Effectuer un raisonnement mathématique

Cours n°6

EPITA Cyber 1 2024-2025

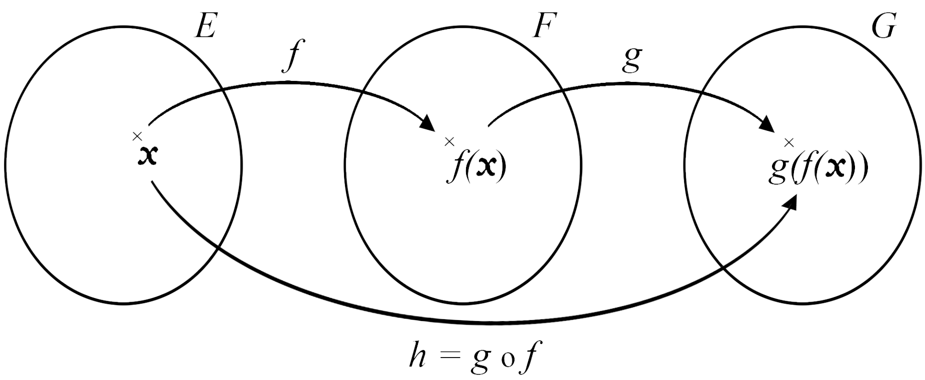
1 Composition de fonctions

1.1 Définition et premiers exercices

Soient trois ensembles E, F et G et deux fonctions $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$.
Considérons le chemin suivant parcouru par un élément $x \in E$:

- L'image de x par la fonction f est $f(x)$ et $f(x) \in F$,
- L'image de $f(x)$ par la fonction g est $g(f(x)) \in G$.

Ceci est illustré par le schéma ci-dessous :



Les ensembles de départ et d'arrivée de chaque fonction étant compatibles, on peut définir une nouvelle fonction h qui prend en entrée $x \in E$ et qui donne en sortie $h(x) = g(f(x))$.

Cette fonction est appelée **fonction composée** et est notée $g \circ f$.

Exercice n°1 :
Pour chaque question, décrire la fonction $g \circ f$ puis la fonction $f \circ g$.
1. Avec les fonctions $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x + 1$ et $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$.
2. Avec les fonctions $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x$ et $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \ln(x^2 + 1)$.
3. Avec les fonctions $f : p \in \mathbb{Z} \longmapsto p + 1$ et $g : m \in \mathbb{Z} \longmapsto m - 1$.

Exercice n°2 :
Pour chaque question, dire sur quel(s) ensemble(s) les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bien définies. Lorsqu'une telle fonction composée est bien définie, décrire la fonction en question.

1. Avec les fonctions $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $g : x \longmapsto x + 3$.

2. Avec les fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \longmapsto (x-2)(x-7)$.

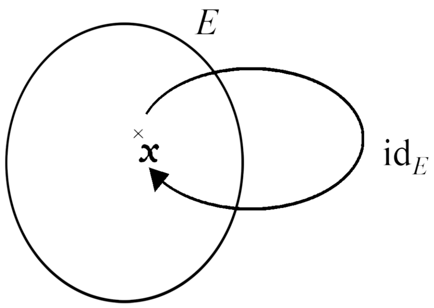
3. Avec les fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x+1}$.

1.2 Fonction identité : élément neutre pour la composition

Une fonction particulière : la fonction identité

Soit E un ensemble. La **fonction identité de** E, notée id_E, est définie de la façon suivante :

$$\mathrm{id}_E : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$$



Intérêt :
La fonction identité de E décrit un chemin complet vers le point de départ, ce qui sera utile pour la définition 2.2.

1.3 Cas des fonctions d'une variable réelle : dérivée d'une fonction composée

Ouvrons ici une parenthèse pour donner une formule universelle de la dérivée d'une fonction composée dans le cas d'une variable réelle.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J. Soit $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle J.
Alors la fonction $g \circ f$ est bien définie et dérivable sur l'intervalle I et :

$$\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

2 Fonction bijective, ou comment définir un chemin réciproque

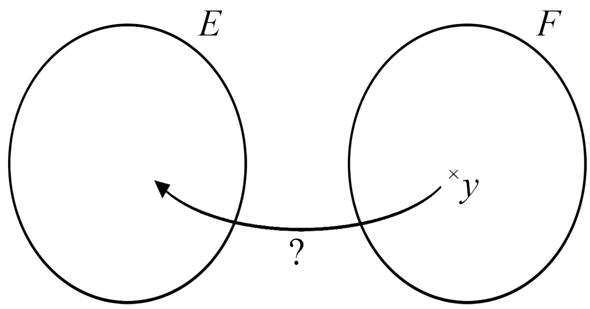
2.1 Notion de chemin réciproque et conditions de succès

Nous nous donnons comme objectif d'accomplir le chemin d'une fonction $f : E \longrightarrow F$ en sens contraire, c'est-à-dire **trouver un chemin de F vers E, qui à $f(x)$ associe x.**

Pour définir une fonction de F vers E de façon rigoureuse, nous devons déterminer comment calculer l'image d'un élément $y \in F$. Commençons par étudier les cas où notre démarche ne fonctionne pas.

Cas d'une fonction non surjective

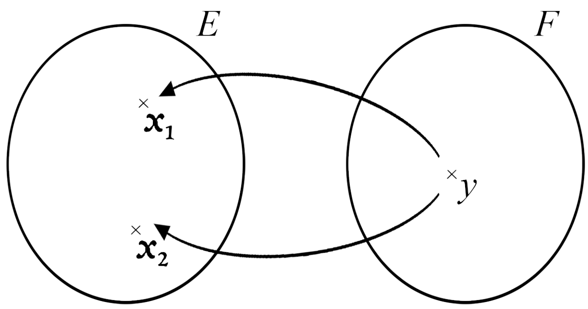
Si f n'est pas surjective de E vers F :



Il n'existe pas toujours de chemin en sens inverse.

Cas d'une fonction non injective

Si f n'est pas injective sur E :



Il peut existe plusieurs chemins possibles. Lequel choisir ?

2.2 Définition d'une fonction bijective

2.2.1 Vision 360°

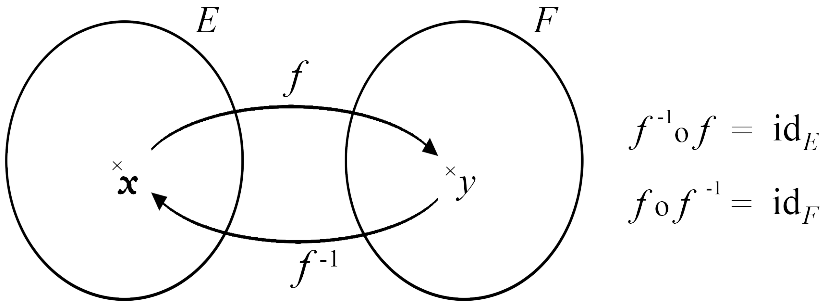
Nous allons voir 4 définitions équivalentes de ce qu'est une fonction bijective. Prenez le temps de comprendre pourquoi ces 4 définitions signifient la même chose.

2.2.2 Définitions

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est **bijective de** E **vers** F si[1] :

1. $\forall y \in F,\ \exists !\, x \in E, y = f(x)$ (existence et unicité de l'antécédent)
2. Pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet une unique solution,
3. f est injective sur E et surjective de E vers F,
4. Il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que :

$$\begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{cases}$$



2.2.3 Application réciproque

Si f est bijective de E vers F, la fonction g décrite dans la définition 4 est unique relativement à f : elle est appelée **application réciproque de** f et notée f^{-1}. On a donc :

$$\begin{cases} f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \end{cases}$$

Exemples :
1. La fonction $x \longmapsto x^2$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ et son application réciproque est la fonction racine carrée.

2. La fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]0;\ +\infty[$ et son application réciproque est la fonction logarithme népérien ln.

3. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et son application réciproque est elle-même.

1. Les 4 définitions sont équivalentes.

2.3 Exercices

Objectif :

Faire travailler la vision 360°, à savoir choisir la bonne définition et la bonne méthode pour résoudre l'exercice.

Exercice n°3 :
Soit $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{2x+3}$.

Méthode n°1 :
1. Étudier le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ pour enfin établir le tableau de variations complet de f.
2. Quel est le domaine image de f ? On notera J l'intervalle image de f sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $y \in J$, justifier à l'aide d'un théorème bien connu que l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution $x \in \mathbb{R}$.
4. Que pouvez-vous en conclure ?

Méthode n°2 :
1. Montrer que f est injective sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est surjective de $\mathbb{R}$ vers un certain intervalle J à déterminer.
3. Que pouvez-vous en conclure ?

Méthode n°3 :
1. Proposer une application g, en précisant son domaine de départ, son domaine d'arrivée et son mécanisme de calcul, pour ensuite prouver que :

$$\begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \\ f \circ g = \mathrm{id}_J \end{cases}$$

où J est un certain intervalle à déterminer.
2. Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice n°4 :
Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Déterminer le domaine de définition de la fonction f : on notera I l'intervalle sur lequel f est bien définie.

Méthode n°1 :
1. Étudier le sens de variations de f sur I ainsi que les limites de f aux bornes de cet intervalle pour en déduire le tableau de variations complet de f.
2. Quel est le domaine image de f ? On notera J cet intervalle.
3. Pour tout $y \in J$, justifier à l'aide d'un théorème bien connu que l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution $x \in I$.
4. Que pouvez-vous en conclure ?

Méthode n°2 :
1. Montrer que f est injective sur I.
2. Montrer que f est surjective de I vers J.
3. Que pouvez-vous en conclure ?

Méthode n°3 :
1. Proposer une application g, en précisant son domaine de départ, son domaine d'arrivée et son mécanisme de calcul, pour ensuite prouver que :

$$\begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_I \\ f \circ g = \mathrm{id}_J \end{cases}$$

2. Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice n°5 :
Déterminer, pour chaque application f, l'application g qui est réciproque de f.
Liste des fonctions f :

1. $f : t \longmapsto \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$
2. $f : t \longmapsto \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$
3. $f : (x, y) \longmapsto (2x - y \ , \ 2x + 2y)$
4. $f : (x, y) \longmapsto (y - 2x \ , 2y - x \ )$

Liste des fonctions g :

1. $g : y \longmapsto \ln\left(1 + \sqrt{y^2+1}\right)$
2. $g : y \longmapsto \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$
3. $g : y \longmapsto \ln\left(y + \sqrt{1-y^2}\right)$
4. $g : y \longmapsto \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$
5. $g : (a, b) \longmapsto \left(\dfrac{b-2a}{3}, \dfrac{2b-a}{3}\right)$
6. $g : (a, b) \longmapsto \left(\dfrac{b+2a}{3}, \dfrac{b+a}{6}\right)$
7. $g : (a, b) \longmapsto \left(\dfrac{b-2a}{3}, \dfrac{b-a}{3}\right)$
8. $g : (a, b) \longmapsto \left(\dfrac{2a+b}{6}, \dfrac{b-a}{3}\right)$

Exercice n°6 : (Plus théorique)
Démontrer que les 4 définitions d'une fonction bijective de E vers F sont équivalentes.

2.4 Exercices supplémentaires

Exercice n°7 : (TD 2022-2023)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'image J de $\mathbb{R}$ par f.
3. Soit m un réel appartenant à J. Déduire de la question précédente le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
4. Déterminer le plus grand intervalle possible I tel que la restriction g de f à I soit une bijection de I sur $g(\mathrm{I})$. Expliciter alors $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in g(\mathrm{I})$.

Exercice n°8 : (TD 2022-2023)
Soit $h : [0;+\infty[\longrightarrow [0;1[$ définie par :

$$h(x) = \frac{x}{1+x}$$

Démontrer que h est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice n°9 : (Examen Bachelor Cyber 22.09.2022)
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice n°10 (Examen Bachelor Cyber 29.11.2023)
On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1. Démontrer que ch est une fonction paire.
2. Justifier pourquoi ch n'est pas injective sur $\mathbb{R}$. Est-elle surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?
3. Justifier que la fonction ch réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers $[1;+\infty[$.
4. Soient $y \in [1;+\infty[$ et $x > 0$ tels que :

$$y = \mathrm{ch}(x)$$

Montrer que :

$$\mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x + 1 = 0$$

5. Exprimer x en fonction de y pour trouver l'application réciproque de ch. (Indication : on pourra utiliser le changement de variable $X = \mathrm{e}^x$)

Exercice n°11 (Examen Bachelor Cyber 29.11.2023)
Soient A, B et C trois ensembles. On considère deux applications $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$.
Démontrer proprement que si $g \circ f$ est injective sur A, alors f est injective sur A.

Exercice n°12 (Examen de rattrapage Bachelor Cyber 03.07.2024)
On considère l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \ \ g(y) = (2y-1)^2$$

1. Expliquer pourquoi g n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.
2. On note f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \ \ f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{2}$$

Si f est bijective, déterminer son application réciproque f^{-1} en précisant son domaine de départ et son domaine d'arrivée.

3. On note h l'application qui à un réel x associe la partie entière de x. Par exemple, $h(2,49) = 0,49$. L'application h est-elle surjective de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $[0,1]$? La réponse doit être justifiée.