11.5

CS2023 - Aula de Ejercicios Nº 15

Brenner H. Ojeda Rios

Semestre 2024-1

Se sugiere que cada estudiante trate de resolver los ejercicios de forma **individual** y luego los discuta en grupo. Para las preguntas **2 y 3 use el reverso de las hojas.**

Ejercicios

1. (5 pts) Sean P_1 y P_2 dos problemas tales que $P_1 \alpha_n P_2$ y suponga que P_1 tiene cota inferior $\Omega(n \log n)$, donde n es un parametro que mide el tamaño de entrada del problema P_1. ¿Cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justifique cuidadosamente sus respuestas.

   - $\Omega(n \log n)$ también es una Cota inferior para P_2.

     V: Al P_1 tener una cota inferior $\Omega(n \log n)$, P_2 debería tener una solución de $\Omega(n \log n)$ o mayor.

     1

   - Todo algoritmo que resuelve P_1 también puede ser usado para resolver P_2.

     F: La expresión $P_1 \alpha_n P_2$ indica que existe una transformación T_S que transforma S_B a S_A, pero no afirma una transformación de S_A a S_B.

     1

   - Todo algoritmo que resuelve P_2 también puede ser usado para resolver P_1.

     V: La expresión $P_1 \alpha_n P_2$ indica que existe una transformación T_I que permite reducir P_1 a P_2 por lo que puede resolverse el problema con el algoritmo que resuelve P_2.

     1

   - El problema P_2 puede ser resuelto en el peor caso en tiempo $O(n \log n)$.

     F. La complejidad del algoritmo π_B que resuelve P_2 puede ser mayor que $\Omega(n \log n)$. Por ello, no puede asegurarse que $O(n \log n)$ sea cota superior de P_2.

     Nada impide q' $P \in O(n \log n)$

5

2. (5 pts) El MCM (Mínimo Común Múltiplo) de dos números es el número más pequeño que se puede dividir entre ambos números. Por otro lado, el MCD (Máximo Común Divisor) de dos números es el número más grande que divide a ambos. Encuentre una reducción del problema *MCM* para *MCD* .

3. (5 pts) Sea *MMS* el problema de calcular el producto de dos matrices simétricas de orden n. Sea *MMQ* el problema de multiplicación de matrices cuadradas de orden n. Sabemos que el problema *MMQ* existe un algoritmo eficiente con complejidad de tiempo $O(n^{2,376})$. Indique si son correctas las siguientes afirmaciones (justifique su respuesta):

   - MMQ es por lo menos tan difícil cuanto MMS.
   - MMS es por lo menos tan difícil cuanto MMQ. X

2.5

¿Por q?

$$\begin{array}{ccc} MMS & & MMQ \\ I_a & \xrightarrow{t_1} & I_B \\ & & \downarrow \quad \pi_b = O(n^{2,376}) \\ S_a & \longleftarrow & S_b \end{array}$$

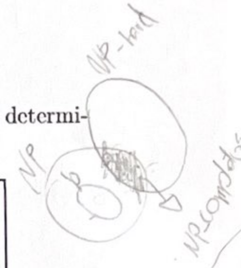
$T_S \rightarrow mcm = \frac{a \cdot b}{mcd}$

$I_A \rightarrow I_B$

$I_b \leftarrow S_B$

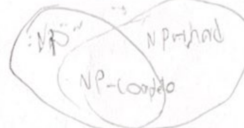
4. (5 pts) Preguntas de Verdadero o Falso sobre Clases de Problemas Algorítmicos

Pregunta 1: Un problema en P puede ser verificado en tiempo polinómico por una máquina determinista.

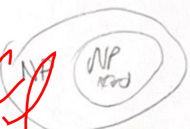


1

V: Ya que la definición de los problemas P es justo esa.



Pregunta 2:
Si un problema es NP-difícil, entonces debe pertenecer a la clase NP.



F: NP y ~~NP-difícil~~ son conjuntos distintos.

NP ⊂ NP difícil

Pregunta 3:
Si un problema puede ser reducido en tiempo polinómico a un problema NP-completo, entonces el problema original es NP-completo.

P ≠ NP-complet

F:

Podemos reducir cual problema P a NP-completo

Pregunta 4: El problema del viajante (Traveling Salesman Problem) con costos no negativos es un problema NP-completo.

V

F: El problema del viajante forma parte del conjunto de problemas NP-difícil.

V

Pregunta 5: Si un problema está en NP-completo, entonces no puede estar en P.

V: Los NP-completo son problemas que no se sabe su reducción, los problemas P sí.

Ni V
ni F

Condicional: Si NP=P => F
NP ≠ P => V

2) $MCM \propto_{f(n)} MCD$

$$\begin{tikzcd}
\underline{MCM} & & \underline{MCD} \\
I_a \arrow[rr, "T_I"] & & I_b \arrow[d, "\pi_B"] \\
S_a & & S_b \arrow[ll, "T_S"']
\end{tikzcd}$$

Conociendo que:

1. El algoritmo de Euler encuentra mcd (a,b).
2. $\text{mcm}(a,b) = \dfrac{a \cdot b}{\text{mcd}(a,b)}$

Se enuncia que:

1. π_B: Algoritmo de Euler
2. T_S: $\dfrac{a \cdot b}{\text{mcd}(a,b)}$

Dado que los parámetros para calcular mcd y mcm son los mismos, se conoce T_I también.

Dado que sabemos resolver P_2 pero no P_1:

$$\pi_A = \underset{O(1)}{T_I} + \pi_B + \underset{O(1)}{T_S}$$

Predomina la complejidad de π_B para determinar cota superior de MCM.

3)

$$\begin{tikzcd}
\underline{MMS} & & \underline{MMQ} \\
I_a \arrow[rr, "T_I"] & & I_b \arrow[d, "\pi_b"] \\
S_a & & S_b \arrow[ll, "T_s"']
\end{tikzcd}$$

Por datos, asumimos que:

$$MMS \propto_{f(n)} MMQ.$$

Además:

$$\pi_b = O(n^{2,376})$$