Probabilités Discrètes

Cours n°3

EPITA 2025-2026

1 Opérateurs ensemblistes

1.1 Inclusion et sous-ensemble

1.1.1 Inclusion

Définition : On dit qu'un ensemble A est **inclus** dans un ensemble B, et on note $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ si :

Pour tout élément a de l'ensemble A, a appartient à B

Remarque : On dit également que l'ensemble A est un **sous-ensemble** de l'ensemble B.

Rappel :
Si vous ne les connaissez pas déjà, c'est un bon moment pour introduire les symboles :

- $\forall$: pour tout.
- $\exists$: il existe.

Avec cette syntaxe, A $\subset$ B peut également s'écrire :

$$\forall a \in A, a \in B \ .$$

1.1.2 Méthodologie

Comment démontrer une inclusion ?

Pour démontrer que A $\subset$ B :

1. On commence par considérer un **élément quelconque** de A.
   Rédaction : " Soit $a \in A$."
2. On peut éventuellement reformuler ce que signifie l'appartenance de a à l'ensemble A.
3. À l'aide d'un ou plusieurs argument(s) **qui repose(nt) uniquement sur le fait que** $a \in A$, on montre que l'élément a appartient à l'ensemble B.
4. Ce raisonnement est alors valable **pour tout élément** $a \in A$. On peut conclure que :
   $$\forall a \in A, a \in B$$
5. Autrement dit, on a démontré que A $\subset$ B.
6. A contrario, si il existe un élément a de A qui n'est pas dans B, alors A n'est pas inclu dans B. Autrement dit, si $\exists a \in A$ tel que $a \notin B$, alors $A \not\subset B$.

1.2 Différence

Définition : Soient A, B deux ensembles. L'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B est appelé **<u>différence</u>** de A et B et noté $A \setminus B$ (se dit A privée de B).

$$\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \{a \ / \ a \in \mathrm{A} \text{ et } a \notin \mathrm{B}\}$$

1.3 Différence symétrique

Définition : Soient A, B deux ensembles. L'ensemble des éléments de A ou de B qui n'appartiennent pas à $A \cap B$ est appelé **<u>différence symétrique</u>** de A et B et noté $A \Delta B$.

$$\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = \{x \ / \ (x \in \mathrm{A} \text{ ou } x \in \mathrm{B}) \text{ et } x \notin \mathrm{A} \cap \mathrm{B}\}$$

1.4 Complémentaire

Définition : Soient Ω un ensemble, et $A \subset \Omega$. L'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A est appelé **<u>complémentaire</u>** de A dans Ω et noté $\overline{A}$.

$$\overline{\mathrm{A}} = \{\omega \ / \ \omega \in \Omega \text{ et } \omega \notin \mathrm{A}\}$$

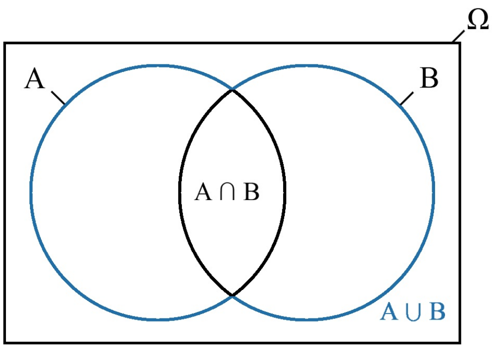
ATTENTION : Parler du complémentaire de A sans préciser l'espace ambiant $\Omega \supset A$ n'a pas de sens !

Remarque : Si $A \subset \Omega$ alors $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

2 Représentation des ensembles : Diagramme de Venn

Comme on l'a vu durant le cours de statistiques, il peut être intéressant de représenter des données mathématiques par des schémas visuellement explicite. Les diagrammes de Venn permettent de représenter les relations entre un nombre fini d'ensembles.

L'exemple de diagramme de Venn ci-dessous représente l'intersection et l'union de deux ensembles A et B dans un ensemble ambiant Ω.



Les diagrammes de Venn sont donc des ensembles de cercle représentant les relations entre différents ensembles.

3 Exercices

Exercice 1 :
Soient Ω un ensemble et A, B deux sous-ensembles de Ω. Représenter les diagrammes de Venn de :

- $A \setminus B$
- $A \Delta B$
- $\overline{A}$

Exercice 2 :

- Soient $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Calculer $A \cap B$ et $A \cup B$.

Soient maintenant A et B deux ensembles quelconques.

- Montrer que $B \subset A$ si et seulement si $A \cap B = B$.
- Montrer que $B \subset A$ si et seulement si $A \cup B = A$.

Exercice 3 : Pour les ensembles A et B suivants, déterminer si $A \subset B$, $B \subset A$ ou $A = B$ et le démontrer.

- $A = \{n \in \mathbb{N}/2|n \text{ et } 3|n\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N}/6|n\}$.
- $A = \{y \in \mathbb{R}/\exists x \in \mathbb{R}, y = x^4\}$ et $B = \{y \in \mathbb{R}/\exists x \in \mathbb{R}, y = x^2\}$.
- $A = \{0, 1\}$ et $B = \{r \in \mathbb{N}/\exists n, q \in \mathbb{N}, n = q \times 2 + r\}$.

.

Exercice 4 : Distributivité
Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Pour vous aider, dessinez les diagrammes de Venn de $A \cap (B \cup C)$ et de $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 5 :

1. Calculer $\overline{\overline{\{0, 1, 2, 3, 4\}}}$ dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
2. Calculer $\overline{\overline{\{0, 1, 2, 3, 4\}}}$ dans $\mathbb{N}$.
3. Calculer $\overline{\overline{\{n \in \mathbb{N}/2|n\}}}$ dans $\mathbb{N}$.
4. Soient $A \subset \Omega$ deux ensembles. Montrer que $\overline{\overline{A}} = A$.

Exercice 6 : Lois de De Morgan

1. Soient $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, c, f, g\} \subset \Omega = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Calculer $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.
2. Démontrer les lois de De Morgan pour tout ensembles $A, B \subset \Omega$:
    - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
    - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Pour vous aider, dessinez les diagrammes de Venn de $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.

3. Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Exercice 7 :

1. Soient $A = \{'l', 'ma', 'me', 'j', 'v'\}$, $B = \{'l', 'ma', 'me', 's', 'd'\}$ deux sous-ensembles de $\Omega = \{'l', 'ma', 'me', 'j', 'v', 's', 'd'\}$. Calculer $A \setminus B$ et $A \cap \overline{B}$.

2. Pour $A, B \subset \Omega$ quelconques, montrer que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
   Pour vous aider, dessinez les diagrammes de Venn de $A \setminus B$ et $A \cap \overline{B}$.

Exercice 8 :
Soient $A, B, C \subset \Omega$ quatre ensembles. Montrer les égalités suivantes.

- $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
- $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

Pour vous aider, dessinez les diagrammes de Venn de chaque expression.

Exercice 9 :
Soient $A, B \subset \Omega$ trois ensembles.

1. Si $A = \{Tb, Gb, Mb\}$ et $B = \{Kb, b\}$, donner le cardinal de A, de B, de $A \cup B$ et de $A \cap B$.

2. Si A et B sont disjoints, donner le cardinal de $A \cup B$ et celui de $A \cap B$.

3. En vous aidant du diagramme de Venn de A et B dans le cas général, trouver une formule qui relie les cardinaux de A, de B, de $A \cup B$ et de $A \cap B$.

Exercice 10 :
On dit qu'une fonction $f : A \to B$ est

- injective si à tout élément de B elle fait correspondre au plus un élément de A.
- surjective si à tout élément de B elle fait correspondre au moins un élément de A.
- bijective si elle est injective et surjective.

1. Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est injective, surjective ou bijective.
   - $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}, n \mapsto n^2$
   - $f : \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 4, 9, 16, 25\}, n \mapsto n^2$
   - $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \to \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}, n \mapsto n^2$
   - $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \to \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}, n \mapsto n^2$

2. Que peut-on déduire des cardinaux de A et B quand $f : A \to B$ est injective ? surjective ? bijective ?