MODÈLE LWR POUR LE TRAFIC ROUTIER

PIDR 2020-21 TELECOM NANCY (J.F SCHEID)

Le modèle de Lighthill-Whitham-Richards (LWR, 1955) est un modèle macroscopique pour décrire l'évolution du trafic routier. Il fait intervenir la densité ρ du nombre de véhicules par km, qui est une quantité macroscopique fonction de l'espace et du temps. Cette fonction densité vérifie une équation aux dérivées partielles de type transport non-linéaire. Dans le modèle LWR, on considère une vitesse moyenne v (macroscopique) du trafic qui est une fonction de la densité ρ. Le flux de véhicules (nb de véhicules/h) est alors donné par la relation

$$f(\rho) = \rho v(\rho) \tag{1}$$

La route est considérée unidimensionnelle, de longueur infinie, sans intersection (de sorte que le nombre de véhicules reste constant) et sans dépassement possible de véhicules. La quantité $\rho(x,t)$ représente alors la densité du trafic à l'endroit $x \in \mathbb{R}$ de la route et à l'instant $t \geq 0$. Elle vérifie l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\rho) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \tag{2}$$

A l'instant initial $t = 0$, la densité est connue, elle vaut

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \; x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

La vitesse moyenne v satisfait les propriétés suivantes :

(1) v est décroissante : $v'(\rho) \leq 0$

(2) $v(0) = v_m, \; v(\rho_m) = 0$

On prendra

$$v(\rho) = \frac{v_m}{\rho_m}(\rho_m - \rho) \tag{4}$$

où v_m est la vitesse moyenne maximale, ρ_m la densité maximale engendrant un embouteillage ($v = 0$). D'autres choix de v pourront être pris.

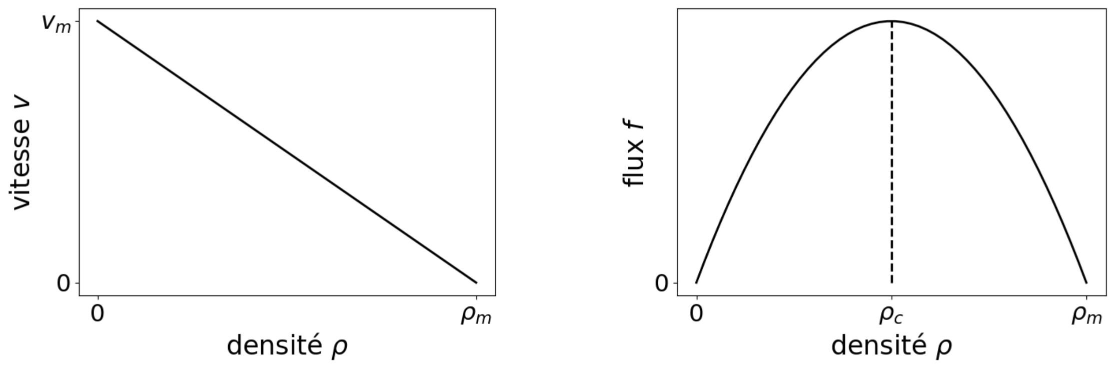

Figure 1. Vitesse (gauche) et flux (droite) du modèle LWR en fonction de la densité ρ.

L'objectif du projet est de résoudre numériquement les équations (1)–(4). Une méthode de Différences Finies sera développée et implémentée [1, chap. 14], [2, chap. 13]. Il sera nécessaire au préalable d'étudier théoriquement [3, chap. 4 et 5] dans un cadre simplifié les équations hyperboliques de la forme (2) pour lesquelles les solutions peuvent ne pas être régulières (discontinues) et présenter des chocs[1].

1. Bienvenu dans le monde riche et merveilleux des équations hyperboliques ☺ !

Références

[1] A. Quarteroni, A. Valli, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer, 1994.

[2] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical mathematics*, Springer, 2000.

[3] J.-F. Scheid, *Méthodes numériques pour la dynamique des fluides*. Cours de Master M2, Université de Lorraine. `http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Jean-Francois.Scheid/Enseignement/polyM2IMOI.pdf`