Effectuer un raisonnement mathématique

Cours n°4

EPITA Cyber 1 2024-2025

1 Le symbole d'existence. Trouver des exemples et des contre-exemples.

1.1 Présentation

Le symbole $\exists$ signifie :

"il existe au moins un..."

Exemple :

$$\exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, x > 2$$

Pour le prouver, il suffit d'exhiber un exemple.
Par exemple, $x = 3 > 2$.

1.2 Théorème d'existence

Un autre moyen de prouver qu'un objet existe est d'utiliser un théorème d'existence.
Exemple :
Si f est une fonction continue définie sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $f(a) < f(b)$, alors pour tout $k \in [f(a)\,;\,f(b)]$, le **théorème des valeurs intermédiaires** nous permet d'affirmer qu'**il existe** $x \in [a\,;\,b]$ tel que $f(x) = k$.
Le théorème d'existence nous donne ici l'existence théorique de x, sans donner de valeur précise pour x.

1.3 Dépendance

L'existence d'un objet peut reposer sur un autre objet préalablement défini.
Exemple :

$$\forall y \in \mathbb{R},\, \exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, x > y$$

Démonstration :
Soit $y \in \mathbb{R}$.
On note $x = y + 1$.
On a bien : $x \in \mathbb{R}$ et $x > y$ donc $\exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, x > y$.
Conclusion :
$\forall y \in \mathbb{R},\, \exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, x > y$

Cette notion d'existence en fonction d'un autre objet sera particulièrement importante lorsque nous aborderons la notion de surjectivité.

1.4 Phrase contraire

Le contraire de

$$\forall x \in X,\ \mathcal{P}(x)$$

est :

$$\exists\, x \in X,\ \ \text{non } \mathcal{P}(x)$$

.

1.5 Exercices

Exercice n°1 :
Trouver un exemple correspondant à l'énoncé.

1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante à termes négatifs.
2. Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de signe alterné telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
3. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :
   - f est de signe non constant
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
4. Une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^2$$

5. Une fonction h définie au moins sur $]0\,;\,+\infty[$ telle que :

$$\lim_{x\longrightarrow 0} h(x)\ln(x) = 0$$

Exercice n°2 :
Vrai ou Faux ? Démontrer proprement la réponse.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \sqrt{n} \in \mathbb{N}$
2. Toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$ est telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, n \in \mathbb{N}, n > x$
4. $\exists\, n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, n > x$
5. $\exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante $\ /\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exercice n°3 :

1. Démontrer que :

$$\forall y > 1,\ \exists\, x > 1,\ y = \frac{x+1}{x-1}$$

2. Étudier la fonction $f : x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \longmapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ puis esquisser une représentation graphique.

2 Introduction à la notion de fonction surjective

Soient E et F deux ensembles. On considère une fonction $f : E \longrightarrow F$.
On dit que f est **surjective de E vers F** si :

$$\forall\, y \in F,\ \exists\, x \in E,\ y = f(x)$$

Exercice n°4 :
On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2$. Dans chacune des questions suivantes, donnez une démonstration formelle pour appuyer votre réponse.

1. f est-elle surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?
2. f est-elle surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$?

Exercice n°5 :
Soit m un paramètre réel. On définit la fonction g_m par :

$$g_m : t \in \mathbb{R} \longmapsto 2t + m$$

Démontrer formellement que g_m est surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice n°6 :
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

1. Étudier la fonction h de façon à obtenir son tableau de variations.
2. Émettre une hypothèse de la forme :

$$h \text{ est surjective de ... vers ...}$$

3. Démontrer formellement l'hypothèse formulée dans la question précédente.

Exercice n°7 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 1$$

Nous allons démontrer de deux façons différentes que f est surjective de $\mathbb{R}$ vers $]1\,;\,+\infty[$.
Méthode n°1 : (Par le calcul)
1. Démontrer que $\forall y \in]1\,;\,+\infty[,\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$.
Méthode n°2 : (À l'aide d'un théorème d'existence)
2. Établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ puis démontrer le résultat à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.
Bilan :
3. Discuter des avantages et des inconvénients de chaque méthode.