

Task 3

Макуха Илья

August 2021

1 Постановка задачи

СЛАУ имеет вид:

$$Ax = b$$

Необходимо установить, как регуляризация Тихонова влияет на обусловленность матрицы и на погрешность решения. Также необходимо реализовать один из методов решения СЛАУ: метод вращения.

2 Теоретический минимум

Регуляризация Тихонова имеет следующий вид:

$$(A + \alpha E)x = b$$

Значение параметра α есть trade-off между обусловленностью системы и точностью решения.

Метод вращения:

$$A = QR$$

$$R = T_{n-1,n}T_{n-2,n}T_{n-2,n-1}\dots T_{13}T_{12}A$$

$$Q = T_{12}^*T_{13}^*\dots T_{1,n}^*T_{23}^*T_{24}^*\dots T_{2,n}^*\dots T_{n2,n}^*T_{n1,n}^*$$

Где T_{ij} - матрицы поворота

$$y = Rx$$

$$b = Qy$$

3 Тесты

Были выбраны следующие матрицы: Гильбертова(4, 5 и 7). В качестве нормы для векторов выбран $\max(abs())$. Критерий обусловленности: спектральный. α варьировалось от 10^{-12} до 10^{-1} . Выбиралось лучшее α такое

что, значение обусловленности было меньше 10^4 и значение нормы погрешности было наименьшим. α искалось для единичного решения, затем α тестировалось на случайном решении. По результатам тестов видно, что изменение качества решения по сравнению с методом корня не наблюдается.

```
[[1.    0.5   0.333 0.25 ]
 [0.5   0.333 0.25  0.2  ]
 [0.333 0.25  0.2   0.167]
 [0.25  0.2   0.167 0.143]]

      alpha  A cond_s  (A + alpha*E) cond_s  ||x-x0||
0  1.000e-12 15513.739      15513.739 1.820e-10
1  1.000e-11 15513.739      15513.737 1.800e-09
2  1.000e-10 15513.739      15513.723 1.800e-08
3  1.000e-09 15513.739      15513.578 1.800e-07
4  1.000e-08 15513.739      15512.135 1.800e-06
5  1.000e-07 15513.739      15497.714 1.798e-05
6  1.000e-06 15513.739      15354.963 1.781e-04
7  1.000e-05 15513.739      14059.905 1.626e-03
8  1.000e-04 15513.739       7627.335 8.576e-03
9  1.000e-03 15513.739      1368.844 2.789e-02
10 1.000e-02 15513.739       149.575 1.049e-01
11 1.000e-01 15513.739        15.987 3.005e-01

Лучшее alpha: 0.0001
Нормы погрешности:
      0*alpha  0.1*alpha  alpha  10*alpha
0  1.209e-13      0.001  0.01  0.06

-----
```

```

[[1.    0.5   0.333 0.25  0.2   ]
 [0.5   0.333 0.25  0.2   0.167]
 [0.333 0.25  0.2   0.167 0.143]
 [0.25  0.2   0.167 0.143 0.125]
 [0.2   0.167 0.143 0.125 0.111]]

      alpha   A cond_s   (A + alpha*E) cond_s   ||x-x0||
0    1.000e-12 476607.25      476607.105 1.071e-09
1    1.000e-11 476607.25      476605.801 1.119e-08
2    1.000e-10 476607.25      476592.755 1.120e-07
3    1.000e-09 476607.25      476462.338 1.120e-06
4    1.000e-08 476607.25      475162.082 1.117e-05
5    1.000e-07 476607.25      462539.474 1.088e-04
6    1.000e-06 476607.25      365456.558 8.642e-04
7    1.000e-05 476607.25      117931.148 2.938e-03
8    1.000e-04 476607.25      15172.641 9.009e-03
9    1.000e-03 476607.25      1562.912 3.340e-02
10   1.000e-02 476607.25      157.653 1.112e-01
11   1.000e-01 476607.25      16.670 3.098e-01

Лучшее alpha: 0.001
Нормы погрешности:
      0*alpha  0.1*alpha  alpha  10*alpha
0  8.523e-12    0.277  0.272    0.378
-----

```

```

[[1.    0.5   0.333 0.25  0.2   0.167 0.143]
 [0.5   0.333 0.25  0.2   0.167 0.143 0.125]
 [0.333 0.25  0.2   0.167 0.143 0.125 0.111]
 [0.25  0.2   0.167 0.143 0.125 0.111 0.1  ]
 [0.2   0.167 0.143 0.125 0.111 0.1   0.091]
 [0.167 0.143 0.125 0.111 0.1   0.091 0.083]
 [0.143 0.125 0.111 0.1   0.091 0.083 0.077]]

      alpha  A cond_s  (A + alpha*E) cond_s  ||x-x0||
0  1.000e-12 4.754e+08 4.752e+08 3.017e-08
1  1.000e-11 4.754e+08 4.740e+08 3.519e-07
2  1.000e-10 4.754e+08 4.621e+08 3.380e-06
3  1.000e-09 4.754e+08 3.696e+08 2.670e-05
4  1.000e-08 4.754e+08 1.231e+08 1.033e-04
5  1.000e-07 4.754e+08 1.605e+07 3.032e-04
6  1.000e-06 4.754e+08 1.655e+06 9.329e-04
7  1.000e-05 4.754e+08 1.660e+05 3.152e-03
8  1.000e-04 4.754e+08 1.661e+04 1.138e-02
9  1.000e-03 4.754e+08 1.662e+03 3.892e-02
10 1.000e-02 4.754e+08 1.671e+02 1.182e-01
11 1.000e-01 4.754e+08 1.761e+01 3.212e-01

Лучшее alpha: 0.001
Нормы погрешности:
      0*alpha  0.1*alpha  alpha  10*alpha
0  7.985e-09    0.766  0.807    0.823

```

4 Github

https://github.com/MakuhIlyukh/mak_cm