Fiche d'exercice 1 : Équation et inéquation à une variable

1 Équation et inéquation à une variable du premier ordre

Exercice 1.1. *Résoudre les équations suivantes. Lorsqu'une équation dépendra d'un paramètre m, il sera nécessaire de préciser la condition d'existence d'une solution.*

1. $x + 1 = m(x - 2)$
2. $4(x + 1) = 0$
3. $3m - (6x - 1) = -2(-x + 3)$
4. $4(2x - 1) = 3m(x + 2)$

Exercice 1.2. *Déterminer les ensembles de définition et résoudre les équations suivantes. Lorsqu'une équation dépendra d'un paramètre m, il sera nécessaire de préciser la condition d'existence d'une solution.*

1. $\dfrac{x-2}{2x+3} = \dfrac{2}{3}m$
2. $\dfrac{5}{4-x} = -\dfrac{1}{m+2x}$
3. $\dfrac{5mx+1}{x+1} = \dfrac{1}{4}$

Exercice 1.3. *Résoudre les inéquations suivantes.*

1. $x - 3 < 5x + 1$
2. $2 - 3x \geq 0$
3. $5x - 7 \geq 1$

2 Étude des fonctions polynomiales du second degré

2.1 Rappel théorique

Exercice 2.1. *Rappeler la définition d'un polynôme ainsi que les notions de degré, de racine, de divisibilité, de polynôme irréductible et de polynôme scindé.*

Note. *Si vous avez le temps, il sera intéressant, pour des questions de culture générale, de présenter quels sont les polynômes irréductibles sur le corps des réels et sur le corps des complexes, même si bien sûr nous nous éloignons du programme de mathématiques du lycée. Aussi, il sera intéressant de présenter (et pas plus) le théorème fondamental de l'arithmétique des polynômes.*

Exercice 2.2. *Rappeler la formule de la forme canonique d'un polynôme du second degré. Vous préciserez également :*

1. *À l'aide d'un graphe, les paramètres présents dans l'expression canonique du polynôme.*
2. *Les conditions d'existence d'un maximum global ou d'un minimum global.*
3. *Les propriétés de l'axe de symétrie.*
4. *Le tableau de variation, en fonction des cas.*

2.2 Exercice d'application

Exercice 2.3. *Les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, sont-elles des fonctions polynômes du second degré ?*

1. $f(x) = 3x$
2. $f(x) = 7$
3. $f(x) = 3x + 7$
4. $f(x) = 12x^2 + 1$
5. $f(x) = 3(x+1)^2 - 3x^2$
6. $f(x) = x^2 + x + 1$
7. $f(x) = x^3 + 2x + 1$
8. $f(x) = (x+1)^3 - x^3$
9. $f(x) = x + 1$

Exercice 2.4. *Pour chacune des fonctions polynomiales suivantes, préciser de quelle forme il s'agit.*

1. $f_1(x) = 3x^2 - 4x + 1$
2. $f_2(x) = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)$
3. $f_3(x) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}$

Après avoir vérifié que $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$, déterminer : le maximum ou le minimum global, l'axe de symétrie, le tableau de variation et le graphe de la fonction.

Exercice 2.5. *Pour chacun des polynômes suivants, déterminer la forme canonique ainsi que l'axe de symétrie et le tableau de variation.*

1. $f(x) = x^2 + x + 1$
2. $f(x) = x^2 - 3x + 7$
3. $f(x) = x^2 + \sqrt{2}x - 4$
4. $f(x) = x^2 - 3x - 21$
5. $f(x) = x^2 + 9x + 13$
6. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

Exercice 2.6. *Calculer, si elles existent, les racines des polynômes ci-dessous. Aussi, lorsque les racines existent, déterminer la forme factorisée.*

1. $f(x) = x^2 - 6x - 9$
2. $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$
3. $f(x) = 4x(x-1) + 1$
4. $f(x) = x^2 + x + 1$
5. $f(x) = x^2 - 8x + 16$
6. $f(x) = 4x^2 - 9$

3 Équation à une variable du second ordre

Exercice 3.1. *Résoudre les équations suivantes :*

1. $x^2 = 6x - 5$
2. $x(x-1) = x - 5$
3. $4(x-1) = x^2$

Exercice 3.2. *En utilisant la forme canonique d'un polynôme du second degré, résoudre les équations suivantes :*

1. $-x^2 + 3x + 9 = 0$
2. $x^2 + 2x + 2 = 0$
3. $2x^2 - 10x + 8 = 0$

Exercice 3.3. *Calculer l'image réciproque de $y = 1$ par les fonctions suivantes :*

1. $f(x) = x^2 + 2x + 2$
2. $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$
3. $f(x) = 5x^2 - 3x - 1$
4. $f(x) = 12x^2 - 12x + 4$
5. $f(x) = x(x-1)$
6. $f(x) = 5x^2 - 3x - 1$

Exercice 3.4. *Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition et déterminer l'image réciproque de $y = 0$.*

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{x^2}$
2. $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x} - 1$
3. $f(x) = \sqrt{x} + 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Exercice 3.5. *Résoudre, en fonction du paramètre m, les équations ci-dessous. En particulier, vous prendrez soin de spécifier l'existence de solution en fonction du paramètre m.*

1. $-2x^2 + 5x - m = 0$
2. $x^2 + (2-m)x - m - 3 = 0$
3. $x^2 + 6mx + 6m + 1 = 0$

4 Inéquation à une variable du second ordre

Exercice 4.1. *Résoudre les inéquations suivantes :*

1. $2x^2 + x - 3 > 0$
2. $x^2 + x + 1 > 0$
3. $x^2 + 3x - 5 > x + 3$
4. $(2x+3)^2 \leq 25$
5. $-3x^2 + 5x - 2 \leq 0$
6. $2x^2 + 2x + 1 < 0$

Exercice 4.2. *Après avoir précisé leur ensemble de définition, résoudre les inéquations suivantes :*

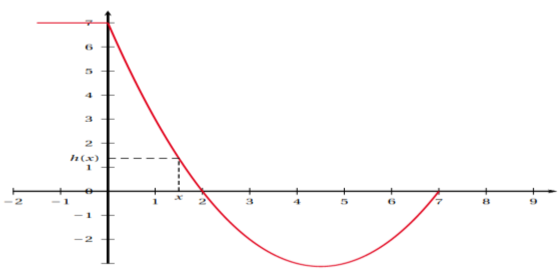
1. $\dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x - 3} \geq 0$
2. $\dfrac{2x - 3}{-2x^2 + 9x - 4} \leq 0$
3. $\dfrac{-3x + 1}{2 - x} \leq \dfrac{-4x + 5}{x + 3}$

Exercice 4.3. *Résoudre les inéquations suivantes :*

1. $(3 - 2x)\left(x^2 - 3x + 2\right) < 0$
2. $\left(x^2 - 2x + 1\right)(x - 7) \leq 0$
3. $(x + 10)\left(-3x^2 + 5x - 4\right) > 0$
4. $(x + 1)\left(x^2 + x - 1\right) > 0$

5 Problème

Exercice 5.1. *Un skateur se lance sur une rampe d'un skate park. On assimile le skateur à un point et on note $(x, h(x))$ les coordonnées du skateur sur la rampe dans le repère ci-dessous :*



On a alors que la fonction h est une fonction polynomiale qui est définie sur l'intervalle $[0, 7]$ et qui admet pour expression :

$$h(x) = \frac{1}{2}x(x-9) + 7$$

1. *Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le skateur est en dessous de son point d'arrivée.*

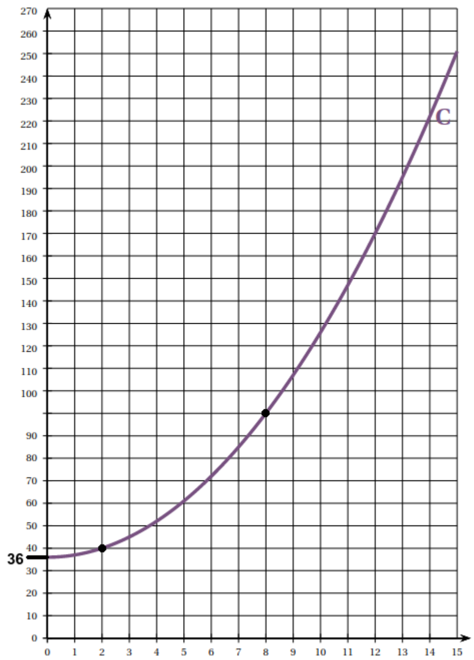
2. *Dresser le tableau de signes de $h(x)$.*
3. *Déterminer le minimum de h. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.*

Exercice 5.2. *Une société d'autoroute s'intéresse à l'affluence quotidienne de véhicules au niveau d'un péage. Des observations menées entre 14h et 23h aboutissent à modéliser le nombre de véhicules présents au péage selon l'heure d'observation par la fonction suivante :*

$$f(t) = -2t^2 + 76t - 600$$

1. *Déterminer l'heure de plus grande affluence. Quel sera alors le nombre de voitures présentes au péage ?*
2. *Grâce au tableau de variation et à la position de l'axe de symétrie, déterminer l'heure de moindre affluence entre 14h et 23h.*

Exercice 5.3. *Une entreprise fabrique et vend des composants électroniques pour smartphones. On note x le nombre de dizaines de composants fabriqués par jour. Le coût de production, en dizaines d'euros, de x dizaines de composants est noté $C(x)$. La courbe représentative de la fonction C sur l'intervalle $[0, 15]$ est :*



À partir de là, on se propose de modéliser la fonction du coût de fabrication par $C(x) = ax^2 + b$, où a et b sont des coefficients à déterminer.

1. *En choisissant deux points $(x, C(x))$ sur la courbe, déterminer les coefficients a et b.*
2. *À présent, on considère $R(x) = 15x$, la courbe des recettes. Tracer la courbe des recettes sur le graphe ci-dessus ainsi que l'intervalle sur lequel on a $R(x) \geq C(x)$.*
3. *Déterminer l'ensemble des nombres de dizaines de composants fabriqués par jour pour lesquels le bénéfice (i.e. $R(x) - C(x)$) est positif.*
4. *Déterminer le nombre de dizaines de composants fabriqués par jour qui maximise le bénéfice.*