Fiche d'exercices 3 : Étude de fonctions, limites et continuité

1 Ensemble de définition d'une fonction

Exercice 1.1. *Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \dfrac{5x+4}{x^2+3x+2}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2-5x+4}$
4. $f(x) = \sqrt{4-3x^2}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{1+sin(x)}$

2 Calcul d'une limite

2.1 Limite en $+\infty$ et $-\infty$ sans indétermination

Exercice 2.1. *Déterminer l'ensemble de définition et calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = x^2+1$
2. $f(x) = 3x - \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = 2x^2+1+\dfrac{1}{x}$
4. $f(x) = x^5 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x^2}$
5. $f(x) = \big(x^2-24\big)(x-3)$
6. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

2.2 Limite en $+\infty$ et $-\infty$ avec indétermination

Exercice 2.2. *Déterminer l'ensemble de définition et calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \dfrac{x^5+2x^2-5}{x^3+x+7}$
2. $f(x) = \dfrac{2x}{x-5}$
3. $f(x) = \dfrac{2-x}{3x^2+7}$
4. $f(x) = \dfrac{5-2x}{2x-3}$
5. $f(x) = \dfrac{18x^4+18x^2+6}{9x^4+3}$
6. $f(x) = x\sqrt{x}$

Exercice 2.3. *Déterminer l'ensemble de définition et calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = x^3 - 150x + 5$
2. $f(x) = \dfrac{x^2-10x+16}{x^2-9x+8}$
3. $f(x) = x - 5\sqrt{x}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
5. $f(x) = \dfrac{9x^2-18x+6}{3x^2+8}$
6. $f(x) = -x^3+75x+7$
7. $f(x) = \dfrac{6x^3-3}{x^4+1}(\sqrt{x}-2)$
8. $f(x) = -\dfrac{x^2+1}{x^3-3}\sqrt{x^2+7}$
9. $f(x) = x^3-12x$

2.3 Limite en $a \in \mathbb{R}$

Exercice 2.4. *Déterminer l'ensemble de définition et calculer les limites à droite et à gauche des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2}}{x} + 3x + 5$ *en* $a = 0$
2. $f(x) = x + 1 + \dfrac{\sqrt{x^2}}{2}$ *en* $a = 0$.
3. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{x - 3}$ *en* $a = 3$.
4. $f(x) = -\dfrac{2x}{4x - 2}$ *en* $a = \dfrac{1}{2}$.
5. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x - 6}{x - 3}$ *en* $a = 3$.
6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{20 - 5x}$ *en* $a = 4$.
7. $f(x) = \dfrac{x}{3x - 6}$ *en* $a = 2$.
8. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x} - 1$ *en* $a = 0$.
9. $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ *en* $a = 0$.
10. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{2x^2 + 5x + 3}$ *en* $a = -1$.

2.4 Calcul par des quantités conjuguées

Exercice 2.5. *Déterminer l'ensemble de définition et calculer les limites en* $+\infty$ *et* $-\infty$ *des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + ax} - x$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$
4. $f(x) = \sqrt{x - 3} - \sqrt{x + 1}$
5. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 5} + 2x$
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1} - 1}{x}$

2.5 Application du théorème d'encadrement (i.e. théorème des gendarmes)

Exercice 2.6. *Rappeler l'énoncé du théorème d'encadrement en prenant soin d'énumérer les cas d'une limite en* $a \in \mathbb{R}$*, en* $-\infty$ *et* $+\infty$*.*

Exercice 2.7. *Déterminer l'ensemble de définition et calculer les limites des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \dfrac{2x + 3cos(5x)}{3 - 2x}$ *pour* $x \to -\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{cos(x) - 2}$ *pour* $x \to +\infty$.
3. $f(x) = \dfrac{3sin(3x) - 7}{x^2}$ *pour* $x \to +\infty$.
4. $f(x) = \dfrac{sin(x)}{1 + x^2}$ *pour* $x \to +\infty$.
5. $f(x) = \dfrac{cos(x)}{x} + 1$ *pour* $x \to -\infty$ *et* $+\infty$.
6. $f(x) = x + cos(x)$ *pour* $x \to -\infty$ *et* $+\infty$.

3 Asymptote Oblique

Rappel : Considérons $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction. On dira alors que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $\pm\infty$ lorsqu'elle vérifie que :

$$f(x) - ax - b \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$$

Aussi, nous dirons que la fonction f admet une asymptote verticale en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$.

Exercice 3.1. *On considère la fonction définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ *par :* $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 8x + 7}{x^2 - 4}$ *et on appelle* $(\mathcal{C}_f)$ *sa courbe représentative dans un repère du plan.*

1. *Montrer que la droite* (Δ) *d'équation* $y = 2x - 1$ *est asymptote à la courbe en* $+\infty$.
2. *Étudier les positions relatives de* $(\mathcal{C}_f)$ *et de* (Δ).

Exercice 3.2. *On considère la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ *par* $f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x + 2}$. *On note* $(\mathcal{C}_f)$ *sa courbe.*

1. *Déterminer les réels* a, b *et* c *tels que* $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.
2. *En déduire que la courbe* $(\mathcal{C}_f)$ *admet une asymptote en* $-\infty$, *dont on donnera l'équation.*

Exercice 3.3. *On donne la fonction* f *définie sur* $]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$ *par :* $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$. *Montrer que la droite d'équation* $y = x - 2$ *est asymptote à la courbe représentative de* f *en* $+\infty$.

Exercice 3.4. *Montrer que la fonction* $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$, *qui est définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, *admet une asymptote en* $+\infty$.

4 Étude de continuité d'une fonction

Rappel : Une fonction $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ est dite <u>continue</u> lorsqu'en tout point $a \in D$, les limites à droite et à gauche existent et sont égales. Précisons que si a est un point du bord de D, alors il suffira que la limite à droite ou la limite à gauche existe.

Exercice 4.1. *Vérifier la continuité des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 9 & si \quad x > 2 \\ -1 & si \quad x \leq 2 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + 3 & si \quad x \neq 0 \\ 3 & si \quad x = 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x + 2} & si \quad x < \dfrac{2}{3} \\ 3x - 2 & si \quad x \geq \dfrac{2}{3} \end{cases}$