Effectuer un raisonnement mathématique

Cours n°1

EPITA Cyber 1 2024-2025

Introduction

Ce cours s'intitule : 'Effectuer un raisonnement mathématique'. En réalité, il aurait pu s'intituler : 'Les coulisses cachées derrière le corrigé'.

Lorsqu'une personne doit résoudre un exercice de mathématiques, ou même plus généralement un problème en sciences ou en informatique, elle doit passer par plusieurs étapes :

1. S'assurer d'avoir bien compris l'énoncé. Cette étape ne saurait être sous-estimée : Quelles sont les **données pertinentes** et comment les **qualifier** proprement : variable connue ou inconnue, paramètre, constante ? Quels sont les **concepts** importants de l'énoncé et comment les **reformuler** de façon contextualisée ? Quelle est **la nature de la réponse attendue** : un ensemble, une valeur, un exemple, un contre-exemple, une démonstration ?

2. Une fois l'énoncé proprement analysé, **chercher** des **exemples** et des **contre-exemples** pertinents pour améliorer la compréhension de la question. Trouver un moyen de **se représenter** les objets pour se forger une opinion sur la réponse à apporter. **Formuler** une première réponse intuitive qui peut s'appuyer sur la représentation des objets ou sur un début d'argumentation. Cette première réponse pourra être confirmée ou infirmée par la suite.

3. Préparer le terrain d'une argumentation rigoureuse en quittant le monde des exemples et des contre-exemples pour revenir au monde des **concepts**. Un concept ne peut être entièrement déterminé par des instances de ce concept, il a donc besoin d'une définition et de caractérisations qui permettent d'élaborer une **vision 360°** de celui-ci.
Le plus souvent, il est important de déterminer **l'angle de vue le plus pertinent** pour répondre à la question. Pensez à un cube dont toutes les faces ne sont pas visibles simultanément : vous devez effectuer une rotation du cube jusqu'à choisir le meilleur angle de vue, la meilleure photo pour répondre à la question.

4. Dérouler un **raisonnement** logique et rigoureux :
Situer les objets en présence, Mettre en évidence les **liens entre les affirmations**, Apporter les **justifications** appropriées.
Cette étape de raisonnement rigoureux ne saurait être dissociée d'une exigence de **rédaction** qui permet de s'assurer que le raisonnement est valide. C'est le moment où **le fond et la forme se rejoignent**.
Certains types de raisonnement bien identifiés possèdent une **structure** à respecter : pensez par exemple au raisonnement par récurrence.

C'est cette démarche méthodologique que nous, enseignants de mathématiques, souhaitons vous transmettre lors de ce premier semestre. Comme vous pouvez le constater, c'est une démarche qui suppose une certaine autonomie de la part de l'étudiant. En particulier, nous nous éloignons résolument d'une vision des mathématiques qui serait exclusivement fondée sur des 'exercices-type' et des méthodes toutes prêtes. Nous avons une ambition plus grande : vous faire réfléchir.

Bien que cela constitue un saut qualitatif et peut-être douloureux par rapport à la façon dont vous avez peut-être l'habitude de faire des mathématiques, nous sommes convaincus que les compétences que vous allez développer en termes de démarche de recherche et d'autonomie de la pensée vous seront d'une grande aide tout au long de vos études et de votre vie professionnelle, et pas seulement en mathématiques.

En particulier, nous espérons que vous pourrez vous confronter à n'importe quel énoncé tout en évitant le réflexe paresseux qui consiste à déclarer : 'Je ne sais pas' sans avoir commencé à réfléchir sérieusement au problème. Il est normal de ne pas connaître la réponse à une question en un clin d'oeil. Il faudra parfois 5 minutes, 10 minutes ou beaucoup plus encore pour trouver la réponse. Le résultat final, la démonstration, le corrigé, ne sont en réalité que l'aboutissement de plusieurs étapes de recherche et d'un effort conséquent de raisonnement et de rédaction.

Hypothèse pédagogique

L'originalité et le parti pris du cours 'Effectuer un raisonnement mathématique' consiste à isoler les compétences nécessaires à la mise en oeuvre de la méthodologie exposée en introduction pour les travailler individuellement au travers d'exercices dédiés. La liste suivante est non exhaustive :

- Analyser un énoncé et qualifier les données,
- Trouver des exemples et des contre-exemples dans le contexte d'un énoncé,
- Inférer une hypothèse plausible,
- Cartographier les concepts sous-jacents,
- Traduire un énoncé naturel vers une syntaxe mathématique formelle,
- Rédiger un raisonnement avec sa structure appropriée et comprise.

Des exercices de synthèse pourront combiner toutes ces compétences pour que les étudiants fassent l'expérience de l'articulation entre toutes les étapes de la méthodologie pour aboutir à un résultat final.

1 Analyse d'un énoncé

1.1 Attentes

Analyser les énoncés suivants et déterminer les réponses aux questions suivantes :

- Quelles sont les **données pertinentes** et comment les **qualifier** proprement : variable connue ou inconnue, paramètre, constante ?

- Quelle est **la nature de la réponse attendue** : un ensemble, une valeur, un exemple, un contre-exemple, une démonstration ?

Résoudre ensuite l'exercice dans la mesure du possible.

1.2 Exercices

Exercice n°1 :
Déterminer les valeurs de x telles que l'équation (E) d'inconnue réelle y admette exactement deux solutions réelles.

$$y^2 + xy = x \quad (E)$$

Exercice n°2 :
Soit $t \in \mathbb{R}$. Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b^2 > 2a$.
Déterminer le domaine de définition de l'application h définie par le procédé de calcul suivant :

$$h : u \longmapsto b\ \ln(1 + t + u) - a\sqrt{1 + u}$$

Exercice n°3 :
Vrai ou Faux ?
Une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ est nécessairement croissante sur $[0; +\infty[$.

Exercice n°4 :
Soient a, b, c et d quatre nombres entiers.
Peut-on affirmer que l'équivalence suivante est vraie ?

$$(a + 2b)^2 = c^2 \Longleftrightarrow b = \frac{c - a}{2}$$

Exercice n°5 :
Soient x et y deux réels négatifs, c'est-à-dire que $x \in \mathbb{R}^-$ et $y \in \mathbb{R}^-$. On pose $z = x - y$.
Existe-t-il un réel t positif tel que $z^2 - x^2 - ty^2 \leq 0$?

Exercice n°6 :
Déterminer tous les couples d'entiers solutions de l'équation :

$$x^2 + y^2 = 25$$

Exercice n°7 :
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.
Démontrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Exercice n°8 :

1. Résoudre l'équation suivante en précisant d'abord son domaine de validité :

$$\ln(1 + ab) = 0$$

2. Résoudre l'équation suivante en précisant d'abord son domaine de validité :

$$\sqrt{1 + ab} = \sqrt{2}$$

3. Résoudre l'équation suivante en précisant d'abord son domaine de validité :

$$\mathrm{e}^{a+b} + \mathrm{e}^{a-b} + 1 = 0$$