ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

группы M3138, M3139
1-й семестр, 2019–20 уч. год

проф. О. Л. Виноградов

1. Множества и операции над ними.
2. Аксиомы вещественных чисел.
3. Метод математической индукции. Бином Ньютона.
4. Существование максимума и минимума конечного множества, следствия.
5. Целая часть числа. Плотность множества рациональных чисел.
6. Две теоремы о "бедности" счетных множеств.
7. Теорема об объединении не более чем счетных множеств (с леммой).
8. Счетность множества рациональных чисел.
9. Несчетность отрезка.
10. Единственность предела последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности.
11. Предельный переход в неравенстве. Теорема о сжатой последовательности.
12. Бесконечно малые. Арифметические действия над сходящимися последовательностями.
13. Свойства скалярного произведения. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца. Норма, порожденная скалярным произведением.
14. Неравенства Коши – Буняковского в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$. Сходимость и покоординатная сходимость.
15. Бесконечно большие и бесконечно малые. Арифметические действия над бесконечно большими.
16. Свойства открытых множеств. Открытость шара. Внутренность.
17. Предельные точки. Связь открытости и замкнутости. Свойства замкнутых множеств. Замыкание.
18. Открытость и замкнутость относительно пространства и подпространства.
19. Компактность относительно пространства и подпространства.
20. Компактность, замкнутость и ограниченность.
21. Две леммы о подпоследовательностях.
22. Лемма о вложенных параллелепипедах. Компактность куба.
23. Характеристика компактов в $\mathbb{R}^m$. Принцип выбора.
24. Сходимость и сходимость в себе. Полнота $\mathbb{R}^m$.
25. Теорема о стягивающихся отрезках. Существование точной верхней границы.
26. Предел монотонной последовательности.
27. Неравенство Я. Бернулли, $\lim z^n$, число e, формула Герона.
28. Верхний и нижний пределы последовательности.
29. Равносильность определений предела отображения по Коши и по Гейне.
30. Простейшие свойства отображений, имеющих предел (единственность предела, локальная ограниченность, арифметические действия).
31. Предельный переход в неравенстве для функций. Теорема о сжатой функции.
32. Предел монотонной функции.

33. Критерий Больцано – Коши для отображений.
34. Двойной и повторные пределы, примеры.
35. Замена на эквивалентную при вычислении пределов. Асимптоты.
36. Единственность асимптотического разложения.
37. Непрерывность. Точки разрыва и их классификация, примеры.
38. Арифметические действия над непрерывными отображениями. Стабилизация знака непрерывной функции.
39. Непрерывность и предел композиции.
40. Характеристика непрерывности отображения с помощью прообразов.
41. Теорема Вейерштрасса о непрерывных отображениях, следствия.
42. Теорема Кантора.
43. Теорема Больцано – Коши о непрерывных функциях.
44. Сохранение промежутка (с леммой о характеристике промежутков). Сохранение отрезка.
45. Теорема Больцано – Коши о непрерывных отображениях.
46. Разрывы и непрерывность монотонной функции.
47. Существование и непрерывность обратной функции.
48. Степень с произвольным показателем.
49. Свойства показательной функции и логарифма.
50. Непрерывность тригонометрических и обратных тригонометрических функций.
51. Замечательные пределы.
52. Дифференцируемость и производная. Равносильность определений, примеры.
53. Геометрический и физический смысл производной.
54. Арифметические действия и производная.
55. Производная композиции.
56. Производная обратной функции и функции, заданной параметрически.
57. Производные элементарных функций.
58. Теорема Ферма.
59. Теорема Ролля.
60. Формулы Лагранжа и Коши, следствия.
61. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, примеры.
62. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$, примеры.
63. Теорема Дарбу, следствия.
64. Вычисление старших производных: линейность, правило Лейбница, примеры.
65. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
66. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
67. Тейлоровские разложения функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.
68. Иррациональность числа e.
69. Применение формулы Тейлора к раскрытию неопределенностей.
70. Критерий монотонности функции.
71. Доказательство неравенств с помощью производной, примеры.
72. Необходимое условие экстремума. Первое правило исследования критических точек.

73. Второе правило исследования критических точек. Производные функции e^{-1/x^2}.

74. Лемма о трех хордах и односторонняя дифференцируемость выпуклой функции.

75. Выпуклость и касательные. Опорная прямая.

76. Критерии выпуклости функции.

77. Неравенство Иенсена.

78. Неравенства Юнга и Гёльдера.

79. Неравенство Минковского и неравенство Коши между средними.

80. Метод касательных.

Незнание хотя бы одной из следующих формулировок влечет оценку "неудовлетворительно": виды отображений (инъекция, сюръекция, биекция), образ, прообраз, обратное отображение; предел последовательности, функции, отображения (в разных ситуациях и на разных языках); метрическое, векторное, нормированное пространство, неравенство Коши – Буняковского; внутренние и предельные точки, открытые, замкнутые и компактные множества, компактность в евклидовом пространстве; сходимость в себе, полнота метрического пространства; ограниченность множества, точные границы; O-символика; непрерывность, теоремы Больцано – Коши и Вейерштрасса о непрерывных функциях, равномерная непрерывность, теорема Кантора; замечательные пределы; дифференцируемость и производная, формулы и правила дифференцирования; формула Лагранжа, формула Тейлора с остатками в форме Пеано и Лагранжа, основные тейлоровские разложения; сравнение логарифмической, степенной и показательной функций; точки экстремума и их отыскание, определение и критерии выпуклости.

Умение дифференцировать обязательно.