

# Содержание

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Билеты</b>  | <b>7</b> |
| 1.1      | Множества и операции над ними . . . . .  | 7        |
| 1.2      | Аксиомы вещественных чисел . . . . .   | 8        |
| 1.3      | Метод математической индукции. Бином Ньютона . .   | 9        |
| 1.4      | Существование максимума и минимума конечного мно-<br>жества, следствия . . . . .   | 10       |
| 1.5      | Целая часть числа. Плотность множества рациональ-<br>ных чисел . . . . .   | 11       |
| 1.6      | Две теоремы о "бедности" счетных множеств . . . . .  | 12       |
| 1.7      | Теорема об объединении не более чем счетных мно-<br>жеств (с леммой) . . . . .   | 13       |
| 1.8      | Счетность множества рациональных чисел . . . . .   | 14       |
| 1.9      | Несчетность отрезка . . . . .  | 14       |
| 1.10     | Единственность предела последовательности. Огра-<br>ниченность сходящейся последовательности . . . . .                               | 15       |
| 1.11     | Предельный переход в неравенстве. Теорема о сжатой<br>подпоследовательности . . . . .  | 16       |
| 1.12     | Бесконечно малые. Арифметические действия над<br>сходящимися последовательностями . . . . .  | 17       |
| 1.13     | Свойство скалярного произведения. Неравенство Коши-<br>Буняковского-Шварца. Норма порожденная скаляр-<br>ным произведением . . . . . | 19       |
| 1.14     | Неравенство Коши-Буняковского в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$ . Сходи-<br>мость и покомпонентная сходимость . . . . .              | 21       |
| 1.15     | Бесконечно большие и бесконечно малые. Арифмети-<br>ческие действия над бесконечно большими . . . . .                                | 22       |
| 1.16     | Свойства открытых множеств. Открытость шара. Внут-<br>ренность . . . . .   | 25       |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.17 | Предельный точки. Связь Открытости и замкнутости. Свойство замкнутых множеств. Замыкание . . . . .                                    | 27 |
| 1.18 | Открытость и замкнутость относительно пространства и подпространства . . . . .  | 29 |
| 1.19 | Компактность относительно пространства и подпространства . . . . .  | 30 |
| 1.20 | Компактность, замкнутость и ограниченность . . . . .  | 32 |
| 1.21 | Две леммы о подпоследовательностях . . . . .  | 33 |
| 1.22 | Лемма о вложенных параллелепипедах. Компактность куба . . . . .   | 34 |
| 1.23 | Характеристика компактов в $\mathbb{R}^m$ . Принцип выбора . . . . .  | 35 |
| 1.24 | Сходимость и сходимость в себе. Полнота $\mathbb{R}^m$ . . . . .  | 38 |
| 1.25 | Теорема о стягивающихся отрезках. Существование точной верхней границы . . . . .  | 40 |
| 1.26 | Предел монотонной последовательности . . . . .  | 42 |
| 1.27 | Неравенство Я. Бернулли, $\lim z^n$ , число $e$ , формула Герона . . . . .  | 43 |
| 1.28 | Верхний и нижний пределы последовательностей . . . . .  | 45 |
| 1.29 | Равносильность определений предела отображения по Коши и по Гейне . . . . .   | 48 |
| 1.30 | Простейшие свойства отображений, имеющих предел (единственность предела, локальная ограниченность, арифметические действия) . . . . . | 49 |
| 1.31 | Предельный переход в неравенстве для функций. Теорема о сжатой функции . . . . .  | 52 |
| 1.32 | Предел монотонной функции . . . . .   | 53 |
| 1.33 | Критерий Больцано-Коши для отображений . . . . .  | 54 |
| 1.34 | Двойной и повторный пределы, примеры . . . . .  | 55 |
| 1.35 | Замена на эквивалентную при вычислении пределов. Асимптоты . . . . .  | 57 |
| 1.36 | Единственность асимптотического разложения . . . . .  | 59 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.37 | Непрерывность. Точки разрыва и их классификации, примеры . . . . .                                      | 61 |
| 1.38 | Арифметические действия над непрерывными отображениями. Стабилизация знака непрерывной функции. . . . . | 62 |
| 1.39 | Непрерывность и предел композиции . . . . .   | 63 |
| 1.40 | Характеристика непрерывности отображения с помощью прообразов . . . . .                                 | 64 |
| 1.41 | Теорема Вейерштрасса о непрерывных отображениях, следствия . . . . .                                    | 65 |
| 1.42 | Теорема Кантора . . . . .   | 68 |
| 1.43 | Теорема Больцано-Коши о непрерывных функциях . .  | 69 |
| 1.44 | Сохранение промежутка (с леммой о характере промежутков). Сохранение отрезка . . . . .                  | 70 |
| 1.45 | Теорема Больцано-Коши о непрерывных отображениях  | 71 |
| 1.46 | Разрывы и непрерывность монотонной функции . . .  | 72 |
| 1.47 | Существование и непрерывность обратной функции .  | 73 |
| 1.48 | Степень с произвольным показателем . . . . .  | 75 |
| 1.49 | Свойства показательной функции и логарифма . . . .  | 77 |
| 1.50 | Непрерывность тригонометрических и обратных тригонометрических функций . . . . .                        | 80 |
| 1.51 | Замечательные пределы . . . . .   | 82 |
| 1.52 | Дифференцируемость и производная. Равносильность определений примеры . . . . .                          | 85 |
| 1.53 | Геометрический и физический смысл производной . .   | 87 |
| 1.54 | Арифметические действия и производная . . . . .   | 88 |
| 1.55 | Производная композиции . . . . .  | 89 |
| 1.56 | Производная обратной функции и функции, заданной параметрически . . . . .                               | 90 |
| 1.57 | Производные элементарных функций . . . . .  | 92 |
| 1.58 | Теорема Ферма . . . . .   | 94 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 1.59 | Теорема Ролля . . . . .   | 95  |
| 1.60 | Формулы Лагранжа и Коши, следствия . . . . .  | 96  |
| 1.61 | Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей ви-<br>да $\frac{0}{0}$ , примеры . . . . .                  | 98  |
| 1.62 | Правило Лопиталя раскрытие неопределенностей ви-<br>да $\frac{\infty}{\infty}$ . . . . .                  | 99  |
| 1.63 | Теорема Дарбу, следствия . . . . .  | 101 |
| 1.64 | Вычисления старших производных: линейность, пра-<br>вило Лейбница, примеры . . . . .                      | 102 |
| 1.65 | Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано   | 105 |
| 1.66 | Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагран-<br>жа . . . . .                                       | 106 |
| 1.67 | Тейлоровское разложение функций $e^x$ , $\sin x$ , $\cos x$ , $\ln(1+$<br>$x)$ , $(1+x)^\alpha$ . . . . . | 108 |
| 1.68 | Иррациональность числа $e$ . . . . .  | 109 |
| 1.69 | Применение формулы Тейлора к раскрытию неопре-<br>деленностей . . . . .                                   | 110 |
| 1.70 | Критерий монотонности функции . . . . .   | 111 |
| 1.71 | Доказательство неравенства с помощью производной,<br>примеры . . . . .                                    | 112 |
| 1.72 | Необходимое условие экстремума. Первое правило ис-<br>следования критических точек . . . . .              | 114 |
| 1.73 | Второе правило исследования критических точек. Про-<br>изводная функции $e^{-1/x^2}$ . . . . .            | 115 |
| 1.74 | Лемма о трех хордах и односторонняя дифференци-<br>руемость выпуклой функции . . . . .                    | 117 |
| 1.75 | Выпуклость и касательные. Опорная прямая . . . . .  | 118 |
| 1.76 | Критерии выпуклости функции . . . . .   | 120 |
| 1.77 | Неравенство Йенсена . . . . .   | 121 |
| 1.78 | Неравенства Юнга и Гельдера . . . . .   | 123 |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 1.79     | Неравенство Минковского и неравенство Коши между средними . . . . . | 125        |
| 1.80     | Метод касательных . . . . .   | 126        |
| <b>2</b> | <b>Требуемые определения</b>  | <b>128</b> |
| 2.1      | Инъекция . . . . .  | 128        |
| 2.2      | Сюръекция . . . . .   | 128        |
| 2.3      | Биекция . . . . .   | 128        |
| 2.4      | Образ . . . . .   | 129        |
| 2.5      | Прообраз . . . . .  | 129        |
| 2.6      | Обратное отображение . . . . .                                      | 129        |
| 2.7      | Предел последовательности . . . . .                                 | 130        |
| 2.8      | Предел функции . . . . .  | 130        |
| 2.9      | Предел отображения . . . . .  | 130        |
| 2.10     | Метрическое пространство . . . . .                                  | 131        |
| 2.11     | Векторное пространство . . . . .                                    | 131        |
| 2.12     | Нормированное пространство . . . . .                                | 132        |
| 2.13     | Неравенство Коши-Буняковского . . . . .                             | 133        |
| 2.14     | Внутренние точки . . . . .  | 133        |
| 2.15     | Предельные точки . . . . .  | 133        |
| 2.16     | Открытые множества . . . . .  | 134        |
| 2.17     | Замкнутые множества . . . . .                                       | 134        |
| 2.18     | Компактные множества . . . . .                                      | 134        |
| 2.19     | Компактность в евклидовом пространстве . . . . .                    | 135        |
| 2.20     | Сходимость в себе . . . . .   | 135        |
| 2.21     | Полнота метрического пространства . . . . .                         | 135        |
| 2.22     | Ограниченность множества . . . . .                                  | 136        |
| 2.23     | Точные границы . . . . .  | 136        |
| 2.24     | $\mathcal{O}$ символика . . . . .                                   | 137        |
| 2.25     | Непрерывность . . . . .   | 137        |
| 2.26     | Теоремы Больцано-Коши о непрерывных функциях .                      | 138        |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 2.27 | Теорема Вейерштрасса о непрерывных отображениях                             | 139 |
| 2.28 | Равномерная непрерывность . . . . .   | 139 |
| 2.29 | Теорема Кантора . . . . .   | 139 |
| 2.30 | Замечательные пределы . . . . .   | 140 |
| 2.31 | Дифференцируемость и производная . . . . .                                  | 140 |
| 2.32 | Формулы дифференцирования . . . . .   | 141 |
| 2.33 | Правила дифференцирования . . . . .   | 142 |
| 2.34 | Формула Лагранжа . . . . .  | 142 |
| 2.35 | Формула Тейлора с остатком в виде Пеано . . . . .                           | 142 |
| 2.36 | Формула Тейлора с остатком в виде Лагранжа . . . . .                        | 143 |
| 2.37 | Основные Тейлоровские разложения . . . . .                                  | 143 |
| 2.38 | Сравнение логарифмической, степенной и показатель-<br>ной функций . . . . . | 144 |
| 2.39 | Точки экстремума и их отыскание . . . . .                                   | 144 |
| 2.40 | Определение выпуклости . . . . .  | 145 |
| 2.41 | Критерий выпуклости . . . . .   | 145 |

# 1 Билеты

## 1.1 Множества и операции над ними

(6-12)

Множество состоит из элементов

Если каждый элемент множества  $X$  принадлежит множеству  $Y$ , то говорят  $X$  подмножество  $Y$   $X \subset Y$ .

$$X = Y \Leftrightarrow X \subset Y \wedge Y \subset X$$

Пустое множество  $\emptyset$  — множество в котором нет элементов

Пусть  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — семейство множеств. Объединением семейства  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  называется множество всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств  $X_n$ :

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : \exists \alpha \in A \ x \in X_\alpha\}$$

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z), \quad X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cup X = X \cup \emptyset = X$$

Пусть  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — семейство множеств. Пересечением семейства  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  называется множество всех элементов, которые принадлежат каждому из множеств  $X_\alpha$

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : \forall \alpha \in A \ x \in X_\alpha\}$$

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z), \quad X \cap Y = Y \cap X, \quad X \cap \emptyset = \emptyset$$

Разностью множеств  $X$  и  $Y$  называется множество всех элементов, которые принадлежат  $X$ , но не принадлежат  $Y$ .

$$X \setminus Y = \{x : x \in X, x \notin Y\}$$

Определение не предполагает, что  $Y \subset X$ . Если же  $Y \subset X$ , то разность  $X \setminus Y$  называют дополнением множества  $X$  до множества  $Y$  и обозначают  $CX, \overline{X}, X^c$

$$(X^c)^c = X, \quad X \cup X^c = U, \quad X \cap X^c = \emptyset$$

Декартовым или прямым произведением множеств  $X$  и  $Y$  называется множество всех упорядоченных пар, таких что первый элемент принадлежит  $X$ , а второй —  $Y$

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

## 1.2 Аксиомы вещественных чисел

(13-17)

**1. Аксиомы поля.** В множестве  $\mathbb{R}$  определены две операции называемые сложением и умножением, действующие из  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  и удовлетворяющие следующим свойствам.

1.1. Сочетательный закон (ассоциативность) сложения:

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

1.2. Переместительный закон (коммутативность) сложения:

$$x + y = y + x.$$

1.3. Существует число нуль (0, нейтральный элемент по сложению), такое что  $x + 0 = x$  для всех  $x$ .

1.4. Для любого числа  $x$  существует такое число  $\bar{x}$ , что  $x + \bar{x} = 0$  (это число называется противоположным числу  $x$  и обозначается  $-x$ ).

1.5. Сочетательный закон (ассоциативность) умножения:

$$(xy)z = x(yz).$$

1.6. Переместительный закон (коммутативность) умножения:

$$xy = yx.$$

1.7. Существует вещественное число единица (1, нейтральный элемент по умножению), отличный от нуля, такое что  $x \cdot 1 = x$  для всех  $x$ .

1.8. Для любого числа  $x$ , отличного от нуля, существует такое  $x'$ , что  $xx' = 1$  (это число называется обратным к  $x$  и обозначается  $x^{-1}$  или  $\frac{1}{x}$ ).

1.9. Распределительный закон (дистрибутивность):

$$x(y + z) = xy + xz.$$

**2. Аксиомы порядка.** Между элементами  $\mathbb{R}$  определено отношение  $\leq$  со следующими свойствами.

2.1. Для любых  $x, y$  верно  $x \leq y$  или  $y \leq x$ .

2.2 Транзитивность: если  $x \leq y, y \leq z$ , то  $x \leq z$ .



2.3. Если  $x \leq y$  и  $y \leq x$ , то  $x = y$ .

2.4. Если  $x \leq y$ , то  $x + z \leq y + z$  для любого  $z$ .

2.5. Если  $0 \leq x$  и  $0 \leq y$ , то  $0 \leq xy$

**3. Аксиома Архимеда.** Каковы бы ни были положительные числа  $x, y \in \mathbb{R}$ , существует такое натуральное число  $n$ , что  $nx > y$ .

**4. Аксиома Канторва о вложенных отрезках.**

Пусть  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность вложенных отрезков, то есть

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда существует точка, принадлежащая одновременно всем отрезкам  $[a_n, b_n]$ , то есть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Важно, что в определении отрезки, так как в случае  $(0, \frac{1}{n}]$  пересечение равно  $\emptyset$ .

## 1.3 Метод математической индукции. Бином Ньютона

(21-24)

Пусть  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность утверждений. Если

1)  $P_1$  верно, 2) для любого  $n \in \mathbb{N}$  из  $P_n$  следует  $P_{n+1}$

то  $P_n$  верно для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

**Бином Ньютона.** Если  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , то

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}.$$

При  $n = 0$  и  $n = 1$  очевидно.  $n = 1$  служит базой индукции.

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k+1} y^{n-k} +$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n+1-k} = C_n^n x^{n+1} y^0 + \\
\sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} + C_n^k) x^k y^{n+1-k} + C_n^0 x^0 y^{n+1} &= C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k} + \\
C_{n+1}^0 x^0 y^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

## 1.4 Существование максимума и минимума конечного множества, следствия

(25-26)

Число  $M$  называется максимумом или наибольшим элементом множества  $E \subset \mathbb{R}$ , если  $M \in E$  и  $\forall x \in E \ x \leq M$ , обозначается  $\max E$ .

**Теорема.** Во всяком конечном подмножестве  $\mathbb{R}$  есть наибольший и наименьший элемент.

**Доказательство.** Проведем индукцию по числу  $n$  элементов множества. База индукции  $n = 1$ : если в множестве всего один элемент, то он и наибольший, и наименьший. Для определённости индукционный переход проведём в случае максимума. Пусть всякое  $n$ -элементное подмножество  $\mathbb{R}$  имеет максимум,  $E$  —  $(n + 1)$ -элементное подмножество  $\mathbb{R}$ :

$$E = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}.$$

Обозначим

$$c = \max\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Если  $c \leq x_{n+1}$ , то очевидно  $x_{n+1} = \max E$ , иначе  $c = \max E$ .

**Следствие 1.** Во всяком непустом ограниченной сверху (снизу) подмножестве  $\mathbb{Z}$  есть наибольший (наименьший) элемент.

**Доказательство.** Пусть  $E \subset \mathbb{Z}$ ,  $E \neq \emptyset$ ,  $E$  ограничено сверху. Выберем какой-нибудь элемент  $n_0 \in E$  положим  $E_1 = \{n \in E : n \geq n_0\}$ .

Поскольку  $E$  ограничено сверху, то множество  $E_1$  конечно (в нем не более  $M - n_0 + 1$  элементов, где  $M$  — верхняя граница  $E$ ). По теореме в множестве  $E_1$  есть наибольший элемент, он же будет наибольшим элементом в  $E$ .

**Следствие 2.** Во всяком непустом подмножестве  $\mathbb{N}$  есть наименьший элемент.

## 1.5 Целая часть числа. Плотность множества рациональных чисел

(26-27)

**Определение.** Пусть  $x \in \mathbb{R}$ . Наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ , называется целой частью  $x$  и обозначается  $[x]$ . Она существует так как подмножество целых чисел, имеющее верхнюю границу, имеет максимум.

**Замечание 1.** Из определения следует, что  $[x] \leq x < [x] + 1$ ,  $x - 1 < [x] \leq x$

**Теорема. Плотность множества рациональных чисел.** Во всяком непустом интервале есть рациональное число.

**Доказательство.** Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , тогда  $\frac{1}{b-a} > 0$  и по аксиоме Архимеда найдётся такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $n > \frac{1}{b-a}$ , то есть  $\frac{1}{n} < b - a$ . Положим  $c = \frac{[na]+1}{n}$ , тогда  $c \in \mathbb{Q}$  и  $c \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + b - a = b$   
 $c > \frac{na-1+1}{n} = a$   
 то есть  $c \in (a, b)$ .

**Следствие 3.** Во всяком интервале бесконечно много рациональных чисел.

**Доказательство.** Пусть в некотором интервале  $(a, b)$  количество рациональных чисел конечно. Обозначим  $x_1$  наименьшее из них. Тогда в интервале  $(a, x_1)$  нет ни одного рационального числа, что противоречит теореме.

## 1.6 Две теоремы о "бедности" счетных множеств (38)

**Теорема.** Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

**Доказательство.** Пусть множество  $A$  бесконечно. Тогда в нём есть элемент  $a_1$ . Множество  $A \setminus \{a_1\}$  бесконечно, поэтому в нём есть элемент  $a_2$ . Ввиду бесконечности множества  $A$  этот процесс не оборвётся ни на каком шаге; продолжая его и далее, получим множество  $B = \{a_1, a_2, \dots\}$ , которое по построению будет счётным подмножеством  $A$ .

**Теорема.** Всякое бесконечно подмножество счётного множества счётно: если  $A$  счётно,  $B \subset A$  и  $B$  бесконечно, то  $B$  счётно.

**Доказательство.** Расположим элементы  $A$  в виде последовательности:  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ .

Будем нумеровать элементы  $B$  в порядке их появления в этой последовательности. Тем самым каждый элемент  $B$  будет занумерован ровно один раз и, так как  $B$  бесконечно, для нумерации будет использован весь натуральный ряд.

## 1.7 Теорема об объединении не более чем счётных множеств (с леммой)

(39)

**Лемма.** Пусть элементы множества  $A$  предстаимы в виде бесконечной в обоих направлениях матрицы (занумерованы с помощью упорядоченной пары натуральных чисел по одному разу с использованием всех возможных пар). Тогда  $A$  счётно.

**Доказательство.** Занумеруем элементы множества  $A$  по диагоналям  $A = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, \dots\}$ .

**Определение.** Не более чем счётное множество — счётное, конечное или пустое множество

**Теорема.** Не более чем счётное объединение не более чем счётных множеств.

**Доказательство.** Пусть  $B = \bigcup_{k=1}^n A_k$  или  $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , множества  $A_k$  не более чем счётны. Запишем элементы  $A_1$  в первую строку матрицы, элементы  $A_2 \setminus A_1$  — во вторую строку и так далее, то есть если задано множество  $A_k$ , то элементы  $A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$  запишем в  $k$ -тую строку матрицы. Таким образом все элементы множества  $B$  окажутся записанными в клетки матрицы (но при этом некоторые клетки могут остаться пустыми). Значит  $B$  равномощно некоторому подмножеству счётного множества  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . А подмножество счётного либо счётно, либо конечно, либо пусто, то есть не более чем счётно.

## 1.8 Счетность множества рациональных чисел

(40)

**Теорема.** Множество рациональных чисел счётно.

**Доказательство.** Обозначим  $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ ,  $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$

При всех  $q \in \mathbb{N}$  множество  $\mathbb{Q}_q = \{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \dots\}$  счётно. По теореме

$\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathbb{Q}_q$  счётно. Аналогично  $\mathbb{Q}_-$  счётно. По той же теореме

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$  счётно.

**Следствие 1.** Если  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , то  $\mathbb{Q} \cap (a, b)$  счётно.

## 1.9 Несчетность отрезка

(40)

**Теорема.** Отрезок  $[0, 1]$  несчётен.

**Доказательство.** Допустим противное пусть отрезок  $[0, 1]$  счётен, то есть все числа отрезка  $[0, 1]$  можно расположить в виде последовательности  $[0, 1] = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ .

Разобьём отрезок  $[0, 1]$  на три равных отрезка  $[0, \frac{1}{3}]$ ,  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ,  $[\frac{2}{3}, 1]$  и обозначим через  $[a_1, b_1]$  тот из них, который не содержит точки  $x_1$ . Далее разобьём отрезок  $[a_1, b_1]$  на три отрезка и обозначим через  $[a_2, b_2]$  тот из них, который не содержит точки  $x_2$ . Этот процесс продолжим неограниченно. В результате мы построим последовательность вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ , причём  $x_n \notin [a_n, b_n]$  при любом  $n$ . По аксиоме о вложенных отрезках существует точка  $x^*$ , принадлежащая всем отрезкам  $[a_n, b_n]$ . Но тогда  $x^* = x_m$  при неко-

тором  $m$ . По построению  $x^* \notin [a_m, b_m]$ , что противоречит принадлежности  $x^*$  всем отрезкам.

**Следствие 2.** Множества вещественных чисел  $\mathbb{R}$  и иррациональных чисел  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  несчётны.

**Определение.** Если множество эквивалентно отрезку  $[0, 1]$ , то говорят, что оно имеет мощность континуума.

**Замечание 1.** Любой невырожденный отрезок имеет мощность континуума. Также как и любой промежуток, вся прямая  $\mathbb{R}$  и всё пространство  $\mathbb{R}^m$   $m \in \mathbb{N}$ .

**Замечание 2.** Множество всех функций  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , более богато элементами, чем отрезок  $[0, 1]$ , то есть оно не равномощно отрезку, но имеет часть, равномощную отрезку.

**Замечание 3.** Мощность — класс эквивалентности. Два множества попадают в один класс, если они эквивалентны.

**Замечание 4.** Если из бесконечного множества удалить конечное число элементов, множество окажется бесконечным, то получится множество равномощное исходному. Поэтому любое бесконечное множество имеет равномощное подмножество, не совпадающее с исходным множеством.

## 1.10 Единственность предела последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности

(50)

**Теорема. Единственность предела последовательности.** Последовательность в метрическом пространстве не может иметь более одного предела: если  $x_n \rightarrow a$ ,  $x_n \rightarrow b$ , то  $a = b$ .

**Доказательство.** Предположим противное: пусть  $a \neq b$ . Тогда по аксиоме  $\rho(a, b) > 0$ . Возьмём  $\varepsilon = \frac{\rho(a, b)}{2}$ . По определению предела,  $\exists N_1, N_2$ , что  $\forall n > N_1 \rho(x_n, a) < \varepsilon$  и  $\forall n > N_2 \rho(x_n, b) < \varepsilon$ . Тогда если  $n > \max(N_1, N_2)$ , то по аксиомам расстояния  $\rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = \rho(a, b)$ .  
Что невозможно.

**Теорема.** Сходящаяся последовательность ограничена.

**Доказательство.** Пусть  $x_n \rightarrow a$ . Взяв  $\varepsilon = 1$  найдем  $N$ , что для всех номеров  $n > N$  будет  $\rho(x_n, a) < 1$ . Пусть  $R = \max\{\rho(x_1, a), \dots, \rho(x_N, a), 1\}$ , тогда  $\rho(x_n, a) \leq R$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ .

## 1.11 Предельный переход в неравенстве. Теорема о сжатой подпоследовательности

(51)

**Теорема. Предельный переход в неравенстве.** Пусть  $x_n, y_n$  — вещественные последовательности  $x_n \leq y_n$  при всех натуральных  $n$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$   $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$ . Тогда  $a \leq b$ .

**Доказательство.** Предположим противное: пусть  $a > b$ . Тогда  $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$ . По определению предела найдутся такие номера  $N_1, N_2$ , что  $a - \varepsilon < x_n$  для всех  $n > N_1$ , а  $y_n < b + \varepsilon$  для всех  $n > N_2$ . Значит если  $n > \max\{N_1, N_2\}$ , то  $y_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < x_n$ , что противоречит условию.

**Замечание 1.**  $x_n = -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}$  показывает, что из  $x_n < y_n$  не следует  $\lim x_n < \lim y_n$ .

**Следствие 1.** 1. Если  $x_n \leq b$  при всех  $n \in \mathbb{N}$  и существует  $\lim x_n$ , то  $\lim x_n \leq b$ .



2. Если  $x_n \geq a$  при всех  $n \in \mathbb{N}$  и существует  $\lim x_n$ , то  $\lim x_n \geq a$ .
3. Если  $x_n \in [a, b]$  при всех  $n \in \mathbb{N}$  и существует  $\lim x_n$ , то  $\lim x_n \in [a, b]$ .

**Замечание 2.** Свойство отрезка из утверждения 3 (неверное для других типов отрезков) называется замкнутостью.

**Теорема. О сжатой последовательности (О двух милиционерах).** Пусть  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$  — вещественные последовательности,  $x_n \leq y_n \leq z_n$ , при всех  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\lim x_n = \lim z_n = a$ . Тогда предел  $\{y_n\}$  существует и равен  $a$ .

**Доказательство.** Возьмём  $\varepsilon > 0$ . По определению, предела найдутся такие номера  $N_1, N_2$ , что  $a - \varepsilon < x_n$  для всех  $n > N_1$ , а  $z_n < a + \varepsilon$  для всех  $n > N_2$ . Пусть  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . Тогда при  $n > N$

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon.$$

В силу произвольности  $\varepsilon$  предел  $\{y_n\}$  существует и равен  $a$ .

**Замечание 2.** Отметим, что если  $|y_n| \leq z_n$  при всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $z_n \rightarrow 0$ , то  $y_n \rightarrow 0$ .

**Замечание 3.** В обеих теорема достаточно выполнения неравенств для всех номеров, начиная с некоторого.

## 1.12 Бесконечно малые. Арифметические действия над сходящимися последовательностями

(53)

**Определение.** Последовательность вещественных или комплексных чисел называется бесконечно малой, если она стремится к нулю.

**Лемма.** Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая:  $\{x_n\}$  — бесконечно малая числовая последовательность,  $\{y_n\}$  — ограниченная числовая последовательность, тогда  $\{x_n y_n\}$  — бесконечно малая.

**Доказательство.** В силу ограниченности  $\{y_n\}$  найдётся  $K > 0$ , что  $|y_n| \leq K$  при всех  $n$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$ . По определению предела последовательности  $\{x_n\}$  существует такой номер  $N$ , что  $|x_n| < \frac{\varepsilon}{K}$  для всех  $n > N$ . Но тогда для всех  $n > N$ ;

$$|x_n y_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon.$$

В силу произвольности  $\varepsilon$  это и означает  $x_n y_n \rightarrow 0$ .

(57)

**Теорема. Арифметические действия над сходящимися последовательностями в нормированном пространстве.** Пусть  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное пространство,  $\{x_n\}, \{y_n\}$  в  $X$ ,  $\lambda_n$  — числовая последовательность  $x_0, y_0 \in X$ ,  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  (или  $\mathbb{C}$ ),  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $y_n \rightarrow y_0$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ . Тогда

1.  $x_n + y_n \rightarrow x_0 + y_0$
2.  $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda_0 x_0$
3.  $x_n - y_n \rightarrow x_0 - y_0$  4.  $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$

**Теорема. Арифметические действия над сходящимися числовыми последовательностями.** Если  $x_n, y_n$  — числовые последовательности,  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$  (или  $\mathbb{C}$ ),  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $y_n \rightarrow y_0$ . Тогда

1.  $x_n + y_n \rightarrow x_0 + y_0$  2.  $x_n y_n \rightarrow x_0 y_0$  3.  $x_n - y_n \rightarrow x_0 - y_0$  4.  $|x_n| \rightarrow |x_0|$
5. Если  $y_n \neq 0$  при всех  $n$  и  $y_0 \neq 0$ , то  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x_0}{y_0}$ .

**Доказательство.**

1. Возьмём  $\varepsilon > 0$ . По определению предела найдутся такие номера  $N_1$  и  $N_2$ , что  $\|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$  для всех  $n > N_1$ , а  $\|y_n - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$  для всех  $n > N_2$ . Положим  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . Тогда при всех  $n > N$  будет

$$\|(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. По неравенству треугольника

$$||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| = |(\lambda_n - \lambda_0)x_n + \lambda_0(x_n - x_0)| \leq |\lambda_n - \lambda_0| ||x_n|| + |\lambda_0| ||x_n - x_0||$$

$\{|\lambda_n - \lambda_0|\}$  и  $\{||x_n - x_0||\}$  — бесконечно малые.  $\{||x_n||\}$  — ограничена по теореме. А  $\{|\lambda_0|\}$  — постоянная. Тогда оба слагаемых бесконечно малые, по лемме, тогда их сумма тоже бесконечно малая.

$$3. x_n - y_n = x_n + (-1)y_n \rightarrow x_0 + (-1)(y_0) = x_0 - y_0.$$

4. Следует из  $|||x_n|| - ||| \leq ||x_n - x_0||$  и теоремы о двух милиционерах.

5. Достаточно доказать, что  $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{y_0}$ . Поскольку  $\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} = (y_0 - y_n) \cdot \frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{y_n}$   $\{y_0 - y_n\}$  — бесконечно малая,  $\{\frac{1}{y_0}\}$  — ограниченная. Осталось доказать ограниченность  $\{\frac{1}{y_n}\}$ .

По определению предела для  $\varepsilon = \frac{|y_0|}{2} > 0$  существует номер  $N$ , что  $||y_n - y_0|| < \varepsilon$  для всех  $n > N$ . Тогда при всех  $n > N$  по свойствам модуля

$$|y_n| = |y_0 + y_n - y_0| \geq |y_0| - |y_n - y_0| > |y_0| - \varepsilon = \frac{|y_0|}{2}$$

Обозначим  $k = \min\{|y_1|, \cdot, |y_n|, \frac{|y_0|}{2}\}$ .  $k > 0$  и  $|y_n| \geq k$  при всех  $n$ . Следовательно  $|\frac{1}{y_n}| \leq \frac{1}{k}$  при всех  $n$ , что и означает ограниченность  $\{\frac{1}{y_n}\}$

### 1.13 Свойство скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Норма порожденная скалярным произведением

(59)

**Определение.** Пусть  $X$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ . Функция  $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  (или  $\mathbb{C}$ ) называется скалярным произведением в  $X$  (обозначение  $\varphi x, y = \langle a, b \rangle$ ), если она удовлетворяет

следующим свойствам.

1. Линейность по первому аргументу: для всех  $x_1, x_2, y \in X$  и всех  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$$\langle \lambda x_1 + \mu x_2, y \rangle = \lambda \cdot \langle x_1, y \rangle + \mu \cdot \langle x_2, y \rangle.$$

2. Эрмитовская симметричность

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$

3. Положительная определённость:

$$\langle x, x \rangle \geq 0; \quad \langle a, b \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

В вещественном случае черту можно опустить.

Некоторые свойства скалярного произведения:

$$1. \langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle.$$

$$2. \langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle.$$

$$3. \langle \theta, y \rangle = \langle x, \theta \rangle = 0$$

**Теорема. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.**(59)

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Если рассматривать норму, порождённую скалярным произведением, то верно:  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , так как  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

**Доказательство.** Если  $y = \theta$  неравенство выполнено. Иначе положим

$$\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

Тогда в силу аксиом скалярного произведения и равенства  $\lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2$

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + (-1 - 1 + 1) \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}$$

Таким образом

$$\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 = \langle y, y \rangle \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq$$

**Замечание 1.** Неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда вектора коллинеарны.

Вункция  $p(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  — норма в  $X$ .

Положительная определённость следёт из аксиом.

$$p(\lambda x) = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = |\lambda| p(x)$$

Докажем неравенство треугольника

$$\begin{aligned} p^2(x + y) &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + 2\Re \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \leq p^2(x) + 2p(x)p(y) + \\ &+ p^2(y) = (p(x) + p(y))^2 \end{aligned}$$

**Замечание 2.** Неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда вектора  $x, y$  сонаправлены.

**Доказательство.** Если один из векторов нулевой, равенство очевидно. Пусть  $x, y \neq \theta$ . Обращение неравенства в равенство равносильно тому, что

$$\Re \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$$

Из второго равенства вектора коллинеарны, то есть  $x = \lambda y$ . Подставляя, получим  $\Re \lambda \langle y, y \rangle = |\lambda| \langle y, y \rangle$ . Отсюда  $\lambda > 0$

## 1.14 Неравенство Коши-Буняковского в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$ . Сходимость и покомпонентная сходимость

(61)

**Теорема.** Неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника в  $\mathbb{R}^m$ . Для любых вещественных чисел  $x_1, \dots, x_m,$

$y_1, y_m$

$$\left( \sum_{k=1}^m x_k y_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^m x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^m y_k^2 \right).$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k + y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^m y_k^2}.$$

**Доказательство.** Первое — КБШ, второе правило — треугольника.

**Определение.** Говорят, что последовательность  $\{x^{(n)}\}$  точек  $\mathbb{R}^m$  сходится к пределу  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$  покоординатно, если  $x_j^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_j^{(0)}$ , для всех  $j \in [1 : m]$

**Лемма.** В  $\mathbb{R}^m$  покоординатная сходимость и сходимость по евклидовой норме равносильны

**Доказательство.** Утверждение следует из неравенств

$$|x^{(n)} - x^{(0)}| \leq |x^{(n)} - x^{(0)}| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k^{(n)} - x_k^{(0)})^2} \leq \sqrt{m} \max_{1 \leq k \leq m} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|$$

и теоремы о предельном переходе в неравенствах.

**Следствие .** Сходимость последовательности комплексных чисел равносильна одновременной сходимости последовательности из их мнимых частей.

## 1.15 Бесконечно большие и бесконечно малые. Арифметические действия над бесконечно большими

Билет 15: Бесконечно большие и бесконечно малые. Арифметические действия над бесконечно большими (65-67)

**Определение.** Говорят, что вещественная последовательность  $\{x_n\}$  стремится к

1) плюс бесконечности, и пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \text{ или } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, \text{ если } \forall E > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow x_n > E;$$

2) минус бесконечности, и пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \text{ или } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty, \text{ если}$$

$$\forall E > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > N \quad x_n < -E;$$

3) бесконечности, и пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \text{ или } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty, \text{ если}$$

$$\forall E > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > N \quad |x_n| > E$$

**Замечание 1.** Из определений 1 и 2 следует третье, обратно неверно  $x_n = (-1)^n n$

**Определение.** Последовательность называется бесконечно большой, если стремится к бесконечности.

**Замечание 2.** Из определения следует, что если  $x_n \rightarrow \infty$ , то  $x_n$  неограничена. Обратное неверно  $x_n = (1 + (-1)^n)n$  не ограничена и не стремится к бесконечности.

**Замечание 3.** Понятно, что последовательность не может стремиться одновременно к бесконечности и к конечному пределу, а также к бесконечности разных знаков. Тогда предел единственный в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Замечание 4.** Определение достаточно проверять лишь для достаточно больших  $E$ , можно также опустить требование  $E > 0$ .

**Замечание 5.** Определение сходящейся последовательности не меняется: последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел. Бесконечно большие последовательности считаются расходящимися.

**Лемма. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми.** Пусть  $\{x_n\}$  — числовая последовательность  $x_n \neq 0$  ни при каком  $n$ . Тогда последовательность  $\{x_n\}$  — бесконечно большая в том и только том случае когда  $\{\frac{1}{x_n}\}$  — бесконечно малая.

**Доказательство.** Пусть  $x_n \rightarrow \infty$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$  и для числа  $E = \frac{1}{\varepsilon}$  подберём  $N$ , что для всех  $n > N \quad |x_n| > E$ . Последнее равносильно  $|\frac{1}{x_n}| < \varepsilon$ , что и означает стремление  $\frac{1}{x_n}$  к нулю. в обратную сторону аналогично.

**Теорема. Арифметические действия над бесконечно большими.** Пусть  $\{x_n\}, \{y_n\}$  — числовые последовательности.

1. Если  $x_n \rightarrow +\infty$ ,  $\{y_n\}$  ограничена снизу, то  $x_n + y_n \rightarrow +\infty$

2. Если  $x_n \rightarrow -\infty$ ,  $\{y_n\}$  ограничена сверху, то  $x_n + y_n \rightarrow -\infty$
3. Если  $x_n \rightarrow \infty$ ,  $\{y_n\}$  ограничена, то  $x_n + y_n \rightarrow \infty$
4. Если  $x_n \rightarrow \pm\infty$ ,  $y_n \geq b > 0$  для всех  $n$  (или  $y_n \rightarrow b_1 > 0$ ), то  $x_n \rightarrow \pm\infty$
5. Если  $x_n \rightarrow \pm\infty$ ,  $y_n \leq b < 0$  для всех  $n$  (или  $y_n \rightarrow b_1 < 0$ ), то  $x_n \rightarrow \mp\infty$
6. Если  $x_n \rightarrow \infty$ ,  $|y_n| \geq b > 0$  для всех  $n$  (или  $y_n \rightarrow b_1 \neq 0$ ), то  $x_n \rightarrow \infty$
7. Если  $x_n \rightarrow a \neq 0$ ,  $y_n \rightarrow 0$ ,  $y_n \neq 0$ ; при всех  $n$ , то  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$
8. Если  $x_n \rightarrow a \in \mathbb{C}$ ,  $y_n \rightarrow \infty$ , то  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$
9. Если  $x_n \rightarrow \infty$ ,  $y_n \rightarrow b \in \mathbb{C}$ ,  $y_n \neq 0$  при всех  $n$ , то  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Докажем отверждения 1, 6, 8

1. Возьмём  $E > 0$ . По определению ограниченности снизу найдётся такое число  $m \in \mathbb{R}$ , что  $y_n \geq 0$  при всех  $n$ . По определению бесконечного предела существует такой номер  $N$ , что  $x_n > E - m$  для всех  $n > N$ . Тогда для всех  $n > N$   $x_n + y_n > E - m + m > E$ .

6. Пусть  $|y_n| \geq b > 0$  для всех  $n$ . Возьмём  $E > 0$ . По определению бесконечного предела существует такой номер  $N$ , что  $|x_n| > \frac{E}{b}$  для всех  $n > N$ . Тогда для всех  $n > N$   $|x_n y_n| > \frac{E}{b} \cdot b = E$

Если  $y_n \rightarrow b_1 \neq 0$ . Положим  $b = \frac{|b_1|}{2}$ , если  $b_1$  — число и  $b = 1$ , если  $b_1$  — бесконечность. Тогда начиная с некоторого номера  $|y_n| \geq b$  и применимо только что доказанное.

8. По теореме о пределе произведения и лемме  $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \rightarrow a \cdot 0 = 0$

**Замечание 1.** Часть утверждений теорем об арифметических свойствах можно объединить следующей формулировкой. Если  $\{x_n\}, \{y_n\}$  — вещественные последовательности,  $x_n \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}, y_n \rightarrow y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , знак  $*$  означает одно из четырёх арифметических действий и  $x_0 * y_0$  определено в  $\overline{\mathbb{R}}$ , то  $x_n * y_n \rightarrow x_0 * y_0$

Теорема не позволяет сделать заключение о значении в следующих четырёх случаях

1.  $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow -\infty$        $x_n + y_n \rightarrow ?$



2.  $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow \infty$        $x_n y_n \rightarrow ?$   
 3.  $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$        $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow ?$   
 4.  $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow \infty$        $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow ?$

## 1.16 Свойства открытых множеств. Открытость шара. Внутренность

(68-70)

**Определение.** Точка  $a$  называется внутренней точкой множества  $D$ , если существует окрестность точки  $a$ , содержащаяся в  $D$ .

**Определение.** Множество  $D$  называется открытым, если все его точки внутренние.

**Определение.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $a \in X, r > 0$ . Множество

$$B(a, r) = \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$$

называются открытым шаром радиуса  $r$  с центром в точке  $a$  или окрестностью ( $r$ -окрестностью) точки  $a$  и обозначается  $V_a(r)$  или  $V_a$ , если значение  $r$  несущественно.

Покажем, что открытый шар  $B(a, r)$  — открытое множество.

Пусть  $p \in B(a, r)$ , то есть  $\rho(p, a) < r$

Положим  $h = r - \rho(p, a)$  ( $h > 0$ ) и проверим что  $B(p, h) \subset B(a, r)$ .

Пусть  $x \in B(p, h)$ , то есть  $\rho(x, p) < h$ , тогда

$$\rho(x, a) \leq \rho(x, p) + \rho(p, a) < h + r - h = r$$

То есть  $x \in B(a, r)$ .

**Теорема. Свойства открытых множеств.**

1. Объединение любого семейства открытых множеств открыто.
2. Перечисление конечного семейства открытых множеств открыто

**Доказательство.** 1. Пусть задано семейство открытых множеств  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ,  $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ ,  $x \in G$ . Докажем, что  $x$  — внутренняя точка  $G$ . Так как  $x \in G$ , найдётся  $\alpha : x \in G_\alpha$ , тогда существует шар  $B(x, r) \subset G_\alpha$ , тогда  $B(x, r) \subset G$ .

2. Пусть задано конечное семейство открытых множеств  $\{G\}_{k=1}^n$ ,  $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$ ,  $x \in G$ . Тогда  $x$  принадлежит каждому из множеств и в силу открытости найдутся такие  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , что  $B(x, r_k) \subset G_k$ . При  $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$   $B(x, r) \subset G_k$  для любого  $k \in [1 : n]$ . Тогда, по определению,  $B(x, r) \subset G$ .

**Замечание 1.** Пересечении бесконечного семейства открытых множеств не обязательно быть открытым. Например

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

а одноточечное множество не является открытым в  $\mathbb{R}$ .

**Определение.** Множество всех внутренних точек множества  $D$  называется внутренностью  $D$  и обозначается  $\mathring{D}$  или  $\text{Int } D$ .

**Замечание 2.** Внутренность  $D$  есть:

- а) объединение всех открытых подмножеств  $D$
- б) максимальное по включению открытое подмножество  $D$ .

**Доказательство.** Пусть  $G$  — объединение всех открытых подмножеств  $D$ , тогда  $G \subset D$ ,  $G$  содержит любое открытое подмножество  $G$  и открыто по теореме, то есть  $G$  — максимальное по включению открытое подмножество  $D$ . Если  $x$  — внутренняя точка  $D$ , то  $D$  содержит окрестность  $V_x$  точки  $x$ , а тогда  $x \in V_x \subset G$ . С другой стороны, если  $x \in G$ , то  $x$  принадлежит некоторому открытому подмножеству  $D$  и значит является его внутренней точкой и, тем более, внутренней точкой  $D$ .

**Замечание 3.** Множество открыто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью.

## 1.17 Предельный точки. Связь Открытости и замкнутости. Свойство замкнутых множеств. Замыкание

(70-75)

**Определение.** Точка  $a$  называется предельной точкой или точкой сгущения множества  $D$ , если в любой окрестности точки  $a$  найдётся точка множества  $D$ , отличная от  $a$ .

$$\forall \dot{V}_a \exists x \in \dot{V}_a \cap D$$

**Определение.** Множество  $D$  называется замкнутым (в  $X$ ), если он содержит все свои предельные точки.

**Теорема.** Множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.

**Доказательство.** Пусть  $D^c$  замкнуто. Возьмём точку  $x \in D$  и докажем, что  $x$  — внутренняя точка  $D$ ; в силу произвольности  $x$  это и будет обозначать открытость  $D$ . Поскольку  $x \notin D^c$ , а  $D^c$  замкнуто  $x$  не является предельной точкой  $D^c$ , то есть существует такая окрестность  $\dot{V}_x \cap D^c = \emptyset$ , тогда  $V_x \cap D^c = \emptyset$ , то есть  $V_x \subset D$ , то есть  $x$  — внутренняя точка.

Пусть  $D$  открыто. Возьмём точку  $x$ , предельную для  $D^c$ , и докажем, что  $x \in D^c$ ; в силу произвольности  $x$  это и будет означать замкнутость  $D^c$ . Поскольку в любой окрестности точки  $X$  найдётся точка  $D^c$ ,  $x$  не является внутренней точкой  $D$ ,  $x \notin D \Rightarrow x \in D^c$

**Теорема. Свойства замкнутых множеств.**

1. Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.
2. Объединение конечного семейства замкнутых множеств замкнуто.

**Доказательство.** Следует из аналогичной теоремы для открытых множеств и формул.

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \left( \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^c \right)^c \quad \bigcup_{k=1}^n F_k = \left( \bigcap_{k=1}^n F_k^c \right)^c$$

**Замечание 1.**  $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} = \mathbb{Q}$  не замкнуто в  $\mathbb{R}$ . Так как в любом интервале есть рациональное число, все точки числовой прямой являются предельными.

**Определение.** Точка  $a$  называется точкой прикосновения множества  $D$ , если в любой её окрестности есть точка множества  $D$ .

**Определение.** Множество всех точек соприкосновения называется замыканием  $D$  и обозначается  $\bar{D}$  или  $C1D$ .

**Замечание 2.** Точки соприкосновения — объединение множества предельных и изолированных точек  $D$ .

**Замечание 4.** Точка  $a$  — точка прикосновения множества  $D$  тогда и только тогда, когда существует последовательность  $\{x_n\}$  точек множества  $D$  стремящаяся к  $a$ .

**Доказательство.** Пусть  $a$  — точка прикосновения  $D$ . Если  $a \in D$ , то можно взять стационарную последовательность, все члены которой равны  $a$ . Иначе  $a$  — предельная точка  $D$  и искомая последовательность существует по замечанию к определению предельной точки.

Обратно, если существует последовательность  $\{x_n\}$  с перечисленными свойствами, то по определению предела в любой окрестности точки  $a$  найдётся член этой последовательности (туда даже попадают все члены, начиная с некоторого номера), то есть точка множества  $D$ .

**Замечание 4.** Замыкание  $D$  есть:

- а) Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $D$
- б) Минимальное по включению замкнутое множество, содержащее  $D$ .

**Доказательство.** Пусть  $F$  — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $D$ . Тогда  $D \subset F$ ,  $F$  содержится в любом замкнутом множестве, содержащем  $D$ , и  $F$  замкнуто по теореме, то есть  $F$  — минимальное по включению замкнутое множество содер-

жащее  $D$ . Если  $x \in \overline{D}$ , то есть  $x$  точка прикосновения  $F$ , а тогда  $x \in F$  в силу замкнутости  $F$ . С другой стороны, если  $x \notin \overline{D}$ , то у точки  $x$  существует окрестность  $V_x$ , содержащаяся в  $D^c$ . Тогда её дополнение  $V_x^c$  замкнуто и содержит  $D$ , поэтому  $F \subset V_x^c$ , то есть  $V_x \subset F^c$ , тогда  $x \notin F$ ;

**Замечание 5** Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.

**Определение.** Внутренность дополнения множества  $D$  называется внешностью  $D$  и обозначается  $\text{Ext}D$

**Определение.** Точка  $a$  называется граничной точкой множества  $D$ , если

$$\forall V_a \exists x_1 \in D, x_2 \in D^c : \{x_1, x_2\} \subset V_a.$$

**Определение.** множество всех граничных точек называется границей и обозначается  $\text{Fr}D$  или  $\delta D$

**Определение.** Множество всех предельных точек множества  $D$  называется производным множеством множества  $D$  и обозначается  $D'$

**Замечание 6.** 1.  $\text{Ext}D = (\overline{D})^c$

2.  $\delta D = \overline{D} \setminus \overset{\circ}{D}$

3. Граница замкнута

4. Множество  $D'$  замкнуто

## 1.18 Открытость и замкнутость относительно пространства и подпространства

(75)

**Теорема.** Открытость и замкнутость в пространстве и подпространстве. Пусть  $(x, p)$  — метрическое пространство  $D \subset$

$Y \subset X$ .

1.  $D$  открыто в  $Y$  тогда и только тогда, когда существует множество  $G$ , открытое в  $X$ , что  $D = G \cap Y$

2.  $D$  замкнуто в  $Y$  тогда и только тогда, когда существует такое множество  $F$ , замкнутое в  $X$ , что  $D = F \cap Y$

**Доказательство.** 1. Пусть  $D = Y \subset G$ , где  $G$  открыто в  $X$ . Возьмём точку  $a \in D$ . В силу открытости  $G$  в  $X$  существует окрестность  $V_a^X$  точки  $a$  в  $X$  :  $V_a^X \subset G$ . Тогда  $V_a^Y = V_a^X \cap Y$  — окрестность содержащаяся в  $D$ . В силу произвольности  $a$  множество  $D$  открыто в  $Y$ .

Обратно, пусть  $D$  открыто в  $Y$ . Тогда для каждой точки  $a \in D$  найдётся её окрестность в  $Y$ , содержащаяся в  $D$  :  $V_a^Y = B^Y(a, r_a) \subset D$ . Обозначим  $G = \bigcup_{a \in D} B^X(a, r_a)$ . Тогда  $G$  открыто в  $X$  как объ-

единение открытых множеств и  $G \cap Y = \bigcup_{a \in D} (B^x(a, r_a) \cap Y) =$

$$\bigcup_{a \in D} B^Y(a, r_a) = D$$

2. По теореме замкнутость  $D$  в  $Y$  равносильна открытости  $Y \setminus D$  в  $Y$ . По доказанному, последнее равносильно существованию такого открытого в  $X$  множества  $G$ , что  $Y \setminus D = G \cap Y$ . Осталось обозначить  $F = G^c$  и учесть, что соотношения  $S = F \cap Y$  и  $Y \setminus D = G \setminus Y$  равносильны.

## 1.19 Компактность относительно пространства и подпространства

(77)

**Определение.** Семейство множество  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  называется покрытием множества  $K$ , если  $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$

**Определение.** Пусть  $(X, p)$  — метрическое пространство,  $K \subset X$ . Покрытие  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  множества  $K$  называется открытым если при любом  $\alpha \in A$  множество  $G_\alpha$  открыто в  $X$ .

**Определение.** Подмножество  $K$  метрического пространства  $X$  называется компактным, если из любого открытого покрытия  $K$  можно извлечь конечное подпокрытие:

$\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_N \in A \quad K \subset \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i}, \quad G_\alpha \text{ Открыты в } X.$

**Лемма.** Пусть  $(X, p)$  — метрическое пространство,  $Y$  — подпространство  $X$ ,  $K \subset Y$ . Тогда свойства компактности  $K$  в  $X$  и  $Y$  равносильны.

**Доказательство.** Пусть  $K$  компактно в  $X$ . Возьмём покрытие  $K$  множествами  $V_\alpha$  открытыми в  $Y$ . По теореме  $V_\alpha = G_\alpha \cap Y$ , где множества  $G_\alpha$  открыты в  $X$ . Множества  $G_\alpha$  образуют покрытие  $K$ :

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in N} V_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha.$$

Пользуясь компактностью  $K$  в  $X$ , извлечём из покрытия  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$

конечное подпокрытие  $K \subset \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i}$ , но поскольку  $K \subset Y$ ,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^N (G_{\alpha_i} \cap Y) = \bigcup_{i=1}^N V_{\alpha_i}$$

Итак, из произвольного покрытия  $K$  множествами, открытыми в  $Y$  можно извлечь конечное подпокрытие, что и означает компактность  $K$  в  $Y$ .

Пусть теперь  $K$  компактно  $Y$ . Возьмём покрытие  $K$  множествами  $G_\alpha$ , открытыми в  $X$ . Положим  $V_\alpha = G_\alpha \cap Y$ ; Тогда множества  $K$  в  $Y$

из него можно извлечь конечное подпокрытие  $\{V_{\alpha_i}\}_i^N = 1$ . Но тогда  $\{V_{\alpha_i}\}_i^N = 1$  тоже покрытие  $K$  и компактность  $K$  в  $X$  доказана.

## 1.20 Компактность, замкнутость и ограниченность

(78)

**Теорема. Простейшие свойства компактов.** Пусть  $(X, p)$  — метрическое пространство,  $K \subset X$

1. Если  $K$  компактно, то  $K$  замкнуто и ограничено.
2. Если  $X$  компактно, а  $K$  замкнуто, то  $K$  компакт.

**Доказательство.** 1. Докажем, что  $K^c$  открыто. Возьмём точку  $a \in K^c$  и докажем, что  $a$  — внутренняя точка  $K^c$ ; в силу произвольности  $a$  это и будет означать, что  $K^c$  открыто. Для каждой точки  $q \in K$  положим

$$r_q = \frac{p(q, a)}{2}, \quad V_q = B(a, r_q) \quad W_q = B(q, r_q)$$

Тогда  $V_q \cap W_q = \emptyset$ . Семейство  $\{W_q\}_{q \in K}$  — открытое покрытие компакта  $K$ . Извлечем из него конечное подпокрытие  $\{W_{q_i}\}_{i=1}^N$ :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^N W_{q_i} = W. \quad \text{Тогда } V = \bigcap_{i=1}^N V_{q_i} \text{ — окрестность точки } a, \text{ причём}$$

$V \cap W = \emptyset$ . Тем более  $V \cap K = \emptyset$ , то есть  $V \in K^c$ .

Докажем, что  $K$  ограничено. Зафиксируем точку  $a \in X$  и рассмотрим покрытие множества  $K$  открытыми шарами  $\{B(a, n)\}_{n=1}^\infty$ . В силу компактности  $K$  покрывается конечным набором шаров  $\{B(a, n_i)\}_{i=1}^N$  и, следовательно, содержится в шаре  $B(a, \max_{1 \leq i \leq N} n_i)$ .

2. Пусть  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — открытое покрытие  $K$ . Тогда, поскольку  $K$  замкнуто,  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \cap \{K^c\}$  — открытое покрытие  $X$ . Пользуясь компактностью  $X$  извлечём из него конечное подпокрытие  $X$ :  $X =$



$\bigcap_{i=1}^N G_{\alpha_i} \cup K^c$ . Но тогда  $\{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^N$  — покрытие  $K$ .

## 1.21 Две леммы о подпоследовательностях

(81)

**Замечание 1.** Для строго возрастающей последовательности  $\{n_k\}$  при всех  $k$  будет  $n_k \geq k$ . Действительно,  $n_1 \geq 1$  и из неравенства  $n_k \geq k$  следует, что  $n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1$ .

**Лемма.** Всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, и притом к тому же пределу: если  $\{x_n\}$  — последовательность в метрическом пространстве  $X$ ,  $x_{n_k}$  — её подпоследовательность,  $a \in X$ , то  $x_{n_k} \rightarrow a$ .

**Доказательство.** Возьмём  $\varepsilon > 0$ . По определению предела существует такой номер  $N$ , что  $\rho(x_n, a) < \varepsilon$  для всех  $n > N$ . Но тогда, если  $K > N$ , то по замечанию и  $n_k > N$ , а значит  $\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$ .

**Лемма.** Пусть  $\{x_n\}$  — последовательность в метрическом пространстве  $X$ ,  $\{x_{n_k}\}$  и  $\{x_{m_l}\}$  — её подпоследовательности, причём объединение множеств их индексов равно  $\mathbb{N}$ ,  $a \in X$ . Тогда, если  $x_{n_k} \rightarrow a$ ,  $x_{m_l} \rightarrow a$ , то и  $x_n \rightarrow a$ .

**Доказательство.** Возьмём  $\varepsilon > 0$ . По определению предела одной и другой подпоследовательности найдутся такие номера  $K$  и  $L$ , что

$$\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \quad \text{для всех } k > K$$

$$\rho(x_{m_l}, a) < \varepsilon \quad \text{для всех } l > L$$

Положим  $N = \max\{n_K, m_L\}$ . Если  $n > N$ , то или  $n$  равно некоторому  $n_k$ , причём  $k > K$ , а тогда  $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ , или  $n$  равно некоторому  $m_l$ , причём  $l > L$ , а тогда  $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ .

**Замечание 2.** Леммы сохраняют силу для  $a = \infty$  в нормированном пространстве и для  $a = \pm\infty$  для вещественных последовательностей. В доказательстве следует заменить неравенство вида  $\rho(x_n, a) < \varepsilon$  на  $|x_n| > E$  и т. п.

## 1.22 Лемма о вложенных параллелепипедах. Компактность куба

(79)

**Лемма.** Пусть  $\{[a^{(n)}, b^{(n)}]\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность вложенных параллелепипедов в  $\mathbb{R}^m$ , то есть

$$a_k^{(n)} \leq a_{k+1}^{(n)} \leq b_{k+1}^{(n)} \leq b_k^{(n)} \text{ при всех } n \in N \text{ и } j \in [1 : m]$$

Тогда  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a^{(n)}, b^{(n)}] \neq \emptyset$ .

**Доказательство.** При каждом  $k \in [1 : m]$  имеем последовательность вложенных отрезков  $\{[a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]\}_{n=1}^{\infty}$ . По аксиоме Кантора, найдётся точка  $x_k^*$ , принадлежащая всем отрезкам. Тогда  $m$ -мерная точка  $x^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)$  принадлежит всем параллелепипедам  $[a^{(n)}, b^{(n)}]$ .

**Лемма.** Замкнутый куб в  $\mathbb{R}^m$  компактен.

**Доказательство.** Пусть  $I = [a, b]$  — куб в  $\mathbb{R}^m$ ,  $\delta$  — его диагональ. Допустим, что  $I$  не компактен. Обозначим через  $\{G_\alpha\}$  такое открытое покрытие  $I$ , из которого нельзя извлечь конечное подпокрытие. Разделив каждый отрезок  $[a_k, b_k]$  пополам, разобьём куб  $I$  на  $2^m$  кубов. Среди них найдётся тот, который не покрывается никаким конечным набором множеств из семейства  $\{G_\alpha\}$  (так как иначе куб  $I$  покрывается конечным набором множеств из этого семейства). Обозначим этот куб  $I_1$ . Продолжая процесс деления и далее

получим последовательность вложенных замкнутых кубов  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  со следующими свойствами:

1)  $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ .

2)  $I_n$  не покрывается никаким конечным набором множеств из семейства  $G_\alpha$

3) Если  $x, y \in I_n$ , то  $|x - y| < \frac{\delta}{2^n}$

По лемме существует точка  $x^*$ , принадлежащая одновременно всем кубам. Следовательно,  $x^* \in I$ . Тогда  $x^*$  принадлежит некоторому элементу покрытия  $G_{\alpha^*}$ . Поскольку  $G_{\alpha^*}$  открыто, найдётся такое  $r > 0$ , что  $B(x^*, r) \subset G_{\alpha^*}$ . Так как  $\frac{\delta}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , найдётся такое  $n$ , что  $\frac{\delta}{2^n} < r$ , то есть  $I_n \subset B(x^*, r)$ . Значит куб  $I_n$  покрывается одним множеством, что противоречит свойству 2.

## 1.23 Характеристика компактов в $\mathbb{R}^m$ . Принцип выбора

(82)

**Теорема. Характеристика компактов в  $\mathbb{R}^m$ .** Пусть  $K \subset \mathbb{R}^m$ . Тогда следующие утверждения равносильны

1.  $K$  замкнуто и ограничено

2.  $K$  компактно

3. Из всякой последовательности точек  $K$ , можно извлечь подпоследовательность, имеющую предел, принадлежащий  $K$ .

**Доказательство.** проведём по схемк  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$ . Поскольку  $K$  ограничено,  $K$  содержится в некотором замкнутом кубе  $I$ . Тогда  $K$  замкнуто и по теореме, так как  $K = K \cap I$  и  $K$  замкнуто в  $\mathbb{R}^m$ . Куб  $I$  компактен по лемме. По теореме заключаем, что  $K$  компактно как замкнутое подмножество компакта.

$2 \Rightarrow 3$  Пусть  $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность в  $K$ ; обозначим через  $D$  множество её значений. Если  $D$  конечно, то из  $(\{x^{(n)}\})$  можно выделить стационарную подпоследовательность, причём её предел будет совпадать со значением и, значит, принадлежать  $K$ .

Содержателен случай, когда  $D$  бесконечно. Докажем от противного, что в этом случае в  $K$  есть предельная точка  $D$ . Если в  $K$  нет предельных точек  $D$ , то у каждой точки  $q \in K$  найдётся окрестность  $V_q$ , содержащая не более одной точки множества  $D$ . Тогда получаем противоречие с компактностью  $K$  :  $\{V_q\}_{q \in K}$  — открытое покрытие  $K$ , из которого нельзя извлечь конечное подпокрытие не только  $K$ , но даже  $D$ .

Пусть  $a \in K$  — предельная точка  $D$ . Тогда найдётся номер  $n_1$ , для которого  $p(x^{(n_1)}, a) < 1$ . Так как множество  $B(a, \frac{1}{2}) \cap D$  бесконечно, найдётся номер  $n_2 > n_1$ , для которого  $p(x^{(n_2)}, a) < \frac{1}{2}$ . Этот процесс можно продолжать неограниченно: на шаге с номером  $k$ , поскольку множество  $B(a, \frac{1}{k}) \cap D$  бесконечно, найдётся номер  $n_k > n_{k-1}$ , для которого  $p(x^{(n_k)}, a) < \frac{1}{k}$ . По построению  $\{x^{(n_k)}\}$  — подпоследовательность и  $x^{(n_k)} \rightarrow a$ .

$3 \Rightarrow 1$ . Если  $K$  не ограничено, то для каждого натурального  $n$  найдётся такая точка  $y^{(n)} \in K$ , что  $|y^{(n)}| > n$ . Последовательность  $\{y^{(n)}\}$  стремится к бесконечности, а тогда из неё нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, так как по лемме любая её подпоследовательность стремится к бесконечности.

Если же  $K$  не замкнуто, то у  $K$  есть предельная точка  $b$ , не принадлежащая  $K$ . Следовательно, существует последовательность точек  $K$ , стремящаяся к  $b$ . Но тогда любая её подпоследовательность стремится к  $b$  и, значит, не имеет предела, принадлежащего  $K$ .

**Замечание 2.** Утверждение о том, что в  $\mathbb{R}^m$  всякое замкнутое ограниченное множество компактно и его частный случай лемму называют **Теоремой Гейне-Бореля**.

**Замечание 2.** Как уже отмечалось,  $2 \Rightarrow 1$  верна в любом мет-

рическом пространстве, а  $1 \Rightarrow 2$  — не в любом. На самом деле, утверждения 2 и 3 равносильны в любом метрическом пространстве. Утверждение  $3 \Rightarrow 2$  оставим без доказательства. Свойство 3 называется секвенциальной компактностью.

**Замечание 3.** В ходе доказательства теоремы установлено, что всякое бесконечное подмножество компакта  $K \subset \mathbb{R}^m$  имеет предельную точку, принадлежащую  $K$ .

**Следствие 1. Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса.** Из всякой ограниченной подпоследовательности в  $\mathbb{R}^m$  можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

**Доказательство.** В силу ограниченности все члены последовательности принадлежат некоторому замкнутому кубу  $I$ . Поскольку  $I$  компактен, из этой подпоследовательности можно извлечь подпоследовательность, имеющую предел, принадлежащий  $I$ .

**Замечание 4.** Если вещественная последовательность неограничена (сверху, снизу) то из неё можно извлечь подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности (плюс-минус бесконечности). Для бесконечности без знака утверждение верно и в нормированном пространстве.

**Доказательство.** Для определённости докажем для  $+\infty$ . Так как последовательность  $\{x_n\}$  не ограничена сверху, найдётся номер  $n_1$ , для которого  $x_{n_1} > 1$ . Далее найдётся номер  $n_2 > n_1$ , для которого  $x_{n_2} > 2$  (иначе  $\{x_n\}$  была бы ограничена сверху числом  $\max\{x_1, \dots, x_{n_1}, 2\}$ ). Этот процесс продолжаем неограниченно: на  $k$ -том шаге найдётся номер  $n_k > n_{k-1}$ , для которого  $x_{n_k} > k$ . Тогда  $x_{n_k} \rightarrow +\infty$ .

## 1.24 Сходимость и сходимость в себе. Полнота $\mathbb{R}^m$

(84)

**Определение.** Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность в метрическом пространстве  $X$ . Говорят, что последовательность  $x_n$  сходится в себе, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, l > N \rho(x_n, x_l) < \varepsilon.$$

**Лемма.** 1. Сходящаяся в себе последовательность ограничена

2. Если у сходящейся в себе последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то сама последовательность сходится.

**Доказательство.** 1. Пользуясь сходимостью  $\{x_n\}$  в себе, подберём такой номер, что для всех  $n, l > N$  будет  $\rho(x_n, x_l) < 1$ . В частности, тогда  $\rho(x_n, x_{N+1}) < 1$  для всех  $n > N$ . Пусть  $b \in X$ . Следовательно, для всех  $n > N$  по неравенству треугольника  $\rho(x_n, b) < 1 + \rho(x_n, x_{N+1})$ . Положим

$$R = \max\{\rho(x_1, b), \dots, \rho(x_N, b), 1 + \rho(x_{N+1}, b)\}$$

Тогда  $\rho(x_n, b) \leq R$  для всех номеров  $n$ .

2. Пусть  $\{x_n\}$  сходится в себе  $x_{n_k} \rightarrow a$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$ . По определению предела, найдётся такой номер  $K$ , что  $\rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$  для всех  $k > K$ , а по определению сходимости в себе, найдётся такой номер  $N$ , что  $\rho(x_n, x_l) < \frac{\varepsilon}{2}$  для всех  $n, l > N$ . Покажем, что найденное  $N$  — требуемое для  $\varepsilon$  из определения предела. Пусть  $n > N$ . Положим  $M = \max\{N + 1, K + 1\}$ ; тогда  $n_M \geq n_{N+1} \geq N$  и аналогично  $n_M \geq K$ . Следовательно,

$$\rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_M}) + \rho(x_{n_M}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

В силу произвольности  $\varepsilon$  это и означает, что  $x_n \rightarrow a$ .

**Теорема.** 1. Во всяком метрическом пространстве любая сходящаяся последовательность сходится в себе.

2. В  $\mathbb{R}^m$  любая сходящаяся в себе последовательность сходится.

**Доказательство.** 1. Обозначим  $\lim x_n = a$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$ . По определению предела, найдётся такой номер  $N$ , что  $\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$  для всех  $n > N$ . Тогда для всех  $n, m > N$

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В силу произвольности  $\varepsilon$  это и значит, что  $\{x_n\}$  сходится в себе.

2. Пусть  $x^{(n)}$  — сходящаяся в себе последовательность в  $\mathbb{R}^m$ . По пункту 1 леммы, она ограничена. По принципу выбора Болцано-Вейерштрасса из неё можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, а тогда по пункту 2 леммы она сама сходится.

**Определение.** Если в метрическом пространстве  $X$  любая сходящаяся в себе последовательность сходится, то это пространство называется полным.

**Замечание 1.** Второе утверждение теоремы можно сформулировать так: пространство  $\mathbb{R}^m$  полно.

Пример неполного пространства  $\mathbb{Q}$ , как подпространство  $\mathbb{R}$ . Если взять десятичные приближения к  $\sqrt{2}$ , то она будет сходиться в себе, но не будет иметь предела в  $\mathbb{Q}$ .

**Замечание 2.** Утверждение о том, что в  $\mathbb{R}^m$  сходимости и сходимости в себе равносильны, называют критерием Больцано - Коши сходимости последовательности

В пространстве  $\mathbb{R}^m$  последовательность  $\{x^{(n)}\}$  сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, l > N |x^{(n)} - x^{(l)}| < \varepsilon$$

Критерий позволяет доказывать существование предела, не используя само значения предела.

## 1.25 Теорема о стягивающихся отрезках. Существование точной верхней границы

(86)

**Теорема. О стягивающихся отрезках.** Пусть  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность стягивающихся отрезков. Тогда пересечение всех этих отрезков состоит из одной точки, то есть

$$\exists c \in \mathbb{R} : \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$$

при этом  $a_n \rightarrow c$ ,  $b_n \rightarrow c$

**Доказательство.** То, что пересечение не пусто, следует из аксиомы о вложенных отрезках. Пусть  $c, d \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ . Докажем, что  $c = d$ . Поскольку  $a_n \leq c \leq b_n$  и  $a_n \leq d \leq b_n$ , имеем

$$a_n - b_n \leq c - d \leq b_n - a_n$$

. По теореме о предельном переходе в неравенстве,  $0 \leq c - d \leq 0$ , то есть  $c = d$ . Так как

$$0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \quad 0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n$$

по теореме о сжатой последовательности  $a_n \rightarrow c$  и  $b_n \rightarrow c$ .

**Определение.** Пусть  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $E \neq \emptyset$ ,  $E$  ограничено сверху. Наименьшая из верхних границ множества  $E$  называется точной верхней границей, или верхней гранью, или супремумом множества  $E$  и обозначается  $\sup E$ .

**Теорема. Существование верхней грани.** Всякое непустое ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань.

**Доказательство.** По условию, существует точка  $x_0 \in E$  и  $M$  — верхняя граница  $E$ ,  $x_0 \leq M$ . Обозначим  $[a_1, b_1] = [x_0, M]$ . Отрезок  $[a_1, b_1]$  Удовлетворяет двум условиям:



1.  $[a_1, b_1] \cap E \neq \emptyset$
2.  $(b_1, +\infty) \cap E = \emptyset$

Рассмотрим середину отрезка  $[a_1, b_1]$  — точку  $\frac{a_1+b_1}{2}$ . Положим  $[a_2, b_2] = [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ , если  $(\frac{a_1+b_1}{2}, b_1] \cap E = \emptyset$ , и  $[a_2, b_2] = [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ , если  $(\frac{a_1+b_1}{2}, b_1] \cap E \neq \emptyset$ . В обоих случаях условия сохраняются.

Будем продолжать этот процесс неограниченно, при этом оставляя выполняться эти условия. При этом,  $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$ . По теореме о стягивающихся отрезках существует единственная точка  $c$ , принадлежащая одновременно всем отрезкам, причём  $a_n \rightarrow c$ ,  $b_n \rightarrow c$ . Проверим, что  $c = \sup E$ . Если  $x \in E$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то  $x \leq b_n$  по свойству 2. По теореме о предельном переходе в неравенстве  $x \leq c$ . То есть  $c$  — верхняя граница  $E$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$  и докажем, что  $c - \varepsilon$  не является верхней границей  $E$ . Так как  $a_n \rightarrow c$ , найдётся номер  $N$ , для которого  $a_N > c - \varepsilon$  (по определению предела все элементы с некоторого номера удовлетворяют этому неравенству). По свойству 1, найдётся точка  $x \in [a_N, b_N] \cap E$ , а тогда  $x > c - \varepsilon$ .

**Замечание 2.** Если множество  $E$  не ограничено сверху считают, что  $\sup E = +\infty$ , при этом определение супремума в  $\overline{\mathbb{R}}$  существует у любого непустого множества. Ограниченность  $Y$  сверху равносильна неравенству  $\sup E < +\infty$

**Замечание 3.** Если  $D \subset E \subset \mathbb{R}$ ,  $D \neq \emptyset$ , то  $\sup D \leq \sup E$

**Доказательство.** Если  $\sup E = +\infty$ , то неравенство тривиально. Пусть  $\sup E < +\infty$ . Если  $x \in D$ , то  $x \in E$  и, следовательно,  $x \leq \sup E$ , то есть  $\sup E$  — какая-то верхняя граница  $D$ . Но  $\sup D$  — наименьшая верхняя граница  $D$ , поэтому  $\sup D \leq \sup E$ .

**Замечание 4.** Если  $E, F \subset \mathbb{R}$ ,  $E, F \neq \emptyset$ ,  $t > 0$ , то

$$\sup(E + F) = \sup E + \sup F$$

$$\sup(tE) = t \sup E$$

$$\sup(-E) = -\inf E$$

## 1.26 Предел монотонной последовательности

(91)

**Теорема. Предел монотонной последовательности.**

1. Всякая возрастающая ограниченная сверху последовательность сходится.
2. Всякая убывающая ограниченная снизу последовательность сходится.
3. Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.

**Доказательство.** Докажем первое утверждение. Пусть последовательность  $\{x_n\}$  ограничена сверху. По теореме существует  $\sup x_n = c \in \mathbb{R}$ . Докажем, что  $c = \lim x_n$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$ . По определению супремума (так как  $c - \varepsilon$  не является верхней границей последовательности), найдётся такой номер  $N$ , что  $x_N > c - \varepsilon$ . В силу возрастания последовательности, при любом  $n > N$  будет  $x_n \geq x_N$ . Снова по определению супремума  $x_n \leq c$  при всех  $n$ . Итак для любого  $n > N$

$$c - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq c < c + \varepsilon$$

В силу произвольности  $\varepsilon$  это значит  $c = \lim x_n$ .

Второе утверждение доказывается аналогично. Третье следует из первых двух.

**Замечание 1.** Если последовательность возрастает и не ограничена сверху, то она стремится к плюс бесконечности.

**Доказательство.** Возьмём  $E > 0$ . Так как  $\{x_i\}$  не ограничена сверху, найдётся такой номер  $N$ , что  $x_N > E$ . Тогда для любого номера  $n > N$ , в силу возрастания последовательности, тем более  $x_n > E$ .

**Замечание 2.** Доказано, что любая монотонная последовательность имеет предел в  $\overline{\mathbb{R}}$ , при этом для всех возрастающих последовательностей

$$\lim x_n = \sup x_n$$

а для убывающих

$$\lim x_n = \inf x_n$$

## 1.27 Неравенство Я. Бернулли, $\lim z^n$ , число $e$ , формула Герона

(92)

**Лемма. Неравенство Я. Бернулли.** Если  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $x > -1$ , то

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

**Доказательство.** При  $n = 0, n = 1$  (база индукции) неравенство очевидно, обращается в равенство. Сделаем переход: Пусть неравенство верно для номера  $n$ . Тогда

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

**Пример 1.** Пусть  $x \in \mathbb{C}$ ,  $|z| < 1$ . Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$ .

В самом деле, последовательность  $\{|z|^n\}$  убывает и ограничена снизу нулём. Следовательно, существует конечный  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = a$ . Перейдя в равенство  $|z|^{n+1} = |z||z|^n$  к пределу, получим  $a = |z|a \Leftrightarrow (1 - |z|)a = 0$ , отсюда  $a = 0$ , поскольку  $|z| < 1$ , таким образом  $z^n \rightarrow 0$ , что равносильно  $x^n \rightarrow 0$ .

**Пример 2. Число  $e$ .** Докажем, что последовательность  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  сходится.

Положим  $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ . Ясно, что последовательность  $\{y_n\}$  ограничена снизу единицей, кроме того она убывает

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} = (\frac{n^2}{n^2-1})^{n+1} \frac{n-1}{n} = (1 + \frac{1}{n^2-1})^{n+1} \frac{n-1}{n} \geq (1 + \frac{n+1}{n^2-1}) \frac{n-1}{n} \geq 1$$

Следовательно,  $\{y_n\}$  сходится, а тогда по теореме о пределе частного и  $x_n = \frac{y_n}{1+1/n}$  сходится к этому же пределу.

**Пример 3. Формула Герона.** Пусть  $a > 0, x_0 > 0$ ,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$$

Ясно, что  $x_n > 0$  при всех  $n$  и значит,  $\{x_n\}$  ограничена снизу. Воспользовавшись очевидным неравенством

$$t + \frac{1}{t} \geq 2, \quad t > 0$$

получим, что при всех  $n \in \mathbb{Z}_+$

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{a}{x_n}) \geq \frac{\sqrt{a}}{2}2 = \sqrt{a}$$

Поэтом у для всех  $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2}(1 + \frac{a}{x_n^2}) \leq x_n$$

То есть последовательность  $\{x_n\}$  убывает. Следовательно, она сходится; обозначим  $\lim x_n = \beta$ . Перейдя к пределу в равенстве получим

$$\beta = \frac{1}{2}(\beta + \frac{a}{\beta})$$

Откуда  $\beta = \sqrt{a}$ , так как  $\beta \geq 0$

Равенство  $\lim x_n = \sqrt{a}$  называется формулой герона и используется для приближенного вычисления корня.

**Замечание 3.** Пусть  $x_n > 0$  при всех  $n$ ,  $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$  тогда  $x_n \rightarrow 0$ .

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad a > 1, k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

## 1.28 Верхний и нижний пределы последовательностей

(95)

**Определение.** Точка  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  называется частичным пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если существует подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ , стремящаяся к  $a$ .

**Определение.** Пусть последовательность  $\{x_n\}$  ограничена сверху. Величина

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k$$

называется верхним пределом последовательности  $\{x_n\}$

Пусть последовательность  $\{x_n\}$  ограничена снизу. Величина

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k$$

называется нижним пределом последовательности  $\{x_n\}$

**Замечание 1.** Последовательности  $z_n = \sup_{k \geq n} x_k$  и  $y_n = \inf_{k \geq n} x_k$

иногда называют верхней и нижней огибающими последовательности  $\{x_n\}$ .

Если  $\{x_n\}$  не ограничена сверху, то  $z_n = +\infty$  при всех  $n$  и поэтому полагают  $\overline{\lim} x_n = +\infty$ . Аналогично, если  $\{x_n\}$  не ограничена снизу полагают  $\underline{\lim} x_n = -\infty$ .

**Замечание 2.** Верхний и нижний пределы вещественной последовательности  $\{x_n\}$  существуют в  $\overline{\mathbb{R}}$ , причем  $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

**Доказательство.** Пусть  $\{x_n\}$  ограничена и сверху и снизу. Так как при переходе к подмножеству супремум не увеличивается, а инфимум не уменьшается  $\{y_n\}$  возрастает, а  $\{z_n\}$  убывает. При всех  $n$   $y_q \leq y_n \leq z_n \leq z_1$ . По теореме о пределе монотонной последовательности  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$  сходятся, то есть существуют конечные пределы  $\lim b$ . Если хотя бы одна последовательность неограничена, то очевидно.

**Теорема. О верхнем и нижнем пределе последовательности.** Пусть  $\{x_n\}$  — вещественная последовательность, тогда справедливы следующие утверждения

1. Верхний предел — наибольший, а нижний — наименьший из частичных пределов  $\{x_n\}$
2. Предел  $\{x_n\}$  в  $\overline{\mathbb{R}}$  существует тогда и только тогда, когда  $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$ , при этом  $\lim x_n$  равен этому значению.

**Доказательство.** I. Пусть  $\{x_n\}$  ограничена и сверху и снизу

1. Обозначим  $b = \overline{\lim} x_n$ . Докажем, что  $b$  — частичный предел  $\{x_n\}$ , для чего построим подпоследовательность последовательности  $\{x_n\}$ , стремящуюся к  $b$ . При всех  $n$  будет  $z_n \geq b$ . Поскольку

$$z_1 = \sup\{x_1, x_2, \dots\} > b - 1$$

найдётся номер  $n_1$ , для которого  $x_{n_1} > b - 1$ . Поскольку

$$z_{n_1+1} = \sup\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots\} > b - \frac{1}{2}$$

найдётся номер  $n_2 > n_1$ , для которого  $x_{n_2} > b - \frac{1}{2}$ . Этот процесс может продолжаться неограниченно. Таким образом, построена подпоследовательность  $\{x_n\}$ , члены которой удовлетворяют неравенству

$$b - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq z_{n_k}$$

Подпоследовательность  $\{z_{n_k}\}$  последовательности  $\{x_n\}$ , стремящейся к  $b$  тоже стремится к  $b$ . По теореме о сжатой последовательности и  $x_{n_k} \rightarrow b$ .

Если  $\{x_{m_l}\}$  — подпоследовательность  $\{x_n\}$ ,  $\{x_{m_l}\} \rightarrow \beta$ , то, сделав предельный переход в неравенстве  $x_{m_l} \leq z_{m_l}$ , получим, что  $\beta \leq b$ , то есть  $b$  — наибольший частичный предел  $\{x_n\}$ .

Аналогично для  $\underline{\lim} x_n$  — наименьшего частичного предела. 2. По определению  $y_n$  и  $z_n$ , при всех  $n$  будет

$$y_n \leq x_n \leq z_n$$

Если  $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$ , то по теореме о сжатой последовательности существует  $\lim x_n$  и  $\lim x_n = \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$

II. Пусть  $\{x_n\}$  ограничена сверху, но не снизу. Тогда, по определению,  $\underline{\lim} x_n = -\infty$ . По замечанию 2 к принципу выбора, из  $\{x_n\}$  можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к  $-\infty$ , то есть  $-\infty$  — частный предел  $\{x_n\}$ . Разумеется  $-\infty$  меньше любого другого частичного предела, если они есть. То что  $\overline{\lim} x_n$  — наибольший частичный предел, доказано в пункте I. Если  $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$ , то есть  $z_n \rightarrow -\infty$ , то и  $x_n \rightarrow -\infty$ , так как  $x_n \leq z_n$ . Обратно, если  $\lim x_n = -\infty$ , то и  $\overline{\lim} x_n = -\infty$ , как частичный период.

III. Если  $x_n$  не ограничена ни сверху, ни снизу, то первое утверждение очевидно, а второе не реализуется

## 1.29 Равносильность определений предела отображения по Коши и по Гейне

(99)

**Определение.** на  $\varepsilon$ -языке (по Коши)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \setminus \{a\} : \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon.$$

**Определение.** на языке последовательностей (по Гейне)

$$\forall \{x_n\} : x_n \in D \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A.$$

(102) **Теорема.** Определения предела отображения по Коши и по Гейне эквивалентны.

**Доказательство.** Для определённости докажем теорему при  $a \in X, A \in Y$ .

1. Пусть  $A$  — предел отображения  $f$  в точке  $a$  по Коши; докажем, что тогда  $A$  — предел и по Гейне. Возьмём последовательность  $\{x_n\}$  со свойствами из определения Гейне:  $x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$ . Требуется доказать, что  $f(x_n) \rightarrow A$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$ . По определению Коши подберём такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x \in D$ , для которых  $x \neq a$  и  $\rho_X(x, a) < \delta$  будет  $\rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$ . По определению предела последовательности  $\{x_n\}$  для числа  $\delta$  найдётся такой номер  $N$ , что при всех  $n > N$  верно неравенство  $\rho_X(x_n, a) < \delta$ . Но тогда  $\rho_Y(f(x_n), A) < \varepsilon$ . Для всех  $n > N$  в силу произвольности  $\varepsilon$  это значит, что  $f(x_n) \rightarrow A$ .

2. Пусть  $A$  — предел отображения  $f$  в точке  $a$  по Гейне; докажем, что тогда  $A$  — предел  $f$  по Коши. Предположим противное: пусть  $A$  не есть предел по Коши. Записывая отрицание определения Коши, получаем

$$\exists \varepsilon^* > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D \setminus \{a\} : \rho_X(x, a) < \delta, \rho_Y(f(x), A) \geq \varepsilon^*$$

Следовательно, для каждого  $n \in \mathbb{N}$  по числу  $\delta = \frac{1}{n}$  найдётся такая точка  $x_n$ , что

$$x_n \in D \setminus \{a\} \quad \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n}, \quad \rho_Y(f(x_n), A) \geq \varepsilon^*$$



По теореме о сжатой последовательности, построенная последовательность  $x_n$  стремится к  $a$ , так как

$$0 < p_X(x_n, a) < \frac{1}{n}.$$

Тогда, по определению Гейне,  $f(x_n) \rightarrow A$ . По определению предела последовательности  $\{f(x_n)\}$  для числа  $\varepsilon^*$  найдётся такой номер  $N$ , что для всех номеров  $n > N$  будет  $p_Y(f(x_n), A) < \varepsilon^*$ , что противоречит условию.

### 1.30 Простейшие свойства отображений, имеющих предел (единственность предела, локальная ограниченность, арифметические действия)

(103-106)

**Теорема. Единственность предела отображения.** Отображение в данной точке не может иметь более одного предела: если  $X, Y$  — метрические пространства,  $f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $a$  — предельная точка  $D$ ,  $A, B \in Y$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B$ , то  $A = B$ .

**Доказательство.** Возьмём последовательность  $\{x_n\} : x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$ . По определению Гейне  $f(x_n) \rightarrow A$  и  $f(x_n) \rightarrow B$ . По единственности предела последовательности,  $A = B$ .

**Замечание 1.** Если  $Y = \mathbb{R}$ , то, как и для последовательностей, а теореме можно считать, что  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ .

**Теорема. . Локальная ограниченность отображения имеющего предел.** Пусть  $X, Y$  — метрические пространства,  $f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $a$  — предельная точка  $D$ ,  $a \in Y$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ . Тогда существует такая окрестность  $V_a$  точки  $a$ , что  $f$  ограничен в  $V_a \cap D$  (то есть  $f(V_a \cap D)$  содержится в некотором шаре в  $Y$ ).

**Доказательство.** Возьмём окрестность  $V_A = B(A, 1)$ . По определению предела на языке окрестностей, найдётся такая окрестность  $V_a$  точки  $a$ , что  $f(V_a \cap D) \subset B(A, 1)$ . Если  $a \notin D$ , то на этом доказательство заканчивается. Иначе

$$f(V_a \cap D) \subset B(A, R), \text{ где } R = \max\{1, \rho_Y(f(a), A)\}$$

**Замечание 2.** Отображение, имеющее предел в точке не обязано быть ограниченным. Например функция  $f(x) = x$ . Поэтому в названии теоремы присутствует слово "локальная".

**Замечание 3.** Если  $X$  — метрическое пространство,  $Y$  — нормированное пространство с нулём  $\theta$ ,  $D \subset X$ ,  $a$  — предельная точка  $D$ ,  $g : D \rightarrow Y$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ,  $B \neq \theta$ , то существует такая окрестность  $V_a$ , что  $g(x) \neq \theta$  для всех  $x \in V_a \cap D$ .

**Доказательство.** Пусть не так: тогда для любого  $n \in \mathbb{N}$  существует точка  $x_n \in V_a(\frac{1}{n}) \cap D$ , для которой  $g(x_n) = \theta$ . Построенная последовательность  $\{x_n\}$  стремится к  $a$ . По определению предела  $g(x_n) \rightarrow B$ , откуда  $B = \theta$ , что противоречит условию.

**Теорема. Арифметические действия над отображениями, имеющими предел.** Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $Y$  — нормированное пространство,  $D \subset X$ ,  $f, g : D \rightarrow Y$ ,  $\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ,  $a$  — предельная точка  $D$ ,  $A, B \in Y$ ,  $\lambda_0 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ ,  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B$ ,  $\lambda(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda_0$ . Тогда

1.  $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A + B$ ;
2.  $\lambda(x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda_0 A$ ;
3.  $f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A - B$ ;
4.  $\|f(x)\| \xrightarrow{x \rightarrow a} \|A\|$

**Теорема. Арифметические действия над функциями, имеющими предел.** Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ,  $a$  — предельная точка  $D$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ ,  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B$ . Тогда

1.  $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A + B$ ;
2.  $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} AB$ ;
3.  $f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A - B$ ;
4.  $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} |A|$ ;
5. Если  $B \neq 0$ , то  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{A}{B}$ .

**Доказательство.** С помощью определения на языке последовательностей эти теоремы сводятся к аналогичным про последовательности. Докажем, например, первое утверждение. Возьмём последовательность  $\{x_n\}$  со свойствами  $x_n \in D$ ,  $x_n \neq a$ ,  $x_n \rightarrow a$ . Тогда по определению Гейне  $f(x_n) \rightarrow A$ ,  $g(x_n) \rightarrow B$ . По теореме о пределе суммы для последовательностей  $f(x_n) + g(x_n) \rightarrow A + B$ . В силу произвольности последовательности  $\{x_n\}$  это и означает, что  $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A + B$ . При доказательстве утверждения о пределе частного следует учесть, что, по замечанию 3, существует такая окрестность  $V_a$ , что частное  $\frac{f}{g}$  определено по крайней мере на множестве  $V_a \cap D$ .

**Замечание 4.** Теорема про функции верна и для бесконечных пределов, за исключением случаев неопределённости вида  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Замечание 5.** Определение бесконечно малой и бесконечно большой переносятся на функции (и отображения со значениями в нормированном пространстве). Так, функция, стремящаяся к нулю в точке  $a$  называется бесконечно малой в точке  $a$ . Утверждение о том, что произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая, и о связи между бесконечно большими и бесконечно малыми сохраняют свою силу.

### 1.31 Предельный переход в неравенстве для функций. Теорема о сжатой функции

(106)

**Теорема. Предельный переход в неравенстве для функций.** Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  — предельная точка  $D$ ,  $f(x) \leq g(x)$  для всех  $x \in D \setminus \{a\}$ ,  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ ,  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B$ . Тогда  $A \leq B$

**Доказательство.** Возьмём последовательность  $\{x_n\}$  со свойствами  $x_n \in D$ ,  $x_n \neq a$ ,  $x_n \rightarrow a$ . Тогда, по определению Гейне,  $f(x_n) \rightarrow A$ ,  $g(x_n) \rightarrow B$ . По теореме о предельном переходе в неравенстве для последовательностей  $A \leq B$ .

**Теорема. О сжатой функции.** Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $f, g, h : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  — предельная точка  $D$ ,  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  для всех  $x \in D \setminus \{a\}$ ,  $A \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ ,  $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ . Тогда и  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ .

**Доказательство.** Возьмём последовательность  $\{x_n\}$  со свойствами  $x_n \in D$ ,  $x_n \neq a$ ,  $x_n \rightarrow a$ . Тогда, по определению Гейне  $f(x_n) \rightarrow A$ ,  $h(x_n) \rightarrow A$ . Кроме того, по условию для всех  $n \in N$

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n).$$

По теореме о сжатой последовательности  $g(x_n) \rightarrow A$ . В силу произвольности последовательности  $\{x_n\}$  это и значит, что  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ .

**Замечание 1.** Аналогично доказывается, что если  $f(x) \leq g(x)$  для всех  $x \in D \setminus \{a\}$  и  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$  ( $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$ ), то и  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$  ( $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$ ).

**Замечание 2.** В теоремах и замечании достаточно выполнения неравенств на множестве  $\dot{V}_a \cap D$ , где  $V_a$  — какая-нибудь окрестность точки  $a$ .

Пусть  $f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $D_1 \subset S$ ,  $a$  — предельная точка  $D_1$  (а

следовательно и  $D$ ). Тогда если предел  $f$  в точке  $a$  существует и равен  $A$ , то предел сужения  $f$  на  $D_1$  в точке  $a$  также существует и равен  $A$ . В самом деле, если соотношение  $f(x) \in V_A$  выполняется для всех  $x \in \dot{V}_a \cap D$ , то оно тем более выполняется для всех  $x$  из  $\dot{V}_a \cap D_1$ . Однако возможна ситуация, когда предел сужения существует, а предел отображения нет.

## 1.32 Предел монотонной функции

(108)

**Теорема. О пределе монотонной функции.** Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in (-\infty, +\infty)$ ,  $D_1 = D \cap (-\infty, a)$ ,  $a$  — предельная точка  $D_1$ .

1. Если  $f$  возрастает и ограничена сверху на  $D_1$ , то существует конечный предел  $f(a-)$ .
2. Если  $f$  убывает и ограничена снизу на  $D_1$ , то существует конечный предел  $f(a-)$ .

**Доказательство.** Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. Положим  $A = \sup_{x \in D_1} f(x)$ ; тогда  $A \in \mathbb{R}$  в силу ограниченности функции сверху. Докажем, что  $f(a-) = A$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$ . По определению верхней грани существует такая точка  $x_0 \in D_1$ , что  $f(x_0) > A - \varepsilon$ . Но тогда для всех таких  $x \in D_1$ , что  $x > x_0$ , в силу возрастания  $f$

$$A - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq A < A + \varepsilon.$$

Теперь положим  $\delta = a - x_0$  при  $a \in \mathbb{R}$  или  $\Delta = \max\{x_0, 1\}$  при  $a = +\infty$ ; Тогда неравенство из определения предела выполнено для всех таких  $x \in D$ , что  $0 < a - x < \delta$  (соответственно,  $x > \Delta$ ).

**Замечание 2.** Аналогично утверждениям теоремы доказываются

3. Если  $f$  возрастает и не ограничена сверху на  $D_1$ , то предел  $f(a-)$  существует и равен  $+\infty$ .

4. Если  $f$  убывает и не ограничена снизу на  $D_1$ , то предел  $f(a-)$  существует и равен  $-\infty$ .

**Замечание 2.** Аналогично формулируется и доказывается теорема для правостороннего предела.

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in (-\infty, +\infty)$ ,  $D_2 = D \cap (a, +\infty)$ ,  $a$  — предельная точка  $D_2$ . 1. Если  $f$  возрастает и ограничена снизу на  $D_2$ , то существует конечный предел  $f(a+)$ .

2. Если  $f$  убывает и ограничена сверху на  $D_2$ , то существует конечный предел  $f(a+)$ .

3. Если  $f$  возрастает и не ограничена снизу на  $D_2$ , то предел  $f(a+)$  существует и равен  $-\infty$ .

4. Если  $f$  убывает и не ограничена сверху на  $D_2$ , то предел  $f(a+)$  существует и равен  $+\infty$ .

### 1.33 Критерий Больцано-Коши для отображений

(110)

**Теорема. Критерий Больцано-Коши для отображений.** Пусть  $X, Y$  — метрические пространства,  $Y$  полно,  $f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $a$  — предельная точка  $D$ . Тогда существование в точке  $a$  предела  $f$ , принадлежащего  $Y$ , равносильно следующему утверждению.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V_a \quad \forall \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \dot{V}_a \cap D \quad \rho_Y(f(\bar{x}), f(\bar{\bar{x}})) < \varepsilon.$$

**Доказательство.** 1. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in Y$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$ . По определению предела, найдётся такая окрестность  $V_a$  точки  $a$ ,

что  $p_Y(f(X), A) < \frac{\varepsilon}{2}$  Для всех  $x \in \dot{V}_a \cap D$ . Тогда если  $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \dot{V}_a \cap D$ , то

$$\rho_Y(f(\bar{x}), f(\bar{\bar{x}})) \leq \rho_Y(f(\bar{x}), A) + \rho_Y(A, f(\bar{\bar{x}})) < \varepsilon$$

В силу произвольности  $\varepsilon$  формула выполнена.

2. Пусть выполнена формула. Докажем существование предела  $f$  в точке  $a$  на языке последовательностей. Возьмём последовательность  $\{x_n\}$  со свойствами  $x_n \in D$ ,  $x_n \neq a$ ,  $x_n \rightarrow a$ , и докажем, что существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in Y$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$  и подберём окрестность  $V_a$  из формулы. По определению предела  $\{x_n\}$  найдётся такой номер  $N$ , что  $x_n \in V_a$  для всех  $n > N$ ; тогда  $x_n \in \dot{V}_a \cap D$  для тех же  $n$ . По выбору  $V_a$ , для всех  $n, l > N$  будет  $\rho_Y(f(x_n), f(x_l)) < \varepsilon$ . таким образом последовательность сходится в себе, а, значит, в силу полноты  $Y$ , сходится к некоторому пределу, принадлежащему  $Y$ . Тогда, в силу замечания к определению предела существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in Y$ .

**Замечание 1.** Полнота  $Y$  использовалась только во второй части доказательства.

## 1.34 Двойной и повторный пределы, примеры

(111)

**Определение.** Пусть  $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ ,  $a$  — предельная точка  $D_1$ ,  $b$  — предельная точка  $D_2$ ,  $D \supset (D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\})$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Если для каждого  $x \in D_1 \setminus \{a\}$  существует конечный предел

$$\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y),$$

то предел функции  $\varphi$  в точке  $a$  называется повторным пределом функции  $f$  в точке  $(a, b)$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$$

2. Аналогично для  $y \in D_2 \setminus \{b\}$  ( $\lim_{y \rightarrow b} \psi(y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ )/

3. Точку  $A$  называют двойным пределом функции  $f$  в точке  $(a, b)$  и пишут

$$\lim_{x \rightarrow a, y \rightarrow b} f(x, y) = A, \quad f(x, y) \xrightarrow{x \rightarrow a, y \rightarrow b} A,$$

если для любой окрестности  $V_a$  точки  $A$  существуют такие окрестности  $V_a$  и  $V_b$  точек  $a, b$ , что  $f(x, y) \in V_A$  для всех  $x \in \dot{V}_a \cap D_1$ ,  $y \in \dot{V}_b \cap D_2$ .

**Теорема. О двойном и повторном пределе.** Пусть  $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ ,  $a$  — предельная точка  $D_1$ ,  $b$  — предельная точка  $D_2$ ,  $D \supset (D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\})$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  и выполнены условия:

1. существует конечный или бесконечный двойной предел  $\lim_{x \rightarrow a, y \rightarrow b} f(x, y) = A$ ;
2. для каждого  $x \in D_1 \setminus \{a\}$  существует конечный предел

$$\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y).$$

Тогда повторный предел  $\lim_{x \rightarrow a}^\varphi(x)$  существует и равен  $A$ .

**Доказательство.** Для определённости пусть  $A \in \mathbb{R}$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$ . По определению, двойного предела, найдутся такие окрестности  $V_a, V_b$ , что для всех  $x \in \dot{V}_a \cap D_1$ ,  $y \in \dot{V}_b \cap D_2$  выполняется неравенство

$$|f(x, y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Устремляя в нём  $y$  к  $b$  и пользуясь непрерывностью модуля, получаем

$$|\varphi(x) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$



для всех  $x \in \dot{V}_A \cap D_1$ , что и означает требуемое. В случае бесконечного предела следует изменить неравенство на соответствующее.

**Следствие 1.** При выполнении всех трёх условий оба повторных предела существуют и равны двойному.

**Пример 1.** Пусть  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ , тогда в точке  $(0, 0)$  повторные пределы различны и равны 1 и -1 соответственно, двойного предела не существует.

**Пример 2.**  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  в точке  $(0, 0)$  повторные пределы равны 0, но двойного предела не существует, так как по прямой  $y = x$  предел равен  $\frac{1}{2}$ .

**Пример 3.**  $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \frac{1}{x}$  в  $(0, 0)$  повторных пределов нет, а двойной существует и равен 0, так как  $|f(x, y)| \leq |x| + |y|$

## 1.35 Замена на эквивалентную при вычислении пределов. Асимптоты

(163)

**Теорема.** Замена на эквивалентную при вычислении пределов. Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ,  $x_0$  — предельная точка  $D$ ,

$$f(x) \sim \tilde{f}(x), \quad g(x) \sim \tilde{g}(x), \quad x \rightarrow x_0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x).$$

$$2. \text{ Если } x_0 \text{ — предельная точка области определения } \frac{f}{g}, \text{ то } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

В обоих утверждениях пределы одновременно существуют и равны или не существуют.

**Замечание 1.** Если  $g(x) \not\equiv 0$  в  $\dot{V}_a \cap D$ , то и  $\tilde{g}(x) \not\equiv 0$  в  $\dot{V}_{x_0} \cap D$  и обратно. Поэтому точка  $x_0$  одновременно является или не является предельной для областей определения  $\frac{f}{g}$  и  $\frac{\tilde{f}}{\tilde{g}}$ .

**Доказательство.** По определению эквивалентной функции, существуют окрестности  $U_{x_0}, V_{x_0}$  и функции  $\varphi, \psi$ , стремящиеся к 1 при  $x \rightarrow x_0$ , такие, что

$$f = \varphi \tilde{f} \text{ на } \dot{U}_{x_0} \cap D, \quad g = \psi \tilde{g} \text{ на } \dot{V}_{x_0} \cap D.$$

Тогда на множестве  $\dot{W}_{x_0} \cap D$ , где  $W_{x_0} = U_{x_0} \cap V_{x_0}$ , верны оба равенства. Значит, на  $\dot{W}_{x_0} \cap D$

$$fg = (\varphi\psi)(\tilde{f}\tilde{g})$$

. Следовательно если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}\tilde{g}$  существует и равно  $A$ , то по теореме о пределе произведения  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$  существует и равен  $A$ . Верно и обратное. Аналогично доказывается для предела частного (может понадобиться сузить окрестность, чтобы  $\varphi, \psi$  не обращались в ней в нуль).

Пусть  $f \sim g, f \sim h$ . Если  $f - h = o(f - g)$ , то говорят, что асимптотически равенство  $f \sim h$  точнее чем  $f \sim g$ .

(167)

**Определение.** Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}$ , функция  $f$  задана по крайней мере на  $\langle a, x_0 \rangle$  или  $\langle x_0, b \rangle$  и действует в  $\mathbb{R}$  прямая  $x = x_0$  называется вертикальной асимптотой функции  $f$ , если  $f(x_0+)$  или  $f(x_0-)$  равны  $+\infty$  или  $-\infty$ .

**Определение.** Пусть  $\langle a, +\infty \rangle \subset D \subset \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Прямая  $y = \alpha x + \beta$  называется наклонной асимптотой функции  $f$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если

$$f(x) = \alpha x + \beta + o(1), \quad x \rightarrow +\infty$$

Аналогично определяется наклонная асимптота при  $x \rightarrow -\infty$  функции заданной по крайней мере на  $(-\infty, b)$ .

### 1.36 Единственность асимптотического разложения

(166)

**Теорема. Единственность асимптотического разложения.**

Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $D \subset X$ ,  $x_0$  — предельная точка  $D$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $f, g_k : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  ( $k \in [0 : n]$ ), при всех  $k \in [0 : n - 1]$

$$g_{k+1}(x) = o(g_k(x)) \quad x \rightarrow x_0,$$

и для любой окрестности  $V_{x_0}$  существует точка  $t \in \dot{V}_{x_0} \cap D$ , в которой  $g_n(t) \neq 0$ . Тогда, если асимптотическое разложение  $f$  по системе  $\{g_k\}$  существует, то оно единственное: из равенств

$$\sum_{k=0}^n c_k g_k(x) + o(g_n(x)), \quad x \rightarrow x_0,$$

$$\sum_{k=0}^n d_k g_k(x) + o(g_n(x)), \quad x \rightarrow x_0,$$

следует, что  $c_k = d_k$  при всех  $k \in [0 : n]$ .

**Доказательство.** По индукции заключаем, что

$$g_k(x) = o(g_l(x)), \quad x \rightarrow x_0, \quad l < k.$$

Обозначим

$$E_k = \{x \in D : g_k(x) \neq 0\}, \quad k \in [0 : n].$$

Если бы функция  $g_k$  тождественно обращалась в ноль на множестве вида  $\dot{U}_{x_0} \cap D$ , то и функция  $g_n = \varphi_k g_k$ , где  $\varphi_k$  — функция из определения символа  $o$ , обращалась бы в тождественный ноль а множестве  $\dot{V}_{x_0} \cap D$ , что противоречит условию. Следовательно,  $x_0$  — предельная точка каждого  $E_k$ .

Допустим противное: пусть  $c_k = d_k$  не при всех  $k \in [0 : n]$ . Положим

$$m = \min\{k \in [0 : n] : c_k \neq d_k\}$$

. Из разложений следует, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^m c_k g_k(x) + o(g_n(x)), \quad x \rightarrow x_0,$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^m d_k g_k(x) + o(g_n(x)), \quad x \rightarrow x_0.$$

Вычтя получим

$$0 = (c_m - d_m)g_m(x) + o(g_m(x)), \quad x \rightarrow x_0.$$

Поделив на  $g_m(x)$  при  $x \in E_m$  и перейдя к пределу по множеству  $m$ , получим  $c_m = d_m$ , что противоречит определению  $m$ .

## 1.37 Непрерывность. Точки разрыва и их классификации, примеры

(114)

Пусть  $(X, \rho_X)$  и  $(Y, \rho_Y)$  — метрические пространства,  $f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $x_0 \in D$ . Отображение  $f$  называется непрерывным в точке  $x_0$  если выполняется одно из следующих утверждений:

1. Предел отображения  $f$  в точке  $x_0$  существует и равен  $f(x_0)$ . (Применимо, если  $x_0$  — предельная точка  $D$ ).

2. На  $\varepsilon$ -языке или по Коши.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : \rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

3. На языке окрестностей.

$$\forall V_{f(x_0)} \exists V_{x_0} f(V_{x_0} \cap D) \subset V_{f(x_0)}$$

4. На языке последовательностей или по Гейне.

$$\forall \{x_n\} : x_n \in D, x_n \rightarrow x_0 \quad f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

5. Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение отображения.  $\Delta y \xrightarrow[\Delta x \rightarrow \theta_X]{} \theta_Y$

Отображение называется непрерывным на множестве  $D$ , если оно непрерывно в каждой точке множества  $D$ .

Множество отображений  $f : D \subset X \rightarrow Y$  непрерывных на множестве  $D$ , обозначают  $C(D \subset X \rightarrow Y)$  или  $C(D \rightarrow Y)$

**Замечание 1.** Равносильность определений, когда  $x_0$  предельная точка  $D$ , следует из равносильности различных определений предела. Под номерами 2, 3, 4 записан тот факт, что точка  $a = f(x_0)$  является пределом отображения  $f$  в точке  $x_0$  с одним отличием в каждом случае. 2: опущено условие  $x \neq x_0$ ; 3: окрестность не проколота; 4: опущено условие  $x \neq x_0$ . Так как это ничего не портит. Определение 5 на любом из языков записывается также, как и определение 1.

**Определение.** пусть  $f : D \subset X \rightarrow Y, x_0 \rightarrow D$ . Если отображение  $f$  не является непрерывным в точке  $x_0$ , то говорят, что  $f$

разрывно (терпит разрыв, испытывает разрыв) в точке  $x_0$ , а точку  $x_0$  называют точкой разрыва.

**Пример 1.** Функция сигнум

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Тогда  $f(0+) = 1$ ,  $f(0-) = -1$ ,  $0$  — точка неустранимого разрыва первого рода.

**Пример 2.**  $f(x) = |\operatorname{sign}(x)|$  Тогда  $f(0+) = f(0-) = 1$  и  $0$  — точка устранимого разрыва первого рода.

**Пример 3.**  $f(x) = \frac{1}{x}$  Тогда  $f(0+) = +\infty$ ,  $f(0-) = -\infty$  и  $0$  — точка разрыва второго рода.

**Пример 4.**  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Тогда  $f(0+) = f(0-) = +\infty$  и  $0$  — точка разрыва второго рода

**Пример 5.**  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ , тогда  $f$  определена на  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  и на области определения  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ . Точка  $-1$  — точка разрыва второго рода,  $1$  — точка устранимого разрыва. положим  $f(1) = \frac{1}{2}$ . получим непрерывную функцию.

## 1.38 Арифметические действия над непрерывными отображениями. Стабилизация знака непрерывной функции.

(122)

**Теорема.** Арифметические действия над непрерывными отображениями. Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $Y$  — нормированное пространство,  $D \subset X$ ,  $x_0 \in D$ , отображения  $f, g : D \rightarrow Y$

$Y$ ,  $\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  непрерывны в точке  $x_0$ . Тогда отображения  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $\lambda f$ ,  $|f|$ , непрерывны в точке  $x_0$ .

**Доказательство.** Если  $x_0$  — изолированная точка  $D$ , то утверждение тривиально. Если же  $x_0$  — предельная точка  $D$ , то теоремы о непрерывности следуют из теорем о пределах.

**Замечание 1. О стабилизации знака непрерывной функции.** Если функция  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в точке  $x_0$ , причём  $g(x_0) \neq 0$ , то существует такая окрестность  $V_{x_0}$ , что  $\text{sign} g(x) = \text{sign} g(x_0)$  для всех  $x \in V_{x_0} \cap D$ .

**Доказательство.** Для определённости рассмотрим случай, когда  $g(x_0) > 0$ . Допустим противное: пусть для любого  $n \in \mathbb{N}$  существует точка  $x_n \in V_{x_0}(\frac{1}{n}) \cap D$ , для которой  $g(x_n) \leq 0$ . Построенная последовательность  $\{x_n\}$  стремится к  $x_0$ . По определению непрерывности  $g(x_n) \rightarrow g(x_0)$ . по теореме о предельном переходе в неравенстве,  $g(x_0) \leq 0$ , что противоречит условию.

## 1.39 Непрерывность и предел композиции

(124)

**Теорема. Непрерывность композиции.** Пусть  $X, Y, Z$  — метрические пространства,  $f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $g : E \subset Y \rightarrow Z$ ,  $f(D) \subset E$ ,  $f$  непрерывно в точке  $x_0 \in D$ ,  $g$  непрерывно в точке  $f(x_0)$ . Тогда  $g \circ f$  непрерывно в точке  $x_0$ .

**Доказательство.** Возьмём последовательность  $\{x_n\}$ , такую что  $x_n \in D$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ . Обозначим  $y_n = f(x_n)$ ,  $y_0 = f(x_0)$ ; тогда  $y_n, y_0 \in E$ . По определению непрерывности  $f$  в точке  $x_0$  на языке последовательностей  $y_n \rightarrow y_0$ . По определению непрерывности  $g$  в точке  $y_0$  на языке последовательностей  $g(y_n) \rightarrow g(y_0)$ . то есть

$(g \circ f)(x_n) \rightarrow (g \circ f)(x_0)$ . Последнее в силу произвольности  $\{x_n\}$  и означает непрерывность  $g \circ f$  в точке  $x_0$ .

**Замечание 2.** Пусть  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ,  $g(y) = |\operatorname{sign} y|$ . Тогда  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ ,  $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$ , но композиция  $g \circ f$  не имеет предела в нуле, так как  $(g \circ f)(\frac{1}{n\pi}) = 0 \rightarrow 0$ , а  $(g \circ f)(\frac{1}{(n+1/2)\pi}) = 1 \rightarrow 1$ . Этот пример показывает, что утверждение "если  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ ,  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow A} B$ , то  $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B$ " может не выполняться. Если же запретить  $f(x)$  принимать значение  $A$ , то утверждение становится верным.

Пусть  $X, Y, Z$  — метрические пространства,  $f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $g : E \subset Y \rightarrow Z$ ,  $f(D) \subset E$  и выполнены условия:

1.  $a$  — предельная точка  $D$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ ;
2.  $A$  — предельная точка  $E$ ,  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow A} B$ ;
3. Существует такая окрестность  $V_a$  точки  $a$ , что  $f(X) \neq A$  для любого  $x \in \dot{V}_a \cap D$ .

Тогда  $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B$ .

## 1.40 Характеристика непрерывности отображения с помощью прообразов

(125)

**Теорема. Характеристика непрерывности отображения с помощью прообразов.** Пусть  $X, Y$  — метрические пространства,  $f : X \rightarrow Y$ . Тогда для непрерывности  $f$  на  $X$  необходимо и достаточно, чтобы при отображении  $f$  прообраз любого открытого в  $Y$  множества был открыт в  $X$ .

**Доказательство.** 1. Пусть  $f$  непрерывно и множество  $U$  открыто в  $Y$ . Докажем, что множество  $f^{-1}(U)$  открыто в  $X$ . Для



этого возьмём точку  $a \in f^{-1}(U)$  и докажем, что  $a$  — внутренняя точка  $f^{-1}(U)$ . Так как  $f(a) \in U$ , а  $U$  открыто, существует окрестность  $V_{f(a)}$ , содержащаяся в  $U$ . По определению непрерывности  $f$  в точке  $a$  найдётся окрестность  $V_a$  такая, что  $f(V_a) \subset V_{f(a)} \subset U$ . Следовательно  $V_a \subset f^{-1}(U)$ , то есть  $a$  — внутренняя точка  $f^{-1}(U)$ .

2. Пусть прообраз любого открытого множества открыт,  $a \in X$ . Докажем, что  $f$  непрерывно в точке  $a$ ; в силу произвольности  $a$  это и будет означать непрерывность  $f$  на всём  $X$ . Возьмём окрестность  $V_{f(a)} \subset Y$ . По условию её прообраз  $G = f^{-1}(V_{f(a)})$  открыт в  $X$ , при этом  $a \in G$ . Значит, найдётся окрестность  $V_a : V_a \subset G$ . Осталось проверить, что  $f(V_a) \subset V_{f(a)}$ . Тогда определение непрерывности  $f$  в точке  $a$  на языке окрестностей будет выполнено. Действительно, если  $y \in f(V_a)$ , то, по определению образа,  $y = f(x)$  для некоторого  $x \in V_a$ ; тем более  $x \in G$ . По определению прообраза  $f(x) \in V_{f(a)}$ , то есть  $y \in V_{f(a)}$ .

**Замечание 1.** Пусть  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ . Тогда

$$f^{-1}(1, +\infty) = (1, 2].$$

Противоречий с теоремой нет: полуинтервал  $(1, 2]$  открыт в  $X = [0, 2]$ , хотя и не является открытым в  $\mathbb{R}$ .

## 1.41 Теорема Вейерштрасса о непрерывных отображениях, следствия

(126)

**Теорема. Вейерштрасса О непрерывных отображениях.** Пусть  $X, Y$  — метрические пространства,  $X$  — компактно,  $f \in C(X \rightarrow Y)$ . Тогда  $f(X)$  компактно. Другими словами: непрерывный образ компакта — компакт.

**Доказательство.** Пусть  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — открытое покрытие множества  $f(X) : f(X) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ . По теореме о характеристике непрерывности с помощью прообразов, при всех  $\alpha \in A$  множества  $f^{-1}(G_\alpha)$  открыты в  $X$ . Проверим, что

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(G_\alpha).$$

В самом деле, если  $a \in X$ , то  $f(a) \in Y$  и, значит,  $f(a) \in G_\alpha$  при некотором  $\alpha$ , то есть  $a \in f^{-1}(G_\alpha)$  при некотором  $\alpha$ . Следовательно,  $X$  содержится в объединении  $f^{-1}(G_\alpha)$ . Обратное включение тривиально.

Пользуясь компактностью  $X$ , выделим из его открытого покрытия  $\{f^{-1}(G_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  конечное подпокрытие: найдётся такой конечный набор индексов  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in A$ , что

$$X = \bigcup_{i=1}^N f^{-1}(G_{\alpha_i}).$$

Осталось проверить, что

$$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i};$$

это и будет означать, что из произвольного открытого покрытия удастся извлечь конечное подпокрытие. Действительно, если  $y \in f(X)$ , то  $y = f(x)$  для некоторого  $x \in X$ . Тогда найдётся такой номер  $i \in [1 : N]$ , что  $x \in f^{-1}(G_{\alpha_i})$ . Последнее означает, что  $f(x) \in G_{\alpha_i}$ , то есть  $y \in G_{\alpha_i}$ .

**Следствие 1.** Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

**Следствие 2.** Первая теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях. Функция непрерывная на отрезке ограничена.

**Замечание 1.** Оба условия: и непрерывность, и то, что область определения отрезок — существенны. Так, функции  $f(x) = x$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$  непрерывны, но не ограничены, соответственно, на  $\mathbb{R}$  и  $(0, 1]$ . Функция

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Задана на  $[0, 1]$ , разрывна в точке 0, но не ограничена.

**Следствие 3.** Пусть  $X$  компактно,  $f \in C(X \rightarrow \mathbb{R})$ . Тогда существует  $\max_{x \in X} f(x)$ ,  $\min_{x \in X}$ . Другими словами: непрерывная на компакте функция принимает наибольшее и наименьшее значение.

**Доказательство.** Остаётся доказать, что компактно подмножество  $E$  числовой прямой ( $E = F(X)$ ) имеет наибольший и наименьший элемент. Существует  $\sup E = b \in \mathbb{R}$ . Докажем, что  $b \in E$ : это и будет означать, что  $b = \max E$ . По определению супремума для любого  $n \in \mathbb{N}$  найдётся такая точка  $x_n \in E$ , что  $b - \frac{1}{n} < x_n \leq b$ . Построенная последовательность стремится к  $b$ . Следовательно,  $b \in E$  в силу замкнутости  $E$ . Доказательство для минимума аналогично.

**Следствие 4. Вторая теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях.** Функция, непрерывная на отрезке, принимает наибольшее и наименьшее значение.

**Замечание 2.** И здесь оба условия существенны. Так как функции  $f, g, h$  из замечания 1 не имеют наибольшего значения. Наибольшего значения не имеет и ограниченная непрерывная функция  $f_1(x) = x$  на  $[0, 1)$ .

## 1.42 Теорема Кантора

(129)

**Определение.** Пусть  $X, Y$  — метрические пространства  $f : X \rightarrow Y$ . Отображение  $f$  называется равномерно непрерывным на  $X$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in X : \rho_X(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) < \delta \quad \rho_Y(f(\bar{x}), f(\bar{\bar{x}})) < \varepsilon.$$

Ясно, что всякое равномерно непрерывное отображение непрерывно.

**Теорема. Кантор.** Непрерывное на компакте отображение равномерно непрерывно.

**Доказательство.** Пусть  $X$  — компактно,  $f \in C(X \rightarrow Y)$ . Предположим, что  $f$  не является равномерно непрерывным. Тогда существует такое  $\varepsilon^* > 0$ , что при каждом  $n \in \mathbb{N}$  для числа  $\delta = \frac{1}{n}$  найдутся точки  $\bar{x}_n, \bar{\bar{x}}_n \in X$ :

$$\rho_X(\bar{x}_n, \bar{\bar{x}}_n) < \frac{1}{n}, \quad \rho_Y(\bar{y}_n, \bar{\bar{y}}_n) \geq \varepsilon^*,$$

где  $\bar{y}_n = f(\bar{x}_n)$ ,  $\bar{\bar{y}}_n = f(\bar{\bar{x}}_n)$ .

Пользуясь секвенциальной компактностью  $X$ , выделим из последовательности  $\{\bar{x}_n\}$  точек  $X$  подпоследовательность  $\{\bar{x}_{n_k}\}$ , имеющую предел в  $X$ :  $\bar{x}_{n_k} \rightarrow c \in X$ . Тогда и  $\bar{\bar{x}}_{n_k} \rightarrow c$ , так как

$$\rho_X(\bar{\bar{x}}_{n_k}, c) \leq \rho_X(\bar{\bar{x}}_{n_k}, \bar{x}_{n_k}) + \rho_X(\bar{x}_{n_k}, c) < \frac{1}{n_k} + \rho_X(\bar{x}_{n_k}, c) \rightarrow 0$$

. По непрерывности  $f$  в точке  $c$

$$\bar{y}_{n_k} \rightarrow f(c), \quad \bar{\bar{y}}_{n_k} \rightarrow f(c).$$

Следовательно,  $\rho_Y(\bar{y}_{n_k}, \bar{\bar{y}}_{n_k}) \rightarrow 0$  и, начиная с некоторого номера  $\rho_Y(\bar{y}_{n_k}, \bar{\bar{y}}_{n_k}) < \varepsilon^*$ , что противоречит построению.

## 1.43 Теорема Больцано-Коши о непрерывных функциях

(130)

**Теорема. Больцано-Коши О промежуточном значении непрерывной функции.** Пусть  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ . Тогда для любого числа  $C$ , лежащего между  $f(a)$  и  $f(b)$  найдётся такое  $c \in (a, b)$ , что  $f(c) = C$ .

**Доказательство.** 1. Пусть числа  $f(a), f(b)$  разных знаков:  $f(a)f(b) < 0$ ; докажем, что существует такая точка  $c \in (a, b)$ , что  $f(c) = 0$ . Не умаляя общности, будем считать, что  $f(a) < 0 < f(b)$ ; второй случай рассматривается аналогично. Рассмотрим середину отрезка  $[a, b]$  — точку  $\frac{a+b}{2}$ . Если  $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ , то теорема доказана — можно положить  $c = \frac{a+b}{2}$ . Иначе

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [\frac{a+b}{2}, b], & f(\frac{a+b}{2}) < 0, \\ [a, \frac{a+b}{2}], & f(\frac{a+b}{2}) > 0. \end{cases}$$

В обоих случаях  $f(a_1) < 0 < f(b_1)$ . Продолжим этот процесс построения промежутков. Если процесс не завершится (не будет найдена точка  $c$ ), то будет построена последовательность вложенных отрезков, таких что  $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ . При этом отрезки стягиваются, так как  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ . По теореме о стягивающихся отрезках существует единственная точка  $c$  принадлежащая одновременно всем отрезкам, при этом  $a_n \rightarrow c, b_n \rightarrow c$ . По теореме о предельном переходе в неравенстве  $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ , то есть  $f(c) = 0$ .

2. Докажем теорему в общем случае. Пусть  $\varphi = f - C$ . Тогда  $\varphi \in C[a, b]$  как разность непрерывных функций,  $\varphi(a)\varphi(b) < 0$ . По доказанному существует такая точка  $c \in (a, b)$ , что  $\varphi(c) = 0$ , то есть  $f(c) = C$ .

**Замечание 1.** Теорему можно переформулировать так: если непрерывная на промежутке функция принимает два какие-то два

значения, то она принимает все значения, лежащие между ними. Здесь существенно и то, что функция непрерывна, и то, что она задана на промежутке. Функция  $\text{sign}$ , заданная на  $\mathbb{R}$ , разрывна в 0. Она принимает значения  $-1$  и  $1$ , но из чисел между ними только 0. Сужение функции на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  непрерывно, но не принимает значений, лежащих между  $-1$  и  $1$ .

**Замечание 4.** Другой способ доказательства теоремы Больцано-Коши — поверить, что если  $f \in C[a, b]$ ,  $f(a) < 0 < f(b)$ , то точка

$$c = \sup\{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$$

есть корень функции  $f$ .

## 1.44 Сохранение промежутка (с леммой о характере промежутков). Сохранение отрезка

Билет 44: Сохранение промежутка (с леммой о характере промежутков). Сохранение отрезка (131)

**Лемма. Характеристика промежутков.** Пусть  $E \subset \mathbb{R}$ . Тогда следующие утверждения равносильны.

1.  $E$  — промежуток (возможно вырожденный).
2. Для любых  $x, y$ , принадлежащих  $E$  ( $x < y$ ),  $[x, y] \subset E$

**Доказательство.** Второе утверждение следует из первого тривиально. Докажем обратный переход. Пусть  $E \neq \emptyset$ . Обозначим  $m = \inf E$ ,  $M = \sup E$ . Ясно, что  $E \subset [m, M]$ . Докажем, что  $(m, M) \subset E$ . Пусть  $m < z < M$ . Тогда по определению граней существуют точки  $x, y \in E : x < z < y$ . По условию  $z \in E$

**Теорема. О сохранении промежутка.** Непрерывный образ промежутка — промежуток.

**Доказательство.** Пусть  $f \in C[a, b]$ ,

$$m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x), \quad M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) \quad (m, M \in \mathbb{R}).$$

По теореме Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции, множество  $E = f(\langle a, b \rangle)$  выпукло, а, по лемме,  $E$  — промежуток, то есть  $f(\langle a, , \rangle b) = \langle m, M \rangle$ .

**Замечание 2.** Промежуток  $\langle m, M \rangle$  может быть другого типа, нежели  $\langle a, b \rangle$

**Следствие 1. О сохранении отрезка.** Непрерывный образ отрезка — отрезок.

**Доказательство.** Действительно, множество  $f([a, b])$  — промежуток, а, по теореме Вейерштрасса, имеет наибольший и наименьший элемент.

**Замечание 3.** Наибольшее и наименьшее значения не обязательно достигаются на концах отрезка.

## 1.45 Теорема Больцано-Коши о непрерывных отображениях

(133)

**Определение.** Пусть  $Y$  — метрическое пространство,  $E \subset Y$ . Непрерывное отображение отрезка в множество  $E$ :

$$\gamma \in C([a, b]) \subset \mathbb{R} \rightarrow E$$

называется путём в  $E$ . Точка  $\gamma(a)$  называется началом,  $\gamma(b)$  — концом пути.

**Определение.** Пусть  $Y$  — метрическое пространство,  $E \subset Y$ . Множество  $E$  называется линейно связным, если любые две его точки соединены путём.

$$\forall A, b \in E \quad \exists \gamma \in C([a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow E) : \quad \gamma(a) = A, \quad \gamma(b) = B$$

**Теорема. Больцано-Коши О непрерывных отображениях.** Пусть  $X, Y$  — метрические пространства,  $X$  линейно связно,  $f \in C(X \rightarrow Y)$ . Тогда  $f(X)$  линейно связно. Другими словами: непрерывный образ линейно связного множества линейно связан.

**Доказательство.** Пусть  $A, B \in f(X)$ . Тогда, по определению образа, существуют точки  $\alpha, \beta \in X : A = f(\alpha), \quad B = f(\beta)$ . Так как  $X$  линейно связно, точки  $\alpha, \beta$  можно соединить путём в  $X$ , то есть существует путь  $\gamma \in C([a, b] \rightarrow X) : \gamma(a) = \alpha, \quad \gamma(b) = \beta$ . Но тогда, по теореме о непрерывности композиции  $f \circ \gamma$  — путь в  $f(X)$ ; при этом  $(f \circ \gamma)(a) = A, \quad (f \circ \gamma)(b) = B$ .

**Замечание 4.** Согласно лемме, на прямой линейно связными могут быть только промежутки.

**Замечание 4.** Теорема о сохранении промежутка, вообще говоря, не допускает обращения. Так, множество значений функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

есть отрезок  $[0, 1]$ . Однако для монотонной функции обратное утверждение верно.

## 1.46 Разрывы и непрерывность монотонной функции

(134)

**Теорема. О разрывах и непрерывностях монотонной функции.** Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  монотонна. Тогда справедливы следующие утверждения.



1.  $f$  не может иметь разрывов второго рода.
2. Непрерывность  $f$  равносильна тому, что её множество значений — промежуток.

**Доказательство.** Пусть для определения  $f$  возрастает.

1. Пусть  $x_0 \in (a, b)$ ,  $x_1 \in \langle a, x_0 \rangle$ . Тогда  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0)$  для всех  $x \in (x_1, x_0)$ , поэтому  $f$  возрастает и ограничена сверху на  $\langle a, x_0 \rangle$ . По теореме о пределе монотонной функции, существует конечный предел  $f(x_0-)$ , причем, по теореме о предельно переходе в неравенстве,  $f(x_1) \leq f(x_0-) \leq f(x_0)$ . Аналогично доказывается, что для любой точки  $x_0 \in \langle a, b \rangle$  существует конечный предел  $f(x_0+)$ , причём  $f(x_0) \leq f(x_0+) \leq f(x_2)$  для всех  $x_2 \in (x_0, b)$ .

2. Ввиду следствия о сохранении промежутка остается доказать достаточность. Пусть  $f(\langle a, b \rangle)$  — промежуток. Докажем непрерывность  $f$  слева в любой точке  $x_0 \in \langle a, b \rangle$  от противного. Пусть  $f(x_0-) < f(x_0)$  (существование конечного левостороннего предела уже доказано). Возьмём  $y \in (f(x_0-), f(x_0))$ . Тогда если  $a < x_1 < x_0$ , то  $y \in [f(x_1), f(x_0)]$ . Следовательно,  $y \in f(\langle a, b \rangle)$ , то есть  $y$  — значение функции. С другой стороны, для всех  $x \in \langle a, x_0 \rangle$  будет  $f(x) \leq f(x_0-) < y$ , а для всех  $x \in [x_0, b)$  будет  $f(x) \geq f(x_0) > y$ , то есть функция не принимает значение  $y$ . Полученное противоречие доказывает, что  $f(x_0-) = f(x_0)$ . Аналогично  $f$  непрерывна справа в любой точке  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ .

## 1.47 Существование и непрерывность обратной функции

(134)

**Теорема.** О существовании и непрерывности обратной функции. Если  $f : C(\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R})$ ,  $f$  строго монотонна,

$$m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x), \quad M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x).$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1.  $f$  обратима,  $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$  — биекция.
2.  $f^{-1}$  строго монотонна одноимённо с  $f$ .
3.  $f^{-1}$  непрерывна.

**Доказательство.** Пусть для определения  $f$  строго возрастает. Если  $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ ,  $x_1 < x_2$ , то  $f(x_1) < f(x_2)$ ; следовательно  $f$  обратима. По теореме о сохранении промежутка  $f(\langle a, b \rangle) = \langle m, M \rangle$ . По общим свойствам обратимого отображения  $f^{-1}$  — биекция  $\langle m, M \rangle$  и  $\langle a, b \rangle$ .

Докажем, что  $f^{-1}$  строго возрастает. Если  $y_1, y_2 \in \langle m, M \rangle$ ,  $y_1 < y_2$ , то  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = f(x_2)$ , где  $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ ,  $x_1 = f^{-1}(y_1)$ ,  $x_2 = f^{-1}(y_2)$ . При этом  $x_1 < x_2$ , так как возможность  $x_1 \geq x_2$  исключена в силу строгого возрастания  $f$ .

Возрастающая функция  $f^{-1}$  задана на промежутке  $\langle m, M \rangle$ , а её множество значений — промежуток  $\langle a, b \rangle$ . По теореме о разрывах и непрерывности монотонной функции, она непрерывна.

**Замечание 1.** Для обратимости строго монотонной функции и строгой монотонности обратной функции непрерывность не нужна.

**Замечание 2.** 1. Множество точек разрыва монотонной функции не более чем счётно.

2. Если функция задана на промежутке, непрерывна и обратима, то она строго монотонна и, следовательно, обратная функция непрерывна.

3. Отображение, обратное к непрерывному, может оказаться разрывным. Сопоставим каждой точке  $x$  подынтервала  $[0, 2\pi)$  точку  $f(x)$  единичной окружности  $S$ , такую что длина дуги, отсчитываемой от точки  $f(0) = (1, 0)$  до точки  $f(x)$ , равна  $x$  (или, что тоже самое  $\arg f(x) = x$ ). Отображение  $f$  биективно и непрерывно, но

$f^{-1}$  терпит разрыв в точке  $(1, 0)$ . Близким к ней точкам окружности с отрицательной ординатой соответствуют точки полуинтервала, близкие к  $2\pi$ , а не к  $0$ .

Но если отображение задано на компакте, непрерывно и обратимо, то обратное отображение непрерывно.

4. Существует обратимая функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывная в точке  $0$ , но такая, что  $f^{-1}$  разрывна в точке  $f(0)$ .

## 1.48 Степень с произвольным показателем

(136)

Степенную функцию с показателем  $\alpha$ , которая  $x$  сопоставляет  $x^\alpha$ , будем обозначать  $\epsilon_\alpha : \epsilon(x) = x^\alpha$ . Заранее отметим, что области определения степенных функций могут быть различны при разных показателях.

При  $\alpha = 1$  функция  $\epsilon_1 = \text{id}_{\mathbb{R}}$ , как уже отмечалось, непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

При  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  по определению,  $x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$   $n$  раз  $x \in \mathbb{R}$ . Следовательно  $\epsilon_n$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ , как произведение непрерывных.

При  $\alpha = -n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , полагаем

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

. Следовательно, функция  $\epsilon_{-n}$  непрерывна на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  как частное непрерывных.

При  $\alpha = 0$  по определению полагаем  $x^0 = 1$  при всех  $x \neq 0$ , тогда можно в соответствии с общим соглашением доопределить по непрерывности  $x^0 = 1$  и при  $x = 0$ .

Если  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  нечётно, то функция  $\epsilon_n$  строго возрастает на  $\mathbb{R}$ ,  $\sup_{x \in \mathbb{R}} \epsilon_n(x) = +\infty$ ,  $\inf_{x \in \mathbb{R}} \epsilon_n(x) = -\infty$ ; по теореме о сохранении промежутка  $\epsilon_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Если  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  чётно, то функция  $\epsilon_n$  строго возрастает на  $\mathbb{R}_+$ ,  $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} \epsilon_n(x) = +\infty$ ,  $\min_{x \in \mathbb{R}_+} \epsilon_n(x) = 0$ ; по теореме о сохранении промежутка  $\epsilon_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ . По теореме о существовании и непрерывности обратной функции существует и непрерывна функция

$$\epsilon_{\frac{1}{n}} = \begin{cases} \epsilon_n^{-1}, & n \text{ нечетно,} \\ (\epsilon_n|_{\mathbb{R}_+})^{-1}, & n \text{ чётно,} \end{cases}$$

которая называется корнем  $n$ -ной степени и обозначается ещё  $\sqrt[n]{(\cdot)}$ :  $\epsilon_{1/n} = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ . Итак,

$$\epsilon_{1/n} : \mathbb{R} \xrightarrow{na} \mathbb{R}, \quad n \text{ чётно,}$$

$$\epsilon_{1/n} : \mathbb{R}_+ \xrightarrow{na} \mathbb{R}, \quad n \text{ чётно;}$$

$\epsilon_{1/n}$  строго возрастает и непрерывна.

При  $\alpha \in \mathbb{Q}$   $\alpha = r = \frac{p}{q}$  — несократимая дробь  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ . Полагаем

$$x^r = (x^p)^{1/q},$$

для всех  $x$ , для которых правая часть имеет смысл. Другими словами  $\epsilon_r = \epsilon_{(1/q)} \circ \epsilon_p$ . Тогда  $x^r$  определено в следующих случаях

$$x > 0, \quad r \text{ любое,}$$

$$x = 0, \quad r \geq 0$$

$$x < 0, \quad q \text{ нечётно.}$$

Функция  $\epsilon_r$  непрерывна на своей области определения; она строго возрастает на  $[0, +\infty)$  при  $r > 0$ , строго убывает на  $(0, +\infty)$  при  $r < 0$ .

(145)

При всех  $x > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$  по свойству  $a^{xy} = (a^x)^y$  верна формула  $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ . Поэтому степенная функция  $\epsilon_\alpha$  непрерывна на  $(0, +\infty)$  при всех  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Если  $\alpha$  иррационально, то

$$\epsilon_\alpha : [0, +\infty) \xrightarrow{na} [0, +\infty), \quad \alpha > 0,$$

$$\epsilon_\alpha : (a, +\infty) \xrightarrow{na} (0, +\infty), \quad \alpha < 0.$$

Непрерывность  $\epsilon_\alpha$  в нуле при  $\alpha > 0$  также имеет место: если  $x_n > 0$ ,  $x_n \rightarrow 0$ , то  $y_n = \ln x_n \rightarrow -\infty$  и  $\epsilon_\alpha(x_n) = e^{\alpha y_n} \rightarrow 0 = e_\alpha(0)$

## 1.49 Свойства показательной функции и логарифма

(140)

**1.** Функция  $\exp_a$  строго возрастает на  $\mathbb{R}$  при  $a > 1$  и строго убывает на  $\mathbb{R}$  при  $0 < a < 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $a > 1$ ,  $x < y$ . Докажем, что  $a^x < a^y$ . Возьмём рациональные числа  $\bar{r}, \bar{\bar{r}}$ , такие что

$$x < \bar{r} < \bar{\bar{r}} < y$$

и две последовательности рациональных чисел  $\{\bar{r}_n\}$  и  $\{\bar{\bar{r}}_n\}$ , такие что

$$\bar{r}_n < x < y < \bar{\bar{r}}_n \quad \bar{r}_n \rightarrow x, \quad \bar{\bar{r}}_n \rightarrow y.$$

Тогда в силу строгой монотонности показательной функции рационального аргумента

$$a^{\bar{r}_n} < a^{\bar{r}} < a^{\bar{\bar{r}}} < a^{\bar{\bar{r}}_n}.$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве,

$$a^x \leq a^{\bar{r}} < a^{\bar{\bar{r}}} \leq a^y.$$

Случай  $0 < a < 1$  разбирается аналогично.

**2.**  $a^{x+y} = a^x a^y$ . В частности  $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

**Доказательство.** Возьмём две последовательности рациональных чисел  $\{\bar{r}_n\}$  и  $\{\bar{\bar{r}}_n\}$ , стремящиеся к  $x, y$  и перейдём к пределу в равенстве

$$a^{\bar{r}_n + \bar{\bar{r}}_n} = a^{\bar{r}_n} a^{\bar{\bar{r}}_n},$$

которое верно для рациональных чисел.

**3.** Показательная функция непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Непрерывность показательной функции в нуле доказывается на языке последовательностей.  $\{x_n\}$  — последовательность вещественных чисел,  $x_n \rightarrow 0$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$  и зафиксируем номер  $N_0$  для которого выполняется неравенство  $1 - \varepsilon < a^{-1/N_0} < a^{1/N_0} < 1 + \varepsilon$ . Тогда найдётся такой номер  $N$ , что для всех  $n > N$  будет  $-\frac{1}{N_0} < x_n < \frac{1}{N_0}$ . В силу строгой монотонности показательной функции

$$1 - \varepsilon < a^{-1/N_0} < a^{x_n} < a^{1/N_0} < 1 + \varepsilon$$

для таких  $n$ . Это и означает, что  $a^{x_n} \rightarrow 1$ . Случай  $0 < a < 1$  разбирается аналогично.

Непрерывность в произвольной точке  $x_0$  следует из доказанной непрерывности в нуле

$$a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1) \rightarrow 0$$

4.  $(a^x)^y = a^{xy}$ .

**Доказательство.** Возьмём две последовательности рациональных чисел  $\{x_n\}$ ,  $\{y_m\} : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x, y_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} y$ . По известному свойству степени с рациональным показателем  $(a^{x_n})^{y_m} = a^{x_n y_m}$ . Зафиксируем  $m$  и устремим  $n$  к  $\infty$ . Тогда, по определению показательной функции  $a^{x_n y_m} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a} a^{x y_m}$  и  $a^{x_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a} a^x$ , а по непрерывности степенной функции с рациональным показателем  $(a^{x_m})^{y_m} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (a^x)^{y_m}$ . Поэтому  $(a^x)^{y_m} = a^{x y_m}$ . Осталось устремить  $m$  к  $\infty$  и воспользоваться непрерывностью показательной функции.

5.  $(ab)^x = a^x b^x$

**Доказательство.** Сделаем предельный переход в равенстве для степеней с рациональным показателем.

6.  $\exp_a : \mathbb{R} \xrightarrow{na} (0, +\infty)$ .

**Доказательство.** Пусть  $a > 1$ . Функция  $\exp_n$  строго возрастает, поэтому существуют пределы  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a^x /$ . по неравенству Бернулли

$$a^n = (1 + \alpha)^n \geq 1 + na \rightarrow +\infty, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \rightarrow 0.$$

Значит по свойствам промежутка  $\exp_a(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ . Кроме того, значение 0 не принимается в силу строгой монотонности: если  $a^{x_0} = 0$ , то  $a^x < 0$  при  $x < x_0$ , чего быть не может. Доказательство при  $0 < a < 1$  аналогично.

1.  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$  при всех  $x, y > 0$ .

**Доказательство.** По свойству 2,

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy.$$

2.  $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$  при всех  $x > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  В частности  $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ .

**Доказательство.** По свойству 4,

$$a^{\alpha \log_a x} = (a^{\log_a x})^\alpha = x^\alpha.$$

3.  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$  при всех  $x > 0$ . В частности,  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ .

**Доказательство.** По свойству 4

$$b^{\log_b a \log_a x} = (b^{\log_b a})^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x$$

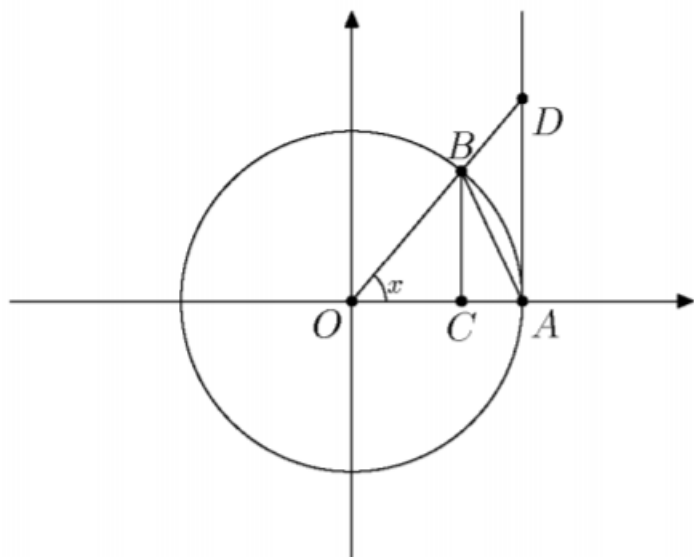
## 1.50 Непрерывность тригонометрических и обратных тригонометрических функций

(146-154)

**Лемма.** Если  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , то

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

**Доказательство.** Изобразим единичную окружность и угол в  $x$  радиан.



На рисунке



$$\triangle OAB \subset \text{сект.} OAB \subset \triangle OAD.$$

Поэтому фигуры связаны неравенством

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сект.} OAB} < S_{\triangle OAD}$$

Учитывая, что

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|OA||BC|,$$

$$S_{\text{сект.} OAB} = \frac{1}{2}|OA|^2 x, \quad S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2}|OA||AD|$$

,

$$|OA| = 1, \quad |BC| = \sin x, \quad |AD| = \operatorname{tg} x.$$

**Следствие 1.** При всех  $x \in \mathbb{R}$   $|\sin x| \leq |x|$

**Доказательство.** При  $|x| \in (0, \frac{\pi}{2})$  доказано по лемме, иначе  $|\sin x| < 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$

**Следствие 2.** Функции синус и косинус непрерывны на  $\mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Для любой точки  $x_0 \in \mathbb{R}$  имеем:

$$|\sin x - \sin x_0| = |2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2}| \leq 2 \cdot \frac{|x-x_0|}{2} \cdot 1 = |x - x_0| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

Непрерывность косинуса доказывается с помощью формулы приведения  $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$  и теоремы о непрерывности композиций.

Тангенс и котангенс непрерывны на своих областях определения, по теореме о непрерывности частного.

$\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}$ . По теореме о существовании и непрерывности обратной функции, функция арксинус строго возрастает и непрерывна

$\arccos = (\cos|_{[0, \pi]})^{-1}$ . Аналогично функция арккосинус строго убывает и непрерывна.

$\operatorname{arctg} = (\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}$ . Аналогично функция арктангенс строго возрастает и непрерывна.

$\operatorname{arcsctg} = (\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)})^{-1}$ . Аналогично функция аркоктангенс строго убывает и непрерывна.

## 1.51 Замечательные пределы

Билет 51: Замечательные пределы (154-158)

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

По лемме  $\sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ , применяя предельный переход в неравенстве при  $x \rightarrow 0$   $\frac{\sin x}{x} = 1$ .

**Следствие 1.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

**Доказательство.** Напомним, что  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Разница между этим и доказываемым в том, что теперь речь идёт о пределе не последовательности, а функции, заданной на  $\mathbb{R} \setminus [-1, 0]$ : аргумент  $x$  необязан принимать натуральные и даже положительные значения.

Для доказательства воспользуемся языком последовательностей. Возьмём последовательность  $\{x_n\} : x_n \rightarrow \infty$  и докажем, что  $f(x_n) \rightarrow$

$e$ .

1. пусть сначала  $x_n \in \mathbb{N}$  для всех  $n$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$  и по определению числа  $e$  подберём такой номер  $K$ , что для всех номеров (то есть натуральных чисел)  $k > K$  будет  $|f(k) - e| < \varepsilon$ . Но начиная с некоторого номера  $x_n > k$ , а тогда  $|f(x_n) - e| < \varepsilon$ , что и означает выполнение требования.

2. Пусть  $x_n \rightarrow +\infty$ . Тогда, начиная с некоторого номера  $x_n > 1$ , поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что все  $x_n > 1$ . Уменьшая или увеличивая основание и показатель степени получаем равенство

$$\left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{[x_n]+1},$$

которые перепишем в виде

$$\frac{f([x_n]+1)}{1 + \frac{1}{[x_n]+1}} \leq f(x_n) \leq \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right) f([x_n]).$$

Так как  $\{[x_n]\}$  и  $\{[x_n]+1\}$  — последовательности натуральных чисел, стремящихся к  $+\infty$ , то, по доказанному,  $f([x_n]) \rightarrow e$ ,  $f([x_n]+1) \rightarrow e$ . Следовательно, по теореме о сжатой последовательности,  $f(x_n)$  стремится к  $e$ .

3. Пусть  $x_n \rightarrow -\infty$ , тогда  $y_n = -x_n \rightarrow +\infty$ . По доказанному,

$$f(x_n) = \left(1 + \frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n-1}\right)^{y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n-1}\right) f(y_n-1) \rightarrow e.$$

4. Пусть  $x_n \notin [-1, 0]$ ,  $x_n \rightarrow \infty$ , а в остальном  $\{x_n\}$  произвольная. Если чисел отрицательных (положительных) конечно, то  $x_n \rightarrow +\infty (-\infty)$  и требуемое соотношение уже доказано, иначе разобьём на две подпоследовательности положительных и отрицательных чисел. Они обе стремятся к  $e$ , тогда и вся последовательность сходится к  $e$  по лемме.

**Замечание 1.** Заменяя  $x$  на  $\frac{1}{x}$  можно получить

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

В частности,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

**Доказательство.** Так как  $\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a}$ , достаточно доказать равенство для натурального логарифма. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1.$$

Во втором равенстве воспользовались непрерывностью логарифма в точке  $e$  и теоремой о непрерывности композиции (для её применения мы доопределим  $(1+x)^{1/x} = e$  при  $x = 0$ ).

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Доказательство.** При  $\alpha = 0$  тривиально. Пусть  $\alpha \neq 0$ . Возьмём последовательность  $\{x_n\} : x_n \rightarrow 0, \quad x_n \neq 0$ ; не уменьшая общности, можно считать, что  $|x_n| < 1$ . Тогда в силу непрерывности и строгой монотонности степенной функции  $y_n = (1+x_n)^\alpha - 1 \rightarrow 0, \quad y_n \neq 0$ . При этом

$$\alpha \ln(1+x_n) = \ln(1+y_n).$$

Пользуясь замечательным пределом для логарифма находим

$$\frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1+y_n)} \alpha \frac{\ln(1+y_n)}{x_n} \rightarrow \alpha.$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0.$$

В частности

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

**Доказательство.** При  $a = 1$  Доказывается равенство тривиально; пусть  $a \neq 1$ . Возьмём последовательность  $\{x_n\} : x_n \rightarrow 0, \quad x_n \neq 0$ . Тогда ввиду непрерывности и строгой монотонности показательной функции  $y_n = a^{x_n} - 1 \rightarrow 0, \quad y_n \neq 0$ . При этом

$$x_n \ln a = \ln(1 + y_n).$$

Пользуясь замечательным пределом для логарифма, находим

$$\frac{a^{x_n} - a}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1 + y_n)} \ln a \rightarrow \ln a.$$

## 1.52 Дифференцируемость и производная. Равносильность определений примеры

(169)

**Определение.** Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in \langle a, b \rangle$ . Существует такое число  $A \in \mathbb{R}$ , что

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0,$$

то функция называется дифференцируемой в точке  $x_0$ . При этом число  $A$  называется производной функции  $f$  в точке  $x_0$ .

**Определение.** Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in \langle a, b \rangle$ . Если существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

равный числу  $A \in \mathbb{R}$ , то функция  $f$  называется дифференцируемой в точке  $x_0$ , а число  $A$  — её производной в точке  $x_0$ .

**Теорема.** Определения дифференцируемости и производной равносильны.

**Доказательство.** 1. Пусть  $f$  дифференцируема, а  $A$  — её производная в точке  $x_0$ , в смысле определения 1, которое говорит, что

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varphi(x)(x - x_0), \quad \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

Переносим в  $f(x_0)$  в левую часть и делим на  $x - x_0$  находим, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A.$$

то есть  $f$  дифференцируема, а  $A$  — её производная.

1. Обратно, пусть функция  $f$  дифференцируема, а  $A$  — её производная в смысле определения 2. Обозначим

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A.$$

Тогда  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  и выполнено равенство из первой части доказательства, то есть  $f$  дифференцируема, а  $A$  — производная в смысле определения 1.

**Пример 1.**  $f(x) = |x|$   $f'_\pm(0) = \lim_{x \rightarrow 0 \pm} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \pm 1$ . Поэтому она не дифференцируема в нуле.

**Пример 2.**  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  при  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$   $f'(0) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}$  не имеет предела.

**Пример 3.**  $f(x) = \sqrt[3]{x}$   $f'(0) = \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} \rightarrow x^{-2/3} \rightarrow +\infty$ .

**Пример 4.**  $f(x) = \operatorname{sign} x$   $f' = \frac{\operatorname{sign} x - \operatorname{sign} 0}{x - 0} = \frac{1}{|x|} \rightarrow +\infty$ .

## 1.53 Геометрический и физический смысл производной

(174)

**Геометрический (задача Лейбница о касательной).**

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ,  $y_0 = f(x_0)$ ,  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ . Точка  $M_0 = (x_0, y_0)$ . Возьмём на графике функции  $f$  ещё одну точку  $M_1 = (x_1, y_1)$ :  $x_1 \in \langle a, b \rangle$ ,  $x_1 \neq x_0$ ,  $y_1 = f(x_1)$ . Проведём прямую  $M_0M_1$ , которую будем называть секущей. Уравнение секущей  $M_0M_1$  имеет вид

$$u = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0).$$

Касательной называется предельное положение секущей при  $M_1 \rightarrow M_0$  ( $x_1 \rightarrow x_0$ ).  $k_{кас.} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$ . Иными словами, производная в точке — угловой коэффициент касательной в этой точке.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

**Замечание 1.** Если  $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , то

$$f(x) - l(x) = o(x - x_0) \quad x \rightarrow x_0$$

. В то же время ни одна другая прямая не обладает этим свойством, поэтому его принимают за определение касательной (не вертикальной).

**физический (задача Ньютона о скорости).**

Пусть материальная точка движется по прямой. Обозначим  $s(t)$  — путь, пройденный точкой за время от начального момента  $t_0$  до  $t$ . Тогда путь, пройденный от момента  $t_1$  до момента  $t_1 + \Delta t$ , равен  $\Delta s = s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)$ . Средняя скорость между этими моментами времени вычисляется формулой  $v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ .  $v_{мгн.}(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp}$  — мгновенная скорость. По определению производной она равна  $s'(t_1)$ .

Подобным образом производная встречается и в ситуациях, когда речь идет о скорости изменения одной величины относительно другой.

## 1.54 Арифметические действия и производная

(178)

Если  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируемы в точке  $x \in \langle a, b \rangle$

**1. Производная суммы и разности.** то функция  $f + g$  и  $f - g$  дифференцируемы в этой точке и

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x).$$

**Доказательство.** По определению производной суммы.

$$\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x) + g'(x).$$

Это и означает, что сумма дифференцируема в точке и для производной суммы верно равенство.

Для разности доказывается аналогично.

**2. Производная произведения.** то функция  $fg$  дифференцируема в точке  $x$  и

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \\ &f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

**Следствие 1.** Если  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то функция  $\alpha f$  дифференцируема в точке  $x$  и



$$(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x).$$

**Следствие 2. Линейность дифференцирования.** Если  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то функция  $\alpha f + \beta g$  дифференцируема в точке  $x$  и

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

**3. Производная частного.** Если  $g(x) \neq 0$ , то функция  $\frac{f}{g}$  дифференцируема в точке  $x$  и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что в силу условия  $g(x) \neq 0$  и непрерывности функции  $g$  в точке  $x$  существует такое  $\delta > 0$ , что  $g$  не обращается в ноль на промежутке  $(x - \delta, x + \delta) \cap \langle a, b \rangle$ . Поэтому частно  $\frac{f}{g}$  определено на током промежутке, и можно ставить вопрос о дифференцируемости частного в точке  $x$ .

$$\frac{\frac{f}{g}(h+x) - \frac{f}{g}(x)}{h} = \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

## 1.55 Производная композиции

(180)

**Теорема. Производная композиции.** Если функция  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle$  дифференцируема в точке  $x \in \langle a, b \rangle$ , а функция  $g : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $f(x)$ , то функция  $g \circ f$  дифференцируема в точке  $x$  и

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

**Доказательство.** Обозначим  $y = f(x)$ . Воспользуемся определением 1 дифференцируемости и запишем

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h,$$

$$g(y + k) = g(y) + g'(y)k + \beta(k)k,$$

где функции  $\alpha, \beta$  в нуле непрерывны и равны нулю. Подставляя во второе равенство  $k = f'(x)h + \alpha(h)h = \varkappa(h)$ , получаем

$$\begin{aligned} g(f(x + h)) &= g(f(x)) + g'(f(x))(f'(x)h + \alpha(h)h) + \beta(\varkappa(h))\varkappa(h) = \\ &= g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + \gamma(h)h, \end{aligned}$$

где

$$\gamma(h) = g'(y)\alpha(h) + \beta(\varkappa(h))(f'(x) + \alpha(h)).$$

Ясно, что  $\gamma(0) = 0$  и  $\gamma$  непрерывна в нуле по теореме о непрерывности композиции и результатов арифметических операций. Поэтому выполнено определение дифференцируемости композиции  $g \circ f$  в точке  $x$  и верно равенство.

## 1.56 Производная обратной функции и функции, заданной параметрически

(182)

**Теорема. Производная обратной функции.** Пусть  $f \in C\langle a, b \rangle$ ,  $f$  строго монотонна, дифференцируема в точке  $x \in \langle a, b \rangle$ ,  $f'(x) \neq 0$ . Тогда обратная функция  $f^{-1}$  дифференцируема в точке  $f(x)$  и

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

**Доказательство.**  $f^{-1}$  существует, определена на промежутке  $P$  (множество значений  $f$ ), строго монотонна и непрерывна по теореме. Обозначим  $y = f(x)$ ,  $h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = \tau(k)$ . Тогда  $h \neq 0$ ,  $x = f^{-1}(y)$ ,  $x+h = f^{-1}(y_k)$  и  $f(x+h) - f(x) = k$ .

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{\tau(k)}{f(x+\tau(k)) - f(x)}$$

и найдём его предел при  $k \rightarrow 0$ . По условию,

$$\frac{h}{f(x+h) - f(x)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{f'(x)}.$$

Но  $\tau(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$  по непрерывности  $f^{-1}$  в точке  $y$ . Следовательно,

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} \xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{1}{f'(x)}$$

по теореме о непрерывности композиции.

**Замечание 1.** Равенство можно переписать так:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

**Замечание 2.** Дифференциал обратной функции в точке  $x$  — функция обратная дифференциалу исходной в точке  $x$ .

**Замечание 3.** Так как графики  $f(x)$  и  $f^{-1}(x)$  симметричны относительно  $y = x$ , касательные в симметричных точках тоже симметричны ( $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$ ), то есть  $f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)}$

**Производная функции заданной параметрически.** Пусть  $T$  — множество,  $\varphi, \psi : T \rightarrow \mathbb{R}$ . Рассмотрим отображение  $\gamma(\varphi, \psi) : T \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Система

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

не всегда определяет функцию  $y(x)$ . Но если жто так ( $\varphi$  обратима), то находим  $t = \varphi^{-1}(x)$  из первого уравнения и подставляем во второе. Тогда

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in \varphi(T),$$

то есть  $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ .

Обычно для встречающихся на практике систем множество  $T$  можно разбить на несколько частей, на каждой из которых функция  $\varphi$  обратима.

Пусть теперь  $T = \langle a, b \rangle$ ,  $t \in \langle a, b \rangle$ ,  $\varphi \in C\langle a, b \rangle$ ,  $\varphi$  строго монотонна,  $\varphi, \psi$  дифференцируемы в точке  $t$ ,  $\varphi'(t) \neq 0$ ,  $f = \psi \circ \varphi^{-1}$  — параметрически заданная функция. Тогда  $f$  дифференцируема в точке  $x = \varphi(t)$  и  $f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ . Следует из правил дифференцирования композиции и обратной функции. Часто равенство записывают в виде  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ .

## 1.57 Производные элементарных функций

(185)

1.  $c' = 0$ .

2.  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Пусть  $x \neq 0$  считая, что  $0 < |h| < |x|$ . Пользуясь замечательным пределом для степенной функции получаем

$$\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \frac{(1+h/x)^\alpha - 1}{h/x} x^{\alpha-1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \alpha x^{\alpha-1}.$$

3.  $(a^x)' = a^x \ln a$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Доказательство.** По замечательному пределу для показательной функции

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} a^x \ln a.$$

4.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ,  $x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Доказательство.** По замечательному пределу для логарифма.

$$\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{x} \frac{\log_a(1+h/x)}{h/x} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{x \ln a}.$$

**5.**  $(\sin x)' = \cos x$ .

**Доказательство.** По замечательному пределу для синуса и непрерывности косинуса

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2} \cos(h + \frac{h}{2})}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos x.$$

**6.**  $(\cos x)' = -\sin x$ .

**Доказательство.** По формуле для дифференцирования произведения и правилу дифференцирования композиции

$$(\cos x)' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x.$$

**7.**  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

**Доказательство.** По формулам для производных синуса и косинуса и правилу дифференцирования частного

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

**8.**  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ .

**Доказательство.** По формуле для производной тангенса и правилам дифференцирования композиции

$$(\operatorname{ctg} x)' = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2} - x)} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

**9.**  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$

**Доказательство.** По правилу дифференцирования обратной функции

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**10.**  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$

**Доказательство.** Так как  $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ ,

$$(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{1-x^2}.$$

$$11. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

**Доказательство.** По правилу дифференцирования обратной функции

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$12. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

**Доказательство.** Так как  $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

## 1.58 Теорема Ферма

(188)

**Теорема. Ферма.** Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f(x_0) = \max_{x \in (a, b)} f(x)$  или  $f(x_0) = \max_{x \in (a, b)} f(x)$ ,  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда  $f'(x_0) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть для определённости значение в точке  $x_0$  наибольшее, то есть  $f(x) \leq f(x_0)$  при всех  $x \in \langle a, b \rangle$ . Тогда  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$  при всех  $x \in (x_0, b)$ . По теореме о предельном переходе в неравенстве

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Аналогично  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$  при всех  $x \in \langle a, x_0 \rangle$ , и поэтому

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Следовательно  $f'(x) = 0$ .

**Замечание 1.** Геометрический смысл теоремы Ферма: если во внутренней точке максимума (минимума) существует касательная, то эта касательная горизонтальна.

**Замечание 2.**  $f(x) = |x|$  — пример функции не имеющей касательной в точке минимума.

**Замечание 3.** Условие, что  $x_0$  — внутренняя точка существенно:  $f(x) = x^2$  на отрезке  $[0, 1]$  принимает наибольшее значение в точке 1, при этом  $f'(1) = 2$ .

## 1.59 Теорема Ролля

Билет 59: Теорема Ролля (189)

**Теорема. Ролля.** Пусть функция  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , дифференцируема на  $(a, b)$  и  $f(a) = f(b)$ . Тогда найдётся такая точка  $x \in (a, b)$ , что  $f'(c) = 0$ .

**Доказательство.** По теореме Вейерштрасса, существуют точки  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , что  $f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $f(x_2) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ . Если  $x_1, x_2$  — концевые точки  $[a, b]$ , то по условию  $f(x_1) = f(x_2)$ , то есть наибольшее и наименьшее значения  $f$  совпадают, поэтому  $f$  постоянна на  $[a, b]$  и в качестве  $c$  можно взять любую точку  $(a, b)$ . Если же  $x_1$  или  $x_2$  лежит в  $(a, b)$ , то, по теореме Ферма,  $f'(x_1) = 0$  или  $f'(x_2) = 0$ ; поэтому можно положить  $c = x_1$  или  $c = x_2$ .

**Замечание 1.** Геометрический смысл теоремы Ролля: в условиях теоремы найдётся точка с горизонтальной касательной.

**Замечание 2.** Все условия теоремы Ролля существенны.  $f(x) = x(x \in [0, 1))$ ,  $f(1) = 0$  разрывна в точке 1. Функция  $f(x) = \sqrt{|x|}$  ( $x \in [-1, 1]$ ) не имеет производной в точке 0.  $f(x) = x$  принимает разные значения на концах, но остальным условиям удовлетворяет.

**Замечание 3.** Из дифференцируемости  $f$  следует ее непрерывность, поэтому заключение теоремы выполняется для дифференцируемых на  $[a, b]$  функций. В теореме Ролля функции разрешается не иметь производной на концах. Так отрезок  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  не дифференцируема на концах отрезка  $[-1, 1]$ , но условиям теоремы удовлетворяет.

**Замечание 4.** Из теоремы Ролля следует, что между любыми двумя нулями дифференцируемой функции всегда лежит ноль её производной.

## 1.60 Формулы Лагранжа и Коши, следствия

(190)

**Теорема. Лагранжа.** Пусть функция непрерывна на  $[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда найдётся такая точка  $c \in (a, b)$ , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

**Теорема. Коши.** Пусть функции  $f, g$  непрерывны на  $[a, b]$  и дифференцируемы на  $(a, b)$ . Тогда найдётся такая точка  $c \in (a, b)$ , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**Замечание 1.** Теорема Лагранжа — частный случай теоремы Коши, поэтому ее доказывать не будем, но она применяется часто, поэтому её выделили в отдельную теорему.

**Доказательство.** Заметим, что  $g(a) \neq g(b)$ , так как иначе по теореме Ролля нашлась бы точка  $t \in (a, b)$ , в которой  $g'(t) = 0$ .



Положим  $\varphi = f - Kg$ , где  $K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ , чтобы  $\varphi(a) = \varphi(b)$ . Тогда  $\varphi$  удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Поэтому найдётся такая точка  $c \in (a, b)$ , что  $\varphi'(c) = 0$ , то есть  $f'(c) = Kg'(c)$ , что равносильно требуемому.

**Замечание 7.** Пусть функция  $f$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$  и дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда для любых различных точек  $x, x + \Delta x$  из  $\langle a, b \rangle$  найдётся такое  $\theta \in (0, 1)$ , что

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x$$

Доказательство по теореме Лагранжа с концами  $x, x + \Delta x$ . Надо учесть, что  $c$  между  $x$  и  $x + \Delta x$ , то есть  $\theta = \frac{c-x}{\Delta x} \in (0, 1)$ .

**Следствие 1. оценка приращения функции.** Пусть функция  $f$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ , дифференцируема на  $(a, b)$ , а число  $M > 0$  такого, что  $|f'(t)| \leq M$  для всех  $t \in (a, b)$ . Тогда для любых точек  $x$  и  $x + \Delta x$  из  $\langle a, b \rangle$

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \leq M|\Delta x|.$$

Другими словами, если производная функции ограничена, то приращение функции не более чем в  $M$  раз превзойдет приращение аргумента.

Очевидно вытекает из замечания.

**Следствие 2.** Функция, имеющая на  $\langle a, b \rangle$  ограниченную производную, равномерно непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ .

**Доказательство.** Пусть  $M > 0$  таково, что  $|f'(t)| \leq M$  для всех  $t \in \langle a, b \rangle$ . Возьмем  $\varepsilon > 0$  и положим  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ . Тогда, если  $x, y \in \langle a, b \rangle$ ,  $|x - y| < \delta$ , то по следствию 1

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \leq M\delta = \varepsilon,$$

что и доказывает равномерную непрерывность  $f$ .

## 1.61 Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ , примеры

(194)

**Теорема. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида  $\frac{0}{0}$ .** Пусть  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , функции  $f, g$  дифференцируемы на  $(a, b)$ ,  $g'(t) \neq 0$  для любого  $t \in (a, b)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$  и существует предел

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда предел  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$  также существует и равен  $A$ .

**Доказательство.** 1. Пусть  $a \in \mathbb{R}$ . Доопределим функции в точке  $a$  нулем:  $f(a) = g(a) = 0$ . Тогда доопределенные функции  $f, g$  будут непрерывны на  $[a, b)$ . Возбьем последовательность  $\{x_n\} : x_n \in (a, b)$ ,  $x_n \rightarrow a$ , и докажем, что  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow A$ . Функции  $f$  и  $g$  удовлетворяют условиям теоремы Коши на каждом отрезке  $[a, x_n]$ . Поэтому для любого  $n \in \mathbb{N}$  найдётся такая точка  $c_n \in (a, x_n)$ , что

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

По теореме о сжатой последовательности,  $c_n \rightarrow a$ . По определению правостороннего предела на языке последовательностей,  $\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \rightarrow A$ , а тогда в силу произвольности  $\{x_n\}$  и  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a+} A$ .

2. Пусть  $a = \infty$ . В силу локальности предела можно считать, что  $b < 0$ . Положим  $\varphi(t) = f(-\frac{1}{t})$ ,  $\psi(t) = g(-\frac{1}{t})$  ( $t \in (0, -\frac{1}{b})$ ). Тогда

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t^2} f'(-\frac{1}{t}), \quad \psi(t) = \frac{1}{t^2} g'(-\frac{1}{t}) \neq 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \psi(t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

По доказанному,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = A.$$

**Замечание 1.** Утверждение, аналогичное теореме справедливы и для левостороннего предела, а следовательно, и для двухстороннего предела

**Пример 1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{1} = 1$

## 1.62 Правило Лопиталя раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$

(195)

**Теорема. Правило Лопиталя для неопределённостей вида  $\frac{\infty}{\infty}$ .** Пусть  $\infty \leq a < b \leq +\infty$ , функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы на  $(a, b)$ ,  $g'(t) \neq 0$  для любого  $t \in (a, b)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$  и существует предел

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда предел  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$  тоже существует и равен  $A$ .

**Доказательство.** 1. Пусть  $A = 0$ . Возьмём последовательность  $\{x_n\}$  со свойствами:  $x_n \in (a, b)$ ,  $x_n \rightarrow a$ , и докажем, что  $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow 0$ . Зафиксируем число  $\sigma > 0$ . по условию, найдется такое  $y \in (a, b)$ , что для любого  $c \in (a, y)$  будет  $g(c) \neq 0$  и  $|\frac{f'(c)}{g'(c)}| < \sigma$ . Начиная с

некоторого номера  $x_n \in (a, y)$ , поэтому можно считать, что  $x_n \in (a, y)$  для всех  $n$ . По теореме Коши, для любого  $n$  найдётся такое  $c_n \in (x_n, y)$ , что

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n)-f(y)}{g(x_n)-g(y)} \frac{g(x_n)-g(y)}{g(x_n)} + \frac{f(y)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x_n)}\right) + \frac{f(y)}{g(x_n)}.$$

Учитывая, что  $g(x_n) \rightarrow \infty$ , находим

$$\left| \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \right| \leq \sigma \left(1 + \left| \frac{g(y)}{g(x_n)} \right| \right) + \left| \frac{f(y)}{g(x_n)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma.$$

Поэтому  $\overline{\lim} \left| \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \right| \leq \sigma$ . Но так как  $\sigma$  произвольно  $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = 0$ .

2. Пусть  $A \in \mathbb{R}$  произвольно. Положим  $h = f - Ag$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \left( \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right) = 0.$$

По доказанному,  $\frac{h(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a+} 0$ , то есть  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a+} A$ .

3. Пусть  $A = +\infty$  рассматривается аналогично случаю  $A = 0$ . При этом вместо  $\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| < \sigma$  используется неравенство  $\frac{f'(c)}{g'(c)} > M$  и доказывается, что  $\underline{\lim} \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \geq M$ . Случай  $A = -\infty$  разбирается переходом к функции  $-f$ .

**Замечание 1.** Утверждение, аналогичное теореме справедливы и для левостороннего предела, а следовательно, и для двухстороннего предела

**Замечание 2.** В теореме функции  $f$  не предполагается бесконечно большой, хотя на практике правило Лопиталя обычно применяют при наличии неопределенностей.

**Замечание 3.** В условиях правила Лопиталя существование предела отношения функций выводится из существования предела отношений их производных. Обратное неверно. Если  $g(x) = x$ ,  $f(x) = x + \sin x$ , то предел на бесконечности 1, а отношение производных предела не имеет.

**Пример 1.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0.$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

**Пример 2.** При  $a > 1$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x \ln a} = 0$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{(a^{1/k})^x} \right)^k = 0.$

## 1.63 Теорема Дарбу, следствия

Билет 63: Теорема Дарбу, следствия (198)

**Теорема. Дарбу.** Если функция  $f$  дифференцируема на  $[a, b]$ , то для любого числа  $C$ , лежащего между  $f'(a)$  и  $f'(b)$ , найдется такое  $c \in (a, b)$ , что  $f'(c) = C$ .

**Доказательство.** 1. Пусть сначала  $f'(a)$  и  $f'(b)$  разных знаков; докажем, что существует такое  $c \in (a, b)$ , что  $f'(c) = 0$ . Для определенности будем считать, что  $f'(a) < 0 < f'(b)$ . Поскольку  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , по теореме Вейерштрасса найдётся точка  $c \in [a, b]$ , для которой  $f'(c) = \min_{x \in [a, b]} f'(x)$ . Если  $c \in (a, b)$ , то, по теореме Ферма,  $f'(c) = 0$ . Поэтому достаточно доказать, что  $c \neq a$  и  $c \neq b$ . Если  $c = a$ , то есть функция принимает наименьшее значение на левом конце отрезка, то  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$  при всех  $x \in (a, b]$ , а поэтому и  $f'(a) \geq 0$ , что противоречит условию. Аналогично доказывается, что  $c \neq b$ .

2. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть для определенности  $f'(a) < C < f'(b)$ . Положим  $\varphi(x) = f(x) - Cx$ . Тогда

$$\varphi'(a) = f'(a) - C < 0 < f'(b) - C = \varphi'(b).$$

По доказанному, найдется такое  $c \in (a, b)$ , что  $\varphi'(c) = 0$ , то есть  $f'(c) = C$ .

**Следствие 1.** Если функция  $f$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$ , то  $f'(\langle a, b \rangle)$  — промежуток.

При доказательстве сослаться на лемму 1 параграфа 2 главы 3 о характеристике промежутков.

**Следствие 2.** Производная дифференцируемой на промежутке функции не может иметь на нем разрывов первого рода.

## 1.64 Вычисления старших производных: линейность, правило Лейбница, примеры

(199)

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_1$  — множество дифференцируемости  $f$ ,  $f' : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Каждая точка  $x_0 \in D_1$  удовлетворяет следующему условию: существует такое  $\delta > 0$ , что  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$  — невырожденный промнжуток.

Далее следует назвать  $f''$  — второй производной и т.д.

Производная порядка  $n$  функции  $f$  обозначается  $f^{(n)}$ .  $f^{(1)} = f'$ , производные высших порядков определяются по индукции.

**Определение.** Пусть  $n - 1 \in \mathbb{N}$ , множество  $D_{n-1}$  и функция  $f^{(n-1)} : D_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  уже определены. Обозначим, через  $D_n$  множество всех точек  $x_0 \in D_{n-1}$ , для которых существует такое  $\delta > 0$ , что

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_{n-1} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D,$$

и  $f^{(n-1)}$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Если  $x_0 \in D_n$ , то  $f$  называется дифференцируемой  $n$  раз в точке  $x_0$ . Функция

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'|_{D_n} : D_n \rightarrow \mathbb{R}$$

называется производной порядка  $n$ , или короче,  $n$ -ной производной функции  $f$ . Другими словами,

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}, \quad x_0 \in D_n$$

. Под нулевой производной подразумевается сама функция  $f^{(0)} = f$ . Односторонние производные высших порядков определяются равенствами

$$f_+^{(n)}(x_0) = (f|_{D \cap [x_0, +\infty)})^{(n)}(x_0), \quad f_-^{(n)}(x_0) = (f|_{D \cap (-\infty, x_0]})^{(n)}(x_0).$$

Другими словами

$$f_{\pm}^{(n)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm} \frac{f^{(n-1)}(x) - f_{\pm}^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

**Теорема. Арифметические действия над старшими производными.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ , функции  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируемы  $n$  раз в точке  $x \in \langle a, b \rangle$ . Тогда

1) при любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  функция  $\alpha f + \beta g$  дифференцируема  $n$  раз в точке  $x$  и

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)}(x) = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x);$$

2) функция  $fg$  дифференцируема  $n$  раз в точке  $x$  и

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

**Доказательство.** Первое утверждение очевидно по индукции. Докажем второе (правило Лейбница) по индукции. При  $n = 1$  равенство известно. Пусть утверждение верно для всех номеров не больших  $n$ , докажем для  $n + 1$ . Опуская обозначение аргумента  $x$ , имеем.

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left( \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' = \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} = f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} + \\
&+ C_n^k) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

**Пример 1.**  $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ .

При  $n=1$  равенство известно. Индукционный переход

$$x^{\alpha-n} = (\alpha-n)x^{\alpha-n-1}.$$

При  $\alpha = -1$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

**Пример 2.**  $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$ .

Так как  $(\ln x)^{(1)} = \frac{1}{x}$ , этот пример вытекает из предыдущего.

**Пример 3.**  $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$ ,  $a > 0$ . В частности  $(e^x)^{(n)} = e^x$ .

**Пример 4.**  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\sin x)'' = -\sin x$ ,  $(\sin x)''' = -\cos x$ ,  $(\sin x)'''' = \sin x$ , далее последовательность повторяется с периодом четыре. По формулам приведения можно записать

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

**Пример 4.** Аналогично предыдущему примеру

$$(\cos)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$



## 1.65 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

(206)

**Определение.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$  функция  $f$  дифференцируема  $n$  раз в точке  $x_0$ , или  $n = 0$ , а функция непрерывна в точке  $x_0$ . Многочлен

$$T_{n,x_0}f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

называется многочленом Тейлора порядка  $n$  функции  $f$  с центром в точке  $x_0$ . Разность

$$R_{n,x_0}f(x) = f(x) - T_{n,x_0}f(x)$$

называют остаточным членом или остатком формулы Тейлора, а равенство

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x)$$

— формулой Тейлора.

**Теорема. Формула Тейлора – Пеано.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ , функция  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема  $n$  раз в точке  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ . Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0.$$

**Доказательство.** Для краткости будем писать  $T = T_{n,x_0}f$ ,  $R = R_{n,x_0}f$ . Требуется доказать, что  $R(x) = o((x - x_0)^n)$ . Поскольку  $R = f - T$ , а  $T^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0)$  при всех  $m \in [0 : n]$ , имеем  $R^{(m)}(x_0) = 0$  при всех  $m \in [0 : n]$ .

Поэтому достаточно доказать, что если  $n \in \mathbb{N}$ , функция  $R$  дифференцируема  $n$  раз в точке  $x_0$  и  $R^{(m)}(x_0) = 0$  при всех  $m \in [0 : n]$ , то  $R(x) = o((x - x_0)^n)$  при всех  $x \rightarrow x_0$ . Докажем по индукции по  $n$ .

База индукции  $n = 1$ . Так как  $R(x_0) = R'(x_0) = 0$ , по определению дифференцируемости получаем

$$R(x) = R(x_0) + R'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0) = o(x - x_0). \quad x \rightarrow x_0.$$

Индукционный переход: предположим, что для номера  $n$  утверждение верно; докажем для номера  $n + 1$ . Пусть  $R^{(m)}(x_0) = 0$  при всех  $m \in [0 : n + 1]$  докажем, что

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

Доказательство будем вести на языке последовательностей. Возьмём последовательность  $\{x_\nu\}$  со свойствами  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ,  $x_\nu \neq x_0$ ,  $x_\nu \rightarrow x_0$ . Тогда для каждого  $\nu$  по формуле Лагранжа найдётся такая точка  $c_\nu$ , лежащая между  $x_\nu$  и  $x_0$ , что

$$\frac{R(x_\nu)}{(x_\nu - x_0)^{n+1}} = \frac{R(x_\nu) - R(x_0)}{(x_\nu - x_0)^{n+1}} = \frac{R'(c_\nu)}{(x_\nu - x_0)^n}.$$

Из неравенства  $|x_\nu - x_0| < |x_\nu - x_0|$  следует, что  $c_\nu \rightarrow x_0$ . По индукционному предположению, применённому к функции  $R'$  у которой все производные до  $n$ -ной включительно в точке  $x_0$  равны 0,

$$\left| \frac{R(x_\nu)}{(x_\nu - x_0)^{n+1}} \right| \leq \left| \frac{R'(x_\nu)}{(c_\nu - x_0)^n} \right| \rightarrow 0,$$

что и требовалось доказать.

## 1.66 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

(208)

**Теорема. Формула Тейлора – Лагранжа.** Пусть  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $f \in C^{(n)}(\langle a, b \rangle)$ ,  $f$  дифференцируема  $n+1$  раз на  $(a, b)$ ,  $x_0, x \in \langle a, b \rangle$ ,  $x \neq x_0$ . Тогда существует такая точка  $c$ , лежащая между  $x$  и  $x_0$ , что

$$f(X) \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

**Доказательство.** Обозначим через  $\Delta$  интервал с конуами  $x, x_0$ , тогда  $\Delta$  обозначает отрезок с этими же концами. Положим  $\psi(t) = (x - t)^{n+1}$ ,

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k, \quad t \in \overline{\Delta}$$

Функции  $\varphi$  и  $\psi$  непрерывны на  $\overline{\Delta}$  и дифференцируемы на  $\Delta$ , причем

$$\psi'(t) = -(n+1)(x - t)^n \neq 0$$

для любого  $t \in \Delta$  найдем производную  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^n \left( \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k(x - t)^{k-1} \right) = \\ &= -f'(t) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x - t)^{k-1} = \\ &= -\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(t)}{j!} (x - t)^j = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n \end{aligned}$$

Кроме того,  $\varphi(x) = 0$ ,  $\varphi(x_0) = R_{n,x_0}f(x)$ ,  $\psi(x) = 0$ ,  $\psi(x_0) = (x - x_0)^{n+1}$ .

По теореме Коши о среднем, найдется такая точка  $c \in \Delta$ , что

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}.$$

Подставляя значения функций и производных, получаем

$$\frac{0 - R_{n,x_0}f(x)}{0 - (x - x_0)^{n+1}} = \frac{-f^{(n+1)}(c)(x - c)^n}{n!(n+1)(x - c)^n},$$

что равносильно

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

## 1.67 Тейлоровское разложение функций $e^x$ , $\sin x$ , $\cos x$ , $\ln(1+x)$ , $(1+x)^\alpha$

(212-215)

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \frac{\sin(\theta x + \frac{(2n+3)\pi}{2})}{(2n+3)!}x^{(2n+3)}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \frac{\cos(\theta x + \frac{(2n+2)\pi}{2})}{(2n+2)!}x^{(2n+2)}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n C_\alpha^k x^k + o(x^n)$$

**Доказательство.** 1 Так как  $(e^x)^{(k)} = e^x$ ,  $(e^x)^{(k)}|_{x=0} = 1$ .

**Доказательство.** 2 Из формулы

$$\sin x^{(m)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

при  $k \in \mathbb{Z}_+$  находим

$$\sin x^{(2k)}|_{x=0} = 0, \quad (\sin(x))^{(2k+1)}|_{x=0} = (-1)^k.$$

**Доказательство. 4** Поскольку при всех  $k \in \mathbb{N}$

$$\ln(1+x)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad (\ln(1+x))^{(k)}|_{x=0} = (-1)^{k-1}(k-1)!,$$

а  $\ln 1 = 0$ , получаем формулу.

**Доказательство. 5** Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Положим

$$C_n^k = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot (\alpha-k+1)}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда получаем формулу.

## 1.68 Иррациональность числа $e$

(213)

**Теорема. Число  $e$  иррационально.**

**Доказательство.** Допустим противное  $e = \frac{m}{n}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ . Было доказано, что  $2 < e < 3$ . Поэтому  $n \geq 2$ , так как  $e \notin \mathbb{Z}$ . Умножим равенство на  $n!$ :

$$(n-1)! \cdot m = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} + \frac{e^\theta}{n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Отсюда  $\frac{e^\theta}{n+1} \in \mathbb{Z}$ , что абсурдно, так как  $n+1 \geq 3$ , а  $e^\theta < e < 3$ .

## 1.69 Применение формулы Тейлора к раскрытию неопределенностей

(216)

**Теорема.** Применения формулы Тейлора для раскрытия неопределённости. Пусть  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , функции  $f, g$  дифференцируемы  $n$  раз в точке  $x_0$ :

$$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

$g^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

**Доказательство.** По формуле Тейлора – Пеано при  $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

$$g(x) = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Поскольку  $g^{(n)}(x_0) \neq 0$ , существует такая окрестность  $V_{x_0}$ , точки  $x_0$ , что  $g(x) \neq 0$  для любого  $x \in V_{x_0} \cap \langle a, b \rangle$ . Значит частное  $\frac{f(x)}{g(x)}$  определено при всех таких  $x$ . Сокращая дробь на  $\frac{(x-x_0)^n}{n!}$  получаем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0) + o(1)}{g^{(n)}(x_0) + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$$

## 1.70 Критерий монотонности функции

(217)

**Теорема. Критерий монотонности функции.** Пусть функция  $f$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$  и дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда  $f$  возрастает(убывает) на  $\langle a, b \rangle$  в том и только том случае, когда  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) для всех  $x \in \langle a, b \rangle$ .

**Доказательство.** 1. Необходимость. Пусть  $f$  возрастает. Возьмем  $x \in (a, b)$ , тогда  $f(y) \geq f(x)$  для всех  $y \in (a, b)$ , поэтому

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{y \rightarrow x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

2. Достаточность. Пусть  $f'(x) \geq 0$  для всех  $x \in \langle a, b \rangle$ . Возьмем  $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : x_1 < x_2$  и докажем, что  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . По теореме Лагранжа существует такое  $c \in (x_1, x_2)$ , что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$$

. Случай убывающей функции рассматривается переходом к  $-f$ .

**Следствие 1. Критерий постоянства функции.** Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $f$  постоянна тогда и только тогда, когда  $f'(x) = 0$  при всех  $x \in \langle a, b \rangle$ .

**Доказательство.** Известно, что производная постоянной функции равна 0. Обратно если  $f \in C\langle a, b \rangle$  и  $f'(x) = 0$  для всех  $x \in (a, b)$ , то по теореме функция  $f$  одновременно и возрастает и убывает, то есть постоянна.

**Следствие 2. Критерия строгой монотонности функции.** Пусть  $f$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда  $f$  строго возрастает на  $\langle a, b \rangle$  в том и только том случае, когда:

- 1)  $f'(x) \geq 0$  для всех  $x \in (a, b)$ ;
- 2)  $f'$  не обращается в ноль тождественно ни на каком интервале.

**Доказательство.** По следствию 1,  $f$  не постоянна ни на каком интервале. Поэтому из строгого возрастания  $f$  вытекает

утверждение 2. а утверждение 1 верно по теореме 1.

Пусть теперь выполнены утверждения 1 и 2. Из нетрицательности производной следует возрастание  $f$ . Если возрастание нестрогое, то найдутся точки  $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ , что  $x_1 < x_2$ ,  $f(x_1) = f(x_2)$ . Тогда  $f$  постоянна на  $[x_1, x_2]$ , что противоречит условию 2.

**Замечание .** Теорема и оба следствия обобщаются на ситуацию, когда  $f$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ , а дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$  за исключением конечного множества точек.

**Доказательство.** Пусть  $a_1, \dots, a_n$  — все те точки интервала  $\langle a, b \rangle$ , в которых  $f$  не дифференцируема;  $a_1 < \dots < a_n$ . Если  $f$  возрастает на  $\langle a, b \rangle$ , то  $f$  возрастает на каждом промежутке  $\langle a, a_1 \rangle$ ,  $[a_1, a_2]$ ,  $\dots$ ,  $[a_n, b]$ . Тогда  $f' \geq 0$  на каждом промежутке по теореме.

Обратно, если  $f \in C\langle a, b \rangle$  и  $f' \geq 0$  на каждом промежутке, то  $f$  возрастает на каждом из них и, следовательно, на  $\langle a, b \rangle$ .

## 1.71 Доказательство неравенства с помощью производной, примеры

(219)

**Теорема. Доказательство неравенств с помощью производной.** Пусть функции  $a, g$  непрерывны на  $[a, b]$  и дифференцируемы на  $(a, b)$ ,  $f(a) \leq g(a)$  и  $f'(x) \leq g'(x)$  для всех  $x \in (a, b)$ . Тогда  $f(x) \leq g(x)$  для всех  $x \in [a, b]$ .

**Доказательство.** Положим  $h = g - f$ . Тогда  $h' = g' - f' \geq 0$  на  $(a, b)$ . По теореме функция  $h$  возрастает на  $[a, b]$ . следовательно для всех  $x \in [a, b]$

$$h(x) \geq h(a) = g(a) - f(a) \geq 0,$$



то есть  $g(x) \geq f(x)$ .

**Замечание 1.** Аналогичное утверждение справедливо вместе с доказательством и в случае, когда исходно значения функций сравниваются на правом конце.

Пусть функции  $f, g$  непрерывны на  $\langle a, b \rangle$  и дифференцируемы на  $(a, b)$ ,  $f(b) \geq g(b)$  и  $f'(x) \geq g'(x)$  для всех  $x \in (a, b)$ . Тогда  $f(x) \geq g(x)$  для всех  $x \in \langle a, b \rangle$ .

**Замечание 2.** Если в условиях теоремы будет  $f'(x) < g'(x)$  для всех  $x \in (a, b)$ , то  $f(x) < g(x)$  для всех  $x \in (a, b)$ .

**Пример 1.** Докажем, что  $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$  при всех  $x \neq 0$ .

В силу чётности обеих сторон, достаточно доказать при  $x > 0$ . Положим  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ ,  $g(x) = \cos x$ , тогда  $f(0) = g(0) = 1$  и

$$g'(x) = -\sin(x) > -x = f'(x) \text{ при всех } x > 0.$$

**Пример 2.** Докажем, что  $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$  при всех  $x > 0$ .

Положим  $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$ ,  $g(x) = \sin x$ . Тогда  $f(0) = g(0) = 0$ . По предыдущему примеру,

$$g'(x) = \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} = f'(x) \text{ при всех } x > 0.$$

**Пример 3.** Докажем, что  $\sin x > \frac{2}{\pi}x$  при всех  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

Положим  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  при  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 1$

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \operatorname{tg} x)}{x^2} < 0.$$

Так как  $x < \operatorname{tg} x$ , а  $\cos x$  и  $x^2$  неотрицательны на заданном промежутке. Тогда  $f$  строго убывает на промежутке, то есть  $f(x) > f(\frac{\pi}{2})$ .

## 1.72 Необходимое условие экстремума. Первое правило исследования критических точек

(222)

**Теорема. Необходимое условие экстремума.** Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$  — точка экстремума  $f$ ,  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда  $f'(x_0) = 0$ .

**Доказательство.** По определению точки экстремума существует такое  $\delta > 0$ , что

$$f(x_0) = \max_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x) \text{ или } f(x_0) = \min_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x).$$

Остается применить теорему Ферма к функции  $f|_{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}$ .

**Замечание 1.** Как и в теореме Ферма, существенно, что  $x_0$  — внутренняя точка промежутка.

**Замечание 2.** Условие  $f'(x_0)$  не является достаточным  $f(x) = x^3$ .

**Замечание 3.** Функция может быть не дифференцируемой в точке экстремума  $f(x) = |x|$ .

**Теорема. Первое правило исследования критических точек.** Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ , функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$  и дифференцируема на  $(a, b) \setminus \{x_0\}$  и существует такое  $\delta > 0$ , что  $f'$  сохраняет знак на  $(x_0 - \delta, x_0)$  и  $(x_0, x_0 + \delta)$ . Обозначим производные на этих промежутках  $f'_1$  и  $f'_2$  соответственно.

1. Если  $f'_1 < 0$  и  $f'_2 > 0$ , то  $x_0$  — точка строгого минимума  $f$ .
2. Если  $f'_1 > 0$  и  $f'_2 < 0$ , то  $x_0$  — точка строгого максимума  $f$ .
3. Если  $f'_1 > 0$  и  $f'_2 > 0$ , то  $x_0$  — точка строгого возрастания  $f$ .
4. Если  $f'_1 < 0$  и  $f'_2 < 0$ , то  $x_0$  — точка строгого убывания  $f$ .

**Доказательство.** Для определенности докажем 1 и 3.

1. Функция строго убывает на  $(x_0 - \delta, x_0]$  и на  $[x_0, x_0 + \delta)$ . Поэтому  $f(x) < f(x_0)$  как при всех  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ , так и при  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ . Значит  $x_0$  — Точка строгого минимума  $f$ .

2. Функция строго возрастает на  $(x_0 - \delta, x_0]$  и на  $[x_0, x_0 + \delta)$ . Поэтому  $f(x) < f(x_0)$  для всех  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  и  $f(x) > f(x_0)$  для всех  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ . То есть  $x_0$  — точка строгого возрастания.

## 1.73 Второе правило исследования критических точек. Производная функции $e^{-1/x^2}$

(224)

**Теорема. Второе правило исследования критических точек.** Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , функция  $f$  дифференцируема  $n$  раз в точке  $x_0$ .

$$f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

1. Если  $n$  четно и  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , то  $x_0$  — точка строгого минимума  $f$ .
2. Если  $n$  четно и  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , то  $x_0$  — точка строгого максимума  $f$ .
3. Если  $n$  нечетно и  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , то  $x_0$  — точка строгого возрастания  $f$ .
4. Если  $n$  нечетно и  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , то  $x_0$  — точка строгого убывания  $f$ .

**Доказательство.** Запишем формулу Тейлора – Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Учитывая определение символа  $o$  и обозначение производных  $f$ , перепишем это равенство в виде

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varphi(x) \right),$$

где  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ . Доопределим  $\varphi(x_0) = 0$ . Существует такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign}((x - x_0)^n f^{(n)}(x_0)).$$

Осталось сравнить знаки сомножителей.

**Замечание .** Может быть, что функция не постоянная, но  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x_0) = 0$ .

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}), \quad \forall n \in \mathbb{N} f^{(n)}(0) = 0.$$

**Доказательство.** Очевидно, что  $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

1. Докажем, что  $f^{(n)} = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$ , где  $P_n$  — многочлен какой-то степени. База  $n = 0, P_0 = 1$ .

Переход:

$$f^{(n+1)}(x) = P'_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}\left(\frac{2}{x^3}\right) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$$

2.  $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \exists f^{(n)}(0) = 0$ ? База:  $n = 0$ , по заданию функции.

Переход:

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0$$

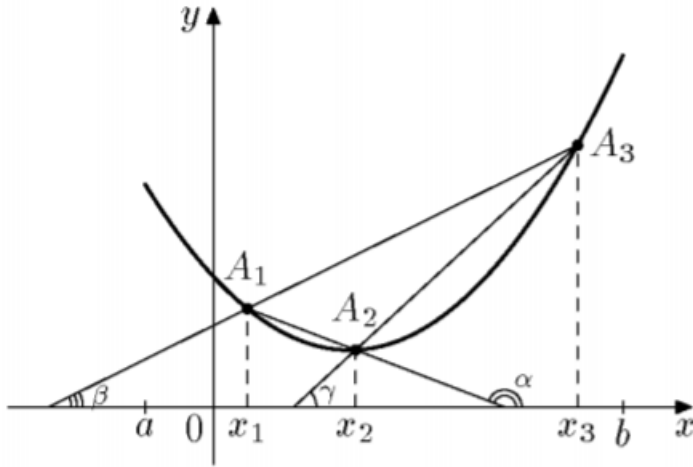
## 1.74 Лемма о трех хордах и односторонняя дифференцируемость выпуклой функции

(228)

**Лемма. О трех хордах.** Пусть функция  $f$  выпукла вниз на  $\langle a, b \rangle$ ,  $x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b \rangle$ ,  $x_1 < x_2 < x_3$ . Тогда

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \beta \leq \operatorname{tg} \gamma.$$



**Доказательство.** По определению выпуклости  $f(x_2) \leq t f(x_1) + (1 - t) f(x_3)$ , где  $t = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$ ,  $1 - t = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$ . Преобразуем неравенство двумя способами. С одной стороны,

$$f(x_2) \leq f(x_1) + (1 - t)(f(x_3) - f(x_1)) = f(x_1) + (x_2 - x_1) \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

что равносильно левому неравенству. С другой стороны,

$$f(x_2) \leq f(x_3) - t(f(x_3) - f(x_1)) = f(x_3) - (x_3 - x_2) \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

что равносильно правому неравенству.

**Теорема. Односторонняя дифференцируемость выпуклой функции.** Пусть  $f$  выпукла вниз на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда для любой точки  $x \in \langle a, b \rangle$  существуют конечные  $f'_-(x), f'_+(x)$ , причем  $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ .

**Доказательство.** Возьмем  $x \in (a, b)$  и положим

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \quad \xi \in \langle a, b \rangle \setminus \{x\}.$$

По лемме о трех хордах  $g$  возрастает на  $\langle a, b \rangle \setminus \{x\}$ . Поэтому, если  $a < \xi < x < \eta < b$ , то  $g(\xi) \leq g(\eta)$ , то есть

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \leq \frac{f(\eta) - f(x)}{\eta - x}.$$

Следовательно,  $g$  ограничена на  $\langle a, x \rangle$  сверху, а на  $(x, b \rangle$  снизу. По теореме о пределе монотонной функции, существуют конечные пределы  $g(x-)$  и  $g(x+)$ , которые, по определению, являются односторонними производными  $f'_-(x)$  и  $f'_+(x)$ . Устремляя  $\xi$  к  $x$  слева, а  $\eta$  — справа, получаем, что  $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ .

## 1.75 Выпуклость и касательные. Опорная прямая

(231)

**Теорема. Выпуклость и касательные.** Пусть функция  $f$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда  $f$  выпукла вниз на  $\langle a, b \rangle$  в том и только в том случае, когда график  $f$  лежит не ниже любой своей касательной, то есть для любых  $x, x_0 \in \langle a, b \rangle$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

**Доказательство.** 1. Необходимость. Пусть  $f$  выпукла вниз,  $x, x_0 \in \langle a, b \rangle$ . Если  $x > x_0$ , то, по лемме о трех хордах, для любого  $\eta \in (x_0, x)$

$$\frac{f(\eta) - f(x_0)}{\eta - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Устремляя  $\eta$  к  $x_0$  справа, получаем неравенство

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

равносильное требуемому.

Если  $x < x_0$ , то, по лемме о трех хордах, для любого  $\xi \in (x, x_0)$

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Устремляя  $\xi$  к  $x_0$  слева получаем неравенство

$$f'(x_0) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

равносильное требуемому (при домножении на  $x - x_0 < 0$  меняется знак неравенства).

2. Достаточность. Пусть для любых  $x, x_0 \in \langle a, b \rangle$  верно неравенство. Возьмем  $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : x_1 < x_2$  и  $x \in (x_1, x_2)$ . Применяя неравенство дважды: сначала к точкам  $x_1, x$ , а затем — к  $x_2, x$ , получаем

$$f(x_1) \geq f(x) + f'(x)(x_1 - x), \quad f(x_2) \geq f(x) + f'(x)(x_2 - x),$$

что равносильно

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Крайние части составляют неравенство из определения выпуклости.

**Определение.** Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ . Прямая, задаваемая уравнением  $y = l(x)$ , называется опорной прямой для функции  $f$  в точке  $x_0$ , если

$$f(x_0) = l(x_0) \quad \text{и} \quad f(x) \geq l(x) \forall x \in \langle a, b \rangle.$$

Если же

$$f(x_0) = l(x_0) \quad \text{и} \quad f(x) > l(x) \forall x \in \langle a, b \rangle \setminus \{x_0\},$$

то прямая называется строго опорной для функции  $f$  в точке  $x_0$ .

**Следствие 2.** Пусть функция  $f$  (строго) выпукла вниз на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда для любой точки  $x_0 \in (a, b)$  существует (строго) опорная прямая функции  $f$  в точке  $x_0$ .

**Доказательство.** По теореме, в каждой точке  $x_0 \in (a, b)$  функция имеет односторонние касательные, а они в свою очередь являются (строго) опорными прямыми.

## 1.76 Критерии выпуклости функции

(234)

**Теорема. Дифференциальные критерии выпуклости.** 1. Пусть функция  $f$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$  и дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда  $f$  (строго) выпукла вниз на  $\langle a, b \rangle$  в том и только том случае, когда  $f'$  (строго) возрастает на  $(a, b)$ .

2. Пусть функция  $f$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$  и дважды дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда  $f$  выпукла вниз на  $\langle a, b \rangle$  в том и только том случае, когда  $f''(x) \geq 0$  для всех  $x \in (a, b)$ .

**Доказательство.** 1. Необходимость. Возьмем  $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$ . По теореме о выпуклости и касательных



$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2),$$

что и означает возрастание  $f$ .

Возьмем  $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : x_1 < x_2$  и  $x \in (x_1, x_2)$ . По теореме Лагранжа, существуют такие  $c_1 \in (x_1, x)$  и  $c_2 \in (x, x_2)$ , что

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2).$$

Тогда  $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$ , а  $f$ , по условию, возрастает, поэтому  $f'(c_1) < f'(c_2)$ , то есть

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

что равносильно неравенству из определения выпуклости.

2. По пункту 1, выпуклость  $f$  равносильна возрастанию  $f'$ , которое, по критерию монотонности, равносильно неотрицательности  $f''$ .

## 1.77 Неравенство Йенсена

(238)

**Теорема. Неравенство Йенсена.** Пусть функция  $f$  выпукла вниз на  $\langle a, b \rangle$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда для любых  $x_1, \dots, x_n \in \langle a, b \rangle$  и  $p_1, \dots, p_n > 0$

$$f\left(\frac{\sum_{k=1}^n p_k x_k}{\sum_{k=1}^n p_k}\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)}{\sum_{k=1}^n p_k}.$$

**Замечание 1.** Числа  $p_k$  называются весами, а отношение  $\frac{\sum_{k=1}^n p_k x_k}{\sum_{k=1}^n p_k}$  —

взвешенным средним (арифметическим) чисел  $x_1, \dots, x_n$ . Неравенство Йенсена можно сформулировать так: значение выпуклой вниз функции от взвешенного среднего не превосходит взвешенного среднего значений функций.

**Замечание 2.** Не уменьшая общности, можно считать, что  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ . При этом условие неравенства Йенсена принимают вид

$$f\left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n p_k f(x_k).$$

**Доказательство.** Пусть сумма  $p_k$  равна 1. Положим

$$x^* = \sum_{k=1}^n p_k x_k.$$

Сразу отметим, что если  $x_1 = \dots = x_n$ , то  $x^*$  с ними совпадает, а неравенство йенсена обращается в равенство.

Пусть среди  $x_1, \dots, x_n$  есть различные. Проверим, что  $x^* \in (a, b)$ . Действительно, хотя одно из чисел  $x_k$  меньше  $b$ , поэтому

$$x^* < \sum_{k=1}^n p_k b = b.$$

Аналогично,  $x^* > a$ .

В точке  $x^*$  у функции  $f$  существует опорная прямая; пусть она задается уравнением  $l(x) = \alpha(x) + \beta$ . По определению опорной прямой  $l(x^*) = f(x^*)$  и  $l(x_k) \leq f(x_k)$  при всех  $k$ . Поэтому,

$$f(x^*) = l(x^*) = \alpha \sum_{k=1}^n p_k x_k + \beta = \sum_{k=1}^n p_k (\alpha x_k + \beta) = \sum_{k=1}^n p_k l(x_k) \leq \sum_{k=1}^n p_k f(x_k)$$

**Замечание 3.** Если  $f$  строго выпукла, а среди  $x_k$  есть различные, то неравенство Йенсена строгое.

**Замечание .** При  $n = 2$  неравенство Йенсена совпадает с неравенством из определения выпуклости.

## 1.78 Неравенства Юнга и Гельдера

(240)

**Определение.** Числа  $p, q \in (1, +\infty)$ , связанные соотношением  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , называются сопряженными показателями.

Ясно, что  $q = \frac{p}{p-1}$ ,  $p = \frac{q}{q-1}$ .

**Лемма. Неравенство Юнга.** Пусть  $p, q$  — сопряженные показатели,  $a, b \in [0, +\infty)$ , тогда  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ .

**Доказательство.** Если  $a = 0$  или  $b = 0$  очевидно. По неравенству Йенсена для  $f(x) = \ln x$  (функция выпукла вверх)

$$\ln \left( \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) \geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) = \ln a + \ln b.$$

При возведении  $e$  в степень обеих частей неравенства, получается требуемое

**Теорема. Неравенство Гёльдера.** Пусть  $a, b \in \mathbb{R}^n$  или  $\mathbb{C}^n$ ,  $p > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Тогда

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}.$$

**Доказательство.** Так как

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k b_k|,$$

достаточно доказать неравенство Гёльдера для чисел  $|a_k|, |b_k|$ . Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что  $a_k, b_k \in \mathbb{R}_+$ . Более того, можно считать, что все  $b_k > 0$ . Действительно, если неравенство доказано для положительных чисел  $b_k$ , то доказано и неравенство, так как сумма  $a_k b_k$  не изменится, сумма  $a_k^q$  увеличится, сумма  $b_k^q$  не изменится (при добавлении пар  $(a_k, b_k)$ , где  $b_k = 0$ ). Функция  $f(x) = x^p$  строго выпукла вниз на  $[0, +\infty)$ . Положим  $p_k = b_k^q$ ,  $x_k = a_k b_k^{1-q}$  и применим неравенство Йенсена:

$$\left( \frac{\sum_{k=1}^n p_k x_k}{\sum_{k=1}^n p_k} \right)^p \leq \frac{\sum_{k=1}^n p_k x_k^p}{\sum_{k=1}^n p_k}.$$

Учитывая, что

$$p_k x_k = a_k b_k, \quad p_k x_k^p = b_k^q a_k^p b_k^{p(1-q)} = a_k^p,$$

Получаем

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^p \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{p-1}.$$

Остается возвести обе части неравенства в степень  $\frac{1}{p}$  и воспользоваться тем, что  $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ .

## 1.79 Неравенство Минковского и неравенство Коши между средними

(243)

**Теорема. Неравенство Минковского.** Пусть  $a, b \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ ,  $p \geq 1$ . Тогда

$$\left( \sum_{k=1}^n |a_k + b_k| \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}.$$

**Доказательство.** При  $p = 1$  неравенство Минковского сводится к неравенству треугольника для модуля. Пусть  $p > 1$ ,  $q = \frac{p}{p-1}$ . Обозначим  $C = \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p$ . Применим неравенство треугольника, а затем неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned} C &= \sum_{k=1}^n |a_k + b_k| |a_k + b_k|^{p-1} \leq \sum_{k=1}^n |a_k| |a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |b_k| |a_k + b_k|^{p-1} \leq \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \\ &+ \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{(p-1)q} \right)^{1/q} = \\ &= \left\{ \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p} \right\} C^{1/q}. \end{aligned}$$

Если  $C = 0$  неравенство очевидно, иначе сократим на  $C^{1/q}$ .

**Теорема. Неравенство Коши о средних.** Пусть  $a_1, \dots, a_n \geq 0$ , тогда

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

**Доказательство.** Если какой-то  $a_k = 0$ , то неравенство очевидно.

Иначе по неравенству Йенсена для  $f(x) = \ln x$  (выпуклая вверх)

$$\ln \left( \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right) \geq \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln(a_n)}{n}.$$

При возведение числа  $e$  в степень обеих частей неравенства, получаем требуемое неравенство.

## 1.80 Метод касательных

Билет 80: Метод касательных (-)

**Теорема. Приближенное решение уравнений методом касательных (Ньютона).**  $f(x) = 0$ ,  $f \in C^{(2)}[a, b]$ ,  $f', f''$  строго сохраняют знак,  $f(a)f(b) < 0$ .  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность точек таких, что

$$l_n(x) : y = \frac{f(x_{n-1})}{x_{n-1} - x_n}(x - x_{n-1}) + f(x_{n-1})$$

это касательная к функции  $f$  в точке  $x_n$ . Причем, если

$$\text{sign}(f') = \text{sign}(f''),$$

то  $x_0 = b$ , иначе  $x_0 = a$ . Тогда  $x_n \rightarrow \xi : f(\xi) = 0$ , причем  $|\xi - x_{n+1}| <$   
ДОПИСАТЬ.

**Доказательство.** Разберем случай  $f' > 0$ ,  $f'' > 0$

Так как  $l(x)$  — касательная в точке  $x_n$ ,  $x_{n+1} \in (\xi, x_n)$ , тогда  $\{x_n\}$

убывает и ограничена снизу, значит имеет предел  $\beta$ .  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ , тогда  $\beta = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ , тогда  $f(\beta) = 0$ , то есть  $\beta = \xi$ .

$$x_{n+1} - \xi = x_n - \xi - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(c)}{2}(\xi - x_n)^2, \quad \xi < c < x_n.$$

Получаем

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x_n - \xi = \frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(x_n - \xi)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} - \xi = \frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(x_n - \xi)^2 \Leftrightarrow |x_{n+1} - \xi| = \left| \frac{f''(c)}{2f'(x_n)} \right| (x_n - \xi)^2 \leq$$

$$\leq \left| \frac{f''(c)}{f''(c)}(x_n - \xi)^2 \right| \leq \frac{1}{2} \max_{(a,b)} \left( \frac{f'}{f''} \right) (x - \xi)^2$$

## 2 Требуемые определения

### 2.1 Инъекция

(31)

Если отображение  $f : X \rightarrow Y \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ , то оно называется инъекцией, инъективным, обратимым, то есть при любом  $y \in Y$   $f(x) = y$  имеет не более одного решения

### 2.2 Сюръекция

(31)

Если у отображение  $f : X \rightarrow Y$   $f(X) = Y$ , то отображение называется сюръективным, или сюръекцией, или отображением "на". То есть  $\forall y \in Y$   $f(x) = y$  имеет хотя бы одно решение.

### 2.3 Биекция

(32)

Если отображение  $f : X \rightarrow Y$  одновременно и сюръективно и инъективно, то его называют биекцией или взаимно однозначным отображением (соответствием). То есть  $\forall y \in Y \ \exists! x \in X : f(x) = y$ .



## 2.4 Образ

(30)

Пусть  $f : X \rightarrow Y$ ,  $A \subset X$ . Множество  $f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A, f(x) = y\}$  называется образом множества  $A$  при отображении  $f$ .  $f(A)$  — образ множества,  $X$  — множество значений отображения  $f$ .

## 2.5 Прообраз

(31)

Пусть  $f : X \rightarrow Y$ ,  $B \subset Y$ . Множество  $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$  называется прообразом множества  $B$  при отображении  $f$ .

## 2.6 Обратное отображение

(33)

Пусть  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  обратимо. Отображение, которое каждому  $y$  из множества  $f(X)$  сопоставляет то (единственное) значение  $x$  из  $X$ , для которого  $f(x) = y$  называется обратным к  $f$  и обозначается  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ . Очевидно, что  $f^{-1}$  — биекция между  $f(X)$  и  $X$ . График обратной функции симметричен относительно  $y = x$  графику обычной функции.

## 2.7 Предел последовательности

(43)

Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность вещественных чисел. Число  $a \in \mathbb{R}$  называют пределом последовательности  $\{x_n\}$  и пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  или  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ . Если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \mid x_n - a \mid < \varepsilon$ . Если у последовательности есть предел — её называют сходящейся, иначе — расходящейся.

## 2.8 Предел функции

(100)

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  — предельная точка  $D$ ,  $A \in \mathbb{R}$ . Число  $A$  называют пределом функции  $f$  в точке  $a$  и пишут  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  или  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D, x \neq a : \mid x - a \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - A \mid < \varepsilon$ .

## 2.9 Предел отображения

(99)

Пусть  $(X, \rho_X)$  и  $(Y, \rho_Y)$  — метрические пространства,  $f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $a \in X$  — предельная точка  $D$ ,  $A \in Y$ . Точку  $A$  называют пределом отображения  $f$  в точке  $a$  и пишут  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  или  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ , если выполняется одно из следующих условий:

**1. Определение на  $\varepsilon$ -языке (по Коши).**

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \setminus \{a\} : \rho_X(x, a) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), A) < \varepsilon$ .

## 2. Определение на языке окрестностей.

$$\forall V_A \exists V_a f(\dot{V}_a \cap D) \subset V_A$$

Для любой окрестности  $V_A$  точки  $A$  существует такая окрестность  $V_a$  точки  $a$ , что образ пересечения проколотой окрестности  $\dot{V}_a$  с множеством  $D$  при отображении  $f$  содержится в окрестности  $V_A$ .

$\forall V_a \exists V_a \forall x \in \dot{V}_a \cap D \Rightarrow f(x) \in V_A$ . Очевидно, что это — переформулировка исходного утверждения.

## 3. Определение нв языке последовательностей (по Гейне).

$$\forall \{x_n\} : x_n \in D \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a \Rightarrow (x_n) \rightarrow A$$

## 2.10 Метрическое пространство

(46)

Функция  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  называется метрикой или расстоянием в множестве  $X$ , если она удовлетворяет следующим условиям:

1.  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad x, y \in X$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad x, y \in X$
3.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad x, y, z \in X$

Пара  $(X, \rho)$  — множество с метрикой в нём, — называется метрическим пространством.

## 2.11 Векторное пространство

(53)

Пусть  $K$  — поле,  $X$  — множество, и над элементами  $X, K$  определены две операции: сложение  $X \times X \xrightarrow{+} X$  и умножение  $K \times X \rightarrow X$ ,

удовлетворяющие следующим условиям:

$$x, y, z \in X, \lambda, \mu \in K$$

$$1. (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$2. x + y = y + x$$

$$3. \exists \theta \in X : 0 \cdot x = \theta$$

$$4. (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$5. \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$6. (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu x)$$

$$7. \exists 1 \in K : 1 \cdot x = x$$

Тогда  $X$  называют линейным пространством или линейным множеством над полем  $K$ . Элементы  $X$  называют векторами, элементы  $K$  — скалярами.

## 2.12 Нормированное пространство

(54)

Пусть  $X$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ . Нормой в  $X$  называют функцию  $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющая следующим условиям.

**1. Положительная определённость.**

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

**2. Положительная однородность.**

$$p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$$

**3. неравенство треугольника (полуаддитивность).**

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

Принято обозначать норму двойными палочками  $p(x) = \|x\|$ .

Пара  $(X, \|\cdot\|)$  называется нормированным пространством. Если функция  $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  удовлетворяет аксиомам 2 и 3, то она называется *полунормой*.

## 2.13 Неравенство Коши-Буняковского

(59)

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Если рассматривать норму, порождённую скалярным произведением, то верно:  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , так как  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

## 2.14 Внутренние точки

(68)

Точка  $a$  называется внутренней точкой множества  $D$ , если существует окрестность точки  $a$ , полностью содержащаяся в  $D$ .

## 2.15 Предельные точки

(70)

Точка  $a$  называется предельной точкой или точкой сгущения множества  $D$ , если в любой проколотой окрестности точки  $a$  найдётся точка множества  $D$ .

$a$  — предельная точка  $D \Leftrightarrow \forall \dot{V}_a : \dot{V}_a \cap D \neq \emptyset$

## 2.16 Открытые множества

(68)

Множество называется открытым, если все его точки — внутренние.

## 2.17 Замкнутые множества

(71)

Множество  $D$  называется замкнутым (в  $X$ ), если содержит все свои предельные точки. *Примечание: если множество не имеет предельных точек, оно тоже считается замкнутым.*

## 2.18 Компактные множества

(77)

Подмножество  $K$  метрического пространства  $X$  называется компактным, если из любого открытого покрытия  $K$  можно извлечь конечно подпокрытие.

$\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A} : K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_N \in A : K \subset \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i}$  ( $G_\alpha$  — открытые множества)

## 2.19 Компактность в евклидовом пространстве

(82)

Пусть  $K \subset \mathbb{R}^m$ , тогда следующие утверждения равносильны:

1.  $K$  замкнуто и ограничено
2.  $K$  компактно
3. Из всякой последовательности точек  $K$  можно извлечь бесконечную подпоследовательность, имеющую предел, принадлежащий  $K$ .

## 2.20 Сходимость в себе

(84)

Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность в метрическом пространстве  $X$ . Говорят, что последовательность сходится в себе, если  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n, l \in \mathbb{N}, n, l > N : \rho(x_n, x_l) < \varepsilon$ .

## 2.21 Полнота метрического пространства

(85)

Если в метрическом пространстве  $X$  любая сходящаяся в себе последовательность сходится, то пространство  $X$  называют полным.

## 2.22 Ограниченность множества

(50)

Подмножество  $D$  метрического пространства  $X$  называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре:

$$\exists a \in X, R > 0 \ D \subset \overline{B}(a, R)$$

Последовательность  $\{x_n\}$  в метрическом пространстве  $X$  называется ограниченной, если множество её значений ограничено:

$$\exists a \in X, R > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \rho(x_n, a) \leq R$$

Открытый шар или закрытый (увеличим в два раза радиус) и в какой точке его центр (увеличим радиус на расстояние между старым и новым центрами) не имеет значения.

## 2.23 Точные границы

(87)

Пусть  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $E \neq \emptyset$  ограничено снизу. Наибольшая из нижних границ множества  $E$  называется точной нижней границей или нижней гранью и обозначается  $\inf E$  (аналогично с точной верхней границей —  $\sup E$ ):

$$b = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E & x \leq b \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E : & x > b - \varepsilon; \end{cases}$$
$$a = \inf E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E & x \geq a \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E : & x < a + \varepsilon; \end{cases}$$



## 2.24 $\mathcal{O}$ символика

(159)

Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $D \subset X$ ,  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ,  $x_0$  — предельная точка  $D$ . Если существуют функция  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$  и окрестность  $V_{x_0}$  точки  $x_0$ , такие что  $f(x) = \varphi(x)g(x)$  для всех  $x \in V_{x_0} \cap D$  и

1.  $\varphi$  ограничена на  $V_{x_0} \cap D$ , то говорят, что функция  $f$  ограничена по сравнению с  $g$  при  $x \rightarrow x_0$ , и пишут  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ .
2.  $\varphi \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ , то говорят, что функция  $f$  — бесконечно малая по сравнению с  $g$  при  $x \rightarrow x_0$ , и пишут  $f(x) = o(g(x))$ .
3.  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$ , то говорят, что функции  $f$  и  $g$  эквивалентны или асимптотически равны при  $x \rightarrow x_0$ , и пишут  $f(x) \sim g(x)$ .

## 2.25 Непрерывность

(114)

Пусть  $(X, \rho_X)$  и  $(Y, \rho_Y)$  — метрические пространства,  $f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $x_0 \in D$ . Отображение  $f$  называется непрерывным в точке  $x_0$  если выполняется одно из следующих утверждений:

1. Предел отображения  $f$  в точке  $x_0$  существует и равен  $f(x_0)$ . (Применимо, если  $x_0$  — предельная точка  $D$ ).

2. На  $\varepsilon$ -языке или по Коши.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : \rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

3. На языке окрестностей.

$$\forall V_{f(x_0)} \exists V_{x_0} f(V_{x_0} \cap D) \subset V_{f(x_0)}$$

4. На языке последовательностей или по Гейне.

$$\forall \{x_n\} : x_n \in D, x_n \rightarrow x_0 \quad f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

5. Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение отображения.  $\Delta y \xrightarrow[\Delta x \rightarrow \theta_X]{} \theta_Y$

Отображение называется непрерывным на множестве  $D$ , если оно непрерывно в каждой точке множества  $D$ .

Множество отображений  $f : D \subset X \rightarrow Y$  непрерывных на множестве  $D$ , обозначают  $C(D \subset X \rightarrow Y)$  или  $C(D \rightarrow Y)$

## 2.26 Теоремы Больцано-Коши о непрерывных функциях

(130, 133)

**Теорема Больцано – Коши о промежуточном значении.** Пусть функция  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ . Тогда  $\forall C : f(a) \leq C \leq f(b)$  или  $f(b) \leq C \leq f(a)$ , найдётся такое  $c \in [a, b]$ , что  $f(c) = C$

**Теорема Больцано – Коши о непрерывных отображениях.** Пусть  $X, Y$  — метрические пространства,  $X$  линейно связно,  $f \in C(X \rightarrow Y)$ . Тогда  $f(x)$  линейно связно.

Другими словами непрерывный образ линейно связного образа линейно связан.

**Линейная связность.**

$Y$  — метрическое пространство,  $E \subset Y$ . Множество  $E$  называется линейно связным, если любые две его точки можно соединить путём в  $E$ :  $\forall A, B \in E \exists \gamma \in C([a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow E) : \gamma(a) = A, \gamma(b) = B$

## 2.27 Теорема Вейерштрасса о непрерывных отображениях

(126)

Пусть  $X, Y$  — метрические пространства,  $X$  компактно,  $f \in C(X \rightarrow Y)$ . Тогда  $f(X)$  компактно. Другими словами: непрерывный образ компакта — компакт.

**Первая теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях.**

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена.

**Вторая теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях.**

Функция, непрерывная на отрезке, принимает свои наибольшее и наименьшее значения.

## 2.28 Равномерная непрерывность

(128)

Функция  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется равномерно непрерывной на множестве  $D$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое положительное число  $\delta$ , что для всех точек  $\bar{x}, \bar{\bar{x}}$  множества  $D$ , удовлетворяющих неравенству  $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < \delta$  выполняется неравенство  $|f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| < \varepsilon$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in D : |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| < \varepsilon$$

## 2.29 Теорема Кантора

(129)

Непрерывное отображение на компакте отображение равномерно

непрерывно

Для функций: непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна

### **Равномерная непрерывность.**

$X, Y$  — метрические пространства,  $f : X \rightarrow Y$ . Отображение называется равномерно непрерывным на  $X$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{x}, \bar{x} \in X : p_X(\bar{x}, \bar{x}) < \delta \Rightarrow p_Y(f(\bar{x}), f(\bar{x})) < \varepsilon$$

## **2.30 Замечательные пределы**

(154)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

## **2.31 Дифференцируемость и производная**

(169)

**первое определение.**

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ . Если существует такое число  $A \in \mathbb{R}$ , что

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \rightarrow x_0,$$

то функция называется дифференцируемой в точке  $x_0$ . При этом число  $A$  называется производной функции в точке  $x_0$ .

**второе определение.**

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ . Если существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

равный числу  $A \in \mathbb{R}$ , то функция  $f$  называется дифференцируемой в точке  $x_0$ , а число  $A$  — её производной в точке  $x_0$ .

## 2.32 Формулы дифференцирования

(185)

1.  $c' = 0$

2.  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

3.  $(a^x)' = a^x \ln a$

4.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

5.  $(\sin x)' = \cos x$

6.  $(\cos x)' = -\sin x$

7.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

8.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

9.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

12.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

## 2.33 Правила дифференцирования

(178)

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

## 2.34 Формула Лагранжа

(190)

Пусть функция  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ .

Тогда найдётся такая точка  $c \in (a, b)$ , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

## 2.35 Формула Тейлора с остатком в виде Пеано

(206)

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ , функция  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема  $n$  раз в точке  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ . Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad x \rightarrow x_0$$

## 2.36 Формула Тейлора с остатком в виде Лагранжа

(208)

Пусть  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $f \in C^{(n)}\langle a, b \rangle$ ,  $f$  дифференцируема  $n+1$  раз на  $(a, b)$ ,  $x_0, x \in \langle a, b \rangle$ ,  $x \neq x_0$ . Тогда существует точка  $c$ , лежащая между  $x$  и  $x_0$ , что

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

## 2.37 Основные Тейлоровские разложения

(212-215)

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{\sin(\theta x + \frac{(2n+3)\pi}{2})}{(2n+3)!} x^{(2n+3)}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{\cos(\theta x + \frac{(2n+2)\pi}{2})}{(2n+2)!} x^{(2n+2)}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n C_\alpha^k x^k + o(x^n)$$

## 2.38 Сравнение логарифмической, степенной и показательной функций

(196)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0 \quad \forall a > 1, k \in \mathbb{R}$$

## 2.39 Точки экстремума и их отыскание

(220)

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $x_0 \in D$ . Если существует такое  $\delta > 0$ , что:

для любого  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$  выполняется неравенство  $f(x) \leq f(x_0)$ , то  $x_0$  называется точкой максимума функции  $f$ ;

для любого  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (D \setminus \{x_0\})$  выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$ , то  $x_0$  называется точкой строгого максимума функции  $f$ .

Если противоположные неравенства, то  $x_0$  соответственно точка минимума и точка строгого минимума.

Необходимое условие экстремума

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$  — точка экстремума  $f$ .  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда  $f'(x_0) = 0$ .



## 2.40 Определение выпуклости

(226)

Функция  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  называется выпуклой вниз на  $\langle a, b \rangle$ , если для любых  $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$  и  $t \in (0, 1)$  выполняется неравенство

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2)$$

Если при  $x_1 \neq x_2$  неравенство становится строгим, то функция называется строго выпуклой вниз

Если выполняются потивоположные неравенства, то функция выпукла вверх и строго выпуклая вверх соответственно.

## 2.41 Критерий выпуклости

(234)

**1.** Пусть функция  $f$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$  и дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда  $f$  (строго) выпукла вниз на  $\langle a, b \rangle$  в том и только том случае, когда  $f'$  (строго) возрастает на  $(a, b)$

**2.** Пусть функция  $f$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$  и дважды дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда  $f$  выпукла вниз на  $\langle a, b \rangle$  в том и только том случае, когда  $f''(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$ .