Практичне заняття №6-7

Тема: «ПОХІДНІ ФУНКЦІЇ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ»

Мета заняття: навчити студентів самостійно розв'язувати задачі з основ математичного аналізу; обчислювати похідні функцій другого, третього та вищих порядків; вміти обчислювати границі функції використовуючи правило Лопіталя; вміти застосовувати здобуті знання до практичних задач; також показати доступність основних понять, теорем та формул у спрощеному вигляді.

Методи засвоєння знань: усне опитування лекційного матеріалу; при розв'язуванні завдань застосовуються методи мозкової атаки, творчого розв'язання задач та інше; суміщаються різні види аудиторної роботи (індивідуальна, самостійна та інш.); вибір домашнього завдання відбувається за номером залікової книжки студента.

ХІД ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ

Питання, які студент має знати

1) Як обчислити похідну функції вищого порядку?
2) Диференціал вищого порядку.
3) Таблиця похідних. Правила диференціювання.
4) Правило Лопіталя.
5) Як розкрити невизначеності типів $0\cdot\infty$ і $\infty-\infty$, використовуючи правило Лопіталя?
6) Як розкрити невизначеності типів $0^0, \infty^0, 1^\infty$, використовуючи правило Лопіталя?

Короткі теоретичні відомості

***Похідні і диференціали вищих порядків*.** Похідною 2-го порядку від функції $y=f(x)$ називається похідна від її першої похідної, тобто $y''(x)=(y'(x))'$. Взагалі похідною n-го порядку називається похідна від похідної $(n-1)$-го порядку: $y^{(n)}(x)=\left(y^{(n-1)}(x)\right)'$.

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ мають похідні до n-го порядку включно, то для похідної n-го порядку їх добутку $u(x)\cdot v(x)$ справедлива формула Лейбніца

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}, \qquad (1)$$

де $u^{(0)}=u, v^{(0)}=v$ і $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Правило Лопіталя. Для розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ користуються правилом Лопіталя:

Теорема 1. Нехай в деякому околі точки $x=a$ функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані, за винятком, можливо, самої точки $x=a,$ і нехай $g'(x)\neq 0$ у вказаному околі. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$є одночасно або нескінченно малими, або нескінченно великими при $x\to a$ і при цьому існує границя відношення їх похідних $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to a$, то тоді існує також і границя відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$, причому справедлива рівність

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{2}$$

Правило застосовується і у випадку, коли $x\to\infty.$ Якщо при обчисленні $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ одержимо невизначеність типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$**.**

Примітка 10.1. Якщо відношення похідних у (2) знову веде до невизначеності $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$**,** тоді правило Лопіталя застосують ще раз.

Розкриття невизначеностей типу $0\cdot\infty$ *і* $\infty-\infty$. Для обчислення $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x),$ де $f(x)-$ нескінченно мала, а $g(x)-$нескінченно велика (невизначеність типу $0\cdot\infty$), необхідно перетворити добуток до вигляду $\frac{f(x)}{1/g(x)}$ (невизначеність типу $\frac{0}{0}$) або до вигляду $\frac{g(x)}{1/f(x)}$ (невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$) і застосувати правило Лопіталя.

Розкриття невизначеності $\infty-\infty$. Для цього необхідно перетворити різницю $f(x)-g(x)$ до вигляду $f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$. Потім розкрити невизначеність $\frac{g(x)}{f(x)}$ типу $\frac{\infty}{\infty}$. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}\neq 1,$ то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\infty$. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=1,$ одержимо невизначеність типу $\infty\cdot 0.$

Розкриття невизначеностей типу $0^0,\infty^0,1^\infty$. Логарифмуючи попередньо рівність $y=f(x)^{g(x)},$ одержимо рівність $\ln y=g(x)\ln f(x)$ і знаходимо границю $\ln y,$ після чого знаходимо і границю $y.$ В усіх трьох випадках $\ln y$ є невизначеністю типу $0\cdot\infty.$

<u>*Приклади розв'язання вправ*</u>:

Приклад 1. Знайти y''', якщо $y=x\cos x-\sin x$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо похідні:

$y'=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x;\qquad y''=-\sin x-x\cos x$

$$y'''=-\cos x-\cos x+x\sin x=-2\cos x+x\sin x;$$

Приклад 2. Записати формулу для похідної n-го порядку, якщо $y=xe^x$.

Розв'язання. Маємо:

$$y'=e^x+xe^x,\quad y''=e^x+e^x+xe^x=2e^x+xe^x,$$

$$y'''=2e^x+e^x+xe^x=3e^x+xe^x.$$

викладач Ярецька Н. О.

Помітивши закономірність у виразах для y', y'' і y''', запишемо:

$$y^{(n)} = ne^x + xe^x \text{ або } y^{(n)} = e^x(n+x).$$

Приклад 3. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\ln(x+1)}{tg\dfrac{\pi x}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctg3x}{e^{5x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{3-\sqrt{9+x}} - \dfrac{1}{\sqrt{25+x}-5}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tgx}$.

Розв'язання. а) При $x \to -1$ одержуємо невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$. Отже, можна застосувати теорему 1. Маємо:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\ln(x+1)}{tg\frac{\pi x}{2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to -1} \frac{1/(x+1)}{1\Big/\left(\cos^2\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to -1} \frac{\cos^2\frac{\pi x}{2}}{x+1} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to -1} \frac{2\cos\frac{\pi x}{2}\left(-\sin\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2}}{1} = -\lim_{x\to -1}\sin \pi x = 0.$$

б) Маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$, яку розкриваємо за допомогою теореми 1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctg3x}{e^{5x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{3/\left(1+9x^2\right)}{5e^{5x}} = \frac{3}{5}.$$

в) Маємо невизначеність виду $\infty - \infty$. Перетворимо її до $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3-\sqrt{9+x}} - \frac{1}{\sqrt{25+x}-5}\right) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{25+x}-5-3+\sqrt{9+x}}{\left(3-\sqrt{9+x}\right)\left(\sqrt{25+x}-5\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1\Big/\left(2\sqrt{25+x}\right) + 1\Big/\left(2\sqrt{9+x}\right)}{-\dfrac{1}{2\sqrt{9+x}}\left(\sqrt{25+x}-5\right) + \dfrac{1}{2\sqrt{25+x}}\left(3-\sqrt{9+x}\right)} =$$

$$= \frac{1/10 + 1/6}{0} = \frac{4/15}{0} = \infty.$$

г) Маємо невизначеність 0^0. Введемо позначення $y = (\sin x)^{tgx}$. Тоді $\ln y = tgx \cdot \ln\sin x$, а

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}(tgx \cdot \ln\sin x) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{ctgx} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1/\sin x\cdot\cos x}{-1/\sin^2 x} = -\lim_{x\to 0}\sin x\cos x = 0.$$

Оскільки $\ln\lim\limits_{x\to 0} y = \ln\lim\limits_{x\to 0}(\sin x) = 0,$ то $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tgx} = e^0 = 1.$

Аудиторні завдання:

[4]: с. 60, АР № 1-3, СР № 1-3; [5], с. 183, АЗ-6.4 №4.

Підбиття підсумків практичного заняття.

Домашні завдання:

[4]: с. 60, ДЗ № 1-3; с. 61, СР № 1-3; с. 183, СР №3(2).

викладач Ярецька Н. О.

Завдання для самостійної роботи:

1. Знайти похідну третього порядку:

1) $y=(1+4x^2)arctg2x$; 2) $y+\sin x=xy$. 3) $y=e^{-2x}(\cos 3x+\sin 3x)$;

4) $e^y+y-x=0$; 5) $x^2y=\cos y$. 6) $y=\sqrt{1-4x^2}\cdot\arcsin 2x$;

7) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; 8) $y=e^x\cos 3x$, 10) $y=\log_2(3+5x^2)$,

2. Знайти загальний вираз для похідних порядку n від функцій:

а) $y=3^x$; б) $y=\sin ax$; в) $y=\sqrt{x+5}$ г) $y=\cos 2x$

3. Обчислити границі використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(2+x)-\ln(x+3))$.

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^{\frac{1}{1-x}}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{ctg\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x-2}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x)^{ctgx}$;

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2x-\pi}$. 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(2x+3)}{\sqrt{x+5}}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{tg^2 2x}$;

Завдання для індивідуального домашнього завдання:

ІДЗ 2 (модульне середовище, курс «Математичний аналіз»).

Оцінювання діяльності студентів.

Оцінювання студентів виконується, відповідно робочої програми, спираючись на критерії оцінювання знань студентів з дисципліни «Математичний аналіз».

Література:

1. Конспект лекцій.

2. Модульне середовище.

3. Рудницький В. Б., Лесюк І. І., Міхалевська Г. І. Вища математика: методичні вказівки та контрольні завдання для студентів інженерно-технічних спеціальностей / В. Б. Рудницький, І. І. Лесюк, Г. І. Міхалевська. - Хмельницький: ХНУ, 2008. – 239 с.

4. Рудницький В. Б., Грипинська Н. В., Кучерук О.Я., Мороз В.В. Вища математика у вправах і задачах: Навчальний посібник для студентів економічних та технологічних спеціальностей вузів. – Хмельницький: ТУП, 2004. − 130с.

5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие. В 3 частях. Ч.2. /А.П.Рябушко, В.В.Бархатов, В.В.Державец, И.Е. Юруть; Под общ.ред. А.П.Рябушко. − Мн.: Выш.шк., 1990. − 352 с.

6. Вища математика у вправах і задачах: методичні вказівки / В. Б. Рудницький, Н. О. Ярецька, Д. М. Максимчук. – Хмельницький: ХНУ, 2012. – 176 с.

7. Рудницький В. Б., Кантемир І. І. Практичні заняття з курсу вищої математики. Частина 1.: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. – Хмельницький.: ТУП. 1999. – 437 с.

викладач Ярецька Н. О.