Effectuer un raisonnement mathématique

Cours n°5

EPITA Cyber 1 2024-2025

1 Première approche de l'unicité en mathématiques

1.1 Démontrer qu'un objet est unique

1.1.1 Principe

Considérons un ensemble de propriétés $\mathcal{P}$. L'**unicité** d'un objet vérifiant $\mathcal{P}$ signifie qu'il existe au plus un tel objet (0 ou 1).

Concrètement, le plan de démonstration est le suivant :

1. On considère deux objets x_1 et x_2 qui vérifient $\mathcal{P}$.
2. On démontre ensuite que nécessairement, $x_1 = x_2$.

1.1.2 Exemple :

Illustrons notre plan de démonstration en passant par l'arithmétique.
Vous avez appris à l'école primaire ou au collège la division euclidienne dans $\mathbb{N}$. Voici un rappel :

Si a et b sont deux entiers naturels ($b \neq 0$), il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b$$

Attachons-nous à démontrer la partie "unicité" de ce résultat.

Supposons deux couples $(q_1, r_1) \in \mathbb{N}^2$ et $(q_2, r_2) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant :

$$\begin{cases} a = bq_1 + r_1 & \text{et} \quad 0 \leq r_1 < b \\ a = bq_2 + r_2 & \text{et} \quad 0 \leq r_2 < b \end{cases}$$

Il en découle que $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, d'où :

$$b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$$

Ainsi $r_2 - r_1$ est un multiple de b, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $r_2 - r_1 = kb$ (en l'ocurrence, $k = q_1 - q_2$), d'où :

$$r_2 = r_1 + kb$$

Or, les contraintes $0 \leq r_1 < b$ et $0 \leq r_2 < b$ imposent $k = 0$, ce qui nous donne :

$$r_2 = r_1$$

L'égalité $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ devient $b(q_1 - q_2) = 0$, et comme $b \neq 0$, on en déduit que $q_1 - q_2 = 0$, donc $q_1 = q_2$. On arrive donc à l'égalité tant attendue :

$$(q_1, r_1) = (q_2, r_2)$$

Remarque :
L'unicité de (q, r) justifie que l'on donne un nom aux objets : q est appelé **le quotient** et r est appelé **le reste** dans la division euclidienne de a par b.

1.2 Unicité de l'écriture d'un polynôme

Au-delà de l'unicité d'un objet vérifiant un ensemble de propriétés $\mathcal{P}$, on peut aussi parfois parler d'**unicité de l'écriture** d'un objet.

Si on considère l'écriture d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, il y a unicité des coefficients a_0, a_1 et a_2 dans l'écriture sous forme développée :

$$P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$$

- a_0 est le coefficient du terme de degré 0,
- a_1 est le coefficient du terme de degré 1,
- a_2 est le coefficient du terme de degré 2,

1.3 Usage de l'unicité en général

L'unicité permet notamment de procéder à une **identification** des objets vérifiant une certaine propriété.

Exemple :
Si $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (a+b)x^2 + 3x + c = 5x^2 + bx + 1$ alors, par identification des coefficients de même degré :

$$\begin{aligned} &a + b = 5 \\ &3 = b \\ &c = 1 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que : $a = 2$, $b = 3$ et $c = 1$.

1.4 Thèmes d'unicité en arithmétique

Unicité des objets :
Dans la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ d'un entier a par un entier b non nul, le quotient q et le reste r sont uniques.

Unicité de l'écriture :
Un thème important de l'arithmétique est l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, c'est-à-dire dans l'écriture d'un entier en produit de nombres premiers.

1.5 Thème d'unicité avec les fonctions

Nous allons aborder la notion d'unicité d'un antécédent, qui peut également s'interpréter par le nombre de solutions à une équation de la forme $y = f(x)$, d'inconnue x. Il s'agit de la notion d'injectivité, voir ci-après.

2 Introduction à la notion de fonction injective

2.1 Définition

Soient E et F deux ensembles. On considère une fonction $f : E \longrightarrow F$.
On dit que f est **injective sur** E si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

2.2 Exercices

Exercice n°1 : (Définition équivalente)
Démontrer que f est injective sur E si et seulement si tout élément de F admet au plus un antécédent dans E, c'est-à-dire qu'il y a <u>unicité</u> de l'antécédent.

Exercice n°2 : (Graphiquement)
On considère la fonction g définie par :

$$g : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + 1$$

1. Esquisser la courbe d'équation $y = x^2 + 1$.
2. Tracer la droite d'équation $y = -1$ et en déduire le nombre de solutions de l'équation :

$$g(x) = -1$$

3. Tracer la droite d'équation $y = 1$ et en déduire le nombre de solutions de l'équation :

$$g(x) = 1$$

4. Tracer la droite d'équation $y = 5$ et en déduire le nombre de solutions de l'équation :

$$g(x) = 5$$

5. g est-elle injective sur $\mathbb{R}$?

Exercice n°3 : (Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$)
On considère dans les questions ci-dessous une fonction $f : u \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(u) \in \mathbb{R}^2$. f est-elle injective sur $\mathbb{R}^2$? Démontrer la réponse.

1. $(x, y) \longmapsto (x + 2y\ ,\ y^2)$
2. $(x, y) \longmapsto (y\ ,\ x - y)$
3. $(x, y) \longmapsto (x + y\ ,\ x + y)$
4. $(x, y) \longmapsto ((x - y)^2\ ,\ x + y)$
5. $(x, y) \longmapsto (\mathrm{e}^{x-y}\ ,\ x^2 + x + y)$

Exercice n°4 :
Soient deux réels $a < b$. Soit $f : [a\ ,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante sur $[a\ ,b]$.
Démontrer que f est injective sur $[a\ ,b]$.