Introduction aux graphes et aux matrices
Examen de mi-parcours

Octobre 2025 - Durée : 2h

Documents interdits
Calculatrice interdite

Consignes importantes :

— Ce sujet contient **5 exercices**.
— La qualité de la présentation et le soin apporté à la rédaction seront pris en compte.
— Chaque réponse doit être **justifiée**.

Exercice 1 (3,5 points) :
Considérez le graphe orienté G_1 suivant :

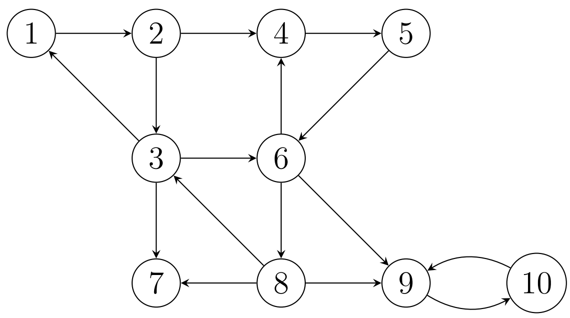

FIGURE 1 – Graphe G_1

1. Donner la liste de successeurs du sommet 3.
2. Donner la liste des voisins du sommet 6.
3. Donner les demi-degrés extérieurs du sommet 1 et du sommet 8.
4. Donner un chemin élémentaire de longueur 4.
5. Donner un circuit élémentaire de longueur 7. Existe-t-il un circuit élémentaire de longueur supérieur ou égale à 8 ?
6. Le graphe est-il connexe ? Est-il fortement connexe ?

Exercice 2 (3,5 points) :
On considère un réseau composé de n centres informatiques $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pour des raisons de sécurité, les centres informatiques sont tous deux à deux connectés. Les connexions entre deux centres sont soit en fibre optique, soit en cuivre. Le gestionnaire du réseau envisage d'abandonner l'usage des câbles en cuivre. Pour planifier l'évolution du réseau, il souhaite déterminer le plus grand ensemble de centres qui sont tous connectés deux à deux par des câbles en fibre optique.

1. Proposer une modélisation de ce problème sous la forme de graphe. Quel est le problème à résoudre pour répondre au besoin du gestionnaire ?

Considérez l'exemple d'un réseau de 8 centres informatiques et les connexions suivantes :

Type de connexions	1	2	3	4	5	6	7	8
1	\	F	F	F	C	F	F	F
2	F	\	F	C	C	C	F	C
3	F	F	\	F	F	F	C	C
4	F	C	F	\	F	F	C	C
5	C	C	F	F	\	F	F	C
6	F	C	F	F	F	\	F	C
7	F	F	C	C	F	F	\	F
8	F	C	C	C	C	C	F	\

Figure 2 – Type de connexions entre les centres : F pour fibre et C pour cuivre.

2. Appliquer votre modélisation pour déterminer le graphe correspondant à cet exemple.

3. Donner un ensemble de centres informatiques de taille 3 qui répond au besoin du gestionnaire.

4. Déterminer le plus grand ensemble de centres informatiques qui répond au besoin du gestionnaire.

Exercice 3 (3 points) :
Considérez le graphe non-orienté G_2 suivant :

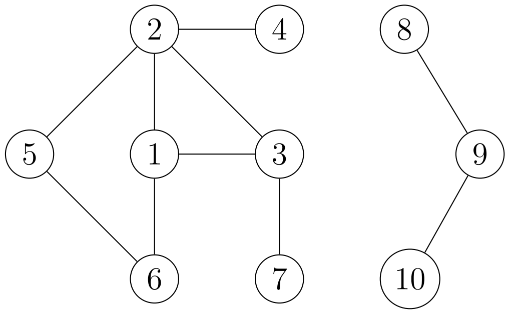

Figure 3 – Graphe G_2

1. Exécuter un parcours en profondeur du graphe G_2, en donnant l'ordre d'exploration des sommets et les arbres obtenus à l'issue du parcours.
   Lorsque vous avez le choix entre plusieurs sommets, choisissez les sommets dans l'ordre croissant. En particulier, vous commencerez le parcours par le sommet 1.

2. En déduire les composantes connexes de G_2.

Exercice 4 (6 points) :
Considérez le graphe orienté G_3 suivant :

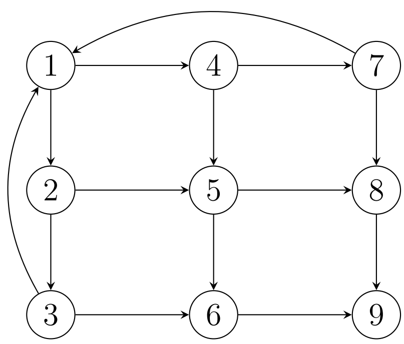

Figure 4 – Graphe G_3

1. Exécuter un parcours en profondeur du graphe G_3, en donnant l'ordre d'exploration des sommets et les arborescences obtenues à l'issue du parcours.
   Lorsque vous avez le choix entre plusieurs sommets, choisissez les sommets dans l'ordre croissant. En particulier, vous commencerez le parcours par le sommet 1.

2. Déterminer les numérotations préfixes et suffixes des sommets associées au parcours effectué en question 1.

3. Construire le graphe inverse du graphe G_3, noté G_3^T.

4. Exécuter un parcours en profondeur du graphe G_3^T, en donnant l'ordre d'exploration des sommets et les arborescences obtenues à l'issue du parcours.
   Lorsque vous avez le choix, choisissez les sommets dans l'**ordre suffixe décroissant**.

5. En déduire les composantes fortement connexes de G_3.

Exercice 5 (4 points) :

1. Soient les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

   Calculer AB. La matrice AB est-elle symétrique ?

2. Soient trois matrices A de taille 3×3, B de taille 5×2, et C de taille 3×5.

   Parmi les produits matriciels suivants, lesquels sont définis :
   AB, AC, CA, CB, $(AC)B$, $(CA)B$ et $A(CB)$?

3. Considérez le graphe orienté G_4 suivant :

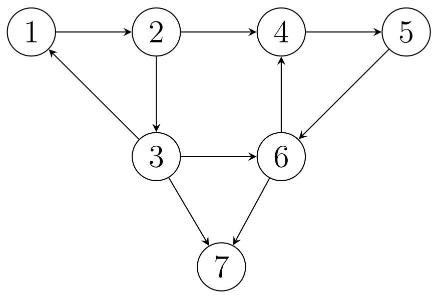

FIGURE 5 – Graphe G_4

   Donner la matrice d'adjacence A_{G_4} du graphe G_4.
   Donner la matrice transposée $A_{G_4}^T$.