Probabilités Discrètes

Cours n°2

EPITA 2025-2026

1 Introduction

En probabilité une notion essentielle est celle de dénombrement. Faire du dénombrement en mathématiques c'est le fait de compter des objets possédant une ou plusieurs propriétés communes.

Exemple : Compter le nombre de mot de passe que l'on peut écrire avec 4 caractères de l'alphabet latin.

Intervient alors une autre notion présente partout en mathématiques : les ensembles.

Définition : Un **ensemble** est une collection d'objets possédant des caractéristiques communes. Les objets contenus dans un ensemble sont appelés **éléments** de cet ensemble.

Faire du dénombrement c'est donc compter le nombre d'éléments d'un ensemble prédéfini.

Définition : On appelle **cardinal** d'un ensemble le nombre d'éléments contenus dans cet ensemble.

Notation : Le cardinal d'un ensemble E se note $\#E$, ou encore $|E|$.

Définition : On dit que E est fini si $\#E \neq +\infty$.

Dans ce qui suit nous allons définir différents outils nous permettant de manipuler des ensembles.

2 Écrire un ensemble

Pour définir proprement un ensemble E il y a différentes règles de syntaxe à respecter. Selon le type de E, on pourra utiliser une des deux notations suivantes :

$$E = \{e_1, e_2, ...\}$$

ou

$$E = (e_1, e_2, ...) \quad .$$

Ici $e_1, e_2, ...$ sont les éléments de E. La différence tient dans l'utilisation des caractères $\{\}$ ou $()$.
Lorsque l'on utilise $\{\}$, cela signifie que l'ensemble E n'est pas ordonné, c'est-à-dire que l'on peut écrire ses éléments dans l'ordre que l'on veut.
Lorsque l'on utilise $()$, cela signifie que l'ensemble E est ordonné, c'est-à-dire que l'on doit

respecter un ordre quand on écrit ses éléments.

Exemple : Un code de carte bancaire est un ensemble ordonné de chiffre : si vous taper les chiffres de votre carte dans le mauvais ordre, le paiement ne sera pas validé.
Exemple : Un porte monnaie peut-être vu comme un ensemble non-ordonné : quelque soit l'ordre des billets qui s'y trouve, l'important est de savoir quels billets sont dedans.

Autrement dit,

$$\{1,2\} = \{2,1\}$$

mais

$$(1,2) \neq (2,1) \quad .$$

Remarque : Un ensemble peut contenir plusieurs fois le même élément.

2.1 Extension et compréhension

Dans les exemples précédents, l'ensemble E était défini en écrivant tous ses éléments un par un. Toutefois, on pourrait aussi choisir de décrire les éléments de E sans tous les écrire.

Exemple : E est l'ensemble des entiers positifs pairs.

Dans l'exemple ci-dessus, E contient une infinité d'éléments. On ne peut donc pas tous les écrire. On va alors procéder comme suit :

$$E = \{n \ / \ n \text{ est un entier positif et pair}\} \quad .$$

Rappel : On note

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs.
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers.
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On peut donc aussi écrire :

$$E = \{n \in \mathbb{N} \ / \ 2|n\} \ .$$

On dit que l'on écrit E en extension quand on écrit tous ses éléments :

$$E = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\} \ .$$

On dit que l'on écrit E en compréhension quand on décrit ses éléments :

$$E = \{n \in \mathbb{N} \ / \ 2|n\} \ .$$

3 Opérateurs ensemblistes

3.1 Produit carthésien

Définition : On appelle **couple** un ensemble ordonné à deux éléments.

Définition : Soient A et B deux ensembles. Le **produit carthésien** de A et de B, noté $A \times B$, est l'ensemble des couples formés par un élément de A et un élément de B.

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(a,b) \ / \ a \in \mathrm{A} \text{ et } b \in \mathrm{B}\}$$

3.2 La réunion

Définition : La **<u>réunion</u>** de deux ensembles A et B, notée $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, contient tous les éléments qui appartiennent à au moins l'un des deux ensembles A et B.

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x \ / \ x \in \mathrm{A} \text{ ou } x \in \mathrm{B}\}$$

3.3 L'intersection

Définition : L'**<u>intersection</u>** de deux ensembles A et B, notée $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, contient tous les éléments qui appartiennent simultanément aux deux ensembles A et B.

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x \ / \ x \in \mathrm{A} \text{ et } x \in \mathrm{B}\}$$

4 Exercices

Exercice 1 :
Pour chacun des ensembles suivants, écrivez le en compréhension et, si il est fini, en extension :

- A est l'ensemble des nombres entiers impairs.
- B est l'ensemble des nombres rationnels supérieurs ou égaux à 10.
- C est l'ensemble des nombres entiers multiples de 5 compris entre -12 et 15.
- $D = A \cap C$.
- $E = C \times D$.
- $F = B \cup C$.

Exercice 2 :
Déterminer les cardinaux de tous les ensembles de l'exercice 1.

Exercice 3 :

1. Énumérer et dénombrer tous les nombres entiers de 2 chiffres qui ne s'écrivent qu'avec des 0 ou des 1.
2. Dénombrer tous les nombres entiers de 3 chiffres qui ne s'écrivent qu'avec des 0 ou des 1.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dénombrer tous les nombres entiers de n chiffres qui ne s'écrivent qu'avec des 0 ou des 1.

Exercice 4 :

1. Dénombrer tous les mots, ayant un sens ou non, de 2 lettres qui s'écrivent avec l'alphabet latin en minuscule uniquement.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dénombrer tous les mots de n lettres qui s'écrivent avec l'alphabet latin en majuscule ou en minuscule.

Exercice 5 :

1. Dénombrer tous les mots de 8 lettres qui s'écrivent avec l'alphabet latin, en minuscule uniquement, mais sans qu'il y est de répétition de lettre.
2. Dénombrer tous les mots de 8 lettres qui s'écrivent avec l'alphabet latin (majuscules et minuscules) pour les 5 premiers caractères, et avec des chiffres pour les 3 derniers.
3. Dénombrer tous les mots de 8, 9 ou 10 lettres qui s'écrivent avec l'alphabet latin (majuscules et minuscules) pour les 5 premiers caractères, et avec des chiffres pour le reste.