

Analyse Mathématique

Cours n°2

EPITA Cyber 1 2024-2025

1 Sommes finies :

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

On appelle somme partielle d'ordre n , $n \in \mathbb{N}$, de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la quantité S_n définie par

$$s_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p$$

Ici, il y a $n + 1$ termes ! De 0 à n .

- Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite.

On appelle somme partielle d'ordre n , $n \geq n_0$, de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ la quantité S_n définie par

$$s_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p$$

Ici, il y a $n - n_0 + 1$ termes. En effet, on compte de n_0 à n , donc de $n_0 + 0$ à $n_0 + (n - n_0)$ c.à.d. de 0 à $n - n_0$. On a alors $n - n_0 + 1$ termes.

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

La suite, (w_n) , somme des suites (u_n) et (v_n) est définie par : $\forall n$, $w_n = u_n + v_n$.

On a alors

$$\forall n \quad , \quad \sum_{p=0}^{p=n} w_p = \sum_{p=0}^{p=n} u_p + \sum_{p=0}^{p=n} v_p.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{p=n} w_p &= \sum_{p=0}^{p=n} (u_p + v_p) \\ &= (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots + (u_n + v_n) = (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) + (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) \\ &= \sum_{p=0}^{p=n} u_p + \sum_{p=0}^{p=n} v_p. \end{aligned}$$

- Soient (u_n) une suite et $\alpha \in \mathbb{R}$.

La suite, (w_n) , produit de la suite (u_n) par le réel α est définie par : $\forall n, w_n = \alpha u_n$.

On a alors,

$$\sum_{p=0}^{p=n} w_p = \alpha \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$

En effet, $\sum_{p=0}^{p=n} w_p = \sum_{p=0}^{p=n} \alpha u_p = (\alpha u_0) + (\alpha u_1) + \dots + (\alpha u_n)$
 $= \alpha(u_0 + u_1 + \dots + u_n) = \alpha \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$

- **Exemples :**

1. Déterminer la somme

$$\sum_{p=0}^{p=n} (p + p^2).$$

$$\sum_{p=0}^{p=n} (p + p^2) = \sum_{p=0}^{p=n} p + \sum_{p=0}^{p=n} p^2.$$

Or on sait déjà que : $\sum_{p=0}^{p=n} p = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{p=0}^{p=n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Donc, $\sum_{p=0}^{p=n} (p + p^2) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{3n(n+1) + n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

2. Déterminer la somme

$$\sum_{p=0}^{p=n} 3p.$$

$$\sum_{p=0}^{p=n} 3p = 3 \sum_{p=0}^{p=n} p = 3 \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{Car } \sum_{p=0}^{p=n} p = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- **Exercices :**

1. Calculer la somme finie :

$$1 + 2 + \dots + 2025.$$

2. Calculer la somme finie :

$$1936 + 1937 + \dots + 2025.$$

3. On pose

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4.$$

Déterminer $S - \frac{1}{3}S$. Puis, en déduire S .

4. Montrer que : $1/2 = 1 - 1/2$, $1/6 = 1/2 - 1/3$, $1/12 = 1/3 - 1/4$, $1/20 = 1/4 - 1/5$.

En déduire la somme finie : $1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20$

5. Calculer la somme finie :

$$\sum_{p=1}^{p=13} \ln\left(\frac{p+1}{p}\right).$$

2 Suite arithmétique :

- (u_n) est une suite arithmétique si :

$$\exists \quad r \in \mathbb{R} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = u_n + r$$

r est appelé raison de la suite arithmétique (u_n) .

Il est capital d'avoir u_0 pour déterminer tous les termes de la suite.

- On a déjà vu les suites de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Pour une suite arithmétique, $a = 1$ et $b = r$.

- **Exemples :**

1. (u_n) est une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = u_n + 7$ et $u_0 = -2$.
 (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 7$ et de premier terme $u_0 = -2$.
On a alors, $u_1 = u_0 + 7 = -2 + 7 = 5$, $u_2 = u_1 + 7 = 5 + 7 = 12$, \dots

2. (u_n) est une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = u_n - \frac{4}{3}$ et $u_0 = \frac{1}{3}$.
 (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\frac{4}{3}$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$.
On a alors, $u_1 = u_0 - \frac{4}{3} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1$, $u_2 = u_1 - \frac{4}{3} = -1 - \frac{4}{3} = -\frac{7}{3}$, \dots

- **Méthode :** Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on peut chercher à montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} - u_n =$ une constante qu'on notera r .

- **Exemples :**

1. (u_n) est une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = 5n - 4$.
 (u_n) est-elle une suite arithmétique ?
Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) - 4 - (5n - 4) = 5n + 5 - 4 - 5n + 4 = 5$.
Alors (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $u_0 = -4$.
2. (u_n) est une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = n^2 + 3n - 2$.
 (u_n) est-elle une suite arithmétique ?
Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 3(n+1) - 2 - (n^2 + 3n - 2) = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 - 2 - n^2 - 3n + 2 = 2n + 4$.
 $2n + 4$ n'est pas une constante !
Alors, (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

On a donc, $\forall n, u_{n+1} - u_n = r$.

On a, alors, les propriétés suivantes :

1. Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante.
2. Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.
3. Si $r = 0$ alors (u_n) est constante ($\forall n, u_n = u_0$).

- **Propriétés :** Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_0 + nr$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_1 + (n - 1)r$.
3. $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_p + (n - p)r$.

- **Preuves :** Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

1. On va montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_0 + nr$.

On pose $P(n) : u_n = u_0 + nr$.

- (a) Initialisation : $P(0)$ est vraie ?

On a bien $u_0 = u_0 + 0r$. Donc $P(0)$ est vraie.

- (b) Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n) : u_n = u_0 + nr$ est vraie et montrons que $P(n+1) : u_{n+1} = u_0 + (n+1)r$ est vraie.

$$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r.$$

Donc $P(n+1)$ est vrai.

- (c) Conclusion : Initialisation + Hérédité, on alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_0 + nr$.

2. On va montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_1 + (n - 1)r$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après 1. on a : $u_n = u_0 + nr$. Donc $u_n = u_0 + (1 - 1 + n)r = u_0 + r + (n - 1)r = u_1 + (n - 1)r$.

On a bien, $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_1 + (n - 1)r$.

3. On va montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_p + (n - p)r$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, d'après 1. on a : $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$. Donc $u_n - u_p = u_0 + nr - (u_0 + pr) = u_0 + nr - u_0 - pr = (n - p)r$. Donc $u_n = u_p + (n - p)r$.

On a bien, $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_p + (n - p)r$.

- **Exemple :**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 5$.

1. Déterminer u_9 .

On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_0 + nr$.

$$\text{Donc } u_9 = u_0 + 9r = 5 + 9 \times 3 = 32.$$

2. Déterminer u_{13} en fonction de u_7 .

On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_p + (n - p)r$.

$$\text{Donc } u_{13} = u_7 + 6r = u_7 + 6 \times 3 = u_7 + 18.$$

• **Sommes finies d'une suite arithmétique :**

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $u_0 = 0$.
On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$

c.à.d.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Donc, $S_n = u_0 + u_1 = \cdots + u_n = 0 + 1 + \cdots + n$.

D'où $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$ (1)

Et aussi, $S_n = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$ (2).

En additionnant, les deux égalités (1) et (2), on obtient :

$$2S_n = (1+n) + (1+n) + \cdots + (1+n) = n(n+1).$$

Par suite $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(On a déjà démontré ce résultat par récurrence!).

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $u_0 = 0$.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, On pose

$$\forall n \geq n_0 \quad , \quad T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p.$$

c.à.d.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad T_n = n_0 + (n_0 + 1) + \cdots + n.$$

Donc, $T_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n = n_0 + (n_0 + 1) + \cdots + n$.

D'où $T_n = n_0 + (n_0 + 1) + \cdots + (n-1) + n$. (1)

Et aussi, $T_n = n + (n-1) + \cdots + (n_0 - 1) + n_0$. (2).

En additionnant, les deux égalités (1) et (2), on obtient :

$$2T_n = (n+n_0) + (n+n_0) + \cdots + (n+n_0) = (n-n_0+1)(n+n_0).$$

Par suite $T_n = \frac{(n-n_0+1)(n+n_0)}{2}$.

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p=0}^{p=n} u_p = \sum_{p=0}^{p=n} (u_0 + pr) = \sum_{p=0}^{p=n} u_0 + r \sum_{p=0}^{p=n} p \\ &= (n+1)u_0 + r \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)(u_0 + r \frac{n}{2}) = (n+1) \frac{2u_0 + rn}{2} = \frac{n+1}{2}(2u_0 + nr) \\ &= \frac{n+1}{2}(u_0 + u_0 + nr) \\ &= \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n). \end{aligned}$$

Donc

$$S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n).$$

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, On pose

$$\forall n \geq n_0 \quad , \quad T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p.$$

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p = \sum_{p=n_0}^{p=n} (u_0 + pr) = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_0 + r \sum_{p=n_0}^{p=n} p \\ &= (n - n_0 + 1)u_0 + r \frac{(n+n_0)(n-n_0+1)}{2} = (n - n_0 + 1)(u_0 + r \frac{n+n_0}{2}) \\ &= (n - n_0 + 1) \frac{2u_0 + r(n+n_0)}{2} = \frac{n-n_0+1}{2}(2u_0 + (n+n_0)r) = \frac{n-n_0+1}{2}(u_0 + u_0 + nr + n_0r) \\ &= \frac{n-n_0+1}{2}(u_0 + n_0r + u_0 + nr) = \frac{n-n_0+1}{2}(u_{n_0} + u_n). \end{aligned}$$

Donc

$$T_n = \frac{n - n_0 + 1}{2}(u_{n_0} + u_n).$$

- **Remarque :** La somme des termes successifs d'une suite arithmétique est de la forme :

$$SOMME = \frac{\text{Nombre de termes}}{2} \quad (1er \text{ terme} + \text{Dernier terme})$$

- **Exemple :**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

1. On pose $S_{13} = \sum_{p=0}^{p=13} u_p$. Calculer S_{13} .

$$\text{On a } \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n).$$

$$\text{Donc } S_{13} = \frac{13+1}{2}(u_0 + u_{13}).$$

$$\text{Or } u_{13} = u_0 + 13r = 3 + 13 \times 2 = 29. \text{ Par suite } S_{13} = 7 \times 32 = 224.$$

2. On pose $T_{14} = \sum_{p=5}^{p=14} u_p$. Calculer T_{14} .

On a $\forall n \geq n_0$; $T_n = \frac{n-n_0+1}{2} (u_{n_0} + u_n)$.

Donc $T_{14} = \frac{14-5+1}{2}(u_5 + u_{14})$.

Or $u_5 = u_0 + 5 \times r = 3 + 10 = 13$ et $u_{14} = u_0 + 14 \times r = 3 + 28 = 31$.

Donc $T_{14} = 5 \times 44 = 220$.

• Caractérisation des suites arithmétiques :

Une suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

SI ET SEULEMENT SI

$$\exists a \in \mathbb{R} , \exists b \in \mathbb{R} ; \quad \forall n \in \mathbb{N} , \quad u_n = an + b.$$

Et on a $a = r$ et $b = u_0$.

En effet, supposons que (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . D'après la proposition précédente, $\forall n \in \mathbb{N} , \quad u_n = u_0 + nr$. On a, donc, $u_n = an + b$ où $a = r$ et $b = u_0$.

Réciproquement, supposons que : $\exists a \in \mathbb{R} , \exists b \in \mathbb{R} ; \quad \forall n \in \mathbb{N} , \quad u_n = an + b$.

alors $u_{n+1} - u_n = a(n+1) + b - (an + b) = an + a + b - an - b = a$.

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = a$ et de premier terme $u_0 = b$.

• Exercices :

1. Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} , \quad u_n = 2n + 1.$$

(a) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique (on précisera sa raison r et son premier terme u_0).

Repondre de deux manières différentes à chacune des deux questions suivantes :

(b) On pose $S_{23} = \sum_{p=0}^{p=23} u_p$. Calculer S_{23} .

(c) On pose $T_{14} = \sum_{p=5}^{p=14} u_p$. Calculer T_{14} .

2. Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} , \quad u_{n+1} = u_n + 3.$$

(a) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique (on précisera sa raison r).

Repondre aux deux questions suivantes sachant que $u_3 = 9$:

(b) On pose $S_{23} = \sum_{p=0}^{p=23} u_p$. Calculer S_{23} .

(c) On pose $T_{14} = \sum_{p=5}^{p=14} u_p$. Calculer T_{14} .

3. Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} , \quad u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 4} \quad \text{et} \quad u_0 = 0.$$

(a) On pose $\forall n \in \mathbb{N} , \quad v_n = \frac{1}{u_n + 1}$.

Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique (on précisera sa raison r et son premier terme v_0).

(b) Déterminer l'expression du terme général v_n en fonction de n .

En déduire l'expression du terme général u_n .

3 Suites géométriques :

- (u_n) est une suite géométrique si :

$$\exists \quad q \in \mathbb{R} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = qu_n$$

q est appelée raison de la suite géométrique (u_n) .

Il est capital d'avoir u_0 pour déterminer tous les termes de la suite.

- On a déjà vu les suites de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Pour une suite géométrique, $a = q$ et $b = 0$.

- **Exemples :** (u_n) est une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = 3u_n$ et $u_0 = -2$.

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$.

On a alors, $u_1 = 3u_0 = 3(-2) = -6$, $u_2 = 3u_1 = 3(-6) = -18$, ...

- **Méthode :** Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique

1. S'assurer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \neq 0$ (ou à partir d'un certain rang).

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} =$ une constante qu'on notera q .

- **Exemples :**

1. (u_n) est une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = 4 \times 3^n$.

(u_n) est-elle une suite géométrique ?

(a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = 4 \times 3^n \neq 0$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \times 3^{n+1}}{4 \times 3^n} = 3$ une constante.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 4$.

2. (u_n) est une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = n^2 + 3$.

(u_n) est-elle une suite géométrique ?

(a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = n^2 + 3 \neq 0$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 + 3}{n^2 + 3} = \frac{n^2 + 2n + 4}{n^2 + 3}$ n'est pas une constante !

Alors, (u_n) n'est pas une suite géométrique.

• **Variation d'une suite géométrique :**

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} - u_n = q^{n+1}u_0 - q^n u_0 = q^n(1 - q)u_0$.

Par suite :

1. Si $q > 1$ alors
 - (a) Si $u_0 > 0$ alors la suite est strictement croissante.
 - (b) Si $u_0 < 0$ alors la suite est strictement décroissante.
2. Si $0 < q < 1$ alors
 - (a) Si $u_0 > 0$ alors la suite est strictement décroissante.
 - (b) Si $u_0 < 0$ alors la suite est strictement croissante.
3. Si $q = 0$ ou $q = 1$ alors la suite est constante.
4. Si $q < 0$ alors la suite n'est pas monotone.

• **Propriétés :** Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_0 q^n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_1 q^{n-1}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_p q^{n-p}$.

• **Preuves :** Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

On va supposer que $q \neq 0$ car si $q = 0$, il n'y a rien à démontrer !

1. On va montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_0 q^n$.
On pose $P(n) : u_n = u_0 q^n$.
 - (a) Initialisation : $P(0)$ est vraie ?
On a bien $u_0 = u_0 q^0 = u_0$. Donc $P(0)$ est vraie.
 - (b) Hérédité : Supposons que $P(n) : u_n = u_0 q^n$ est vraie
et montrons que $P(n+1) : u_{n+1} = u_0 q^{n+1}$ est vraie.
 $u_{n+1} = q u_n = q q^n u_0 = q^{n+1} u_0$.
Donc $P(n+1)$ est vrai.
 - (c) Conclusion : Initialisation + Hérédité, on alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = q^n u_0$.
2. On va montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_1 q^{n-1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après 1. on a : $u_n = q^n u_0$. Donc $u_n = q^{n-1} q u_0 = q^{n-1} u_1$.
On a bien, $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = q^{n-1} u_1$.
3. On va montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = q^{n-p} u_p$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, on sait d'après 1. que $u_n = q^n u_0$ et $u_p = q^p u_0$.
Donc $u_n = q^n u_0 = q^{n-p} q^p u_0 = q^{n-p} u_p$.
On bien $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = q^{n-p} u_p$.

• **Exemples :**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

1. Déterminer u_9 .

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

Donc $u_9 = q^9 u_0 = 3 \times 2^9$.

2. Déterminer u_{13} en fonction de u_7 .

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_n = q^{n-p} u_p$.

Donc $u_{13} = q^6 u_7 = 2^6 u_7$.

• **Sommes finies d'une suite géométrique :**

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = 1$.

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$

c.à.d.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n.$$

(a) Si $q = 1$ alors $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1$.

(b) Si $q \neq 1$

Alors,

$$S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p = \sum_{p=0}^{p=n} q^p = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

et

$$qS_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}.$$

$$\text{Par suite } S_n - qS_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n - (q + q^2 + \cdots + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}.$$

$$\text{D'où } (1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}. \text{ Alors, } S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Ainsi

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = 1$.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall n \geq n_0, \quad T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p.$$

c.à.d.

$$\forall n \geq n_0, \quad T_n = q^{n_0} + q^{n_0+1} + \dots + q^n.$$

(a) Si $q = 1$ alors $T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = n - n_0 + 1$.

(b) Si $q \neq 1$

Alors,

$$T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p = \sum_{p=n_0}^{p=n} q^p = q^{n_0} + q^{n_0+1} + \dots + q^n$$

et

$$qT_n = q^{n_0+1} + q^{n_0+2} + \dots + q^{n+1}.$$

$$\text{Par suite } T_n - qT_n = q^{n_0} + q^{n_0+1} + \dots + q^n - (q^{n_0+1} + q^{n_0+2} + \dots + q^{n+1}) = q^{n_0} - q^{n+1}.$$

$$\text{D'où } (1 - q)T_n = q^{n_0} - q^{n+1}. \text{ Alors, } T_n = \frac{q^{n_0} - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Ainsi

$$q^{n_0} + q^{n_0+1} + \dots + q^n = \frac{q^{n_0} - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Donc

$$q^{n_0} + q^{n_0+1} + \dots + q^n = q^{n_0} \frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1 - q}.$$

3. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$

(a) Si $q = 1$ alors $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p = \sum_{p=0}^{p=n} u_0 = u_0 + u_0 + \cdots + u_0 = (n+1)u_0$.

(b) Si $q \neq 1$
Alors,

$$S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p = \sum_{p=0}^{p=n} u_0 q^p = u_0 \sum_{p=0}^{p=n} q^p = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Ainsi

$$S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

4. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall n \geq n_0 \quad , \quad T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p.$$

(a) Si $q = 1$ alors $T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_0 = u_0 + u_0 + \cdots + u_0 = (n - n_0 + 1)u_0$.

(b) Si $q \neq 1$
Alors,

$$T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_0 q^p = u_0 \sum_{p=n_0}^{p=n} q^p = u_0 q^{n_0} \frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q} = u_{n_0} \frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q}.$$

Ainsi

$$T_n = \sum_{p=n_0}^{p=n} u_p = u_{n_0} \frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q}.$$

• **Remarque :**

La somme de termes successifs d'une suite géométrique est donnée par la formule suivante : Somme = 1er terme $(1-q^{\text{Nombre de termes}})/(1-q)$.

• **Exemple :**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

1. On pose $S_{13} = \sum_{p=0}^{p=13} u_p$. Calculer S_{13} .

$$\text{On a } \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

$$\text{Donc } S_{13} = u_0 \frac{1-2^{14}}{1-2} = 3 \frac{1-2^{14}}{1-2} = 3(2^{14} - 1).$$

2. On pose $T_{14} = \sum_{p=5}^{p=14} u_p$. Calculer T_{14} .

$$\text{On a } \forall n \geq n_0 \quad ; \quad T_n = u_{n_0} \frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q}.$$

$$\text{Donc } T_{14} = u_5 \frac{1-2^{10}}{1-2}.$$

$$\text{Or } u_5 = q^5 u_0 = 2^5 \times 3.$$

$$\text{Donc } T_{14} = 3 \times 2^5 (2^{10} - 1).$$

- **Caractérisation d'une suite géométrique :** (u_n) une suite géométrique de raison q , $q \neq 0$ et de premier terme u_0 , $u_0 \neq 0$

SI ET SEULEMENT SI

$$\exists \quad a \in \mathbb{R}^* \quad , \quad \exists \quad b \in \mathbb{R}^* \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = ba^n.$$

En effet, (u_n) une suite géométrique de raison q , $q \neq 0$ et de premier terme u_0 , $u_0 \neq 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = u_0 q^n$.

On a bien la forme $u_n = ba^n$ pour $a = q$ et $b = u_0$.

Réciproquement, supposons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = ba^n$.

1. Comme $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n \neq 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N} \quad , \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{ba^{n+1}}{ba^n} = a$ une constante.

Alors (u_n) une suite géométrique de raison $q = a$ et de premier terme $u_0 = b$.

• **Exercices :**

1. (u_n) est une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = 4 \times 3^n + 5n + 7.$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$

Déterminer S_n .

2. Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = 5 \times 3^n.$$

(a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique (on précisera sa raison r et son premier terme u_0).

Repondre de deux manières différentes à chacune des deux questions suivantes :

(b) On pose $S_{23} = \sum_{p=0}^{p=23} u_p$. Calculer S_{23} .

(c) On pose $T_{14} = \sum_{p=5}^{p=14} u_p$. Calculer T_{14} .

3. Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = 3u_n.$$

(a) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique (on précisera sa raison r).

Repondre aux deux questions suivantes sachant que $u_3 = 27$:

(b) On pose $S_{23} = \sum_{p=0}^{p=23} u_p$. Calculer S_{23} .

(c) On pose $T_{14} = \sum_{p=5}^{p=14} u_p$. Calculer T_{14} .

4. Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = 3u_n + 4 \quad \text{et} \quad u_0 = 0.$$

(a) On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad v_n = u_n + 2$.

Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique (on précisera sa raison r et son premier terme v_0).

(b) Déterminer l'expression du terme général v_n en fonction de n .

En déduire l'expression du terme général u_n .

(c) On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p.$$

Déterminer S_n .

5. Soit (u_n) une suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 6}{u_n + 4} \quad \text{et} \quad u_0 = 0.$$

(a) On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad v_n = \frac{u_n + 3}{u_n - 2}$.

Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique (on précisera sa raison r et son premier terme v_0).

(b) Déterminer l'expression du terme général v_n en fonction de n .

En déduire l'expression du terme général u_n .