

Task 10

Макуха Илья

August 2021

1 Постановка задачи

Пусть имеется дифференциальное уравнение:

$$u_t = u_{xx} + f(x, t)$$

С краевыми условиями:

$$\alpha_1 u(0, t) - \alpha_2 u_x(0, t) = \alpha(t)$$

$$\beta_1 u(1, t) + \beta_2 u_x(1, t) = \beta(t)$$

Необходимо найти приближенное решение ДУ явным и неявным методом.

2 Теоретический минимум

Материал взят из Пакулиной(часть 2)

Явный метод:

Из начального условия (2) имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (6)$$

Граничные условия (3), (4) аппроксимируем с порядком $O(h^2)$

$$\alpha_1(t_k)u_0^k - \alpha_2(t_k)\frac{-3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k}{2h} = \alpha(t_k), \quad (7)$$

$$\beta_1(t_k)u_N^k + \beta_2(t_k)\frac{3u_N^k - 4u_{N-1}^k + u_{N-2}^k}{2h} = \beta(t_k), \quad (8)$$

$$k = \overline{1, M}.$$

Порядок вычисления решения

- 1) Из (6) находим u_i^0 , $i = \overline{0, N}$.
- 2) Из (5) находим $u_i^k = u_i^{k-1} + \tau(L_h u_i^{k-1} + f(x_i, t_{k-1}))$, $i = \overline{1, N-1}$ при $k = 1$.
- 3) Из (7) находим u_0^k при $k = 1$.
- 4) Из (8) находим u_N^k при $k = 1$.

Неявный метод:

Из начального условия (2) имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (11)$$

Для упрощения алгоритма производные в краевых условиях (3), (4) аппроксимируем с первым порядком

$$\alpha_1(t_k)u_0^k - \alpha_2(t_k)\frac{u_1^k - u_0^k}{h} = \alpha(t_k), \quad (12)$$

$$\beta_1(t_k)u_N^k + \beta_2(t_k)\frac{u_N^k - u_{N-1}^k}{h} = \beta(t_k). \quad (13)$$

$$\sigma L_h u_i^k - \frac{1}{\tau} u_i^k = G_i^k, \quad (14)$$

где

$$G_i^k = -\frac{1}{\tau} u_i^{k-1} - (1 - \sigma)L_h u_i^{k-1} - f(x_i, \bar{t}_k), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (15)$$

Граничные условия (12), (13) приводим к виду

$$\begin{aligned} -B_0 u_0^k + C_0 u_1^k &= G_0^k, \\ A_N u_{N-1}^k - B_N u_N^k &= G_N^k. \end{aligned}$$

Таким образом, на каждом k -ом слое в данном случае приходится решать систему $(N+1)$ порядка с трехдиагональной матрицей следующего вида¹

$$\begin{array}{ccc} -B_0 u_0^k & +C_0 u_1^k & = G_0^k, \\ A_i u_{i-1}^k & -B_i u_i^k & +C_i u_{i+1}^k = G_i^k, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ A_N u_{N-1}^k & -B_N u_N^k & = G_N^k, \end{array} \quad (16)$$

$$k = \overline{1, M}.$$

3 Тесты

Был выбран вариант 6-ой из методички Пакулиной. Истинное решение:
 $2x^2 + 3t^2 + 1$

Анимации:

https://drive.google.com/drive/folders/1oG_-dotPqBgwgjNlxeAgkpv6Ql2vGTwG?usp=sharing

Скачайте папку вычи и запустите html-файлы. В подпапке Устойчивое|Неустойчивое_animation_frames находятся кадры, если не хотите запускать html-анимацию.

4 Github

https://github.com/MakuhIlyukh/mak_cm