

Task 2

Макуха Илья

August 2021

1 Постановка задачи

СЛАУ имеет вид:

$$Ax = b$$

Необходимо установить, как регуляризация Тихонова влияет на обусловленность матрицы и на погрешность решения. Также необходимо реализовать один из методов решения СЛАУ: метод квадратного корня.

2 Теоретический минимум

Регуляризация Тихонова имеет следующий вид:

$$(A + \alpha E)x = b$$

Значение параметра α есть trade-off между обусловленностью системы и точностью решения.

Метод квадратного корня:

$$A = LL^T$$

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - l_{k1}^2 - l_{k2}^2 - l_{k(k-1)}^2}$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - l_{i1}l_{k1} - l_{i2}l_{k2}}{l_{kk}}$$

$$y = L^T x$$

$$b = Ly$$

3 Тесты

Были выбраны следующие матрицы: Гильбертова(4, 5 и 7). В качестве нормы для векторов выбран $\max(abs())$. Критерий обусловленности: спектральный. α варьировалось от 10^{-12} до 10^{-1} . Выбиралось лучшее α такое

что, значение обусловленности было меньше 10^4 и значение нормы погрешности было наименьшим. α искалось для единичного решения, затем α тестировалось на случайном решении.

```
[[1.    0.5   0.333 0.25 ]
 [0.5   0.333 0.25  0.2  ]
 [0.333 0.25  0.2   0.167]
 [0.25  0.2   0.167 0.143]]

      alpha  A cond_s  (A + alpha*E) cond_s  ||x-x0||
0  1.000e-12 15513.739      15513.739 1.807e-10
1  1.000e-11 15513.739      15513.737 1.800e-09
2  1.000e-10 15513.739      15513.723 1.800e-08
3  1.000e-09 15513.739      15513.578 1.800e-07
4  1.000e-08 15513.739      15512.135 1.800e-06
5  1.000e-07 15513.739      15497.714 1.798e-05
6  1.000e-06 15513.739      15354.963 1.781e-04
7  1.000e-05 15513.739      14059.905 1.626e-03
8  1.000e-04 15513.739       7627.335 8.576e-03
9  1.000e-03 15513.739      1368.844 2.789e-02
10 1.000e-02 15513.739       149.575 1.049e-01
11 1.000e-01 15513.739        15.987 3.005e-01

Лучшее alpha: 0.0001
Нормы погрешности:
      0*alpha  0.1*alpha  alpha  10*alpha
0  9.673e-14      0.001  0.01      0.06

-----
```

```

[[1.    0.5   0.333 0.25  0.2   ]
 [0.5   0.333 0.25  0.2   0.167]
 [0.333 0.25  0.2   0.167 0.143]
 [0.25  0.2   0.167 0.143 0.125]
 [0.2   0.167 0.143 0.125 0.111]]

      alpha  A cond_s  (A + alpha*E) cond_s  ||x-x0||
0  1.000e-12 476607.25      476607.105 1.121e-09
1  1.000e-11 476607.25      476605.801 1.121e-08
2  1.000e-10 476607.25      476592.755 1.120e-07
3  1.000e-09 476607.25      476462.338 1.120e-06
4  1.000e-08 476607.25      475162.082 1.117e-05
5  1.000e-07 476607.25      462539.474 1.088e-04
6  1.000e-06 476607.25      365456.558 8.642e-04
7  1.000e-05 476607.25      117931.148 2.938e-03
8  1.000e-04 476607.25       15172.641 9.009e-03
9  1.000e-03 476607.25        1562.912 3.340e-02
10 1.000e-02 476607.25         157.653 1.112e-01
11 1.000e-01 476607.25          16.670 3.098e-01

Лучшее alpha: 0.001
Нормы погрешности:
      0*alpha  0.1*alpha  alpha  10*alpha
0  2.958e-11      0.277  0.272      0.378

```

```

[[1.    0.5   0.333 0.25  0.2   0.167 0.143]
 [0.5   0.333 0.25  0.2   0.167 0.143 0.125]
 [0.333 0.25  0.2   0.167 0.143 0.125 0.111]
 [0.25  0.2   0.167 0.143 0.125 0.111 0.1  ]
 [0.2   0.167 0.143 0.125 0.111 0.1   0.091]
 [0.167 0.143 0.125 0.111 0.1   0.091 0.083]
 [0.143 0.125 0.111 0.1   0.091 0.083 0.077]]

      alpha   A cond_s   (A + alpha*E) cond_s   ||x-x0||
0   1.000e-12  4.754e+08   4.752e+08  4.534e-08
1   1.000e-11  4.754e+08   4.740e+08  3.577e-07
2   1.000e-10  4.754e+08   4.621e+08  3.368e-06
3   1.000e-09  4.754e+08   3.696e+08  2.672e-05
4   1.000e-08  4.754e+08   1.231e+08  1.033e-04
5   1.000e-07  4.754e+08   1.605e+07  3.032e-04
6   1.000e-06  4.754e+08   1.655e+06  9.329e-04
7   1.000e-05  4.754e+08   1.660e+05  3.152e-03
8   1.000e-04  4.754e+08   1.661e+04  1.138e-02
9   1.000e-03  4.754e+08   1.662e+03  3.892e-02
10  1.000e-02  4.754e+08   1.671e+02  1.182e-01
11  1.000e-01  4.754e+08   1.761e+01  3.212e-01

Лучшее alpha: 0.001
Нормы погрешности:
      0*alpha   0.1*alpha   alpha   10*alpha
0   1.673e-09   0.766   0.807   0.823

```

4 Github

https://github.com/MakuhIlyukh/mak_cm