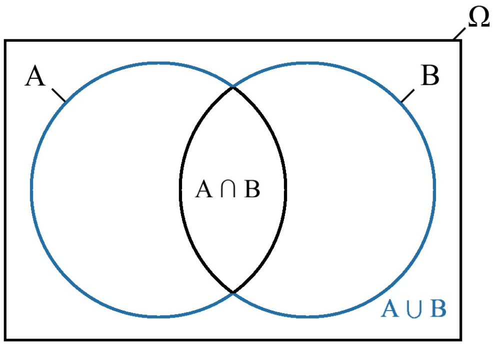
Effectuer un raisonnement mathématique

Cours n°3

EPITA Cyber 1 2024-2025

1 Diagramme de Venn et opérations sur les ensembles

1.1 Introduction théorique



Le diagramme de Venn ci-dessus permet d'illustrer les différentes opérations sur les ensembles.

L'ensemble Ω est l'ensemble des éléments pertinents pour le problème. Par exemple, en probabilités finies, Ω peut désigner l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.

Les ensembles A et B sont des sous-ensembles de Ω à partir desquels nous pouvons définir : la réunion, l'intersection, le complémentaire.

La réunion

La **réunion** de deux ensembles A et B, notée $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, contient tous les éléments qui appartiennent à au moins l'un des deux ensembles A et B. En compréhension, nous pouvons écrire $A \cup B$ comme suit :

$$A \cup B = \{x \in \Omega \ / \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

L'intersection

L'**intersection** de deux ensembles A et B, notée $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, contient tous les éléments qui appartiennent simultanément aux deux ensembles A et B. En compréhension, nous pouvons écrire $A \cap B$ comme suit :

$$A \cap B = \{x \in \Omega \ / \ x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Le complémentaire

Le **complémentaire** d'un ensemble A, noté $\overline{\mathbf{A}}$, est l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A. Bien entendu, cette notation dépend de l'espace ambiant Ω.

En compréhension, nous pouvons écrire $\overline{\mathrm{A}}$ comme suit :

$$\overline{\mathrm{A}} = \{x \in \Omega \ / \ x \notin \mathrm{A}\}$$

Remarques :
1. Le complémentaire de A peut plus généralement être noté $\Omega \backslash \mathrm{A}$, ce qui se lit "Omega privé de A".
2. Le complémentaire de l'ensemble Ω est l'ensemble qui ne contient aucun élément : c'est l'ensemble vide, noté $\emptyset$.

1.2 Visualisation :

Exercice n°1
Pour chacune des questions suivantes, reproduire sur votre feuille un diagramme de Venn et hachurer l'ensemble indiqué.

1. Représenter graphiquement l'ensemble $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}$.
2. Représenter graphiquement l'ensemble $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}$.
3. Représenter graphiquement l'ensemble $\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$.
4. Représenter graphiquement l'ensemble $\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$.
5. Que constatez-vous ?

Exercice n°2 :
On définit l'ensemble D comme suit :

$$\mathrm{D} = \{x \in \Omega \,/\, (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \notin A \cap B)\}$$

1. Représenter l'ensemble D dans un diagramme de Venn.
2. Exprimer l'ensemble D d'au moins deux façons différentes à partir des ensembles A et B et des opérations : réunion, intersection, complémentaire.

1.3 Un peu de dénombrement

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini est appelé **cardinal**. On note **card(A)** le nombre d'éléments de l'ensemble A.

Exemples :

1. Si $\mathrm{A} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ alors $\mathrm{card(A)} = 6$,
2. Si $\mathrm{A} = \{-1; 1\}$ alors $\mathrm{card(A)} = 2$,
3. Si $\mathrm{A} = |[1; N]|$ alors $\mathrm{card(A)} = N$,
4. Si $A = \emptyset$ alors $\mathrm{card(A)} = 0$.

1.4 Exercices

Exercice n° 3 :
On considère les ensembles suivants :

- l'ensemble A des multiples de 4 situés entre 1 et 50 (inclus),
- l'ensemble B des multiples de 3 situés entre 1 et 50 (inclus).

On note $\mathrm{I} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ et $\mathrm{U} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

1. Écrire l'ensemble I en compréhension puis en extension.
2. Déterminer card(A), card(B), card(I) et card(U).
3. Que constatez-vous ?
4. On considère $\Omega = |[1; 50|]$. Calculer le cardinal de $\overline{\mathrm{I}}$.
5. Que pouvez-vous en déduire comme information sur l'ensemble $\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$?

Exercice n° 4 : (bonus)
Écrire dans votre langage de programmation préféré une fonction intersection(N, m, p) comme ci-dessous :
Entrée : N un entier naturel non nul, m et p deux entiers naturels inférieurs à N.
Sortie :
Liste des entiers situés entre 1 et N (inclus) qui appartiennent à l'intersection de l'ensemble des multiples de m et de l'ensemble des multiples de p.

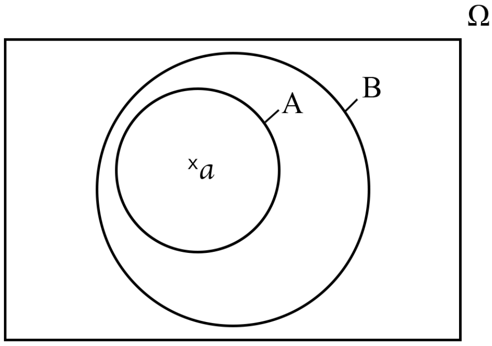
Y a-t-il des entiers N, m et p pour lesquels le temps d'exécution dépasse 5 secondes ? 10 secondes ?

2 Notions d'inclusion et de sous-ensemble

2.1 Définition

On dit qu'un ensemble A est **inclus** dans un ensemble B, et on note **A ⊂ B** si :

Pour tout élément a de l'ensemble A, a appartient à B



Syntaxe :
C'est un bon moment pour introduire le symbole : ∀ si vous ne le connaissez pas déjà.

Avec cette syntaxe, A ⊂ B peut également s'écrire :

$$\forall a \in A, a \in B$$

ou encore, si l'espace ambiant est Ω :

$$\forall a \in \Omega, (a \in A) \Longrightarrow (a \in B)$$

2.2 Méthodologie

Comment démontrer une inclusion ?
Pour démontrer que A ⊂ B :

1. On commence par considérer un **élément quelconque** de A.
   Rédaction : " Soit $a \in A$."
2. On peut éventuellement reformuler ce que signifie l'appartenance de a à l'ensemble A (vision 360°).
3. À l'aide d'un ou plusieurs argument(s) **qui repose(nt) uniquement sur le fait que** $a \in A$, on montre que l'élément a appartient à l'ensemble B.
4. Ce raisonnement est alors valable **pour tout élément** $a \in A$. On peut conclure que :
   $$\forall a \in A, a \in B$$
5. Autrement dit, on a démontré que A ⊂ B.

Exercice-exemple :
On désigne par $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère les ensembles suivants :

- A $= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ / il existe une constante réelle b telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xf(1) + b$ et $f(0) = 0\}$
- B $= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ / il existe une constante réelle λ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x\}$

Démontrer que A ⊂ B.

2.3 Exercices

Exercice n°5 :

1. Démontrer que :

$$\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;/\; \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2\ ,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n = an+b\} \subset \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;/\; \exists r\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r\}$$

2. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Que peut-on en conclure ?

Exercice n°6 :

1. Démontrer que :

$$\{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \;/\; \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2\ ,\ \forall n\in\mathbb{N},\ v_n = a\,b^n\} \subset \{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \;/\; \exists q\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1} = q\,v_n\}$$

2. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Que peut-on en conclure ?

Exercice n°7 :

Revenir sur l'exercice n°2 du cours n°2 et démontrer par double-inclusion les égalités entre les ensembles (si cela n'avait pas déjà été fait lors du cours n°2).