

# **Отчёт по лабораторной работе №5**

## **Математическое моделирование**

**Модель хищник-жертва. Вариант №30**

Выполнила: Малащенко Марина Владимировна,  
НФИбд-01-20, 1032202459

# Содержание

<b>Цель работы</b>	<b>4</b>
<b>Теоретическое введение</b>	<b>5</b>
<b>Задачи</b>	<b>7</b>
<b>Задание</b>	<b>8</b>
<b>Выполнение лабораторной работы</b>	<b>9</b>
Построение математической модели. Решение с помощью программ . . . . .	9
Julia . . . . .	9
Результаты работы кода на Julia . . . . .	13
OpenModelica . . . . .	14
Результаты работы кода на OpenModelica . . . . .	16
<b>Анализ полученных результатов. Сравнение языков.</b>	<b>18</b>
<b>Вывод</b>	<b>19</b>
<b>Список литературы. Библиография</b>	<b>20</b>

## Список иллюстраций

1	График численности хищников от численности жертв . . . . .	13
2	График численности жертв и хищников от времени . . . . .	13
3	Стационарное состояние . . . . .	14
4	График численности хищников от численности жертв . . . . .	16
5	График численности жертв и хищников от времени . . . . .	16
6	Стационарное состояние . . . . .	17

## **Цель работы**

Изучить жесткую модель хищник-жертва и построить эту модель.

# Теоретическое введение

- Модель Лотки—Вольтерры — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь её авторов, которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами. [4]

Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях [4]:

1. Численность популяции жертв  $x$  и хищников  $y$  зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (-ax(t) + by(t)x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = (cy(t) - dy(t)x(t)) \end{cases}$$

В этой модели  $x$  – число жертв,  $y$  – число хищников. Коэффициент  $a$  описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников,  $-a$  – естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников ( $xy$ ). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены  $-bxy$  и  $dxy$  в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жёсткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени такая система вернётся в изначальное состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решения) будет находиться в точке  $x_0 = \frac{c}{d}$ ,  $y_0 = \frac{a}{b}$ . Если начальные значения задать в стационарном состоянии  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ , то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей  $x(0)$ ,  $y(0)$ . Колебания совершаются в противофазе.

# Задачи

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв
2. Построить график зависимости численности хищников и численности жертв от времени
3. Найти стационарное состояние системы

# Задание

Вариант 30:

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.63x(t) + 0.019y(t)x(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.59y(t) - 0.018y(t)x(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях:  $x_0 = 7, y_0 = 12$  Найдите стационарное состояние системы.



# Выполнение лабораторной работы

## Построение математической модели. Решение с помощью программ

### Julia

Код программы для нестационарного состояния:

```
using Plots
using DifferentialEquations

x0 = 7
y0 = 12

a = 0.63
b = 0.019
c = 0.59
d = 0.018

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
```

```

end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
    dpi=300,
    legend=false)

plot!(
    plt,
    X,
    Y,
    color=:blue)

savefig(plt, "out/lab05_1.png")

plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)

plot!(
    plt2,
    T,

```

```

X,
label="Численность жертв",
color=:red)

plot!(
    plt2,
    T,
    Y,
    label="Численность хищников",
    color=:green)

savefig(plt2, "out/lab05_2.png")

```

Код программы для стационарного состояния:

```

using Plots
using DifferentialEquations

a = 0.63
b = 0.019
c = 0.59
d = 0.018

x0 = c / d
y0 = a / b

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

```

```

end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)

plot!(
    plt2,
    T,
    X,
    label="Численность жертв",
    color=:red)

plot!(
    plt2,
    T,
    Y,
    label="Численность хищников",
    color=:green)

savefig(plt2, "lab05_3.png")

```

В стационарном состоянии решение вида  $y(x) = \text{some function}$  будет представлять собой точку.

## Результаты работы кода на Julia

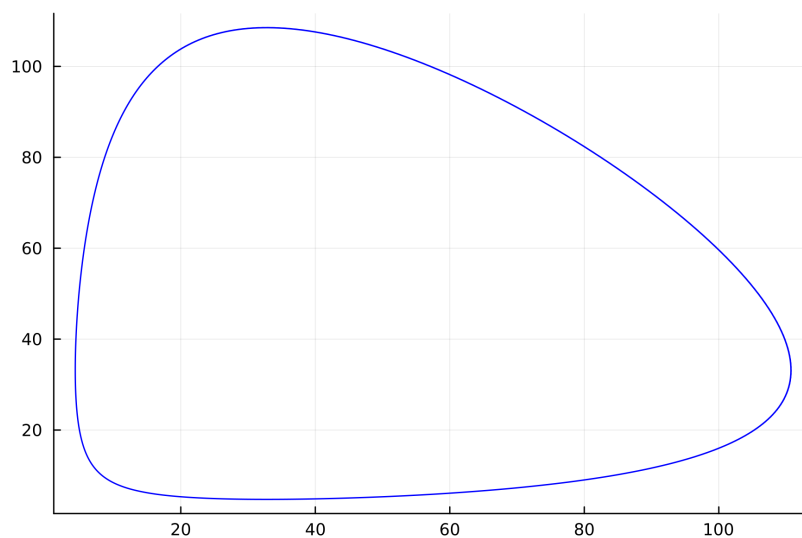


Рис. 1: График численности хищников от численности жертв

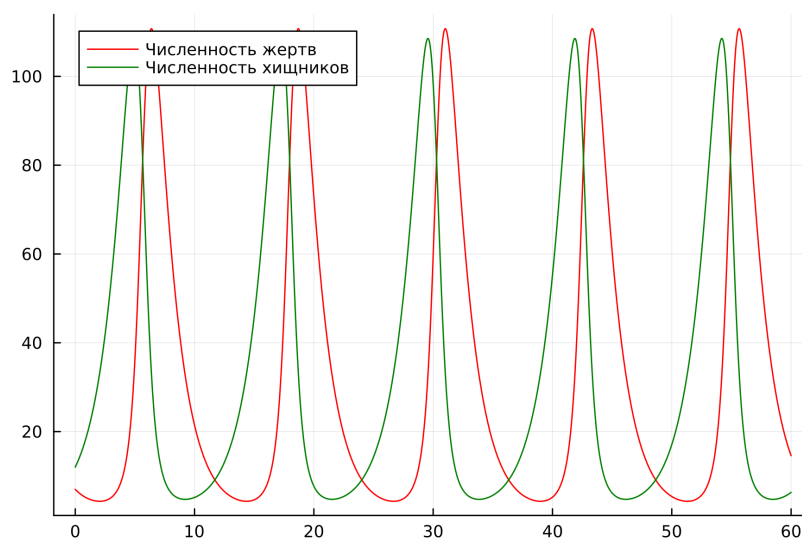


Рис. 2: График численности жертв и хищников от времени

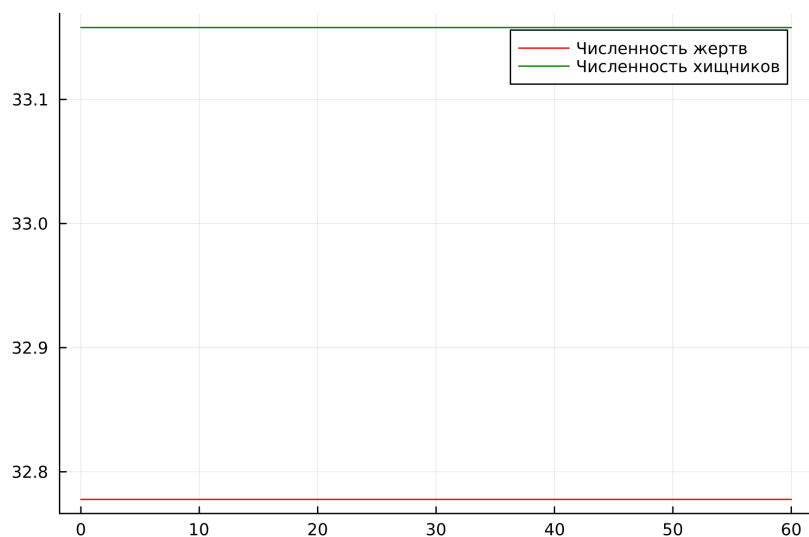


Рис. 3: Стационарное состояние

## OpenModelica

Код программы для нестационарного состояния:

```
model lab05_1
  Real a = 0.63;
  Real b = 0.019;
  Real c = 0.59;
  Real d = 0.018;
  Real x;
  Real y;
  initial equation
    x = 7;
    y = 12;
  equation
    der(x) = -a*x + b*x*y;
    der(y) = c*y - d*x*y;
end lab05_1;
```

Код программы для стационарного состояния:

```
model lab05_2
Real a = 0.63;
Real b = 0.019;
Real c = 0.59;
Real d = 0.018;
Real x;
Real y;
initial equation
x = c / d;
y = a / b;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab05_2;
```

В стационарном состоянии решение вида  $y(x) = \textit{some function}$  будет представлять собой точку.

## Результаты работы кода на OpenModelica

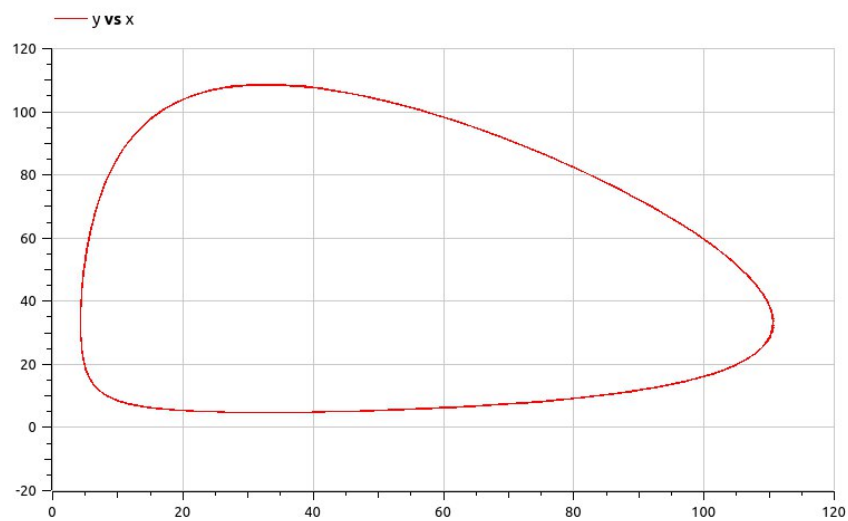


Рис. 4: График численности хищников от численности жертв

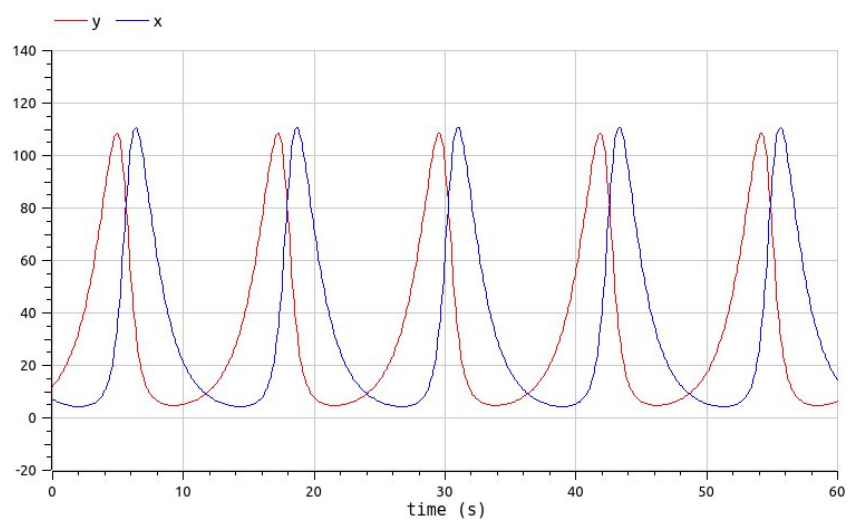


Рис. 5: График численности жертв и хищников от времени



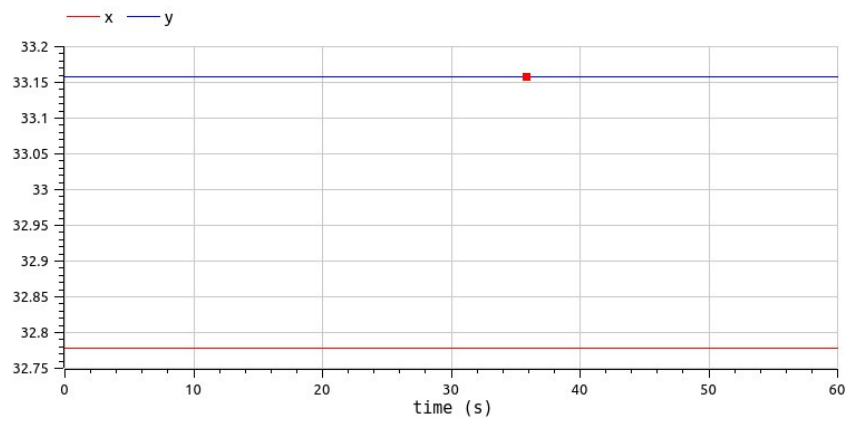


Рис. 6: Стационарное состояние

## **Анализ полученных результатов.**

### **Сравнение языков.**

В итоге проделанной работы мы построили график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв на языках Julia и OpenModelica. Построение модели хищник-жертва на языке openModelica занимает меньше строк, чем аналогичное построение на Julia.

## **Вывод**

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель хищник-жертва и построена модель на языках Julia и Open Modelica.

## Список литературы. Библиография

- [1] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
- [2] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>
- [3] Решение дифференциальных уравнений: <https://www.wolframalpha.com/>
- [4] Модель Лотки—Вольтерры: [https://math-it.petsu.ru/users/semenova/MathECO/Lectures/Lotka\\_Volterra/](https://math-it.petsu.ru/users/semenova/MathECO/Lectures/Lotka_Volterra/)