Introduction aux graphes et aux matrices

Cours n°1

EPITA Cyber 2
2025-2026

Ce cours présente les définitions et notations basiques associées à la théorie des graphes.

1 Introduction

La théorie des graphes fournie des outils pour modéliser et résoudre de nombreux problèmes dans des domaines très variés.
Vous connaissez déjà un type de graphe particuliers, les arbres binaires de recherche, qui permettent de répondre de façon efficace au problème de recherche de données. D'autres exemples de problèmes formalisables par les graphes sont la recherche d'un chemin dans un réseau de transport, le routage de traffic dans un réseau de télécommunication, ou encore l'ordonnancement de tâches.

2 Définitions : Graphes orientés et non orientés

Un graphe est composé de deux ensembles : un ensemble de sommet (par exemple, les stations dans un réseau de transport) et un ensemble de liaisons entre ces sommets (liaisons possibles entre les stations).
On distingue les graphes orientés et les graphes non orientés.

2.1 Graphes orientés

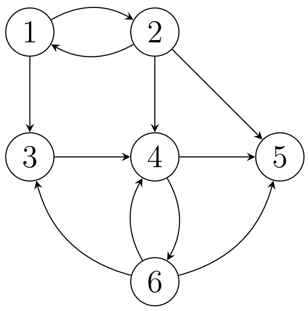
Définition 1 (Graphe orienté)**.** *Un **graphe orienté**, noté G, est défini par deux ensembles $G = (X, U)$:*

- *Un ensemble de **sommets** (ou **noeuds**), noté X.*
  *On note n le nombre de sommets de G et n est appelé l'**ordre** de G.*
  Les sommets seront en général numérotés de 1 à n.
- *Un ensemble d'**arcs**, noté U ; un **arc** est un couple de sommet $u = (i, j)$, $i, j \in X$.*
  *On appelle i l'**extrémité initiale** et j l'**extrémité finale** de l'arc (i, j).*
  *Le sommet i est un **prédécesseur** de j, et j est un **successeur** de i.*
  On note m le nombre d'arêtes d'un graphe.

On note $N^+(i)$ l'ensemble des **successeurs** d'un sommet i, et $N^-(i)$ l'ensemble de ses **prédécesseurs**.
L'ensemble des prédécesseurs et des successeurs de i est appelé l'ensemble des **voisins** de i, noté $N(i)$.

On appelle le **demi-degré extérieur** d'un sommet i, noté $d^+(i)$, le nombre de successeurs de i.
Le **demi-degré intérieur** d'un sommet i, noté $d^-(i)$ représente le nombre de ses prédécesseurs.
Le **degré** de i, noté $d(i)$, est le nombre de ses successeurs et de ses prédécesseurs, soit $d(i) = d^+(i) + d^-(i)$.

Exemple :



$X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$;
$U = \{(1,2); (1,3); (2,1); (2,4); (2,5); (3,4); (4,5); (4,6); (6,3); (6,4); (6,5)\}$;
$N^+(1) = \{2; 3\}$; $N^-(1) = \{2\}$; $N(1) = \{2; 3\}$;
$N^+(4) = \{5; 6\}$; $N^-(4) = \{2; 3; 6\}$; $N(4) = \{2; 3; 5; 6\}$;
$d^+(1) = 2$; $d^-(1) = 1$; $d(1) = 3$;
$d^+(4) = 2$; $d^-(4) = 3$; $d(4) = 5$;
$d^+(5) = 0$; $d^-(5) = 3$; $d(5) = 3$;

FIGURE 1 – Un graphe orienté G d'ordre 6.

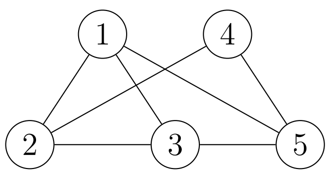
2.2 Graphes non orientés

Définition 2 (Graphe non orienté)**.** *Un* ***graphe non orienté****, noté G, est défini par deux ensembles* $G = (X, E)$ *:*

- *Un ensemble de* ***sommets****, noté* X*.*
- *Un ensemble d'****arêtes****, noté* E *; une* ***arête*** *est une paire de sommet* $u = \{i, j\}$*,* $i, j \in X$*.*

L'ensemble des noeuds liés à un sommet i par une arête est appelé l'ensemble des voisins de i, noté $N(i)$.
Le **degré** d'un sommet i, noté $d(i)$, représente le nombre de ses voisins.

Exemple :



$X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$;
$U = \{\{1,2\}; \{1,3\}; \{1; 5\}; \{2; 3\}; \{2,4\}; \{3,5\}; \{4,5\}\}$;
$N(1) = \{2; 3; 5\}$; $N(3) = \{1; 2; 5\}$; $N(4) = \{2; 5\}$;
$d(1) = 3$; $d(3) = 3$; $d(4) = 2$;

FIGURE 2 – Un graphe non orienté G d'ordre 5.

2.3 Définitions additionnelles

Une **boucle** est un arc ou une arête ayant le même sommet pour extrémité initiale et terminale.
Deux arcs ou arêtes ayant une extremité commune sont dits **adjacents**.
Un sommet de degré nul est dit **isolé**.

Soit un graphe $G = (X, E)$.
Un **graphe partiel** de G est un graphe H ayant les mêmes sommets que G et possédant un sous-ensemble des arêtes de G, c'est-à-dire $H = (X, E')$, avec $E' \subseteq E$.
Un **sous-graphe** de G est un graphe $H = (X', E')$, avec $X' \subseteq X$, et $E' \subseteq E$.

Soit un ensemble de sommet $X' \subseteq X$. On note $G[X']$ le **sous-graphe engendré par** X', c'est-à-dire le graphe ayant comme sommets X' et comme arêtes l'ensemble des arêtes de G dont les deux extrémités se trouvent dans X'.

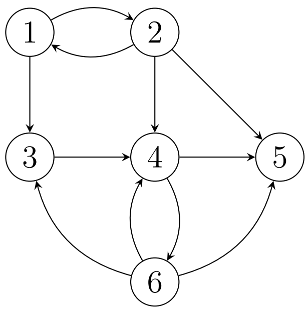
Un graphe est dit **pondéré** (ou **valué**) lorsque chacune de ses arêtes/arcs possède un poids.

2.4 Connexité

2.4.1 Chemin et Circuit

Définition 3 (Chemin (graphe orienté)). *Soit un graphe orienté $G = (X, U)$.*
*On appelle **chemin** allant du sommet i_0 au sommet i_l, une suite de sommets $(i_0, i_1, i_2, \ldots, i_l)$ telle que pour tout $k \in [1, 2, \ldots, l]$, l'arc (i_{k-1}, i_k) appartient à U.*
Autrement dit, le chemin $(i_0, i_1, i_2, \ldots, i_l)$ est un suite d'arc du graphe G permettant de passer de i_0 à i_l.

La **longueur** d'un chemin est défini par son nombre d'arcs.
Un chemin est dit **simple** si il ne contient pas deux fois le même arc.
Un **circuit** est un chemin dont les extremités coïncident ($i_0 = i_l$).
Un chemin ou un circuit est dit **élémentaire** si il ne contient pas deux fois le même sommet (sauf aux extrémités).
Exemple :



$\mu_1 = (1, 2, 4, 6)$ est un chemin de longueur 3 ;
$\mu_2 = (2, 4, 5)$ est un chemin de longueur 2 ;
μ_1 et μ_2 sont des chemins simples ;
$\mu_3 = (3, 4, 6, 3)$ est un circuit élémentaire de longueur 3 ;
$\mu_4 = (3, 4, 6, 3, 4, 6, 3)$ est un circuit de longueur 6, qui n'est pas élémentaire.

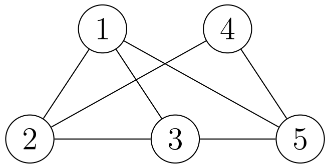
FIGURE 3 – Un graphe orienté G d'ordre 6.

2.4.2 Chaîne et Cycle

Définition 4 (Chaîne (graphe non orienté)). *Soit un graphe non orienté $G = (X, E)$.*
*On appelle **chaîne** allant du sommet i_0 au sommet i_l, une suite de sommets $(i_0, i_1, i_2, \ldots, i_l)$ telle que pour tout $k \in [1, 2, \ldots, l]$, l'arête $\{i_{k-1}, i_k\}$ appartient à E.*
Autrement dit, la chaîne $(i_0, i_1, i_2, \ldots, i_l)$ est un suite d'arête du graphe G permettant de passer de i_0 à i_l.

La **longueur** d'une chaîne est défini par son nombre d'arêtes.
Une chaîne est dit **simple** si elle ne contient pas deux fois la même arête.
Un **cycle** est un chaîne dont les extrémités coïncident ($i_0 = i_l$).
Une chaîne ou un cycle est dit **élémentaire** si il ne contient pas deux fois le même sommet (sauf aux extrémités).

Exemple :



$\mu_1 = (1, 2, 3, 5)$ est une chaîne de longueur 3 ;
$\mu_2 = (5, 4, 2)$ est une chaîne de longueur 2 ;
μ_1 et μ_2 sont des chaînes simples ;
$\mu_3 = (1, 3, 5, 4, 2, 1)$ est un cycle élémentaire de longueur 5 ;
$\mu_4 = (1, 2, 3, 5, 1, 2, 3, 1)$ est un cycle de longueur 7 ;

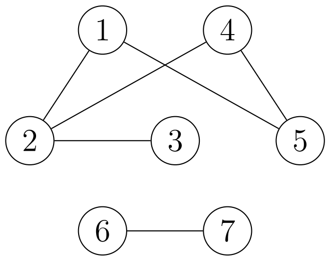
FIGURE 4 – Un graphe non orienté G d'ordre 5.

2.4.3 Graphe Connexe

Définition 5 (Graphe Connexe)**.** *Un graphe G est dit* ***connexe*** *si pour tout paire de sommets i, j, il existe une chaîne allant de i à j.*

On appelle **composante connexe** de G un sous-graphe connexe maximal, c'est-à-dire un sous-graphe qui n'est pas contenu dans un autre sous graphe connexe de G.
Un graphe est donc connexe si il ne contient qu'une seule composante connexe.
Le nombre de composantes connexes d'un graphe est appelé son **nombre de connexité**.
La notion de connexité s'applique également aux graphes orientés, en considérant les arcs comme des arêtes.

Exemple :



Soit $X_0 = \{1; 2; 3\}$, $X_1 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ et $X_2 = \{6; 7\}$;
$G[X_0]$ est un graphe connexe non maximal ;
$G[X_1]$ est un graphe connexe maximal ;
$G[X_2]$ est un graphe connexe maximal ;
$G[X_1]$ et $G[X_2]$ sont les composantes connexes de G ;

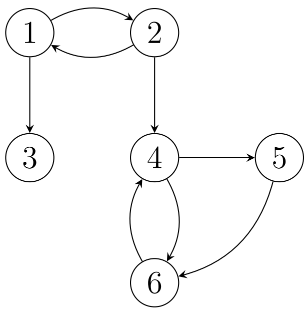
FIGURE 5 – Un graphe G avec deux composantes connexes.

2.4.4 Graphe Fortement Connexe

Définition 6 (Graphe Fortement Connexe)**.** *Un graphe orienté G est dit* ***fortement connexe*** *si pour tout couple de sommet (i, j), il existe un chemin allant de i à j.*
On appelle **composante fortement connexe** de G un sous-graphe fortement connexe et maximal, c'est-à-dire un sous-graphe qui n'est pas contenu dans un autre sous graphe fortement connexe de G.
Un graphe est donc fortement connexe si il ne contient qu'une seule composante fortement connexe.
Le nombre de composantes fortement connexes d'un graphe est appelé son **nombre de connexité forte**.

Soit un graphe orienté G possédant $G_1, G_2, \ldots, G_l$ comme composantes fortement connexes, engendrés par $X_1, X_2, \ldots, X_l$. On définit le **graphe réduit** de G, noté G_r, comme le graphe dont les sommets représentent les composantes fortement connexes de G, et il existe un arc entre deux composantes fortement connexes X_i et X_j si il existe au moins un arc entre un sommet de X_i et un sommet de X_j dans G.

Exemple :



G est un graphe connexe, mais non fortement connexe ;
Soit $X_0 = \{1; 2\}$; $X_1 = \{3\}$; $X_2 = \{4; 6\}$, $X_3 = \{4; 5; 6\}$,
$G[X_0]$ est un graphe fortement connexe maximal ;
$G[X_1]$ est un graphe fortement connexe maximal ;
$G[X_2]$ est un graphe fortement connexe **non** maximal ;
$G[X_3]$ est un graphe fortement connexe maximal ;
$G[X_0]$, $G[X_1]$ et $G[X_3]$ sont les composantes fortement connexes de G ;

FIGURE 6 – Un graphe connexe G avec trois composantes fortement connexes.