Opérations Binaires

$+ - \times \div$ binaires

Ce document a pour objectif de vous familiariser avec les opérations binaires.

1 Addition

L'addition en binaire se déroule exactement comme les additions base 10, à la différence qu'une retenue est créée dès que l'on dépasse « 1 ».

Ainsi, pour effectuer l'addition de « %1101 » (13) et « %0110 » (6), on fera :

$$
\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1 \\ +\,0\,1\,1\,0 \\ \hline 1 \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1 \\ +\,0\,1\,1\,0 \\ \hline 1\,1 \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{r} 1 \\ 1\,1\,0\,1 \\ +\,0\,1\,1\,0 \\ \hline 0\,1\,1 \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{r} 1\,1 \\ 1\,1\,0\,1 \\ +\,0\,1\,1\,0 \\ \hline 0\,0\,1\,1 \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{r} 1\,1 \\ 1\,1\,0\,1 \\ +\,0\,1\,1\,0 \\ \hline 1\,0\,0\,1\,1 \end{array}
$$

On en déduit donc que : $1101_2 + 0110_2 = 10011_2$ (19)

Du fait de la base 2, on notera que dans le cas où un nombre est constitué de plusieurs « 1 » de suite, la retenue est propagée jusqu'au premier « 0 » trouvé.

2 Multiplication

La multiplication s'applique exactement comme son équivalent décimale. Il faut noter que les additions successives qui en résultent peuvent être nombreuses. Il est donc préférable de placer le nombre le plus petit en dessous du plus grand.

N'oubliez pas que multiplier un nombre par 2, c'est le décaler vers la gauche d'un bit en ajoutant un 0. Ainsi, multiplier un nombre par une puissance de 2 (2, 4, 8, ...), c'est le décaler vers la gauche de plusieurs bits.

Ainsi, pour effectuer la multiplication de « %1101 » (13) par « %110 » (6), on fera :

$$
\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1 \\ \times\quad 1\,1\,0 \\ \hline \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1 \\ \times\quad 1\,1\,0 \\ \hline 0\,0\,0\,0 \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1 \\ \times\quad 1\,1\,0 \\ \hline 0\,0\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,1\,. \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1 \\ \times\quad 1\,1\,0 \\ \hline 0\,0\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,1\,. \\ 1\,1\,0\,1\,.\,. \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1 \\ \times\quad 1\,1\,0 \\ \hline 1\,1\quad 0\,0\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,1\,0 \\ +\,1\,1\,0\,1\,0\,0 \\ \hline 1\,0\,0\,1\,1\,1\,0 \end{array}
$$

On en déduit donc que : $1101_2 \times 110_2 = 1001110_2$ (78)

3 Soustraction

Plusieurs techniques de soustractions binaires existent : la conversion en passant par le complément à deux, ou l'opération bit à bit similaire à l'addition.

3.1 Soustraction par complément à 2

Pour connaitre la différence entre deux nombres binaires positifs il suffit simplement de passer le plus petit en son équivalent négatif en représentation signée, c'est-à-dire effectuer le complément à 2, puis d'additionner le résultat *sans tenir compte de la retenue finale.*

Par exemple, pour effectuer la soustraction entre $\%1100$ (11) et $\%1001$ (9) :

Complément à 2 de $\%1001$:

$$\begin{array}{r} 1\,1\,0\,0 \\ -\,1\,0\,0\,1 \\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \mathbf{1\;\;0\;\;0\;\;1} \\ \textit{(complément à 1)} \\ \mathbf{0\;\;1\;\;1\;\;0} \\ \textit{(ajout de 1)} \\ \mathbf{0\;\;1\;\;1\;\;1} \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 1\,1\,0\,0 \\ +\,0\,1\,1\,1 \\ \hline 1 \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{r} 1\,1\,0\,0 \\ +\,0\,1\,1\,1 \\ \hline 1\,1 \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{r} 1\quad\;\; \\ 1\,1\,0\,0 \\ +\,0\,1\,1\,1 \\ \hline 0\,1\,1 \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{r} 1\,1\quad\;\;\;\; \\ 1\,1\,0\,0 \\ +\,0\,1\,1\,1 \\ \hline \mathbf{1}\,0\,0\,1\,1 \end{array}$$

L'addition donne donc : $1100_2 + 0111_2 = 10011_2$

Mais en retirant la retenue finale, on obtient : $\cancel{1}0011_2$

On en déduit donc que : $1100_2 - 1001_2 = 0011_2$ (3)

Notez bien que pour des nombres de grandeurs très différentes, il faut d'abord les aligner sur le même nombre de bits *avant* de faire le complément à 2. Exemple :
$120 - 3 = 111\,1000_2 - 11_2 = 111\,1000_2 - 000\,0011_2 \Rightarrow 111\,1000_2 + 111\,1101_2 \Rightarrow \cancel{1}111\,0101_2\,(117)$

3.2 Soustraction bit à bit

Dans la soustraction bit à bit, on va effectuer une différence entre chaque bit, et éventuellement propager une retenue vers la gauche. Plusieurs cas peuvent se présenter :

$$\begin{array}{r} 0 \\ -\ 0 \\ \hline 0 \end{array} \Rightarrow 0 \qquad \begin{array}{r} 1 \\ -\ 1 \\ \hline 0 \end{array} \Rightarrow 0 \qquad \begin{array}{r} 1 \\ -\ 0 \\ \hline 1 \end{array} \Rightarrow 1 \qquad \begin{array}{r} {}^{1}0 \\ -\ {}_{1}1 \\ \hline 1\ 1 \end{array} \Rightarrow -1$$

$$\begin{array}{r} 0\ . \\ -\ {}_{1}1\ . \\ \hline . \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 0\ . \\ -\ 10\ . \\ \hline . \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} {}^{1}0\ . \\ -\ {}_{1}10\ . \\ \hline 1\ 0\ . \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 10\ . \\ -\ {}_{1}10\ . \\ \hline 1\ 0\ . \end{array} \Rightarrow -2$$

$$\begin{array}{r} 1\ . \\ -\ {}_{1}1\ . \\ \hline . \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\ . \\ -\ 10\ . \\ \hline . \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} {}^{1}1\ . \\ -\ {}_{1}10\ . \\ \hline 1\ 1\ . \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 11\ . \\ -\ {}_{1}10\ . \\ \hline 1\ 1\ . \end{array} \Rightarrow -1$$

Pour illustrer ces cas, voici un exemple simple avec la soustraction entre %1100 (12) et %0111 (7) :

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 0 \\ -\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ {}^{1}0 \\ -\ 0\ 1\ {}_{1}1\ 1 \\ \hline 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\ 1\ {}^{1}0\ {}^{1}0 \\ -\ 0\ {}_{1}1\ {}_{1}1\ 1 \\ \hline 0\ 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\ {}^{1}1\ {}^{1}0\ {}^{1}0 \\ -\ {}_{1}0\ {}_{1}1\ {}_{1}1\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\ {}^{1}1\ {}^{1}0\ {}^{1}0 \\ -\ {}_{1}0\ {}_{1}1\ {}_{1}1\ 1 \\ \hline 0\ 1\ 0\ 1 \end{array}$$

On en déduit donc que : $1100_2 - 0111_2 = 0101_2$ (5)

Voici un autre exemple plus complet avec la soustraction entre %11 1001 (57) et %01 1101 (29) :

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ -\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ -\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ -\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 0\ 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ {}^{1}0\ 0\ 1 \\ -\ 0\ 1\ {}_{1}1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline .\ 0\ 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ {}^{1}0\ 0\ 1 \\ -\ 0\ 1\ {}_{1}1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} 1\ 1\ {}^{1}1\ {}^{1}0\ 0\ 1 \\ -\ 0\ {}_{1}1\ {}_{1}1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline .\ 1\ 0\ 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 1\ 1\ {}^{1}1\ {}^{1}0\ 0\ 1 \\ -\ 0\ {}_{1}1\ {}_{1}1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\ {}^{1}1\ {}^{1}1\ {}^{1}0\ 0\ 1 \\ -\ {}_{1}0\ {}_{1}1\ {}_{1}1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline .\ 1\ 1\ 0\ 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 1\ {}^{1}1\ {}^{1}1\ {}^{1}0\ 0\ 1 \\ -\ {}_{1}0\ {}_{1}1\ {}_{1}1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\ {}^{1}1\ {}^{1}1\ {}^{1}0\ 0\ 1 \\ -\ {}_{1}0\ {}_{1}1\ {}_{1}1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \end{array}$$

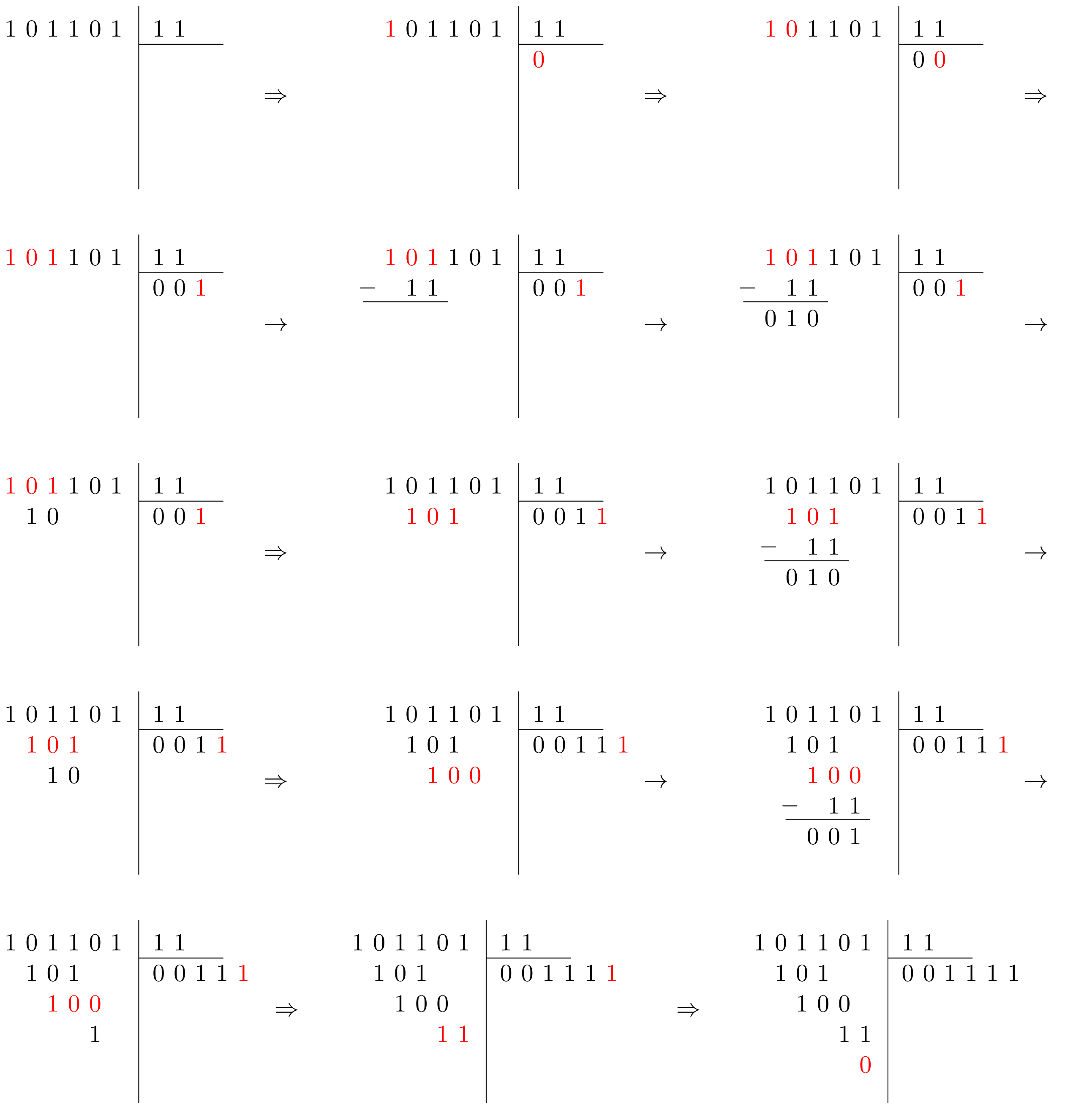
On en déduit donc que : $11\,1001_2 - 01\,1101_2 = 01\,1100_2$ (28)

Cette technique a l'avantage de donner le résultat exact immédiatement, mais au prix de nombreuses retenues à propager.

4 Division

La division binaire se déroule comme une division décimale, néanmoins, il faut garder en tête que les nombres ne sont constitués que de 0 et de 1, c'est-à-dire qu'il faut appliquer plusieurs décalages d'affilés sur le nombre divisé et donc ajouter plusieurs 0 de suite au dividende.

Ainsi, pour diviser « %10 1101 » (45) par « %11 » (3), on fera :



On en déduit donc que : $10\,1101_2 \div 11_2 = 1111_2$ (15)

On notera que diviser par une puissance de 2 (2, 4, 8, ...) implique de simplement décaler la virgule vers la gauche.

Ce document et ses illustrations ont été réalisés par Fabrice BOISSIER en septembre 2024 (dernière mise à jour en octobre 2024)