Introduction à la Complexité Algorithmique

TD n°2

EPITA Cyber 2
2025-2026

Exercice 1 :
A l'aide de la définition de la notation O, montrez les relations suivantes :

1. $10n + 5 = O(n)$
   Soit un entier $n \geq 1$, les deux inégalités suivantes sont vraies :
   (a) $5 \leq 5n$
   (b) $10n \leq 10n$

   En sommant ces inégalités, on obtient : $10n + 5 \leq 15n$.
   Ainsi, pour $n_0 = 1$ et $c = 15$, on a pour tout $n \geq n_0$, $10n + 5 \leq c \cdot n$.
2. $2n^2 + 4n = O(n^2)$
   Soit un entier $n \geq 1$, les deux inégalités suivantes sont vraies :
   (a) $4n \leq 4n^2$
   (b) $2n^2 \leq 2n^2$

   En sommant ces inégalités, on obtient : $2n^2 + 4n \leq 6n^2$.
   Ainsi, pour $n_0 = 1$ et $c = 14$, on a pour tout $n \geq n_0$, $2n^2 + 4n \leq c \cdot n^2$.
3. $n = O(n^4)$
   Soit un entier $n \geq 1$, alors $n \leq n^4$.
   Ainsi, pour $n_0 = 1$ et $c = 1$, on a pour tout $n \geq n_0$, $n \leq c \cdot n^4$.

Exercice 2 :
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
A l'aide de la définition de la notation O, montrez les relations suivantes :

1. $3n^k + 100n^{k-1} + 1000 = O(n^k)$,
   Soit un entier $n \geq 1$, les trois inégalités suivantes sont vraies :
   (a) $1000 \leq 1000n^k$
   (b) $100n^{k-1} \leq 100n^k$
   (c) $3n^k \leq 3n^k$

   En sommant ces inégalités, on obtient : $3n^k + 100n^{k-1} + 1000 \leq 1103n^k$,
   Ainsi, pour $n_0 = 1$ et $c = 1103$, on a pour tout $n \geq n_0$, $3n^k + 100n^{k-1} + 1000 \leq c \cdot n^k$.
2. $n^k = O(n^{k'})$, pour tout $k' \geq k$,
   Soit un entier $n \geq 1$, alors on a $n^k \leq n^{k'}$.
   Ainsi, pour $n_0 = 1$ et $c = 1$, on a pour tout $n \geq n_0$, $n^k \leq c \cdot n^{k'}$.

Exercice 3 :
A l'aide de la définition de la notation O, montrez les relations suivantes :
Remarque : la notation $log(n)$ correspond au log base 2, c'est-à-dire $log(n) = \frac{ln(n)}{ln(2)}$.

1. $log(n) = O(log(n))$,
   Pour $n_0 = 1$ et $c = 1$, on a pour tout $n \geq n_0$, $log(n) \leq c \cdot log(n)$.
2. $n + log(n) = O(n)$,
   Soit un entier $n \geq 1$, les deux inégalités suivantes sont vraies :
   (a) $log(n) \leq n$
   (b) $n \leq n$

   En sommant ces inégalités, on obtient : $n + log(n) \leq 2n$.
   Ainsi, pour $n_0 = 1$ et $c = 2$, on a pour tout $n \geq n_0$, $n + log(n) \leq c \cdot n$.
3. $n \cdot log(n) = O(n^2)$,
   Soit un entier $n \geq 1$, les deux inégalités suivantes sont vraies :
   (a) $0 \leq log(n) \leq n$
   (b) $0 \leq n \leq n$

   En multipliant ces inégalités, on obtient : $n \cdot log(n) \leq n^2$,
   Ainsi, pour $n_0 = 1$ et $c = 1$, on a pour tout $n \geq n_0$, $n \cdot log(n) \leq c \cdot n^2$.
4. $3n \cdot log(n) + 45n = O(n \cdot log(n))$.
   Soit un entier $n \geq 1$, les deux inégalités suivantes sont vraies :
   (a) $3n \cdot log(n) \leq 3n \cdot log(n)$
   (b) $45n \leq 45n \cdot log(n)$

   En sommant ces inégalités, on obtient : $3n \cdot log(n) + 45n \leq 48n \cdot log(n)$.
   Ainsi, pour $n_0 = 1$ et $c = 48$, on a pour tout $n \geq n_0$, $3n \cdot log(n) + 45n \leq c \cdot n \cdot log(n)$.

Exercice 4 :
Soit $k \in \mathbb{N}$.
A l'aide de la définition de la notation O, montrez les relations suivantes :
Remarques :

- la notation $log(n)$ correspond au log base 2, c'est-à-dire $log(n) = \frac{ln(n)}{ln(2)}$,
- 2^n peut s'écrire sous la forme d'une exponentielle, $2^n = e^{n \cdot ln(2)}$.

1. $n = O(2^n)$,
   Soit un entier $n \geq 1$, on a alors :
   (a) $log(n) \leq n$
   $\Rightarrow \frac{ln(n)}{ln(2)} \leq n$
   $\Rightarrow ln(n) \leq n \cdot ln(2)$
   $\Rightarrow e^{ln(n)} \leq e^{n \cdot ln(2)}$
   $\Rightarrow n \leq e^{ln(2^n)}$
   $\Rightarrow n \leq 2^n$
   Ainsi, pour $n_0 = 1$ et $c = 1$, on a pour tout $n \geq n_0$, $n \leq c \cdot 2^n$.