

# Probabilités Discrètes

Cours n°4 - Combinatoire

EPITA 2025-2026

## 1 Introduction

Afin de poursuivre et compléter notre étude du dénombrement en mathématiques, nous allons avoir besoin d'introduire un nouveau concept : celui de la combinatoire. La combinatoire peut-être définie comme l'étude des différentes configurations d'un ensemble fini. Le lien avec le dénombrement se fait tout naturellement lorsque l'on se pose la question suivante : Combien existe-t-il de configurations différentes d'un ensemble fini choisi ?

Par exemple, combien existe-t-il de façon de classer des livres dans un étagère ? Ou combien de groupes de 3 étudiants existe-t-il dans une classe de 35 élèves ?

L'objectif de ce cours sera d'introduire différents objets centraux en combinatoire, puis d'apprendre à les manipuler dans divers contextes.

## 2 Rappel sur la factorielle

**Définition :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On appelle **factorielle** de  $n$ , noté  $n!$ , le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à  $n$ .

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{i=1}^n i$$

**Exemple d'utilisation :** Compter le nombre de façon d'ordonner un ensemble à  $n$  éléments.

**Preuve :** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $E$  un ensemble à  $n$  éléments.

Essayons d'ordonner  $E$ . Pour le premier élément de  $E$ , nous avons  $n$  choix possibles. Ensuite, pour le second élément de  $E$ , il nous reste  $n - 1$  éléments, donc  $n - 1$  choix. En poursuivant ainsi, on s'aperçoit qu'il reste  $i$  choix pour le  $i$ -ème élément de  $E$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Il nous reste à multiplier ces choix ensembles pour couvrir toutes les façons d'ordonner  $E$  : on retrouve bien  $n!$ .

## 3 Arrangements

Une question que l'on peut se poser lorsqu'on étudie un ensemble  $E$  fini à  $n$  éléments est : En se fixant un nombre  $k \leq n$ , combien de sous-ensembles de  $E$  ordonnés et de taille  $k$  puis-je obtenir ? Ce qui suit répond à cette question.

**Définition :** Soient  $n, k \in \mathbb{N}$  et  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Un  **$k$ -arrangement** de  $E$  est un sous-ensemble ordonné de  $E$  de taille  $k$ .

Nous nous posons donc la question "Combien de  $k$ -arrangements existe-t-il dans un ensemble à  $n$  éléments ?". Pour répondre à cette question, introduisons tout d'abord une notation.

**Notation :**  $A_k^n := \frac{n!}{(n-k)!}$ .

Nous allons montrer que  $A_k^n$  est le nombre de  $k$ -arrangements de notre ensemble  $E$  à  $n$  éléments, à condition que  $0 \leq k \leq n$ .

Pour cela, nous construisons un  $k$ -arrangement de  $E$  avec la même méthode que celle utilisée dans la partie "Rappel sur la factorielle" pour trouver le nombre de façon d'ordonner  $E$ . Cette fois, nous n'effectuons que  $k$  choix, ce qui nous donne bien

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = A_k^n.$$

Dans la suite,  $n$  et  $k$  seront toujours des entiers naturels, et  $E$  désignera un ensemble à  $n$  éléments.

## 4 Coefficients binomiaux

La question que nous nous posons dans cette partie est : combien existe-t-il de sous-ensembles (non nécessairement ordonnés) de  $E$  de cardinal  $k$  ?

**Définition :** Le nombre de sous-ensembles de  $E$  de cardinal  $k$  est appelé **coefficient binomial** de  $k$  parmi  $n$ , ou encore simplement  $k$  parmi  $n$ . On le note  $\binom{n}{k}$ .

Essayons alors de déterminer la valeur de  $\binom{n}{k}$ .

**Proposition :**  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

**Démonstration :** Pour établir cette formule, nous allons calculer  $A_k^n$  d'une nouvelle façon. On choisit un sous-ensemble de cardinal  $k$  de  $E$  (par définition on a  $\binom{n}{k}$  choix possibles). On a alors  $k!$  façon de l'ordonner (d'après ce que l'on a vu dans la partie sur la factorielle). En multipliant entre elles les deux quantités obtenues, on a le nombre de sous-ensembles de  $E$  ordonnés à  $k$  éléments, c'est à dire  $A_k^n$ . Ainsi  $A_k^n = \binom{n}{k}k!$ .

Il nous reste alors à voir que

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k}k! \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

## 5 Principe des tiroirs

Nouvelle partie, nouvelle question : Si nous disposons de  $n$  tiroirs dans lesquels nous souhaitons ranger  $k$  objets, et cela de façon à ce que chaque tiroir contienne le moins d'objets possible, combien chaque tiroir contiendra-t-il d'objets ?

Ce problème n'est pas facile à résoudre dans le cas général. Toutefois, si  $k > n$ , nous pouvons affirmer que chaque tiroir contiendra au moins un objet. Ceci peut se résumer mathématiquement comme ci-dessous.

**Proposition :** Soient  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $F$  un ensemble de cardinal  $m$  et  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Si  $n > m$ , alors il n'existe pas d'application injective de  $E$  dans  $F$ .

**Rappel :** Une application d'un ensemble  $E$  dans un ensemble  $F$  est une fonction qui associe à tout élément de  $E$  un unique élément de  $F$ .

## 6 Exercices

### Exercice 1 :

Pour  $n$  entier on veut calculer

$$S_n = \sum_{i=1}^n i .$$

1. Dessiner un tableau de 3 lignes et 10 colonnes que l'on va remplir par la suite.
2. Dans la première ligne du tableau, écrire les nombres de 1 à 10.
3. Dans la seconde ligne, écrire les nombres de 10 à 1.
4. Dans la troisième ligne, écrire dans chaque case la somme des deux nombres situés au dessus de la case dans le tableau.
5. En déduire la valeur de  $S_{10}$ .
6. En déduire la valeur de  $S_n$  pour un entier naturel  $n$  quelconque.

### Exercice 2 :

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq k \leq n$ .

Dans une urne il y a  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ .

1. On tire successivement et avec remise  $k$  boules. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. On tire successivement et sans remise  $n$  boules. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
3. On tire successivement et sans remise  $k$  boules. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
4. On tire simultanément  $k$  boules. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

### Exercice 3 :

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq k \leq n$ .

1. Comparer la façon de choisir  $k$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments et la façon de choisir  $n - k$  éléments dans le même ensemble.
2. Dans une urne il y a  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire simultanément  $k$  boules.
  - Quel est le nombre de tirage possibles ?
  - Quel est le nombre de tirages possibles contenant la boule numéro 1 ?
  - Quel est le nombre de tirages possibles ne contenant pas la boule numéro 1 ?
  - En déduire une relation entre  $\binom{n}{k}$ ,  $\binom{n-1}{k}$  et  $\binom{n-1}{k-1}$ .

**Exercice 4 :**

Dénombrer le nombre...

1. ... d'anagrammes du mot EPITA.
2. ... d'anagrammes du mot *informaticien*.
3. ... de façon de faire passer 5 étudiants au tableau, un par un, dans une classe de 35 élèves.
4. ... de façon de faire passer tous les étudiants d'une classe de 35 élèves un par un au tableau.
5. ... de façon de faire passer tous les étudiants d'une classe de 35 élèves un par un au tableau, sachant que l'un des étudiants passera 2 fois par inadvertance.

**Exercice 5 :**

On cherche à sélectionner une équipe de football : il y a 24 joueurs dans le groupe, et 11 postes sur le terrain.

Donner le nombre de compositions possibles dans les cas suivants :

1. Tous les joueurs peuvent jouer à tous les postes et la composition ne précise pas le poste de chaque joueur.
2. Tous les joueurs peuvent jouer à tous les postes, et la composition spécifie le poste de chaque joueur.
3. Il y a trois gardiens de but dans l'effectif, ils ne peuvent jouer que gardien, tous les autres joueurs peuvent jouer à tous les postes.

**Exercice 6 :**

On considère un tournoi de tennis se déroulant en tours successifs. Au départ il y a  $2^n$  joueurs dans le tournoi. À chaque tour chaque joueur en affronte un autre, le perdant est éliminé du tournoi et le vainqueur est qualifié pour le tour suivant. Le tournoi s'arrête lorsque que tous les joueurs sont éliminés sauf un.

1. Combien de joueurs sont qualifiés pour le second tour ? Et pour le troisième ?
2. Combien y a-t-il de tours ?
3. Chaque joueur qualifié correspond à un match. Sommer les résultats précédents pour connaître le nombre de match.
4. Comment répondre rapidement à la question précédente sans faire de somme ?

**Exercice 7 :**

1. Sachant qu'un être humain a environ 150 000 cheveux, montrer qu'à Paris il y a deux personnes qui ont le même nombre de cheveux.
2. Montrer la généralisation suivante du principe des tiroirs : Si on répartit  $kn + 1$  objets dans  $k$  tiroirs, il y a un tiroir qui contient au moins  $n + 1$  objets.

### Exercice 8 :

Soit  $E = \{a, b, c, d\}$  un ensemble fini de 4 éléments.

Pour toutes les questions, donner la réponse pour l'ensemble  $E$  puis généraliser à un ensemble de taille  $n$  quelconque.

1. Permutations : Combien existe-t-il de façons d'ordonner les éléments de  $E$ ? Lister toutes les permutations de  $E$ .
2. Combinaisons : Combien existe-t-il de sous-ensemble de  $E$  de taille 0 ? De taille 1 ? 2 ? 3 ? 4 ?
3. Parties de  $E$  : Combien existe-t-il de sous-ensembles de  $E$ ?

### Exercice 9 :

Dans cet exercice, on cherchera à bien comprendre l'énoncé en répondant d'abord aux questions pour la base dix avant de généraliser à une base quelconque.

Pour écrire des nombres entiers en base  $B > 1$  on utilise  $B$  symboles, dont le symbole 0.

1. Combien existe-t-il de nombre entier s'écrivant avec exactement  $k$  chiffres significatifs ?  
*Remarque : Lorsqu'on lit les nombres de gauche à droite, un chiffre significatif est un chiffre placé à droite du premier chiffre non nul.*
2. Combien existe-t-il de nombres entiers s'écrivant avec au plus  $k$  chiffres significatifs ?  
*Indication : Calculer ce nombre en sommant les valeurs de la question 1.*
3. Comment répondre rapidement à la question 2 sans faire de somme ?

### Exercice 10 :

1. Répondre aux questions de l'exercice 9 avec  $B = 2$ .
2. Faire le lien avec l'ensemble des parties. Comment définir l'ensemble  $E$  de l'exercice 8 pour retrouver ces résultats ?

### Exercice 11 : Triangle de Pascal

1. Donner le début du triangle de Pascal en expliquant sa construction.
2. Faites le lien entre les valeurs du triangle de Pascal et les  $\binom{n}{k}$ .
3. Faire le lien entre les valeurs du triangle de Pascal et la propriété, que l'on admettra, suivante :
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \quad (1)$$
4. Soient  $a, b \in \mathbb{N}$ . Développer  $(a+b)^2$ ,  $(a+b)^3$  et  $(a+b)^4$ . Quel lien y a-t-il avec le triangle de Pascal ?
5. Que dire de  $(a+b)^0$  et  $(a+b)^1$  ?
6. En déduire une formule pour écrire  $(a+b)^n$ .

7. Que vaut  $(a + b)^n$  quand  $a = b = 1$ ? En déduire une propriété du triangle de Pascal et en déduire que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n .$$

### Exercice 12 : Binôme de Newton

1. Pour tout  $n, k$  entiers tels que  $1 \leq k < n$ , montrer que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} .$$

2. Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . Développer  $(x + y)^n$  pour  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ .
3. Construire le triangle de Pascal. Que peut-on constater quand on somme les valeurs ligne par ligne?
4. En déduire,  $\forall n \geq 0$ , la valeur de

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} .$$