Поставленная задача

Дан идеальный математический маятник – груз массой $m = 1.0$ кг, прикреплённый к шарниру невесомым нерастяжимым стержнем длиной $L = 5$ м. На маятник действуют сила сопротивления стержня T и сила тяжести $mg(t)$, где $g(t) = 9.81 + 0.05\sin(2\pi t)$ – переменное ускорение свободного падения, t – время. Пренебрегая трением в шарнире и сопротивлением воздуха, получаем систему уравнений, описывающую движение груза в декартовой системе координат:

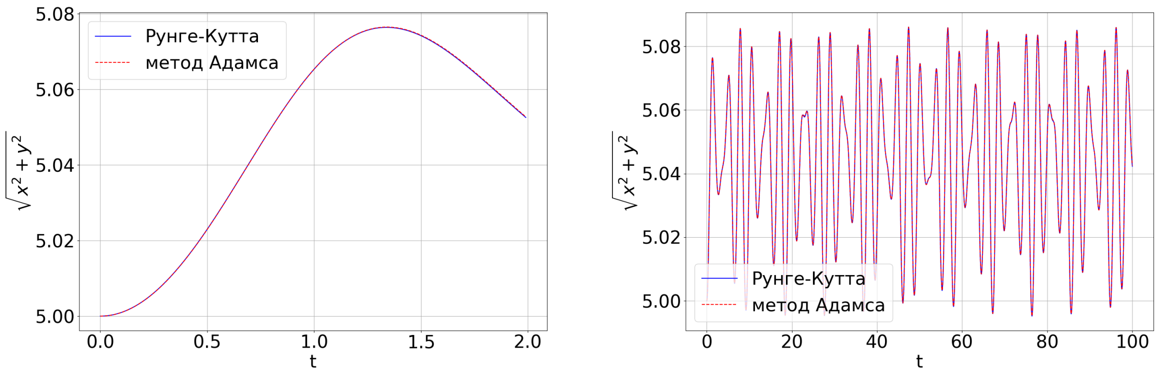
$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{L}T \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{L}T - mg(t) \\ x^2 + y^2 = L \end{cases}$$

где x, y – – проекции радиус-вектора груза на оси OX, OY соответственно. Пусть в начальный момент времени груз толкают из точки $x = 3$ м, $y = -4$ м вниз и влево со скоростью 1 м/с.

Численно решите эту задачу Коши для дифференциально-алгебраической системы уравнений на интервале $[0; 2]$. Решите задачу на большем интервале, например, $[0; 100]$, постройте график $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ и проанализируйте его.

Ответ

Первый вариант составления системы ОДУ

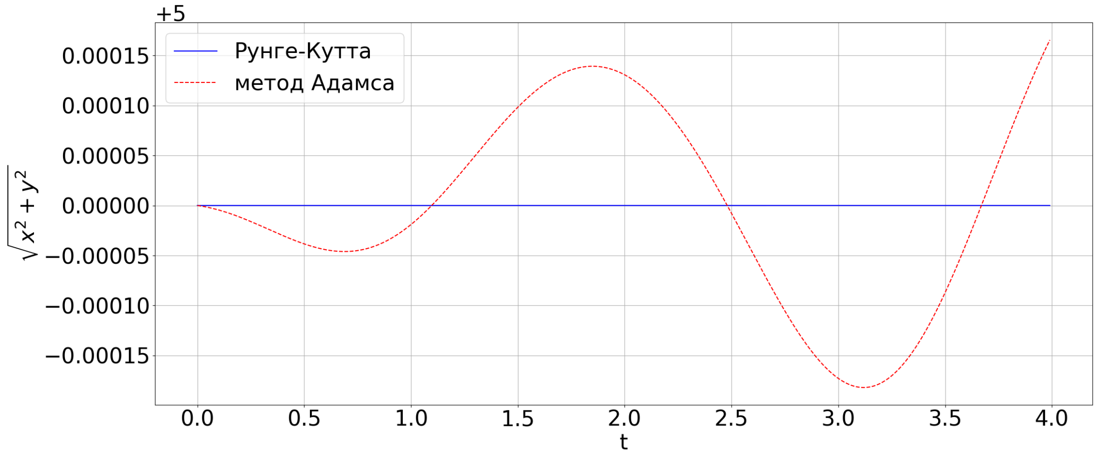


а) б)

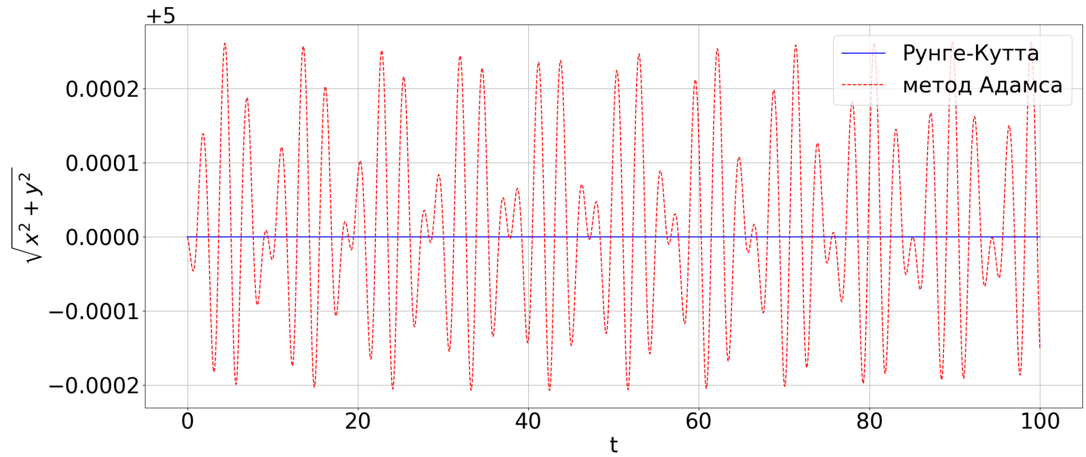
Рис. 1. График функции $u(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$: а) кривая функции $u(t)$ на множестве $t \in [0; 2]$; б) кривая функции $u(t)$ на множестве $t \in [0; 100]$

Второй вариант составления системы ОДУ

(1)



а)



б)

Рис. 2. График функции $u(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$: а) кривая функции $u(t)$ на множестве $t \in [0; 4]$; б) кривая функции $u(t)$ на множестве $t \in [0; 100]$

Решение

Преобразуем систему ОДУ так, чтобы:

1. Понизим порядок ОДУ,
2. При решении учитывать изменение силы T.

Выполним замену:

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \quad \frac{dy}{dt} = u_y.$$

Первая производная по времени силы T описывается выражением:

$$\frac{dT}{dt} = 2\frac{m}{L}\left(u_x\frac{d^2x}{dt^2} + u_y\frac{d^2y}{dt^2}\right) - u_y\frac{F(t)}{L} - y\frac{f(t)}{L}, \tag{2}$$

где

$$F(t) = mg(t), \quad f(t) = m\frac{d(g(t))}{dt} = m(9.81 + 0.05\sin(2\pi t))$$

Таким образом, система ОДУ которая решается:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u_x \\ \frac{dy}{dt} = u_y \\ \frac{du_x}{dt} = -\frac{x}{Lm}T \\ \frac{du_y}{dt} = -\frac{y}{Lm}T - \frac{F(t)}{m} \\ \frac{dT}{dt} = 2\frac{m}{L}\left(u_x\frac{d^2x}{dt^2} + u_y\frac{d^2y}{dt^2}\right) - u_y\frac{F(t)}{L} - y\frac{f(t)}{L} \end{cases}$$

Вектор с начальными данными: $U_0 = \big(x_0, y_0, u_x, u_y, -F(0)y_0/L\big)$. Так как в начальный момент времени вектор скорости направлен вниз и влево, то $u_x = -u_0\cos(\beta) = -u_0(y_0/L)$, $u_y = -u_0\cos(\alpha) - u_0(x_0/L)$, где $u_0 = 1$ м/с и $\alpha + \beta = \pi/2$.

Для решения воспользуемся явным методом Рунге-Кутты 4 порядка:

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$
$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}\right),$$
$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}\right),$$
$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3),$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

и неявным методом Адамса 2 порядка:

$$\frac{\boldsymbol{y}_{n+1} - \boldsymbol{y}_n}{\tau} = \alpha\boldsymbol{f}(t_{n+1}, \boldsymbol{y}_{n+1}) + (1-\alpha) * \boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n), \alpha = 0.5$$

Если решение данной разностной схемы сходится к решению исходной системы ОДУ, то для каждого временного слоя (значения n) верно выражение $\boldsymbol{y}_{n+1} - \tau\alpha\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_{n+1}) - \boldsymbol{y}_n - \tau(1-\alpha)\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n) \approx 0$, таким образом решение ОДУ на каждом временном слое может быть

(3)

получено как решение нелинейного уравнения неким итерационным процессом.

1. Составляем функцию, которую будем решать методом Ньютона на каждом временном слое

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{y}_{n+1} - \tau\alpha \boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}(n+1)) - \boldsymbol{y}_n - \tau(1-\alpha)\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n) \to 0 \text{ если } n \to \infty$$

2. Начальное значение для итерационного процесса

$$\boldsymbol{y}^{(0)} = \boldsymbol{y}_n + \tau \boldsymbol{f}\left(t_n, \boldsymbol{y}_{\{n\}}\right)$$

Результаты расчетов представлены на Рис. 3.

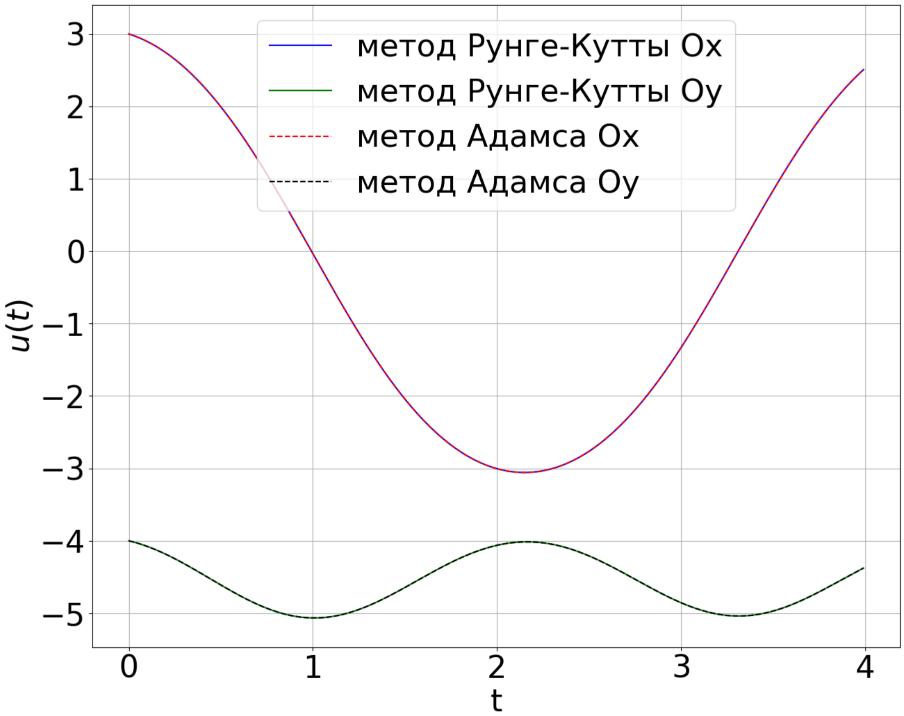


Рис. 3. Расчет положения идеального маятника вдоль оси Ox и Oy для $t \in [0; 4]$. Величина u принимает значения x и y.

По рисунку видно, что результаты методов совпадают с большой точностью. Решение имеет физический смысл, так как при значении $x = 0$, величина координаты y равна своему минимальному значению значению -5.

Проверим учет начальной скорости. Если вектор скорости в начальный момент времени направлен вниз и влево, следовательно, ожидается, что изменение координаты вдоль Ox происходит быстрее, чем при нулевой начальной скорости. Результаты представлены на Рис. 4.

По рисунку видно, что $x(t)$ при ненулевой начальной скорости достигает нулевого значения примерно за 1 секунду и за примерно 1.2 секунды в противном случае.

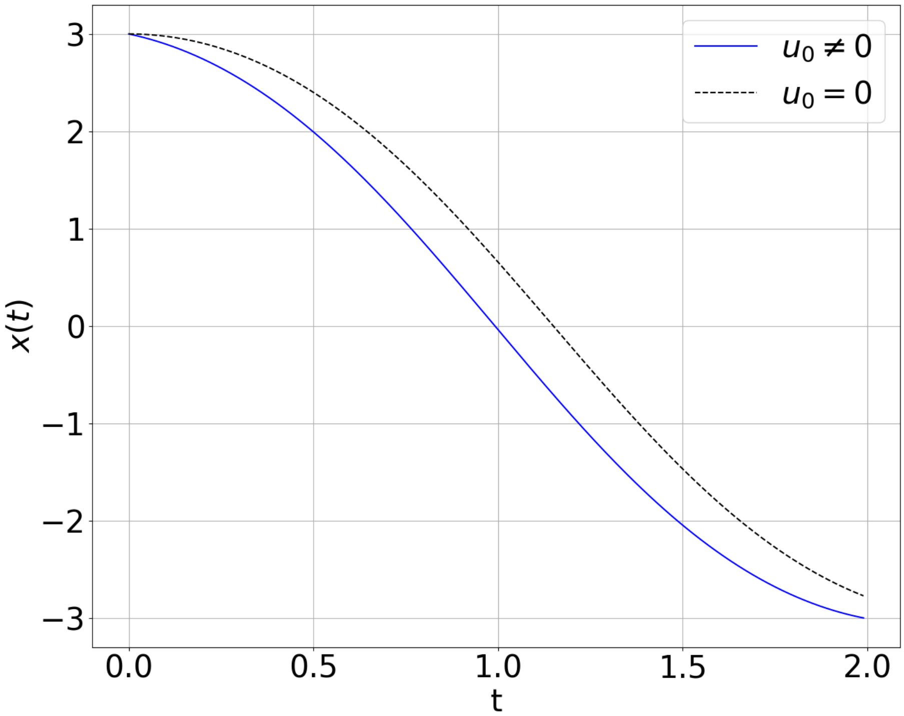


Рис. 4. Проверка корректности учета скорости в начальный момент времени.

В итоге, судя по результатам продемонстрированным на Рис. 3 и Рис. 4, расчеты рассматриваемыми методами происходит корректно.

Произведем расчеты величины $u(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. Полученные результаты представлены на Рис. 5.

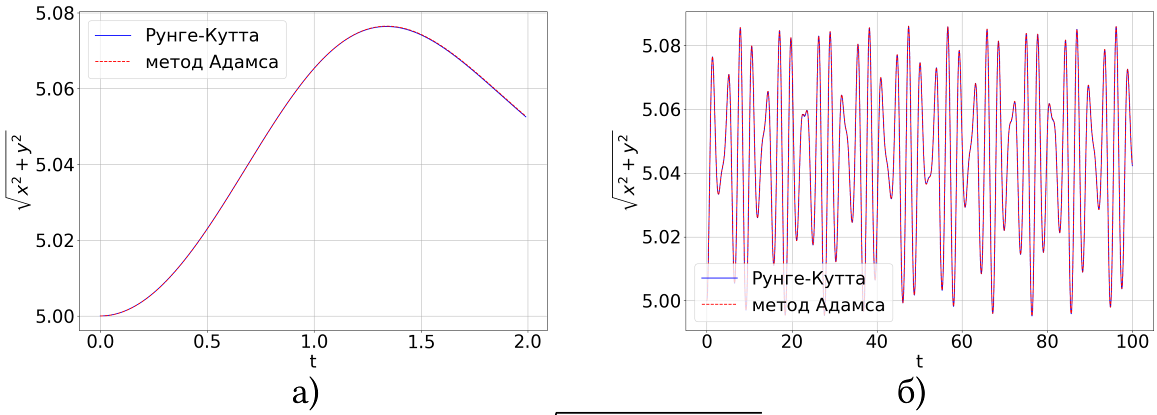


Рис. 5. График функции $u(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$: а) кривая функции $u(t)$ на множестве $t \in [0; 2]$; б) кривая функции $u(t)$ на множестве $t \in [0; 100]$

Проанализируем полученный результат.

Построим график функции $u(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - L$ на множестве значений $t \in [0; 10]$. Результат расчета представлен на Рис. 6.

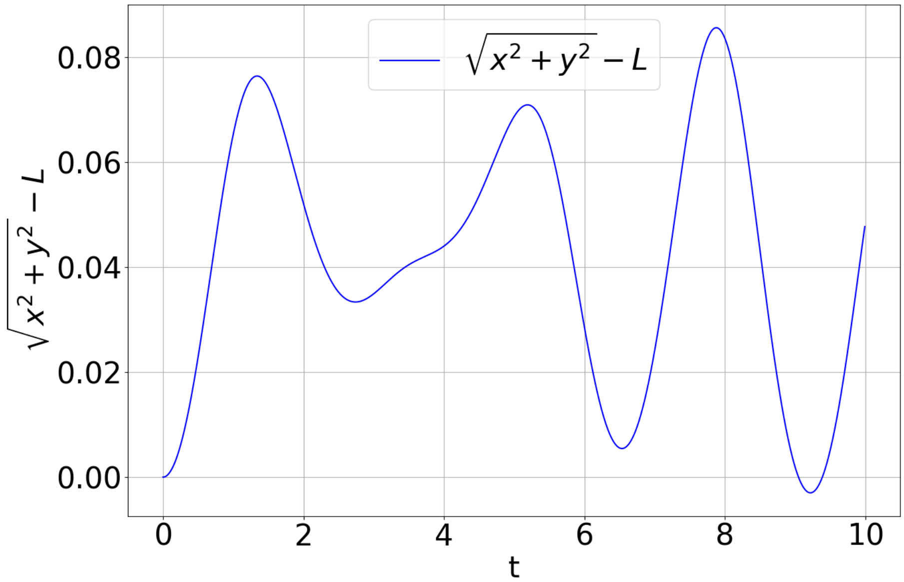


Рис. 6. Ошибка $\sqrt{x^2 + y^2} - L$ при ненулевой скорости при переменном ускорении свободного падения

Ожидается, что при постоянной величине ускорения свободного падения, а также нулевой начальной скорости значение функции $u(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - L$ лежит в $U_\varepsilon(0)$. Для выявления причины возникающей ошибки проведем ряд численных экспериментов:

1. расчет с постоянным ускорением свободного падения при ненулевой начальной скорости;
2. расчет с переменным ускорением свободного падения при нулевой начальной скорости;
3. расчет с постоянным ускорением свободного падения при нулевой начальной скорости.

Кривые полученные в результате данных численных экспериментов представлены на Рис. 7, Рис. 8, Рис. 9 соответственно.

Анализируя Рис. 6 - 5 видно, что ошибка полученного решения возрастает при ненулевой начальной скорости. При чем ошибка не зависит от шага по времени.

Аналогичная ситуация наблюдается с неявным методом Адамса.

Для проверки подобного эффекта изменим подход к системе ОДУ.

Изменим решаемую систему ОДУ.

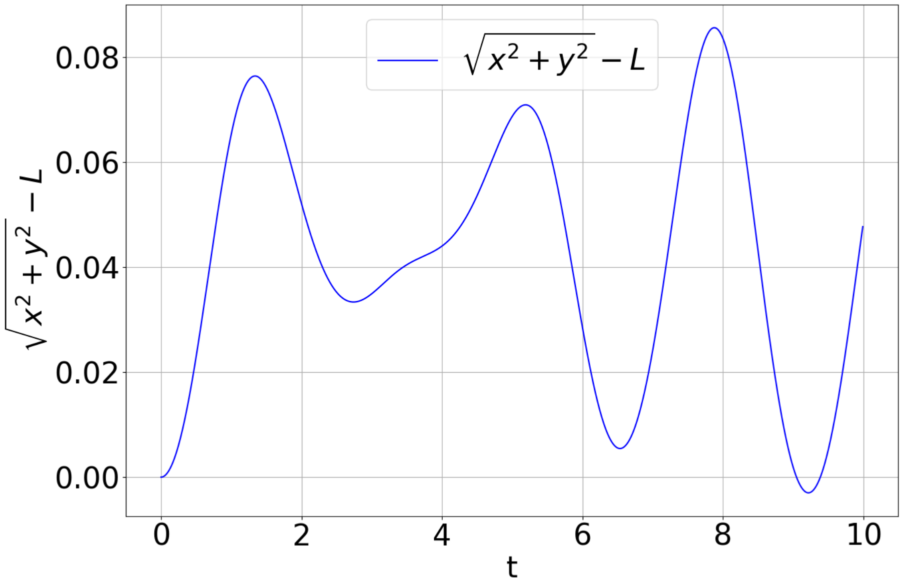


Рис. 7. Ошибка $\sqrt{x^2+y^2}-L$ при ненулевой скорости при постоянном ускорении свободного падения

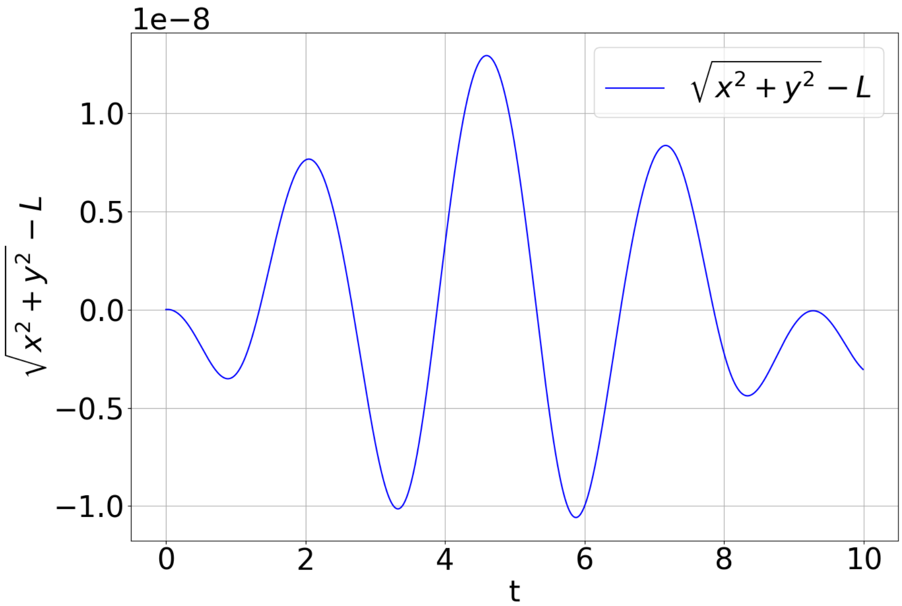


Рис. 8. Ошибка $\sqrt{x^2+y^2}-L$ при нулевой скорости при переменном ускорении свободного падения.

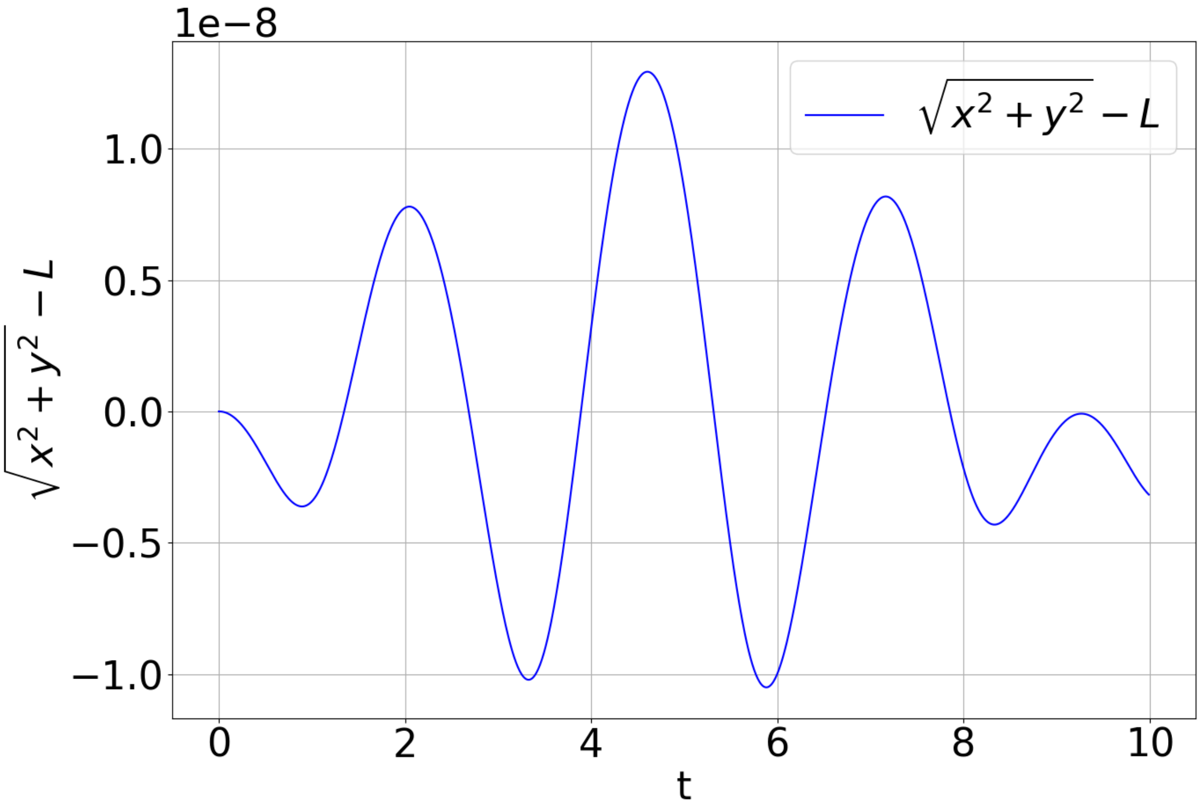


Рис. 9. Ошибка $\sqrt{x^2+y^2}-L$ при нулевой скорости при постоянном ускорении свободного падения

Преобразованная система ОДУ имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u_x \\ \frac{du_x}{dt} = -\frac{x}{Lm}T \\ \frac{dy}{dt} = u_y \\ \frac{du_y}{dt} = -\frac{y}{Lm}T - \frac{F(t)}{m} \end{cases}$$

где T рассчитывается по формуле:

$$T = \left(m\left(u_x^2 + u_y^2\right) - yF(t)\right)/L$$

Вектор с начальными данными: $U_0 = \left(x_0, u_x, y_0, u_y\right)$.

Результаты расчетов для второго случая составления системы ОДУ представлены на Рис. 10. По Рис. 10 видно, что результаты методов совпадают с большой точностью. Решение имеет физический смысл, так как при значении $x = 0$, величина координаты y равна своему минимальному значению значению -5.

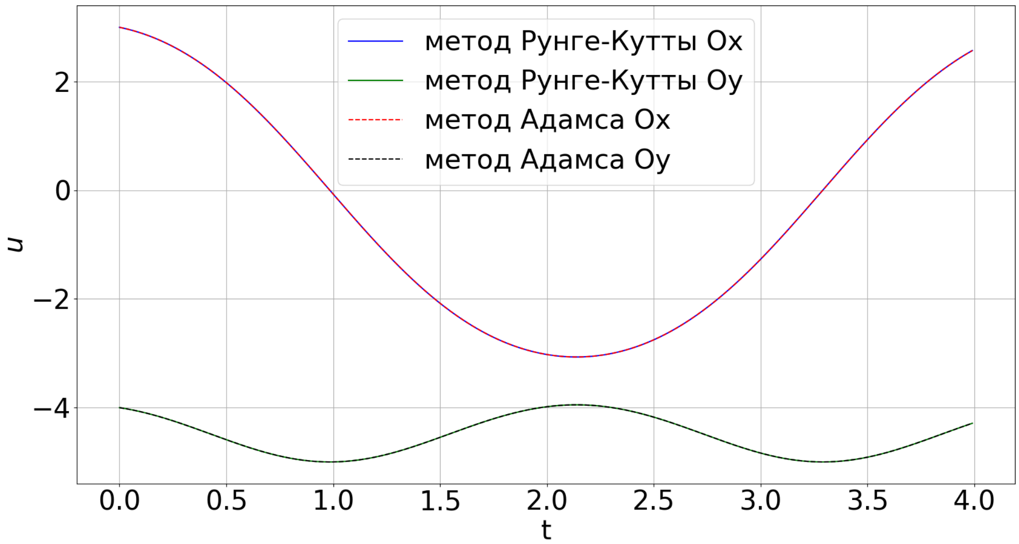


Рис. 10. Расчет положения идеального маятника вдоль оси Ох и Оу для $t \in [0; 4]$. Величина u принимает значения x и y.

В итоге, расчеты рассматриваемыми методами происходит корректно.

Произведем расчеты величины $u(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. Полученные результаты представлены на Рис. 11.

Рис. 11 демонстрирует, что максимальная амплитуда колебания функции $u(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ полученной в результате расчетов неявным методом Адамса не превышает 0.0003 м. Изменения происходят в окрестности точки 5 м.

Для явного метода Рунге-Кутты 4 порядка максимальная амплитуда колебаний функции $u(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ не превышает $1.1 \times 1.0e - 8$.

Порядок аппроксимации для явного метода Рунге-Кутты 4 порядка равен 4. Значит ошибка $\tau^4 = 0.01^4 = 1.0e - 8$, что соответствует полученной ошибке расчетов.

Порядок аппроксимации для неявного метода Адамса 2 порядка составляет 3, следовательно $\tau^3 = 0.01^3 = 1.0e - 6$, что немного больше полученной ошибки расчетов.

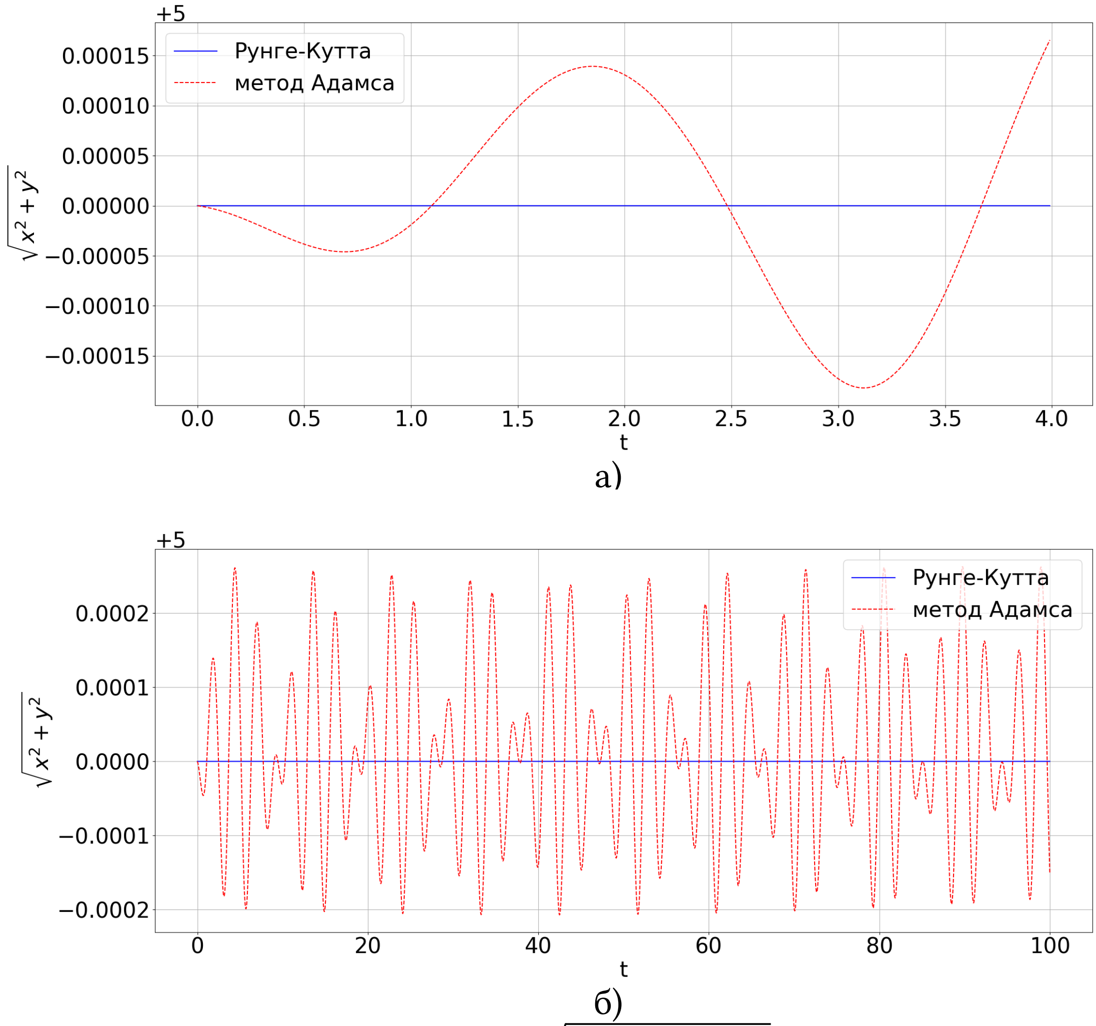


Рис. 11. График функции $u(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$: а) кривая функции $u(t)$ на множестве $t \in [0; 4]$; б) кривая функции $u(t)$ на множестве $t \in [0; 100]$