Effectuer un raisonnement mathématique

Cours n°2

EPITA Cyber 1 2024-2025

Introduction à la notation ensembliste

Parenthèses ou accolades ?

Quelle est la différence entre $(1;2)$ et $\{1;2\}$?

Un ensemble d'éléments écrit entre parenthèses est une **liste** ordonnée. La notion d'ordre implique que :

$$(1;2) \neq (2;1)$$

Pensez par exemple au digicode qui permet d'accéder à un bâtiment. Si on change l'ordre des caractères, le digicode ne fonctionne plus.

Notez qu'une liste peut contenir plusieurs fois le même élément :

$$(1,2,1)$$

Par déduction, vous avez compris ce que représente $\{1;2\}$: c'est un ensemble non ordonné.

Pensez à un sac qui contient une pièce de 1 euro et une pièce de 2 euros : il vous importe peu de savoir la position de la pièce de 1 euro par rapport à la pièce de 2 euros.

En particulier, vous noterez que :

$$\{1;2\} = \{2;1\}$$

En dénombrement, un ensemble fini entre accolades est appelé une **combinaison**.

L'important est de retenir que les parenthèses impliquent une notion de liste ordonnée, tandis que les accolades décrivent un ensemble d'éléments dont la position relative des uns par rapport aux autres ne nous intéresse pas.

Exercice :
Combien de listes ordonnées à trois éléments pouvez-vous créer avec les éléments 1, 2 et 3 ?
Combien de combinaisons à trois éléments pouvez-vous créer avec les éléments 1, 2 et 3 ?

Remarque :

L'action de compter de tels ensembles s'appelle **dénombrement**.

Vocabulaire :
Une liste de deux éléments (a,b) s'appelle un **couple**.
Une combinaison de deux éléments $\{a,b\}$ s'appelle une **paire**.

Produit cartésien, qu'est-ce que c'est ?

Avant de parler de produit cartésien d'ensembles, faisons quelques rappels de notation sur les ensembles classiques :

$\mathbb{N}$: Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{Z}$: Ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{Q}$: Ensemble des nombres rationnels (qui peuvent s'écrire comme un quotient d'entiers).
$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels ($\sqrt{2}$ et π sont des nombres réels mais pas des nombres rationnels).

Nous pouvons désormais parler de produit cartésien.

Si on note E et F deux ensembles, alors on appelle **produit cartésien** des ensembles E et F et on note **E x F**, l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in$ E et $y \in$ F.

Pour vérifier si vous avez compris, voici un petit exemple :

$$\left(2\ ;\ \frac{1}{3}\right) \in \mathbb{N} \text{ x } \mathbb{Q} \text{ mais } \left(\frac{1}{3}\ ;\ 2\right) \notin \mathbb{N} \text{ x } \mathbb{Q}$$

Sauriez-vous expliquer pourquoi ?

Notation :
Si l'on note E un ensemble, le produit cartésien E x E est souvent noté E^2.
Dire qu'un couple (x, y) appartient à E^2 signifie simplement que $x \in$ E et $y \in$ E.

Ensemble décrit en extension

Un ensemble décrit en extension est un ensemble dans lequel tous les éléments sont décrits de façon explicite.

En particulier, un ensemble décrit en extension est une écriture qui donne tous les éléments de l'ensemble de façon exhaustive.

Exemples :

$$A = \{1\}$$

$$B = \{-2\ ;\ 2\}$$

$$C = \{1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\ ,\ N\} \text{ où } N \text{ est un entier strictement supérieur à } 1$$

Remarques :

- Un ensemble à un élément est appelé un **singleton**.
- L'ensemble $\{1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\ ,\ N\}$ peut également être noté $|[1; n]|$ (intervalle d'entiers).

Ensemble décrit en compréhension

Un ensemble décrit en compréhension est un ensemble défini par :

1. un ensemble ambiant,
2. une propriété.

Exemples :

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x - 1 = 0 \}$$

$$B = \{ y \in \mathbb{R} \ / \ y^2 = 4 \}$$

$$C = \{ p \in \mathbb{N} \ / \ 1 \leq p \leq N \} \text{ où } N \text{ est un entier strictement supérieur à } 1$$

Exercices

Exercice n°1 :
Associer à chaque ensemble de la liste n°1 un ensemble de la liste n°2.

liste n°1 :

- $A = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ 2(x-1)(x+3) = 0 \}$
- $B = \{ y \in \mathbb{R} \ / \ y^2 - 5y + 6 = 0 \}$
- $C = \{ z \in \mathbb{R} \ / \ (z^2-1)(z+1) = 0 \}$
- $D = \{ t \in \mathbb{R} \ / \ t^3 - 5t^2 + 8t - 4 = 0 \}$

liste n°2 :

- $I = \{ -1 \ ; \ 1 \}$
- $J = \{ 1 \ ; \ 2 \}$
- $K = \{ 2 \ ; \ 3 \}$
- $L = \{ -3 \ ; \ 1 \}$

Exercice n°2 :

Associer à chaque ensemble de la liste n°1 un ensemble de la liste n°2.
liste n°1 :

- $A = \{\, p \in \mathbb{Z} \ / \ \dfrac{p-2}{3} \in \mathbb{Z}\}$
- $B = \{\, p \in \mathbb{Z} \ / \$ la première décimale de $\dfrac{p}{10}$ est égale à $1\}$
- $C = \{\, p \in \mathbb{Z} \ / \ p^2$ est un nombre pair $\}$
- $D = \{\, p \in \mathbb{Z} \ / \ p-1$ est un nombre pair $\}$

liste n°2 :

- $I = \{\, p \in \mathbb{Z} \ / \ \exists k \in \mathbb{Z},\ p = 2k\}$
- $J = \{\, p \in \mathbb{Z} \ / \ \exists k \in \mathbb{Z},\ p = 2k+1\}$
- $K = \{\, p \in \mathbb{Z} \ / \ \exists k \in \mathbb{Z},\ p = 3k+2\}$
- $L = \{\, p \in \mathbb{Z} \ / \ \exists k \in \mathbb{Z},\ p = 10k+1\}$

Exercice n°3 :
Écrire en compréhension les ensembles suivants :

1. Dans un repère orthonormé (O, i, j) où les points sont repérés par un couple de coordonnées cartésiennes, le cercle de centre O et de rayon 9.

2. L'ensemble des suites arithmétiques de raison a.

3. L'ensemble des suites géométriques de raison 8.