Probabilités Discrètes

Cours n°6 - Probabilités Conditionnelles

EPITA 2025-2026

1 Introduction

Lorsque l'on étudie une expérience probabiliste, on commence par récolter un maximum d'informations concernant cette expérience. Au sein de ce cours nous nous sommes jusqu'à maintenant intéressé principalement aux informations concernant les résultats possibles d'expériences probabilistes : les issues et les évènements. Toutefois cette façon d'aborder les probabilités ne permet pas de couvrir toutes les expériences imaginables. En effet certaines expériences probabilistes peuvent, par exemple, inclure une notion de temporalité. Dans ce cas la probabilité de certains évènements peut être modifiée en fonction du moment où on la calcule, ou plus généralement en fonction des informations dont on dispose concernant notre expérience.

Exemple :
On étudie un groupe de personnes. On choisie une personne au hasard dans le groupe, et on s'intéresse aux évènements suivants.

- G : "La personne choisie est gauchère."
- F : "La personne choisie est une femme."

On note alors

- N le nombre de personnes dans le groupe.
- N_F le nombre de femmes dans le groupe.
- N_G le nombre de personnes gauchères dans le groupe.
- $N_{F\cap G}$ le nombre de femmes gauchères dans le groupe.

Notons dans un premier temps que si $N \neq 0$ alors $\mathbb{P}(F) = \frac{N_F}{N}$ et $\mathbb{P}(F \cap G) = \frac{N_{F\cap G}}{N}$.

On se demande maintenant quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard soit gauchère. *Remarque : On ajoute l'information que la personne choisie est une femme.*
D'après les informations précédentes, si $N_F \neq 0$, cette probabilité vaut $\frac{N_{F\cap G}}{N_F}$.

On remarque alors que

$$\frac{N_{F\cap G}}{N_F} = \frac{\left(\frac{N_{F\cap G}}{N}\right)}{\left(\frac{N_F}{N}\right)} = \frac{\mathbb{P}(F \cap G)}{\mathbb{P}(F)} \quad .$$

Dans ce qui suit nous allons formaliser les résultats observer dans l'exemple précédent, et étudier certaines conséquences de ces résultats.

2 Probabilités conditionnelles

Définition :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $B \subset \Omega$ un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Pour tout évènement $A \subset \Omega$, on définie

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad .$$

$\mathbb{P}(A|B)$ est la **probabilité conditionnelle** de A sous l'hypothèse B.
$A|B$ se prononce A **sachant** B.

Remarque : $A|B$ n'est pas un évènement. On ne modifie pas l'évènement A, on modifie la fonction $\mathbb{P}$.

Propriétés :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $B \subset \Omega$ un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors l'application

$$\begin{array}{rcccl} \mathbb{P}(\,\cdot\,|B) & : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & & A & \mapsto & \mathbb{P}(A|B) \end{array}$$

est une loi de probabilité.
On a donc :

- $\mathbb{P}(\emptyset|B) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$.
- Si $B \subset A \subset \Omega$, alors $\mathbb{P}(A|B) = 1$.
- Si $A \subset \Omega$, alors $\mathbb{P}(\overline{A}|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.
- Si $A_1, A_2 \subset \Omega$, alors $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2|B)$.
  En particulier si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B)$.

3 Formule des probabilités totales

Maintenant que l'on a définie ce qu'est une probabilité conditionnelle, on peut se demander comment s'en servir. Pour cela remarquons tout d'abord l'égalité ensembliste suivante :

$$\forall A, B \subset \Omega \ , \quad A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

où Ω est un ensemble quelconque. Cette union est, par définition du complémentaire, une union disjointe.

Si Ω désigne l'univers d'une expérience aléatoire, on a alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B}) \ .$$

On a donc une formule pour calculer $\mathbb{P}(A)$ en **conditionnant** par les évènements B et $\overline{B}$.

Cette formule peut se généraliser en utilisant un conditionnement différent de celui par un évènement et son complémentaire. Pour cela on a tout d'abord besoin de la définition suivante.

Définition :
Soient Ω un ensemble et $B_1, ..., B_n \subset \Omega$. Le n-uplet $(B_1, ..., B_n)$ est appelé **partition** de Ω si il vérifie les trois conditions :

- $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $B_i \neq \emptyset$.
- $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$.
- Les B_i sont deux à deux disjoints : $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$.

Dans un cadre probabiliste, nous pouvons conditionner par tous les évènements d'une partition de l'univers, à condition que ces évènements soient de probabilités non nulles. Dans ce cas, on obtient la formule suivante.

Propriété : Formule des probabilités totales
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $A \subset \Omega$ et $(B_1, ..., B_n)$ une partition de Ω. Si $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i) \ .$$

4 Formule de Bayes

Les deux formules précédentes (probabilités conditionnelles et probabilités totales) vont maintenant nous permettre de démontrer une formule incontournable en probabilité : la formule de Bayes. On verra dans la partie *Exercices* comment démontrer cette formule ainsi qu'un exemple l'utilisant.

Théorème : Formule de Bayes
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A, B_1, ..., B_n \subset \Omega$ de probabilités non nulles et tels que $(B_1, ..., B_n)$ soit une partition de Ω. Alors pour tout $j \in \{1, ..., n\}$ on a

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)} \ .$$

5 Indépendance

Une dernière notion importante lorsque l'on parle de probabilités conditionnelles est celle d'indépendance. Intuitivement, l'indépendance entre deux évènements A et B est le fait que la réalisation de A n'impacte aucunement la probabilité de B.

Exemple : On effectue un tirage avec remise de 2 boules dans une urne contenant 14 boules, numérotées de 1 à 14.
Les évènements "La première boule porte un numéro pair." et "La seconde boule porte un numéro multiple de trois." sont indépendants : la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de l'autre.

Nous définissons dans ce qui suit l'indépendance de façon plus rigoureuse.

Dans un premier temps, nous avons besoin de la propriété suivante.

Propriété :
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A, B \subset \Omega$ de probabilités non nulles. IL y a équivalences entre :

- $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Preuve :
Comme A et B sont de probabilités non nulles, on peut conditionner par ces évènements. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) \quad & \iff \quad \tfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B) \\
& \iff \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\
& \iff \quad \tfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \\
& \iff \quad \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)
\end{aligned}$$

$\square$

Nous pouvons maintenant donner une définition formelle de la notion d'indépendance.

Définition :
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A, B \subset \Omega$. On dit que A et B sont **indépendants** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\ .$$

Remarque 1 : La notion d'indépendance induit l'utilisation d'un référentiel : deux évènements sont indépendants (ou non) l'un **par rapport** à l'autre, un évènement ne peut pas être indépendant tout seul.

Remarque 2 : Un évènement de probabilité 0 ou 1 est indépendant de tout évènement, y compris de lui-même.

Remarque 3 : Deux évènements A et B incompatibles (cad. $A \cap B = \emptyset$) de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\ .$$

Remarque 4 : L'indépendance entre deux évènements A et B ne dépend pas que de A et de B, elle dépend également de Ω et de $\mathbb{P}$ (cf. partie *Exercices* pour un exemple).

Ceci définie l'indépendance de deux évènements, mais que se passe-t-il si l'on étudie simultanément plus de deux évènements ?

Définition :
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1, ..., A_n \subset \Omega$. On dit que $A_1, ..., A_n$ sont mutuellement indépendants si pour tout $1 \leq i_1 \leq ... \leq i_k \leq n$ on a :

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) ... \mathbb{P}(A_{i_k})\ .$$

Exemple : Trois évènements A, B et C sont mutuellement indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \ , \ \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \ , \ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

et

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \ .$$

Remarque : L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse.

Enfin, on peut conclure en remarquant la propriété suivante.

Propriété :
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1, ..., A_n \subset \Omega$. Si $A_1, ..., A_n$ sont mutuellement indépendants, alors toute famille obtenue à partir de $A_1, ..., A_n$ en remplaçant l'un des A_i par son complémentaire est aussi une famille d'évènements mutuellement indépendants.

6 Exercices

Exercice 1 :
Dans une urne on a $r \in \mathbb{N}$ boules rouges et $b \in \mathbb{N}$ boules blanches. On tire deux boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ? Répondre avec deux méthodes : une utilisant les probabilités conditionnelles, l'autre non.

Exercice 2 :

1. Démontrer soigneusement la formule de Bayes.
2. Dans une salle de classe il y a 40% d'étudiantes et 60% d'étudiants. Une étudiante sur trois porte des lunettes, un étudiant sur deux porte des lunettes. Quelle est la probabilité qu'une personne portant des lunettes prise au hasard soit une étudiante ?

Exercice 3 :
Une urne contient 12 jetons numérotés de 1 à 12. On tire un jeton au hasard et on considère les évènements :
A : "Le jeton porte un numéro pair."
B : "Le jeton porte un numéro multiple de 3."

1. A et B sont-ils indépendants ?
2. On ajoute un treizième jeton numéroté 13, sans changer A ni B. A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 4 :
Une urne contient 4 jetons : un rouge, un jaune, un vert et un tricolore rouge-jaune-vert. On tire un jeton au hasard et on définie les évènements :
A : "Il y a du rouge sur le jeton tiré."
B : "Il y a du jaune sur le jeton tiré."
C : "Il y a du vert sur le jeton tiré."

1. Montrer que A, B et C sont indépendants deux à deux.

2. Sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 5 :
On considère un lot de pièces métalliques rectangulaires. Elles sont destinées à être assemblées ensembles. Toutefois certaines sont mal proportionnées et ne sont donc pas utilisables. Plus précisément :

- 3% sont inutilisables car trop longues.
- 5% sont inutilisables car trop larges.
- 2% sont inutilisables car à le fois trop longues et trop larges.

On prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité quelle soit utilisable ?

Exercice 6 :
Une urne contient n boules dont b boules blanches et r boules rouges. On tire une première boule, on la remet dans l'urne et on ajoute une seconde boule de la même couleur dans l'urne. On tire ensuite une seconde boule.

1. Décrire l'univers Ω de cette expérience.

2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

3. Quelle est la probabilité que la seconde boule tirée soit blanche ?

4. Sachant que la seconde boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée est été blanche ?

Exercice 7 :
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1, A_2 \subset \Omega$. On suppose que A_1 et A_2 sont indépendants.

1. Montrer que A_1 et $\overline{A_2}$ sont également indépendants.

2. Faire de même pour $\overline{A_1}$ et A_2 et pour $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$.

3. En déduire la formule :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap A_2)\mathbb{P}(A_1 \cap \overline{A_2}) \ .$$

Exercice 8 : Problème de Monty Hall
Vous participez à un jeu télévisé. Derrière trois porte sont respectivement placées une voiture et deux chèvres. Le jeu se déroule en trois phases :

- Phase 1 : Vous choisissez une porte.
- Phase 2 : Le présentateur ouvre l'une des deux portes que vous n'avez pas choisi en faisant attention de ne pas ouvrir celle de la voiture.
- Phase 3 : Vous choisissez de garder votre choix de la phase 1, ou de le changer.

À la fin du jeu vous gagnez ce qui se trouve derrière la porte choisie en phase 3.

Le jeu commence, vous choisissez la porte 1.

1. Quel est la probabilité que vous gagniez la voiture sachant que vous avez décidé de ne pas changer votre choix, quoiqu'il arrive ?
2. Lors de la phase 2, le présentateur ouvre la porte numéro 2 et dévoile une chèvre. Sachant cela, quelle est la probabilité que la voiture se cache derrière la porte numéro 3 ?
3. Qu'en déduisez-vous ?