№35.

$$L(y',y) = (y'-y)^2$$

Д-ть: 1) $f^*(x) = \arg\min_c E((Y-c)^2|X=x) \Rightarrow f^*(x) = E(Y|X=x)$

2) $R(f^*) - ?$

Решение: 1) $E((Y-c)^2|X=x) = \underbrace{E(Y^2|X=x)}_{\text{не зависит от } c} - 2c\underbrace{E(Y|X=x)}_{\mu(x)} + c^2 =$

$= E(Y^2|X=x) - 2c\mu(x) + c^2$

Найдем min по c: $\frac{d}{dc}(E(Y^2|X=x) - 2c\mu(x) + c^2) = -2\mu(x) + 2c = 0 \Rightarrow c = \mu(x) = E(Y|X=x)$

$$f^*(x) = E(Y|X=x)$$

2) $R(f^*) = E((Y - f^*(X))^2) = E((Y - E(Y|X))^2) = E(Var(Y|X))$

№36.

$$L(y',y) = |y'-y|$$

$f(x) = median(Y|X=x)$, что $R(f) \to \min$

Решение: $R(f) = E_{Y|X=x}(|f(x) - Y|) \Rightarrow R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - y| \, d\underbrace{F(y|X=x)}_{\text{ф-ция распред. } Y \text{ при } X=x}$

$$R(f) = \int_{-\infty}^{f(x)} (f(x) - y)\,dF(y|X=x) + \int_{f(x)}^{\infty} (y - f(x))\,dF(y|X=x)$$

$$\frac{dR(f)}{df(x)} = \int_{-\infty}^{f(x)} dF(y|X=x) - \int_{f(x)}^{\infty} dF(y|X=x) = F(f(x)|X=x) - (1 - F(f(x)|X=x))$$

Найдем min этой ф-ции: $2F(f(x)|X=x) - 1 = 0 \Rightarrow F(f(x)|X=x) = \frac{1}{2}$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = median(Y|X=x)$$

№37.

Это ф-ция потерь $L(y,y') = \begin{cases} 0, & \text{если } y = y' \\ 1, & \text{если } y \neq y' \end{cases}$

Минимизируя такую ф-цию потерь, оптимальное ~~[illegible]~~ предсказание для каждого набора данных будет значением y', которое наиболее часто встречается, то есть мода условного распределения $P(y|x)$.

№38.

$L(0,0)=L(1,1)=0,\ L(1,0)=l_1,\ L(0,1)=l_0 \quad \{0,1\}.$

Д-ть: $f^*(x)$: $f(x)=\underset{y\in\{0,1\}}{\arg\max}\ l_y \Pr(y|x).$

Решение: Если $y'=0$

$R(0|x)=L(0,0)\cdot P(y=0|x)+L(0,1)\cdot P(y=1|x)=0\cdot P(y=0|x)+l_0 P(y=1|x)=l_0\cdot P(y=1|x).$

Если $y'=1$:

$R(1|x)=L(1,1)\cdot P(y=1|x)+L(1,0)\cdot P(y=0|x)=0\cdot P(y=1|x)+l_1 P(y=0|x)=l_1 P(y=0|x).$

Необходимо минимизир. риск, т.е. при $R(0|x)<R(1|x)$ выбир. значение $y'=0$

$$\left.\begin{array}{l} f^*(x)=0, \text{ если } l_0\cdot P(y=1|x)<l_1 P(y=0|x) \\ f^*(x)=1, \text{ если } l_1\cdot P(y=0|x)\geq l_0\, P(y=1|x) \end{array}\right| \Rightarrow f^*(x)=\underset{y\in\{0,1\}}{\arg\max}\ l_y\cdot P(y|x)$$

№39.

~~y=1,2,...,K~~ $L(y',y)=l_{y'y}\ (y',y=1,2,\dots,K).$

Выразить $f^*(x)$.

Решение: Чтобы минимизировать общие потери, байесов классификатор выбирает тот класс y', при котором минимальна сумма:

$$E_{Y|X=x}[L(y',Y)]=\sum_{y=1}^{K} l_{yy'}\cdot P(Y=y|X=x)$$

$$f^*(x)=\underset{y'\in\{1,\dots,K\}}{\arg\min}\sum_{y=1}^{K} l_{y'y}\cdot P(Y=y|X=x).$$

$$\Downarrow$$

$$f^*(x)=\underset{y'\in[1,K]}{\arg\min}\ E_{Y|X=x}[L(y',Y)].$$