательности, а функции, заданной на $\mathbb{R}\backslash[-1,0]$: аргумент x необязан принимать натуральные и даже положительные значения.

Для доказательства воспользуемся языком последовательностей. Возьмём последовательность $\{x_n\} : x_n \to \infty$ и докажем, что $f(x_n) \to$

e.

1. пусть сначала $x_n \in \mathbb{N}$ для всех n. Возьмём $\varepsilon > 0$ и по определению числа e подберём такой номер K, что для всех номеров (то есть натуральных чисел) $k > K$ будет $|f(k) - e| < \varepsilon$. Но начиная с некоторого номера $x_n > k$, а тогда $|f(x_n) - c| < \varepsilon$, что и означает выполнение требования.

2. Пусть $x_n \to +\infty$. Тогда, начиная с некоторого номера $x_n > 1$, поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что все $x_n > 1$. Уменьшая или увеличивая основание и показатель степени получаем равенство

$$(1 + \tfrac{1}{[x_n]+1})^{[x_n]} \leq (1 + \tfrac{1}{x_n})^x_n \leq (1 + \tfrac{1}{x_n})^{[x_n]+1},$$

которые перепишем в виде

$$\tfrac{f([x_n]+1)}{1+\frac{1}{[x_n]+1}} \leq f(x_n) \leq (1 + \tfrac{1}{[x_n]})f([x_n]).$$

Так как $\{[x_n]\}$ и $\{[x_n]+1\}$ — поседлвательности натуральных чисел, стремящихся к $+\infty$, то, по доказанному, $f([x_n]) \to e, \;\; f([x_n]+1) \to e$. Следовательно, по теореме о сжатой последовательности, $f(x_n)$ стремится к e.

3. Пусть $x_n \to -\infty$, тогда $y_n = -x_n \to +\infty$. По доказанному,

$$f(x_n) = (1 + \tfrac{1}{-y_n})^{-y_n} = (\tfrac{y_n}{y_n - 1})^{y_n} = (1 + \tfrac{1}{y_n - 1})f(y_n - 1) \to e.$$

4. Пусть $x_n \notin [-1, 0], \;\; x_n \to \infty$, а в остальном $\{x_n\}$ произвольная. Если чисел отрицательных (положительных) конечно,т то $x_n \to +\infty(-\infty)$ и требуемое соотношение уже доказано, иначе разобъём на две полпоследовательность положительных и отрицательных чисел. Они обе стремятся к e, тогда и вся поседовательность сходится к e по лемме.

Замечание 1. Заменимв x на $\frac{1}{x}$ модно получить

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e.$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\qquad a>0,\quad a\neq 1.$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Доказательство. Так как $\log_a(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln a}$, достаточно доказать равенство для натурального логарирфма. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\ln e=1.$$

Во втором равенстве воспользовались непрерывностью логарифма в точке e и теоремой о непрерывности композиции (для её применения мы доопределим $(1+x)^{1/x}=e$ при $x=0$).

4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\qquad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Доказательство. При $\alpha=0$ тривиально. Пусть $\alpha\neq 0$. Возьмйм последовательность $\{x_n\}:\ x_n\to 0,\quad x_n\neq 0$; не уменьшая общности, можно считать, что $|x_n|<1$. Тогда в силу непрерывности и строгой монотонности степенной функции $y_n=(1+x_n)^\alpha-1\to 0,\quad y_n\neq 0$. При этом

$$\alpha\ln(1+x_n)=\ln(1+y_n).$$

Пользуясь замечательным пределом для логарифма находим

$$\tfrac{(1+x_n)^\alpha-1}{x_n}=\tfrac{x_n}{y_n}=\tfrac{y_n}{\ln(1+y_n)}\alpha\tfrac{\ln(1+x_n)}{x_n}\to\alpha.$$

5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, \qquad a>0.$$

В частности

$$\lim_{x\to 0}=\frac{e^x-1}{x}=1$$

Доказательство. При $a=1$ Доказывается равенство тривиально; пусть $a\neq 1$. Возьмём последовательность $\{x_n\}: x_n\to 0, \quad x_n\neq 0$. Тогда в сид непрерывности и строгой монотонности показательной функции $y_n=a^{x_n}-1\to 0, \quad y_n\neq 0$. При этом

$$x_n\ln a=\ln(1+y_n).$$

Пользуясь замечательным пределом для логарифма, находим

$$\tfrac{a^{x_n}-a}{x_n}=\tfrac{y_n}{x_n}=\tfrac{y_n}{\ln(1+y_n)}\ln a\to\ln a.$$

1.52 Дифференцируемость и производная. Равносильность определений примеры

(169)

Определение. Пусть $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}, \quad x_0\in\langle a,b\rangle$. Существует такое число $A\in\mathbb{R}$, что

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+o(x-x_0), \quad x\to x_0,$$

то функция называется диффернцируемой в точке x_0. При этом чисдо A называется производной фугкции f точке x_0.

Определение. Пусть $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}, \quad x_0\in\langle a,b\rangle$. Если существует предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

равный числу $A\in\mathbb{R}$, то функция f называется дифференцируемой в точке x_0, а число A — её производной в точке x_0.

Теорема. Определения дифференцирцуемости и производной равносильны.

Доказательство. 1. Пусть f дифференцируема, а A — ее производная в точке x_0, в смысле определения 1, которое говрит, что

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+\varphi(x)(x-x_0),\quad \varphi(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0.$$

Перенося в $f(x_0)$ в левую часть и деля на $x-x_0$ находим, что

$$\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A+\varphi(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}A.$$

то есть f дифференцирцема, а A — ее производная.
1. Обратно, пусть функция f дифференцируем, а A — ее производная в смысле определения 2. Обозначим

$$\varphi(x)=\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-A.$$

Тогда $\varphi(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$ и выполнено равенство из превой части доказательства, то есть f дифференцируема, а A — призводная в смысле определения 1.

Пример 1. $f(x)=|x|$ $f'_{\pm}(0)=\lim\limits_{x\to 0\pm}\dfrac{|x|-0}{x-0}=\pm 1$. Поэтому она не дифференцируема в нуле.

Пример 2. $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$ $f'(0)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела.

Пример 3. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $f'(0)=\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}\to x^{-2/3}\to+\infty$.

Пример 4. $f(x)=\mathrm{sign}x$ $f'=\frac{signx-sign0}{x-0}=\frac{1}{|x|}\to+\infty$.

1.53 Геометрический и физический смысл производной

(174)

Геометрический (задача Лейбница о касательной). Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$, $y_0 = f(x_0)$, f непрерывнав точке x_0. Точка $M_0 = (x_0, y_0)$. Возьмём на графике функции f ещё одну точку $M_1 = (x_1 y_1) : \; x_1 \in \langle a, b\rangle, \; x_1 \neq x_0, \; y_1 = f(x_1)$. Проведём прямую M_0M_1, которуб будем называть секущей. Уравнение секущей M_0M_1 имеет вид

$$u = y_0 + \tfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0).$$

Касаткльной называетя предельное положение секущей при $M_1 \to M_0 (x_1 \to x_0)$ $k_{кас.} = \lim\limits_{x_1 \to x_0} \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$. Иными словами, производная в точке — угловой коэффициент касательной в этой точке.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Замечание 1. Если $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$,то

$$f(x) - l(x) = o(x - x_0) \quad x \to x_0$$

. Вто же время ни одна другая прямая не обладает этим свойством, поэтому егопринимают за определение касательной (не вертикальной).

физический (задача Ньютона о скорости). Пусть материальная точка движется по прямой. Обозначим $s(t)$ — путсьпройденный точкой за время от начального момента t_0 до t. Тогда путь.пройденный от момента t_1 до момента $t_1 + \Delta t$, равен $\Delta s = s(t_1 + \Delta t) - s(y_1)$. Средняя скорость между этими моментами времени вычисляется формулой $v_{ср} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. $v_{мгн.}(t_1) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{ср}$ — мгновенная скорость. По определению производной она равнв $s'(t_1)$.

Подобным образом производная встречается и в ситуациях, когда речь идйт о скорости изменения одной величины относительно другой.

1.54 Арифметические действия и производная

(178)

Если $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in \langle a, b\rangle$

1. Производная суммы и разностию. то функция $f + g$ И $f - g$ дифференцируемы в этой точке и

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x).$$

Доказательство. По определению производной суммы.

$$\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(h+x)-g(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x) + g'(x).$$

Это и означает, что сумма дифференцируема в точке и для производной суммы верно равенство.
Для разности доказывается аналогичнл.

2. Производная произведения. то функция fg дифференцируема в точке x и

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Доказательство.

$$\frac{(fg)(h+x)-(fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Следствие 1. Если $\alpha \in \mathbb{R}$, то функция αf диффиренцируема в точке x и

$$(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x).$$

Следствие 2. Линейность дифференцирования. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то функция $\alpha f + \beta g$ дифференцируема в точке x и

$$(\alpha g + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

3. Производная частоного. и $g(x) \neq 0$, то функция $\frac{f}{g}$ дифференцируема в точке x и

$$(\tfrac{f}{g})'(x) = \tfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу условия $g(x) \neq 0$ и непрерывности функции g в точке x существует такое $\delta > 0$, что g не обращается в ноль на промежутке $(x - \delta, x + \delta) \cap \langle a, b \rangle$. Поэтому частно $\frac{f}{g}$ определено на током промежутке, и модно ставить вопрос о дифференцируемости частного в очке x.

$$\frac{\frac{f}{g}(h+x) - \frac{f}{g}(x)}{h} = \frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

1.55 Производная композиции

(180)

Теорема. Производная композиции. Если функция $f : \langle a, b \rangle \to \langle c, d \rangle$ дифференцируема в точке $x \in \langle a, b \rangle$, а функция $g : \langle c, d \rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $f(x)$, то функция $g \circ f$ дифференцируема в точке x и

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Доказательство. Обозначим $y = f(x)$. Воспользуемся определением 1 дифференцируемости и запишем

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h,$$

$$g(y+k) = g(y) + g'(y)k + \beta(k)k,$$

где функции α, β в нуле непрерывны и равны нулю. Подставляя во второе равенство $k = f'(x)h + \alpha(h)h = \varkappa(h)$, получаем

$$g(f(h+x)) = g(f(x)) + g'(f(x))(f'(x)h + \alpha(h)h) + \beta(\varkappa(h))\varkappa(h) = \\ g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + \gamma(h)h,$$

где

$$\gamma(h) = g'(y)\alpha(h) + \beta(\varkappa(h))(f'(x) + \alpha(h)).$$

Ясно, что $\gamma(0) = 0$ b γ непрерывна в нуле по теореме о непрерывности композиыции и результатов арифметических операций. Пожтому выполнено определение дифференцируемости композиции $g \circ f$ в точке x и верно равенство.

1.56 Производная обратной функции и функции, заданой параметрически

(182)

Теорема. Производная обратной функции. Пусть $f \in C\langle a, b\rangle$, f строго монотонна, дифференцируема в точке $x \in \langle a, b\rangle$, $f'(x) \neq 0$. Тогда обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $f(x)$ и

$$(f^{-1})'(f(x)) = \tfrac{1}{f'(x)}.$$

Доказательство. f^{-1} существует, определена на промежутке P (множество значений f), строго монотонна и непрерывна по теореме. Обозначим $y=f(x),\quad h=f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)=\tau(k)$. ТОгда $h\neq 0,\quad x=f^{-1}(y),\quad x+h=f^{-1}(y_k)$ и $f(x+h)-f(x)=k$.

$$\tfrac{f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)}{k}=\tfrac{\tau(k)}{f(x+\tau(k))-f(x)}$$

и найдём его предел при $k\to 0$. По условию,

$$\tfrac{h}{f(x+h)-f(x)}\xrightarrow[h\to 0]{}\tfrac{1}{f'(x)}.$$

Но $\tau(k)\xrightarrow[k\to 0]{}0$ по непрерывности f^{-1} в точке y. Следовательно,

$$\tfrac{f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)}{k}\xrightarrow[k\to 0]{}\tfrac{1}{f'(x)}$$

по теореме о непрерывности композиции.

Замечание 1. Равенство можно переписать так:

$$(f^{-1})'(x)=\tfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Замечание 2. Дифференциал обратной функции в точке x — функция обратная диференциалу исходной в точке x.

Замечание 3. Так как графики $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ симметричны относительно $y=x$, касательные в симметричных точках тоже симметричны ($\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta$), то есть $f'(x)=\frac{1}{(f^{-1})'(y)}$

Производная функции заданной параметрически. Пусть T — множество, $\varphi,\psi:T\to\mathbb{R}$. Рассмотрим отображение $\gamma(\varphi,\psi):T\to\mathbb{R}^2$. Система

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$$

не всегда определяет функцию $y(x)$. Но если жто так (φ обратима), то находим $t=\varphi^{-1}(x)$ из первого уравнения и подставляем во второе. Тогда

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in \varphi(T),$$

то есть $f = \psi \circ \varphi^{-1}$.
Обычно для встречающихся на практике систем множество T можно разбить на несколько частей, на каждой из которых функция φ обратима.
Пусть теперь $T = \langle a, b\rangle, \;\; t \in \langle a, b\rangle, \;\; \varphi \in C\langle a, b\rangle, \;\; \varphi$ строго монотонна, φ, ψ дифференцируемы в точке $t, \;\; \varphi'(t) \neq 0, \;\; f = \psi \circ \varphi^{-1}$ — параметрически заданная функция. Тогда f дифференцируема в точке $x = \varphi(t)$ и $f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Следует из прафил дифференцирования композиции и обратной функции. Часто равенство записывают в виде $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

1.57 Производные элементарных функций

(185)

1. $c' = 0$.

2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ считая, что $0 < |h| < |x|$. Пользуясь замечательным пределом для степенной функции получаем

$$\tfrac{(x+h)^\alpha = x^\alpha}{h} = \tfrac{(1+h/x)^\alpha - 1}{h/x} x^{\alpha-1} \xrightarrow[h\to 0]{} \alpha x^{\alpha-1}.$$

3. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \;\; a \neq 1$.

Доказательство. По замечательному пределу для показательной функции

$$\tfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \tfrac{a^h - 1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} a^x \ln a.$$

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0, \;\; a > 0, \; a \neq 1$.

Доказательство. По замечательному пределу для логарифма.

$$\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \frac{1}{x}\frac{\log_a(1+h/x)}{h/x} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{x\ln a}.$$

5. $(\sin x)' = \cos x$.

Доказательство. По замечательному пределу для синуса и непрерывности косинуса

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}\cos(h+\frac{h}{2})}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \cos x.$$

6. $(\cos x)' = -\sin x$.

Доказательство. По формуле для дифференцирования произведения и правиду дифференцирования композиции

$$(\cos x)' = \sin(\tfrac{\pi}{2} - x)' = \cos(\tfrac{\pi}{2} - x)(-1) = -\sin x.$$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2}$.

Доказательство. По формулам для производных синуса и коминуса и правилу дифференцирования частного

$$(\operatorname{tg} x)' = (\tfrac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^x} = \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Доказательство. По формуле для производной тангенса и правилам дифференцирования композиции

$$(\operatorname{ctg} x)' = \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2} - x)' = -\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2}-x)} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$.

Доказательство. По правилу дифференцирования обратной функции

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$.

Доказательство. Так как $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$,

$$(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\tfrac{1}{1-x^2}.$$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Доказательство. По правилу дифференцирования обратной функции

$$(\operatorname{arctg} x)' = \tfrac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \tfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \tfrac{1}{1+x^2}.$$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Доказательство. Так как $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\tfrac{1}{1+x^2}.$$

1.58 Теорема Ферма

(188)

Теорема. Ферма. Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in (a, b), \quad f(x_0) = \max\limits_{x\in(a,b)} f(x)$ или $f(x_0) = \max\limits_{x\in(a,b)} f(x), \quad f$ дифференцируема в точке x_0. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть для определённости значение в точке x_0 наибольшее, то есть $f(x) \le f(x_0)$ при всех $x \in \langle a, b\rangle$. Тогда $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$ при всех $x \in (x_0, b\rangle$. По теореме о предельном переходе в неравенстве

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0.$$

Аналогично $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$ при всех $x \in \langle a, x_0)$, и поэтому

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0.$$

Следовательно $f'(x) = 0$.

Замечание 1. Геометрический смысл теоремы Ферма: если во внутренней точке максимума (минимума) существует касательная, то эта касательная горизонтальна.

Замечание 2. $f(x) = |x|$ — пример функции не имеющей касательной в тоске минимума.

Замечание 3. Условие, что x_0 — внутренняя точка существенно: $f(x) = x^2$ на отрезке $[0, 1]$ принимает наибольшее значение в точке 1, при этом $f'(1) = 2$.

1.59 Теорема Ролля

Билет 59: Теорема Ролля (189)

Теорема. Ролля. Пусть функция fнепрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тонда найдётся такая точка $x \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса, существуют точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, что $f(x_1) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x), \quad f(x_2) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Если x_1, x_2 — концевые точки $[a, b]$, то по условию $f(x_1) = f(x_2)$,то есть наибольшее и наименьшее значения f совпадают, поэтому f постоянна на $[a, n]$ и в качестве c можно взять любую точку (a, b). Если же x_1 или x_2 лежит в (a, b), то, по теореме Ферма, $f'(x_1) = 0$ или $f'(x_2) = 0$; поэтому можно положить $c = x_1$ или $c = x_2$.

Замечание 1. Геометрический смысл теормы Ролля: в условиях теоремы найдётся точка с горизонтальной касательной.

Замечание 2. Все условия теоремы Ролля существенны. $f(X) = x(x \in [0, 1)) f(1) = 0$ разрывна в точке 1. Функция $f(x) = \sqrt{|x|}(x \in [-1, 1])$ не имеет производной в точке 0. $f(x) = x$ принимает разные значения на концах, но остальным условиям удовлетворяет.

Замечание 3. Из дифференцируемости f следует ее непрерывность, поэтому заключение теоремы выролняется для дифференцируемых на $[a, b]$ функций. В теореме Ролля функции разрешается не иметь производной на концах. Так отрезок $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ не дифференцируема на концах отрезка $[-1, 1]$, но условиям теоремы удовлетворяет.

Замечание 4. Из теоремы Ролля следует, что между любыми двумя нулями дифференцируемой функции всегда лежит нольеё производной.

1.60 Формулы Лагранжа и Коши, следствия

(190)

Теорема. Лагранжа. Пусть функция непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда найдётся такая точка $c \in (a, b)$, что

$$\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

.

Теорема. Коши. Пусть функции f, g непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b). Тогда найдётся такая точка $c \in (a, b)$, что

$$\tfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \tfrac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Замечание 1. Теорема Лагранжа — частный случай теоремы Коши, поэтому ее доказывать небудем, но она применяется часто, поэтому её выделили в отдельную теорему.

Доказательство. Заметим, что $g(a) \neq g(b)$, так как иначе по теореме Ролля нашлась бы точка $t \in (a, b)$, в которой $g'(t) = 0$.

Положим $\varphi = f - Kg$, где $K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, чтобы $\varphi(a) = \varphi(b)$. Тогда φ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Поэтому найдётся такая точка $c \in (a,b)$, что $\varphi'(c) = 0$, то есть $f'(c) = Kg'(c)$, что равносильно требуемому.

Замечание 7. Пусть функция fнепрерывна на $\langle a,b\rangle$ и дифференцируема на (a,b). Тогда для любых различных точек $x, x+\Delta x$ из $\langle a,,\rangle b$ найдётся такое $\theta \in (0,1)$, что

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$$

Доказательство по теореме Лагранжа с концами $x, x+\Delta x$. Надо учесть, что c между x и $x+\Delta x$, то есть $\theta = \frac{c-x}{\Delta x} \in (0,1)$.

Следствие 1. оценка приращения функции. Пусть функция fнепрерывна на $\langle a,b\rangle$, дифференцируема на (a,b), а число $M > 0$ такого, что $|f'(t)| \leq M$ для всех $t \in (a,b)$. ТОгда для любых точек x и $x+\Delta x$ из $\langle a,b\rangle$

$$|f(x+\Delta x) - f(x)| \leq M|\Delta x|.$$

Другими словами, если производная функции ограничена, то приращение функции не более чем в M раз превзойдет приращение аргумента.
Очевидно вытекает из замечания.

Следствие 2. Функция,имеющая на $\langle a,b\rangle$ ограниченную производную, равномерно непрерывна на $\langle a,b\rangle$.

Доказательство. Пусть $M > 0$ таково, что $|f'(t)| \leq M$ для всех $t \in \langle a,b\rangle$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда, если $x, y \in \langle a,b\rangle, \quad |x-y| < \delta$,то последствию 1

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \leq M\delta = \varepsilon,$$

что и доказывает равномерную непрерывность f.

1.61 Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, примеры

(194)

Теорема. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Пусть $-\infty \le a < b \le +\infty$, функции f, g дифференцируемы на (a, b), $g'(t) \ne 0$ для любого $t \in (a, b)$, $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$ и существует предел

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда предел $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ также существует и равен A.

Доказательство. 1. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Доопределим функции в точке a нулем: $f(a) = g(a) = 0$. Тогда доопределенные функции f, g будут непрерывны на $[a, b)$. Возбмем последовательность $\{x_n\} : x_n \in (a, b)$, $x_n \to a$, и докажем, что $\frac{f(x)}{g(x)} \to A$. Функции f и g удовлетворяют условиям теоремы Коши на каждом отрезке $[a, x_n]$. Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся такая точка $c_n \in (a, x_n)$, что

$$\tfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \tfrac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \tfrac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

По теореме о сжатой последовательности, $c_n \to a$. По определению правостороннего предела на языке последовательностей, $\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \to A$, а тогда в силу произволности $\{x_n\}$ и $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a+]{} A$.

2. Пусть $a = \infty$. В силк локадьности предела можно считать, что $b < 0$. Положим $\varphi(t) - f(-\frac{1}{t})$, $\psi(t) = g(-\frac{1}{t})(t \in (0, -\frac{1}{b}))$. Тогда

$$\varphi'(t) = \tfrac{1}{t^2} f'(-\tfrac{1}{t}), \quad \psi(t) = \tfrac{1}{t^2} g'(-\tfrac{1}{t}) \ne 0,$$

$$\lim_{t \to 0+} \varphi(t) = \lim_{x \to -\infty}, \quad \lim_{t \to 0+} \psi(t) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

По доказанному,

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0+}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=A.$$

Замечание 1. Утверждение, аналогичное теореме справедливы и для левостороннего предела, а следовательно, и для двухстороннего предела

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\cos x}{1}=1$

1.62 Правило Лопиталя раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$

(195)

Теорема. Правило Лопиталя для неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty}$. Пусть $\infty\le a<b\le+\infty$, функции f и g диференцируемы на (a,b), $\;g'(t)\neq 0$ для любого $t\in(a,b,\;\; \lim\limits_{x\to a+}g(x)=\infty)$ и существует предел

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда предел $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ тоже существует и равен A.

Доказательство. 1. Пусть $A=0$. Возьмём последовательность $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n\in(a,b),\;\; x_n\to a$, и докажем, что $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\to 0$. Зафиксируем число $\sigma>0$. по условию, найдется такое $y\in(a,b)$, что для любого $c\in(a,y)$ будет $g(c)\neq 0$ и $|\frac{f'()}{g'(c)}|<\sigma$. Начиная с некоторого номера $x_n \in (a, y)$, поэтому можно считать, что $x_n \in (a, y)$ для всех n. По теореме Коши, для любого n найдётся такое $c_n \in (x_n, y)$, что

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n)-f(y)}{g(x_n)-g(y)}\frac{g(x_n)-g(y)}{g(x_n)} + \frac{f(y)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}(1 - \frac{g(y)}{g(x_n)}) + \frac{f(y)}{g(x_n)}.$$

Учитывая, что $g(x_n) \to \infty$, находим

$$|\frac{f(x_n)}{g(x_n)}| \le \sigma(1 + |\frac{g(y)}{g(x_n)}|) + |\frac{f(y)}{g(x_n)}| \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma.$$

Поэтому $\overline{\lim}|\frac{f(x_n)}{g(x_n)}| \le \sigma$. Но так как σ произвольно $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = 0$.

2. Пусть $A \in \mathbb{R}$ произвольно. Положим $h = f - Ag$. Тогда

$$\lim_{x\to a+} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a+} (\frac{f'(x)}{g'(x)} - A) = 0.$$

По доказанному, $\frac{h(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a+]{} 0$, то есть $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a+]{} A$.

3. Пусть $A = +\infty$ расматривается аналогично случаю $A = 0$. При этом вместо $|fracf'(c)g'(c)| < \sigma$ используется неравенство $\frac{f'(c)}{g'(c)} > M$ и доказывается, что $\underline{\lim}\frac{g(x_n)}{g(x_n)} \ge M$. Случай $A = -\infty$ разбирается переходом к функции $-f$.

Замечание 1. Утверждение, аналогичное теореме справедливы и для левостороннего предела, а следовательно, и для двухстороннего предела

Замечание 2. В теореме функци f не предполагается бесконечно большой, хотя на практике правило Лопиталя обычно применяют при наличии неопределеностей.

Замечание 3. В цчловиях правила Лопиталя существование предела отношения функций выводится из существования предела отношений их производных. Обратное неверно. Если $g(x) = x, \quad f(x) = x + \sin x$, то предел на бесконечности 1, а отношение производных предела не имеет.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0, \quad \alpha>0.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$

Пример 2. При $a>1$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{a^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{a^x\ln a}=0$

Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x}{(a^{1/k})^x})^k=0.$

1.63 Теорема Дарбу, следствия

Билет 63: Теорема Дарбу, следствия (198)

Теорема. Дарбу. Если функция f дифференцируема на $[a,b]$, то для любого числа C, лежащего между $f'(a)$ и $f'(b)$, найдется такое $c\in(a,b)$, что $f'(x)=C$.

Доказательство. 1. Пусть сначала $f'(a)$ и $f'(b)$ разных знаков; докажем, что существует такое $c\in(a,b)$, что $f(c)=0$. Для определенности будем считать, что $f'(a)<0<f'(b)$. Поскольку f непрерывна на $[a,b]$, по теореме Вейерштрасса найдётся точка $c\in[a,b]$, для которой $f(c)=\overset{f}{\min\limits_{x\in[a,b]}}(x)$. Если $c\in(a,b)$, то, по теореме Ферма, $f'(c)=0$. Поэтому достаточно доказать, что $c\neq a$ и $c\neq b$. Если $c=a$, то есть функция принимает наименьшее значение на левом конце отрезка, то $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0$ при всех $x\in(a,b]$, а поэтому и $f'(a)\geq 0$, что противоречит условию. Аналогично доказывается, что $c\neq b$.

2. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть для определености $f'(a)<C<f'(b)$. Положим $\varphi(x)=f(x)-Cx$. Тогда

$$\varphi'(a)=f'(a)-C<0<f'(b)-c=\varphi'(b).$$

По доказанному, найдется такое $c \in (a,b)$, что $\varphi'(c) = 0$, то есть $f'(c) = C$.

Следствие 1. Если функция f дифференцируема на $\langle a,b \rangle$, то $f'(\langle a,b \rangle)$ — промежуток.
При доказательнстве сослаться на лемму 1 параграфа 2 главы 3 о характерисике промежутков.

Следствие 2. Производная дифференцируемой на промежутке функции не может иметь на нем разрывов первого рода.

1.64 Вычисления старших производных: линейность, правило Лейбница, примеры

(199)

Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, D_1 — множество дифференцируемости f, $f' : D_1 \to \mathbb{R}$. Каждая точка $x_0 \in D_1$ удовлетворяет следующему условию: существует такое $\delta > 0$, что $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$ — невырожденный промнжуток.
Далее следует назвать f'' — второй производной и т.д.
Производная порядка n фунуции f обозначается $f^{(n)}$. $f^{(1)} = f'$, производные высших порядков определяются по индукции.

Определение. Пусть $n - 1 \in \mathbb{N}$, множество D_{n-1} и функция $f^{(n-1)} : D_{n-1} \to \mathbb{R}$ уже определены. Обозначим, через D_n множество всех точек $x_0 \in D_{n-1}$, для которых существует такое $\delta > 0$, что

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_{n-1} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D,$$

и $f^{(n-1)}$ дифференцируема в точке x_0. Если $x_0 \in D_n$, то f называется дифференцируемой n раз в точке x_0. Функция

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'|_{D_n} : D_n \to \mathbb{R}$$

называетя производной порядка n, или короче, n-ной производной функции f. Другими словами,

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}, \quad x_0 \in D_n$$

. Под нулевой производной подразумевается сама функция $f^{(0)} = f$. Односторонние производные высших порядков определяются равенствами

$$f_+^{(n)}(x_0) = (f|_{D \cap [x_0, +\infty)})^{(n)}(x_0), \quad f_-^{(n)}(x_0) = (f|_{D \cap (-\infty, x_0]})^{(n)}(x_0).$$

Другими словами

$$f_\pm^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0 \pm} \frac{f^{(n-1)}(x) - f_\pm^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Теорема. Арифметические действия над старшими производными. Пусть $n \in \mathbb{N}$, функции $f, g : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируемы n раз в точке $x \in \langle a, b \rangle$. Тогда
1) при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f + \beta g$ дифференцируема n раз в точке x и

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)}(x) = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x);$$

2) функция fg дифференцируема n раз в точке x и

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно по индукции. Докажем второе (правило Лейбница) по индукции. При $n = 1$ равенство известно. Пусть утверждение верно для всех номеров не больших n, докажем для $n + 1$. Опуская обозначение аргумента x, имеем.

$$(fg)^{(n+1)} = (\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)})' =$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} = f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} +$$

$$C_n^k) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

Пример 1. $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.
При $n = 1$ равенство известно. Индукционный переход

$$x^{\alpha-n} = (\alpha-n)x^{\alpha-n-a}.$$

При $\alpha = -1$

$$(\tfrac{1}{x})^{(n)} = \tfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Пример 2. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.
Так как $(\ln x)^{(n)} = \frac{1}{x}$, этот пример вытекает из предыдущего.

Пример 3. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \quad a > 0$. В частности $(e^x)^{(n)} = e^x$.

Пример 4. $(\sin x)' = \cos x, \quad (\sin x)'' = -\sin x, \quad (\sin x)''' = -\cos x, \quad (\sin x)'''' = \sin x$, далее последовательность повторяется с периодом четыре. По формулам приведения можно записать

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \tfrac{n\pi}{2}).$$

Пример 4. Аналогично предыдущему примеру

$$(\cos)^{(n)} = \cos(x + \tfrac{n\pi}{2}).$$

1.65 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

(206)

Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$ функция f дифференцируема n раз в точке x_0, или $n = 0$, а функция непрерывна точке x_0. Многочлен

$$T_{n,x_0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

называется многочленом Тейлора порядка n функции f с центром в точке x_0. Разность

$$R_{n,x_0}f(x) = f(X) - T_{n,x_0}f(x)$$

называют остаточным членом или остатком формулы Тейлора, а равенство

$$f(x) = \cdot_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x)$$

— формулой Тейлора.

Теорема. Формула Тейлора – Пеано. Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема n раз в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Доказательство. Для краткости будем писать $T = T_{n,x_0}f$, $R = R_{n,x_0}f$. Тркбуется доказать, что $R(x) = o((x - x_0)^n)$. Поскольку $R = f - T$, а $T^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0)$ при всех $m \in [0 : n]$, имееи $R^{(m)}(x_0) = 0$ при всех $m \in [0 : n]$.
Поэтому достаточно доказать, что если $n \in \mathbb{N}$, функция R дифференцируема n раз в точке x_0 и $R^{(m)}(x_0 = 0)$ при всех $m \in [0 : n]$, то $R(x) = o((x - x_0)^n)$ при всех $x \to x_0$. Докажем по индукции по n.
База индукции $n = 1$. Так как $R(x_0) = R'(x_0) = 0$, по определению дифференцируемости получаем

$$R(x) = R(x_0) + R'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0) = \\ o(x - x_0). \quad x \to x_0.$$

Индукционный переход: предположим, что для номера n утверждение верно; докажем для номера $n + 1$. Пусть $R^{(m)}(x_0) = 0$ при всех $m \in [0 : n + 1]$ докажем, что

$$\tfrac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Доказательство будем вести на язвке последовательностей. Возбмём последовательность $\{x_\nu\}$ со свойствами $x_0 \in \langle a, b\rangle, \quad x_\nu \neq x_0, \ \ x_\nu \to x_0$. Тогда для каждого ν по формуле Лагранжа найдётся такая точка c_ν, лежащая между x_ν и x_0, что

$$\tfrac{R(x_\nu)}{(x_\nu - x_0)^{n+1}} = \tfrac{R(x_\nu) - R(x_0)}{(x_\nu - x_0)^{n+1}} = \tfrac{R'(c_\nu)}{(x_\nu - x_0)^{n}}.$$

Из неравенства $|x_\nu - x_0| < |x_\nu - x_0|$ следует,что $c_\nu \to x_0$. По индукционному предположению, примененному к функции R' у которой все производные до n-ной включительно в точке x_0 равны 0,

$$|\tfrac{R(x_\nu)}{(x_\nu - x_0)^{n+1}}| \leq |\tfrac{R'(x_\nu)}{(c_\nu - x_0)^{n}}| \to 0,$$

что и требовалось доказать.

1.66 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

(208)

Теорема. Формула Тейлора – Лагранжа. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+, \ \ f \in C^{(n)}\langle(, a\rangle b), \ \ f$ дифференцируема $n{+}1$ раз на $(a, b), \ \ x_0, x \in \langle a, b\rangle, \ \ x \neq x_0$. Тогда существует такая точка c, лежащая между x и x_0, что

$$f(X)\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Доказательство. Обозначим через Δ интервал с конуами x, x_0, тогда Δ обозначает отрезок с этими же концами. Положим $\psi(t) = (x-t)^{n+1}$,

$$\varphi(t)=f(x)-f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,\quad t\in\overline{\Delta}$$

Функции φ и ψ непрерывны на $\overline{\Delta}$ и дифференцируемы на Δ, причем

$$\psi'(t)=-(n+1)(x-1)^n\neq 0$$

для любого $t\in\Delta$ найдем производную φ:

$$\varphi'(t)=-f'(t)-\sum_{k=1}^{n}(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1})=$$

$$=-f'(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}=$$

$$-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Кроме того, $\varphi(x)=0,\quad \varphi(x_0)=R_{n,x_0}f(x),\quad \psi(x)=0,\quad \psi(x_0)=(x-x_0)^{n+1}$.

По теореме Коши о среднем, найдется такая точка $c\in\Delta$, что

$$\tfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\tfrac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}.$$

Подставляя значения функций и производных, получаем

$$\tfrac{0-R_{n,x_0}f(x)}{0-(x-x_0)^{n+1}}=\tfrac{-f^{(n+1)}(x)(x-c)^n}{n!(n+1)(x-c)^n},$$

что равносильно

$$R_{n,x_0}f(x) = \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

1.67 Тейлоровское разложение функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$

(212-215)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \frac{\sin(\theta x + \frac{(2n+3)\pi}{2})}{(2n+3)!}x^{(2n+3)}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \frac{\cos(\theta x + \frac{(2n+2)\pi}{2})}{(2n+2)!}x^{(2n+2)}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n)$$

Доказательство. 1 Так как $(e^x)^{(k)} = e^x, \quad (e^x)^{(k)}|_{x=0} = 1.$

Доказательство. 2 Из формулы

$$\sin x^{(m)} = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

при $k \in \mathbb{Z}_+$ находим

$$\sin x^{(2k)}|_{x=0} = 0, \quad (\sin(x))^{(2k+1)}|_{x=0} = (-1)^k.$$

Доказательство. 4 Поскольку при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\ln(1+x)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad (\ln(1+x))^{(k)}|_{x=0} = (-1)^{k-1}(k-1)!,$$

а $\ln 1 = 0$, получаем формулу.

Доказательство. 5 Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Положим

$$C_n^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-k+1)}{k!}, \quad k \in Z_+.$$

Тогда поучаем формулу.

1.68 Иррацианальность числа e

(213)

Теорема. Число e иррационально.

Доказательство. Допустим противное $e = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Было доказано, что $2 < e < 3$. Поэтому $n \geq 2$, так как $e \notin \mathbb{Z}$. Умножим равенство на $n!$:

$$(n-1)! \cdot m = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \frac{e^\theta}{n+1}, \quad \theta \in (0,1).$$

Отсюда $\frac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$, что абсурдно, так как $n+1 \geq 3$, а $e^\theta < e < 3$.

1.69 Применение формулы Тейлора к раскрытию неопределенностей

(216)

Теорема. Применения формулы Тейлора для раскрытия неопределённостей. Пусть $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$, $n\, in \mathbb{N}$,функции f, g дифференцируемы nраз ы точке x_0:

$$f(x_0) = f'(x_0) = \cdot = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

$g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(b)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Доказательство. По формуле Тейлора – Пеано при $x \to x_0$

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

$$g(x) = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Поскольку $g^{(n)}(x_0) \neq 0$, существует такая окрестность V_{x_0}, точки x_0, что $g(X) \neq 0$ длялбого $x \in \dot{V}_{x_0} \cap \langle a, b\rangle$. Значит частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ определено при всех таких x. Сокращая дробь на $\frac{(x-x_0)^n}{n!}$ получаем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0) + o(1)}{g^{(n)}(x_0) + o(1)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$$

1.70 Критериий монотонности функции

(217)

Теорема. Критерий монотонности функции. Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle$ и дифференцируема на (a, b). Тогда f возрастает(убывает) на $\langle a, b\rangle$ в том и только том случае, когда $f'(x) \geq 0 (f'(x) \leq 0)$ для всех $x \in \langle a, b\rangle$.

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть f возрастает. Возьмем $x \in (a, b)$, тогда $f(y) \geq f(x)$ для всех $y \in (a, b)$, поэтому

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{y \to x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

2. Достаточность. Пусть $f'(X) \geq 0$ для всех $x \in \langle a, b\rangle$ Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : x_1 < x_2$ и докажем, что $f(x_1) \leq f(x_2)$. По теореме Лагранжа существует такое $c \in (x_1, x_2)$, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$$

. Случай убывающей функции рассматривается переходом к $-f$.

Следствие 1. Критерий постоянства функции. Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Тогда f постоянна тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ при всех $x \in \langle a, b\rangle$.

Доказательство. Известно, что производная постоянной функции равна 0. Обратно если $f \in C\langle a, b\rangle$ и $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$, то по теореме функция f одновременно и возрастает и убывает, то есть постоянна.

Следствие 2. Критерия строгой монотонности функции. Пусть f непрерывна на $\langle a, b\rangle$. Тогда f строго возрастает на $\langle a, b\rangle$ в том и только том слкучае, когда:
1) $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$;
2) f' не обращается в ноль тождественно ни на каком интервале.

Доказательство. По следствию 1, f не постоянна ни на каком интервале. Поэтому из строго строгого возрастания f вытекает

утверждение 2. а утверждение 1 верно по теореме 1.
Пусть теперь выполнены утверждения 1 и 2. Из нетрицательности производной следует возрастание f. Если возрастание нестрооe, то найдутся точки $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, что $x_1 < x_2, \quad f(x_1) = f(x_2)$. Тогда f постоянна на $[x_1, x_2]$, что противоречит условию 2.

Замечание . Теорема и оба следствия обобщаются наситуацию, когда f непрерывна на $\langle a, b\rangle$, а дифференцируема на $\langle a, b\rangle$ за исклбчением конечного множества точек.

Доказательство. Пусть $a_1, \cdots, a_n$ — все те точки интервала $\langle a, b\rangle$, в которых f не дифференцируемма; $a_1 < \cdots < a_n$. Если f возрастает на $\langle a, , \rangle b$, то f возрастает на каждом промежутке $\langle a, a_1], \quad [a_1, a_2], \cdots, [a_n, b\rangle$. Тогда $f' \geq 0$ на каждом рпромежутке по теореме.
Обратно, если $f \in C\langle a, b\rangle$ и $\quad f' \geq 0$ на каждом промежутке, то f возрастает на кждом из них и, следовательно, на $\langle a, b\rangle$.

1.71 Доказательство неравенства с помощью производной, примеры

(219)

Теорема. Доказательство неравенств с помощью производной. Пусть функции a, g непрерывны на $[a, b\rangle$ и дифференцируема на $(a, b), \quad f(a) \leq g(x)$ и $f'(x) \leq g'(x)$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда $f(x) < g(x)$ для всех $x \in [a, b\rangle$.

Доказательство. Положим $h = g - f$. Тогда $h' = g' - f' \geq 0$ на (a, b). По теореме функция h возрастает на $[a, b\rangle$. следовательно для всех $x \in [a, b\rangle$

$$h(x) \geq h(a) = g(a) - f(a) \geq 0,$$

то есть $g(x) \geq f(x)$.

Замечание 1. Аналогичное утвердение справедливо вместе сдоказательством и в случае, когда исходно значение функций сравниваются на правом конце.
Пусть функции f, g непрерывны на $\langle a, b]$ и дифференцируема на (a, b), $f(b) \geq g(b)$ и $f'(x) \geq g'(x)$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда $f(x) \geq g(x)$ для всех $x \in \langle a, b]$.

Замечание 2. Если в условиях теоремы будет $f'(x) < g'(x)$ для всех $x \in (a, b)$, то $f(x) < g(x)$ для всех $x \in (a, b)$.

Пример 1. Докажем, что $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ при всех $x \neq 0$.
В силу чётности обеих сторон, достаточно локазать при $x > 0$. Положим $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, $g(x) = \cos x$, тогда $f(0) = g(0) = 1$ и

$$g'(x) = -\sin(x) > -x = f'(x) \text{ \textit{при всех} } x > 0.$$

Пример 2. Докажем, что $\sin x > x = \frac{x^3}{6}$ при всех $x > 0$.
Положим $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$, $g(x) = \sin x$. Тогда $f(0) = g(0) = 0$. По предыдущему примеру,

$$g'(x) = \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} = f'(x) \text{ \textit{при всех} } x > 0.$$

Пример 3. Докажем, что $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ при всех $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
Положим $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 1$

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \operatorname{tg} x)}{x^2} < 0.$$

Так как $x < \operatorname{tg} x$, а $\cos x$ и x^2 неотрицательны на заданном промежутке. Тогда f строго убывает на промежутке, то есть $f(x) > f(\frac{\pi}{2})$.

1.72 Необходимое условие экстремума. Первое правило исследования критических точек

(222)

Теорема. Необходимое суловие экстремума. Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ — точка экстремумаf, f дифференцируема в точке x_0 Тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. По определению точки экстремума существует такое $\delta > 0$, что

$$f(x_0) = \max_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} f(x) \textit{ или } f(x_0) = \overset{f}{\min_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}}(x).$$

Остается применить теорему Ферма к функции $f|_{(x_0-\delta,x_0+\delta)}$.

Замечание 1. Как и в теореме Ферма, существенно, что x_0 — внутренняя точка промежутка.

Замечание 2. Условие $f'(x_0)$ неявляется достаточным $f(x) = x^3$.

Замечание 3. Функция может быть не дифференцируемой в точке экстремума $f(x) = |x|$.

Теорема. Первое правило исследования критических точек. Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, функция f непрерывна в точке x_0 и дифференцируема на $(a, b)\backslash\{x_0\}$ и существует такое $\delta > 0$, что f' сохраняет знак на $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$. Обозначим производные на этих промежутках f_1' и f_2' соответсвенно.
1. Если $f_1' < 0$ и $f_2' > 0$, то x_0 — точка строгого минимума f.
2. Если $f_1' > 0$ и $f_2' < 0$, то x_0 — точка строгого минимума f.
3. Если $f_1' > 0$ и $f_2' > 0$, то x_0 — точка строгого возрастания f.
4. Если $f_1' < 0$ и $f_2' < 0$, то x_0 — точка строгого убывания f.

Доказательство. Для определенности докажем 1 и 3.

1. Функция строго убывает на $(x_0-\delta, x_0]$ и на $[x_0, x_0+\delta)$. Поэтому $f(x) < f(x_0)$ как при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, так и при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Значит x_0 — Точка строгого минимума f.

2. Функция строго возрастает на $(x_0-\delta, x_0]$ и на $[x_0, x_0+\delta)$. Поэтому $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0\, delta, x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$ для всех $x \in (x_0, x_0+\delta)$. То есть x_0 — точка чтрогого возрастания.

1.73 Второе правило исследования критических точек. Производная функции e^{-1/x^2}

(224)

Теорема. Второе проавило исследования критических точек. Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $\;x_0 \in (a,b)$, $\;n \in \mathbb{N}$, функция f дифференцируема n раз в точке x_0.

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

1. Если n четно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка строгого минимума f.
2. Если n четно и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка строгого максимума f.
3. Если n нечетно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка строгого возрастания f.
4. Если n нечетно и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка строгого убывания f.

Доказательство. Запишем формулу Тейлора – Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

Учитывая определение символа o и обнуление производных f, перепишем это равенство в виде

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n(\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!} + \varphi(x)),$$

где $\varphi(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$. Доопределим $\varphi(x_0)=0$. Существует такое $\delta>0$, что для всех $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$$sign(f(x)-f(x_0)) = \ sign((x-x_0)^n f^{(n)}(x_0)).$$

Осталось сравнить знаки сомножителей.

Замечание . Может быть, что функция не постоянная, но $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x_0)=0$.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$f\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}), \quad \forall n\in\mathbb{N} f^{(n)}(0)=0.$$

Доказательство. Очевидно, что $f\in C(\mathbb{R}\backslash\{0\})$

1.Докажем, что $f^{(n)} = P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x^2}$, где P_n — многочлен какой-то степени. База $n=0, \quad P_0=1$.

Переход:

$$f^{(n+1)}(x) = P_n'\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}\left(\frac{2}{x^3}\right) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$$

2. $\forall n\in\mathbb{Z}_+ \exists f^{(n)}(0)=0$? База: $n=0$, по заданию функции.

Переход:

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} = 0$$

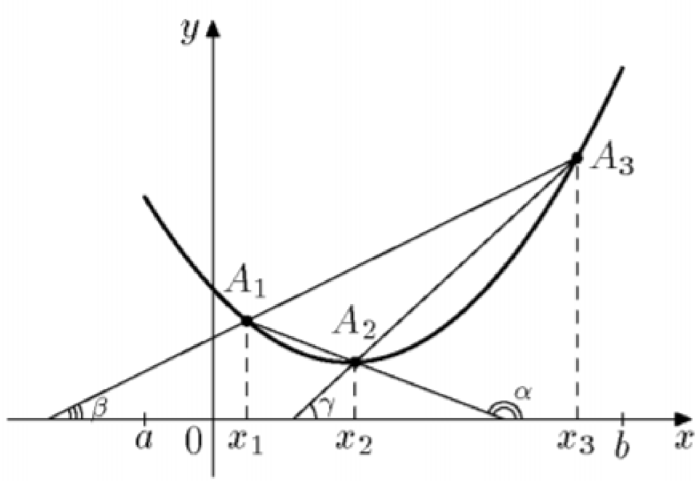
1.74 Лемма о трех хордах и односторонняя дифференцируемость выпуклой функции

(228)

Лемма. О трех хордах. Пусть функция f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$, $x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 < x_2 < x_3$. Тогда

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\beta \leqslant \operatorname{tg}\gamma.$



Доказательство. По определению выпуклости $f(x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_3)$, где $t = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$, $1-t = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$. Преобразуем неравенство двумя способами. С одной стороны,

$$f(x_2) \le f(x_1) + (1-t)(f(x_3)-f(x_1)) = f(x_1)_{(}x_2-x_1)\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_1},$$

что равносильно левому неравенству. С другой стороны,

$$f(x_2) \le f(x_3) - t(f(x_3)-f(x_1)) = f(x_3) - (x_3-x_2)\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$

что равносильно правому неравенству.

Теорема. Односторонняя дифференцируемость выпуклой функции. Пусть f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$. Тогда для любой точки $x \in \langle a, b\rangle$ существуют конечные $f'_-(x), f'_+(x)$, причем $f'_-(x) \le f'_+(x)$.

Доказательство. Возьмем $x \in (a, b)$ и положим

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \quad \xi \in \langle a, b\rangle \backslash \{x\}.$$

По лемме о трех хордах g возрастает на $\langle a, b\rangle \backslash \{x\}$. Поэтому, если $a < \xi < x < \eta < b$, то $g(\xi) \le g(\eta)$, то есть

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \le \frac{f(\eta) - f(x)}{\eta - x}.$$

Следовательно, g ограничена на $\langle a, x)$ сверху, а на $(x, b\rangle$ снизу. По теореме о пределе монотонной функции, существуют конечные пределы $g(x-)$ и $g(x+)$, которые, по определения, являются односторонними производными $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$. Устремляя ξ к x слева, а η — справа, получаем, что $f'_-(x) \le f'_+(x)$.

1.75 Выпуклость и касательные. Опорная прямая

(231)

Теорема. Выпуклость и касательные. Пусть функция f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$. Тогда f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ в том и только в том случае, когда график f лежит не ниже любой своей касательной, то есть для любых $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$

$$f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть f выпукла вниз, $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$. Если $x > x_0$, то, по лемме о трех хордах, для любого $\eta \in (x_0, x)$

$$\frac{f(\eta) - f(x_0)}{\eta - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Устремляя η к x_0 справа, получаем неравенство

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

равносильное требуемому.
Если $x < x_0$, то, по лемме о трех хордах, для любого $\xi \in (x, x_0)$

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Устремляя ξ к x_0 слева получаем неравенство

$$f'(x_0) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

равносильное требуемому (при домножении на $x - x_0 < 0$ меняется знак неравенства).

2. Достаточость. Пусть для любых $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$ верно неравенство. Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle : x_1 < x_2$ и $x \in (x_1, x_2)$. Применяя неравенство дважды: сначала к точкам x_1, x, а затем — к x_2, x, получаем

$$f(x_1) \geq f(x) + f'(x)(x_1) - x, \qquad f(x_2) \geq f(x) + f'(x)(x_2 - x),$$

что равносильно

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Крайние части составляют неравенство из определения выпуклости.

Определение. Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in \langle a, b\rangle$. Прямая, задаваемая уравнением $y = l(x)$, называется опорной прямой для ыункции f в точке x_0, если

$$f(x_0) = l(x_0) \quad и \quad f(x) \geq l(x) \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

Если же

$$f(x_0) = l(x_0) \quad и \quad f(x) > l(x) \forall x \in \langle a, b\rangle \backslash \{x_0\},$$

то прфмая называется строго опорной для функции f в точке x_0.

Следствие 2. пусть функция f (строго) выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$. Тогда длялюбой точки $x_0 \in (a, b)$ существует (строго) опорная прямая функции f в точке x_0.

Доказательство. По теореме, в каждой точке $x_0 \in (a, b)$ функция имеет односторонние касательные, а они в свою очередь являются (строго) опорнвмы прямыми.

1.76 Критерии выпуклости функции

(234)

Теорема. Дифференциаотные критерии выпуклости. 1. Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle$ и дифференцируема на (a, b). Тогда f (строго) выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ в том и только том случае, когда f' (строго) возрастает на (a, b).
2. Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle$ и дважды дифференцируемана $\langle a, b\rangle$. Тогда f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ в том и только том случае, когда $f''(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Доказательство. 1. Необходимость. Возьмем $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$. По теореме о выпуклости и касательных

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2),$$

что и означает вохрастание f.

Возьмем $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : x_1 < x_2$ и $x \in (x_1, x_2)$. По теореме Лагранжа, существуют такие $c_1 \in (x_1, x)$ и $c_2 \in (x, x_2)$, что

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2).$$

Тогда $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$, а f, по условию, возрастает, поэтому $f'(c_1) < f'(c_2)$, то есть

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

что равносильно неравенству из определения выпуелости.

2. По пункту 1, выпуклость f арвносильна возрастанию f', которое, по критерию монотонности, равносильно неотрицательности f''.

1.77 Неравенство Йенсена

(238)

Теорема. Неравенство Йенсена. Пусть функция f выпукла вниз на $\langle a, b \rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любых $x_1, \cdots, x_n \in \langle a, b \rangle$ и $p_1, \cdots, p_n > 0$

$$f\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}\right) \le \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k f(x_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}.$$

Замечание 1. Числа p_k называются весами, а отношение $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}$ — взвешенным средним (арифметическим) чисел $x_1, \cdots, x_n$. Неравенство Йенсена можно свормулировать так: значение выпулой вниз функции от взвешенного среднего не превосходит взвешенного среднего значений функций.

Замечание 2. Не кменьшая убщности, можно считать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. При этом условие неравенства Йенсена принимают вид

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k).$$

Доказательство. Пусть сумма p_k равна 1. Положим

$$x^* = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k.$$

Сразу отметим, что если $x_1 = \cdots = x_n$, то x^* с ними совпадает, а неравенство йенсена обращается в равенство.
Пусть среди $x_1, \cdots, x_n$ есть различные. Проверим, тчо $x^* \in (a, b)$. Действительно, хоть одно из чисел x_k меньше b, пожтому

$$x^* < \sum_{k=1}^{n} p_k b = b.$$

Аналогично, $x^* > a$.
В точке x^* у функции f существует опорная прямая; пусть она задается уравнением $l(x) = \alpha(x) + \beta$. По определению опорной прямой $l(x^*) = f(x^*)$ и $l(x_k) \leq f(x_k)$ при всех k. Поэтому,

$$f(x^*) = l(x^*) = \alpha \sum_{k=1}^{n} p_k x_k + \beta = \sum_{k=1}^{n} p_k(\alpha x_k + \beta) = \sum_{k=1}^{n} p_k l(x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$$

Замечание 3. Если f строго выпукла, а среди x_k есть различные, то неравенство Йенсена строгое.

Замечание . При $n = 2$ неравенство Йенсена совпадает с неравенством из определения выпуклости.

1.78 Неравенства Юнга и Гельдера

(240)

Определение. Числа $p, q \in (1, +\infty)$, связанные соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, называются сопряженными показателями.
Ясно, что $q = \frac{p}{p-1}, \quad p = \frac{q}{q-1}$.

Лемма. Неравенство Юнга. Пусть p, q — сопряженные показатели, $a, b \in [0, +\infty)$, тогда $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Доказательство. Если $a = 0$ или $b = 0$ очевидно. По неравенству Йенсена для $f(x) = \ln x$ (функция выпукла вверх)

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(a^q) = \ln a + \ln b.$$

При возведеениии e в степень обеих честей неравенства, получается требуемое

Теорема. Неравенство Гёльдера. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}.$$

Доказательство. Так как

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|,$$

достаточно доказать неравенство Гёльдера для чисел $|a_k|, |b_k|$. Поэтому, не уменьшая общности, иожно считать, что $a_k, b_k \in \mathbb{R}_+$. Более того, можно считать, что все $b_k > 0$. Действительно, если неравенство доказано для положительных чисел b_k, то доказано и неравенство, так как сумма $a_k b_k$ не изменится, сумма a_k^q уселичиться, сумма b_k^q не изменится (при добавелении пар (a_k, b_k), где $b_k = 0$). Функция $f(x) = x^p$ строго выпукла вниз на $[0, +\infty)$. Положим $p_k = b_k^q, \ \ x_k = a_k b_k^{1-q}$ и применим неравенство Йенсена:

$$\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}\right)^p \le \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}.$$

Учитывая, что

$$p_k x_k = a_k b_k, \quad p_k x_k^p = b_k^q a_k^q b_k^{p(1-q)} = a_k^p,$$

Получаем

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^p \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{p-1}.$$

Остается возвести обе части неравенства в степень $\frac{1}{p}$ и воспользоваться тем, что $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$.

1.79 Неравенство Минковского и неравенство Коши между средними

(243)

Теорема. Неравенство Минковского. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, $p \geq 1$. Тогда

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство. При $p = 1$ неравенство Минковского сводится к неравенству треугольника для модуля. Пусть $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$. Обозначим $C = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p$. Применим неравенство треугольника, а затем неравенство Гёльдера:

$$C = \sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k||a_k+b_k|^{p-1} \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k||a_k+b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |b_k||a_k+b_k|^{p-1}| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} =$$

$$= \left\{\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{1/p}\right)\right\} C^{1/q}.$$

Если $C = 0$ неравенство очевидно, иначе сократим на $C^{1/q}$.

Теорема. Неравенство Коши о средних. Пусть $a_1, \cdots, a_n \geq 0$, тогда

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

.

Доказательство. Если какой-то $a_k = 0$, то неравенство очевидно.
Иначе по неравенству Йенсена для $f(x) = \ln x$ (выпуклая вверх)

$$\ln\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \geq \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln(a_n)}{n}.$$

При возведение числа e в степень обоих частей неравенства, получаем требуемое неравенство.

1.80 Метод касательных

Билет 80: Метод касательных (-)

Теорема. Приближенное решение уравенений методом касательных (Ньютона). $f(x) = 0, \quad f \in C^{(2)}[a, b], \quad f', f''$ строго сохраняют знак, $f(a)f(b) < 0$. $\{x_n\}_{n \in 1}$ — последовательность точек таких, что

$$l_n(x) : y = \frac{f(x_{n-1})}{x_{n-1} - x_n}(x - x_{n-1}) + f(x_{n-1})$$

это касательная к функции f в точке x_n. Причем, если

$$sign(f') = \ sign(f''),$$

то $x_0 = b$, иначе $x_0 = a$. Тогда $x_n \to \xi : f(\xi) = 0$, причем $|\xi - x_{n+1}| <$ ДОПИСАТЬ.

Доказательство. Разберем случай $f' > 0, \quad f'' > 0$
Так как $l(x)$ — касательная в точке x_n, $x_{n+1} \in (\xi, x_n)$, тогда $\{x_n\}$

убывает и ограничена снизу, значит имеет предел β. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, тогда $\beta = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$, тогда $f(\beta) = 0$, то есть $\beta = \xi$.

$x_{n+1} - \xi = x_n - \xi - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(c)}{2}(\xi - x_n)^2, \quad \xi < c < x_n.$$

Получаем

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x_n - \xi = \frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(x_n - \xi)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} - \xi = \frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(x_n - \xi)^2 \Leftrightarrow |x_{n+1} - \xi| = \left|\frac{f''(c)}{2f'(x_n)}\right|(x_n - \xi)^2 \leq$$

$$\leq \left|\frac{f'(c)}{f''(c)}(x_n - \xi)^2\right| \leq \frac{1}{2}\max_{(a,b)}\left(\frac{f'}{f''}\right)(x - \xi)^2$$

2 Требуемые определения

2.1 Инъекция

(31)
Если отображение $f : X \to Y \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x2)$, то оно называется инъекцией, инъективным, обратимым, то есть при любом $y \in Y \; f(x) = y$ имеет не более одного решения

2.2 Сюръекция

(31)
Если у отображение $f : X \to Y \; f(X) = Y$, то отображение называется сюръективным, или сюръекцией, или отображением "на". То есть $\forall y \in Y \; f(x) = y$ имеет хотя бы одно решение.

2.3 Биекция

(32)
Если отображение $f : X \to Y$ одновременно и сюръективно и инъективно, то его называют биекцией или взаимно однозначным отображением (соответствием). То есть $\forall y \in Y \; \exists! \; x \in X : \; f(x) = y$.

2.4 Образ

(30)
Пусть $f : X \to Y$, $A \subset X$. Множество $f(a) = \{y \in Y : \exists x \in A\ f(x) = y\}$ называется образом множества A при отображении f. $f(x)$ — образ множества, X — множество значений отображения f.

2.5 Прообраз

(31)
Пусть $f : X \to Y$, $B \subset Y$. Множество $f^{-1}(B) = \{x \in X :\ f(x) \in B\}$ называется прообразом множества B при отображении f.

2.6 Обратное отображение

(33)
Пусть $f : X \to Y$, f обратимо. Отображение , которое каждому y из множества $f(X)$ сопоставляет то(единственное) значение x из X, для которого $f(x) = y$ называется обратным к f и обозначается f^{-1}. $f^{-1} : f(X) \to X$. Очевидно, что f^{-1} — биекция между $f(X)$ и X. График обратной функции симметричен относительно $y = x$ графику обычной функции.

2.7 Предел последовательности

(43)
Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел. Число $a \in \mathbb{R}$ называют предел последовательности $\{x_n\}$ и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in N :\ n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$. Если у последовательности есть предел — она сходящаяся, иначе — расходящаяся.

2.8 Предел функции

(100)
Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ — предельная точка D, $A \in \mathbb{R}$. Число A называют пределом функции f в точке a и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : x \neq a, [x - a] < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

2.9 Предел отображения

(99)
Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_y) — метрические пространства, $f : D \subset X \to Y$, $a \in X$ — предельная точка D, $A \in Y$. Точку A называют преде-ломотображения f в точке a и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \xrightarrow[x\to a]{}, A$, если выполняется одно из следующих условий:
1. Определение на ε-языке (по Коши).
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D \backslash \{a\} :\ \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon.$

2. Определение на языке окрестностей.
$\forall V_A \ \exists V_a \ f(\dot{V}_a \cap D) \subset V_A$
Для любой окрестности V_A точки A существует такая окрестность V_a точки a, что образ пересечения проколотой окрестности $\dot{V}_a$ с множество м D при отображении f содержится в окрестности V_A.
$\forall V_a \ \exists V_a \forall x \in \dot{V}_a \cap D \Rightarrow f(x) \in V_A$. Очевидно, что это — переформулировка исходного утверждения.
3. Определение нв языке последовательностей (по Гейне).
$\forall \{x_n\} : x_n \in D \backslash \{a\}, \ x_n \to a \Rightarrow (x_n) \to A$

2.10 Метрическое пространство

(46)
Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется метрикой или расстоянием в множестве X, если она удовлетворяет следующим условиям:
1. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \qquad x, y \in X$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x) \qquad x, y \in X$
3. $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \quad x, y, z \in X$
Пара (X, ρ) — множество с метрикой в нём — называется метрическим пространством.

2.11 Векторное пространство

(53)
Пусть K — поле, X — множество, и над элементами X, K определены две операции: сложение $X \times X \xrightarrow{+} X$ и умножение $K \times X \to X$,

удовлетворяющие следующим условиям.
$x, y, z \in X,\ \lambda, \mu \in K$
1. $(x+y)+z = x+(y+z)$
2. $x+y = y+x$
3. $\exists \theta \in X:\ \forall x \in X\ 0 \cdot x = \theta$
4. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$
5. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
6. $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu x)$
7. $1 \cdot x = x$
Тогда X называюттлинейным пространством или линейным множеством над полем K. Элементы X называют векторами, элементы K — скалярами.

2.12 Нормированое пространство

(54)
Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Нормой в X называют функцию $p : X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющаяя следующим условиям.
1.Положительная определённость.
$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
2.Положительная однородность.
$p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$
3.неравенство треугольника (полуаддитивность).
$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$
Принято обозначать норму $p(x) = ||x||$.
Пара $(X, ||\cdot||)$ называется нормированным протсранством.

2.13 Неравенство Коши-Буняковского

(59)
$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$
$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$, так как $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ ($\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение)

2.14 Внутренние точки

(68)
Точка a называется внутренней точкой множества D, если существует окрестность точки a, содержащаяся в D
Множество называется открытым, если все его точки внутренние.

2.15 Предельные точки

(70)
Точка a называется предельной точка или точкой сгущения множества D, если в любой проколотой окрестности точки a найдётся точка множества D
a — предельная точка $D \Leftrightarrow \forall \dot{V}_a \ \dot{V}_a \cap D \neq \varnothing$

2.16 Открытые множества

(68)
Множество называется открытым, если все его точки внутренние (содержатся в множестве с некоторой своей окрестностью).

2.17 Замкнутые множества

(71)
Множество D называется замкнутым (в X), если содержит все свои предельные точки.

2.18 Компактные множества

(77)
Подмножество K метрического пространства X называется компатным, если из любого открытого покрытия K можно извлечь конечно подпогрытие.

$\forall \{G_n\}_{\alpha \in A} : \; K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_1, \cdots, \alpha_N \in A \; K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} G_{\alpha_i}$ (G_α — открытые множества)

2.19 Компактность в евклидовом пространстве

(82)

Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$, тогда следующие утверждения равносильны

1. K замкнуто и ограничено

2. K компактно

3. Из всякой последовательности точек K можно извлечь подпоследовательность, имеющую предел, принадледаший K.

2.20 Сходимость в себе

(84)

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность в метрическом пространстве X. Говорят, что последовательность сходится в себе, если для любого положительного чисда ε существует такой номер N, что для всех номеров n и l, больших N выполняется равенство $\rho(x_n, x_l) < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n, l > N \;\; \rho(x_n, x_l) < \varepsilon$

2.21 Полнота метрического пространства

(85)

Если в метрическом пространстве X любая сходящаяся в себе последовательность сходится, то пространство X называют полным.

2.22 Ограниченность множества

(50)
Подмножество D метрического пространства X называется ограниченным, если оно содкржится в некотором шаре:
$\exists a \in X, R > 0 \; D \in \overline{B}(a, R)$
Последовательность $\{x_n\}$ в метричскои пространстве X называется ограниченной, если множество её значений ограничено:
$\exists a \in X, R > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \rho(x_n, a) \leq R$
Открытый/закрытый шар(увеличим в два раза радиус) и с каким центром (увеличим радиус на расстояние между старым и новым центрами) не важно.

2.23 Точные границы

(87)
Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$ ограничено снизу. Наибольшая из нижних границ множества Eназывается точной нижней грвницей или нижней гранью и обохначается $\inf E$ (аналогично с точной верхей границей — $\sup E$)

$$b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E & x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in E : & x > b - \varepsilon; \end{cases}$$

$$a = \inf E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E & x \geq a \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in E : & x < a + \varepsilon; \end{cases}$$

2.24 $\mathcal{O}$ символика

(159)

Пусть X — метрической пространство, $D \subset X$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, x_0 — предельная точка D. Если существуют функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и окрестность V_{x_0} точки x_0, такие что $f(x) = \varphi(x)g(x)$ для всех $x \in V_{x_0} \cap D$ и

1. φ ограничена на $V_{x_0} \cap D$, то говрят, что функции f ограничена по сравнению с g при $x \to x_0$, и пишут $f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \qquad x \to x_0$.

2. $\varphi \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, то говорят, что функция f — бесконечно малая по сравнению с g при $x \to x_0$, и пишут $f(x) = o(g(x)) \qquad x \to x_0$.

3. $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$, то говорят, что функции f и g эквивалентны или асимптотически равны при $x \to x_0$, и пишут $f(x) \sim g(x) \qquad x \to x_0$.

2.25 Непрерываность

(114)

Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $f : D \subset X \to Y$, $x_0 \in D$. Отображение f назывется непрерывным в точке x_0 если выполняется одно из следующих утвержений.

1. Предел отображения f в точке x_0 существует и равен $f(x_0)$. (Применимо, если x_0 — предельная точка D).

2. На ε-языке или по Коши.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D : \; \rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

3. На языке окрестностей.

$\forall V_{f(x_0)} \; \exists V_{x_0} \; f(V_{x_0} \cap D) \subset V_{f(x_0)}$

4. На языке последовательностей или по Гейне.

$\forall \{x_n\} : \; x_n \in D, x_n \to x_0 \; f(x_n) \to f(x_0)$

5. Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение отображения. $\Delta y \xrightarrow[\Delta x \to \theta_X]{} \theta_Y$

Отображение называется непрерывным на множестве D, если оно непрерывно в каждой точке множества D.
Множество отображений $f : D \subset X \to Y$ непрерывных на множестве D, обозначают $C(D \subset X \to Y)$ или $C(D \to Y)$

2.26 Теоремы Больцано-Коши о непрерывных функциях

(130, 133)
Теорема Больцано – Коши о промежуточном значении. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$. Тогда для любого числа C, лежащего между $f(a)$ $\text{bi}f(b)$, найдётся такое $c \in (a, b)$, что $f(c) = C$
Теорема Больцано – Коши о непрерывных отображениях.
Пусть X, Y — метрические пространства, X линейно связно, $f \in C(X \to Y)$. Тогда $f(x)$ линейно связно.
Другими словами непрерывный образ линейно связного образа линейно связен.

Линейная связность.
Y — метрическое пространство, $E \subset Y$. Множество E называется линейно связным, если любые две его точки можно соединить путём в E: $\forall A, B \in E\ \exists \gamma \in C([a, b] \subset \mathbb{R} \to E) :\ \gamma(a) = A, \gamma = A, \gamma(b) = b$

2.27 Теорема Вейерштрасса о непрерыванных отображениях

(126)
Пусть X, Y — метрические пространства, X компактно, $f \in C(X \to Y)$. Тогда $f(X)$ компактно. Другими словами: непрерывный образ компакта — компакт.
Первая теорема Вейерштрасса о непрерывных фунциях.
Функция, непрерывная на отрезке, ограничена.
Вторая теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях.
Функция, непрерывная на отрезке, принимает свои наибольшее и наименьшее значения.

2.28 Равномерная непрерывность

(128)
Функция $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на множестве D, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех точек $\overline{x}, \overline{\overline{x}}$ множества D, удовлетворяющих неравенству $|\overline{x} - \overline{\overline{x}}| < \delta$ выполняется неравенство $|f(\overline{x}) - f(\overline{\overline{x}})| < \varepsilon$:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \overline{x}, \overline{\overline{x}} \in D : \ |\overline{x} - \overline{\overline{x}}| < \delta \Rightarrow |f(\overline{x}) - f(\overline{\overline{x}})| < \varepsilon$

2.29 Теорема Кантора

(129)
Непрерывное отображение на компакте отображение равномерно

непрерывно
Для функций: непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна

Равномерная непрерывность.
X, Y — метрические пространства, $f : X \to Y$. Отображение называется равномерно непрерывным на X, если
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \overline{x}, \overline{\overline{x}} \in X : \; p_X(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) < \delta \; p_Y f(\overline{x}), f(\overline{\overline{x}})$

2.30 Замечательные пределы

(154)
1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

2.31 Дифференцируемость и производная

(169)

первое определение.
Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, $x_o \in \langle a, b \rangle$. Если существует такое числоа $A \in \mathbb{R}$, что
$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \to x_0,$

то функция называется дифференцируемой в точке x_0. При этом число A называется производной функции в точке x_0.

второе определение.

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_o \in \langle a, b\rangle$. Если существует предел
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x-x_0)}{x-x_0}$,
равный числу $A \in \mathbb{R}$, то функция f называется дифференцируемой в точке x_0, а число A — её производной в точке x_0.

2.32 Формулы дифференцирования

(185)

1. $c' = 0$

2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

3. $(a^x)' = a^x \ln a$

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

5. $(\sin x)' = \cos x$

6. $(\cos x)' = -\sin x$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

2.33 Правила дифференцирования

(178)
$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
$(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$
$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$
$(g \circ f)'(x) - g'(f(x)) \cdot f'(x)$
$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$
$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

2.34 Формула Лагранжа

(190)
Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда найдётся такая точка $c \in (a, b)$, что
$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

2.35 Формула Тейлора с остатком в виде Пеано

(206)
Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема n раз в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \qquad x \to x_0$$

2.36 Формула Тейлора с остатком в виде Лагранжа

(208)
Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C^{(n)}\langle a, b\rangle$, f дифференцируема $n+1$ раз на (a, b), $x_0, x \in \langle a, b\rangle$, $x \neq x_0$. Тогда существует точка c, лежащая между x и x_0, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

2.37 Основные Тейлоровские разложения

(212-215)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \frac{\sin(\theta x + \frac{(2n+3)\pi}{2})}{(2n+3)!}x^{(2n+3)}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \frac{\cos(\theta x + \frac{(2n+2)\pi}{2})}{(2n+2)!}x^{(2n+2)}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n)$$

2.38 Сравнение логарифмической, степенной и показательной функций

(196)
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \forall \alpha > 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0 \qquad \forall a > 1, k \in \mathbb{R}$

2.39 Точки экстремума и их отыскание

(220)
Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x_0 \in D$. Если существует такое $\delta > 0$, что:

для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$, то x_0 называется точкой максимума функции f;

для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (D \backslash \{x_0\})$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, то x_0 называется точкой строгого максимума функции f.

Если противоположные неравенства, то x_0 соответсвенно точка минимума и точка строгого минимума.

Необходимое условие экстремума
Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ — точка экстремума f. f дифференцируема в точке x_0. Тогда $f'(x_0) = 0$.

2.40 Определение выпуклости

(226)
Функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ называется выпуклой вниз на $\langle a, b\rangle$, если для любых $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ и $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство
$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2)$
Если при $x_1 \neq x_2$ неравенство становится строгим, то функция называется строго выпуклой вниз
Если выполняются потивоположные неравенства, то функция выпукла вверх и строго выпуклая вверх соответсвенно.

2.41 Критерий выпуклости

(234)
1. Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle$ и дифференцируема на (a, b). Тогда f (строго) выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ в том и только том случае, когда f' (строго) возрастает на (a, b)
2. Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle$ и дважды дифференцируема на (a, b). Тогда f выпукла вниз на $\langle a, b\rangle$ в том и только том случае, когда $f''(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$.