Introduction aux graphes et aux matrices

Cours n°3

EPITA Cyber 2
2025-2026

Ce cours présente les définitions et notations basiques associées aux matrices et leur utilisation pour la représentation et l'implémentation des graphes.

1 Introduction

Les matrices permettent de représenter et manipuler des données sous un format tableaux. Ce cours introduit d'abord les notations liées aux matrices et les opérations algébriques associées. Ensuite, nous définirons les méthodes de représentation et d'implémentation des graphes, dont la méthode par matrices d'adjacences.

2 Définitions et Notations

Définition 1 (Matrice)**.** *Une* ***matrice*** *A de taille $m \times n$ est un tableau de nombres composé de m lignes et n colonnes.*
On note une matrice A sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Les termes individuels de la matrice sont appelés **coefficients** ou **éléments** de la matrice.
L'**élément** $a_{i,j}$ se trouve sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.
On dit que la matrice A est d'**ordre** m **par** n, ou que c'est une **matrice** $m \times n$.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 & 1 & 23 \\ -1 & 13 & -9 & 14 & 7 \end{bmatrix}$$

La matrice A est une matrice de taille 2×5, c'est-à-dire qu'elle contient 2 lignes et 5 colonnes.
Dans la matrice A, on a par exemple $a_{1,2} = -6$, $a_{1,5} = 23$, $a_{2,4} = 14$.

Une **matrice-ligne** est une matrice de taille $1 \times n$, c'est-à-dire ne possédant qu'une ligne.
Une **matrice-colonne** est une matrice de taille $m \times 1$, c'est-à-dire ne possèdant qu'une colonne.

Une **matrice carrée** est une matrice de taille $n \times n$, c'est-à-dire qui possède le même nombre de lignes que de colonnes. Dans la cas contraire, on dit que la matrice est **rectangulaire**.

Exemple :

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -10 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 12 & 6 & 4 \\ 2 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

La matrice B est une matrice-ligne avec 5 colonnes ; la matrice C est une matrice-colonne avec 4 lignes ; la matrice D est une matrice carrée de taille 3.

3 Algèbre Matricielle

Dans cette section, nous définirons les opérations algébriques pour les matrices (addition, soustraction, multiplication).

3.1 Matrice Nulle

Une matrice **nulle** est une matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0. On écrira simplement $A = 0$.

3.2 Matrice Identité

La matrice **identité** de taille n, noté I_n, est une matrice carrée dont les coefficients de la diagonale sont 1 et les autres 0.

Exemple :

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3 Egalité

Deux matrices sont **égales** si elles sont de même taille et si les éléments sont deux à deux égaux. Formellement, deux matrices A et B de taille $m \times n$ sont égales si $a_{i,j} = b_{i,j}$, pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix}$$

Les matrices A et B sont égales si $a_{1,1} = b_{1,1}$, $a_{1,2} = b_{1,2}$, $a_{2,1} = b_{2,1}$, $a_{2,2} = b_{2,2}$, $a_{3,1} = b_{3,1}$, et $a_{3,2} = b_{3,2}$.

3.4 Addition et Soustraction

Les opérations d'addition et de soustraction ne sont définies que pour deux matrices de même taille. L'**addition** de deux matrices A et B de taille $m * n$ retourne une matrice C de taille $m \times n$ telle que chaque élément de C est la somme des éléments de A et B à la même position.

Définition 2. *Soient A et B deux matrices de même taille $m \times n$.*
L'addition de A et B est la matrice $C = A + B$ dont les coefficients sont $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$, pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 9 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

L'addition matricielle hérite des propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition sur les nombres.

Propriété : *Soient trois matrices A, B, et C de même taille, alors on a :*
Commutativié : $A + B = B + A$
Associativié : $(A + B) + C = A + (B + C)$

La soustraction est définie de façon similaire.

3.5 Produit Scalaire

Soit un réel k (appelé dans ce contexte un **scalaire**) et une matrice A. Le produit de A par k, appelé **produit scalaire**, est la matrice kA où chaque élément de A est multiplié par k.

Définition 3. *Soient un réel k et une matrice A.*
Le produit de A par k est la matrice $B = kA$ dont les coefficients sont $b_{i,j} = k \cdot a_{i,j}$, pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Notation : Pour des questions de lisibilité, kA sera parfois noté $k \cdot A$ ou $k \times A$. En fait, de manière général, comme pour les réels, l'opérateur de multiplication pourra être noté soit $\times$, soit $\cdot$, ou même sans symbole.

Exemple :

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 9 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 14 \\ 18 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Il est également possible de factoriser une matrice :

$$\begin{bmatrix} 15 & -3 \\ 21 & 120 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 40 \end{bmatrix}$$

Le produit scalaire avec une matrice hérite de la propriété de distributivité du produit sur les nombres.

Propriété : *Soient deux scalaires réels k et k', et deux matrices A et B de même taille, alors on a par distributivité :*

$$k(A + B) = kA + kB$$
$$(k + k')A = kA + k'A$$

3.6 Produit Matriciel

Le produit de deux matrices est appelé **produit matriciel**. Le produit entre une matrice A et une matrice B n'existe que si le **nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B**. Cette condition est appelée la **condition de compatibilité**.
Commençons par étudier le cas du produit entre une matrice-ligne et une matrice-colonne, puis le produit de deux matrices carrées, et enfin le produit de deux matrices quelconques.

3.6.1 Produit d'une matrice-ligne et d'une matrice-colonne

Une matrice-ligne A de n_A colonnes et une matrice-colonne B de m_B lignes vérifient la condition de compatibilité si n_A est égale à m_B.

Définition 4. *Soient une matrice-ligne A de n colonnes et une matrice-colonne B de n lignes. Le produit matricielle de A et B est*

$$\begin{aligned} AB &= \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} \cdot b_{i,1} \\ &= a_{1,1} \cdot b_{1,1} + a_{1,2} \cdot b_{2,1} + \cdots + a_{1,n} \cdot b_{n,1}. \end{aligned}$$

Dans ce cas précis, A est ce qu'on appelle un **vecteur-ligne** et B un **vecteur-colonne**.
Notons $a_{1,*} = (a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{1,n})$ le vecteur formé des coefficients de A et
$b_{*,1} = (b_{1,1}, b_{2,1}, \cdots, b_{n,1})$ le vecteur formé des coefficients de B. Ici, A et $a_{1,*}$ sont fondamentalement le même objet mathématique mais l'un est vu comme une matrice tandis que l'autre est vu comme un vecteur (idem pour B et $b_{*,1}$).
Le produit matriciel AB se note alors aussi $a_{1,*} \cdot b_{*,1}$ ou $\langle a_{1,*}, b_{*,1} \rangle$ et est appelé **produit scalaire** (car le résultat est un scalaire et non un vecteur ou une matrice).

Exemple :
Soient une matrice-ligne A de 2 colonnes et une matrice-colonne B de 2 lignes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Le produit AB est un scalaire c obtenu par **produit scalaire** entre la ligne de A, noté $a_{1,*}$, et la colonne de B, noté $b_{*,1}$, c'est-à-dire :

$$c = a_{1,*} \cdot b_{*,1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 = 6$$

3.6.2 Multiplication de deux matrices carrées

Deux matrices carrées de même taille vérifient la condition de compatibilité. On peut donc calculer leur produit.

Soient A et B deux matrices carrées de taille 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Le produit AB est une matrice carrée C de taille 2 : $\quad C = AB = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 15 & 9 \end{bmatrix}$

Le coefficient $c_{1,1}$ est obtenu par le produit scalaire de la première ligne de A, noté $a_{1,*}$, par la première colonne de B, noté $b_{*,1}$:

$$c_{1,1} = a_{1,*} \cdot b_{*,1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 = 6$$

Puis, le coefficient $c_{1,2}$ est obtenu par le produit scalaire de la première ligne de A, noté $a_{1,*}$, par la seconde colonne de B, noté $b_{*,2}$:

$$c_{1,2} = a_{1,*} \cdot b_{*,2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = 4$$

En généralisant, le coefficient $c_{i,j}$ est obtenu par le produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Définition 5. *Soient A et B deux matrices carrées de même taille n.*
Le produit matriciel de A par B est la matrice $C = AB$ dont les coefficients sont $c_{i,j} = a_{i,*} \cdot b_{*,j}$, pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

3.6.3 Cas général

Lorsque la condition de compatibilité est vérifiée, le produit de deux matrices AB est une matrice C qui est composée du même nombre de lignes que A et du même nombre de colonnes que B, et dont chaque coefficient $c_{i,j}$ est obtenu par produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Définition 6. *Soient deux matrices A et B de taille $m_A \times n_A$ et $m_B \times n_B$.*
Le produit matriciel de A par B n'est défini que si $n_A = m_B$.
Dans ce cas, le produit matriciel AB est une matrice C de taille $m_A \times n_B$ et dont les coefficients sont $c_{i,j} = a_{i,*} \cdot b_{*,j}$, pour tout $1 \leq i \leq m_A$ et $1 \leq j \leq n_B$.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Le produit AB est une matrice C de taille 2×3 : $\quad C = AB = \begin{bmatrix} 18 & 14 & 26 \\ -4 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

Le coefficient $c_{1,1}$ est obtenu par le produit scalaire de la première ligne de A par la première colonne de B :

$$c_{1,1} = a_{1,*} \cdot b_{*,1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 - 1 + 4 \cdot 3 = 18$$

Le coefficient $c_{2,3}$ est obtenu par le produit scalaire de la deuxième ligne de A par la troisième colonne de B :

$$c_{2,3} = a_{2,*} \cdot b_{*,3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + 4 \cdot 5 + (-5) \cdot 4 = 3$$

Le produit matriciel vérifient les propriétés de distributivité et d'associativité :

Propriété : *Soient trois matrices A, B, et C, alors on a, sous condition que les produits suivant existent :*

$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(AB)C = A(BC)$$

3.7 Transposition

Définition 7. *Soit A une matrice de taille $m \times n$. La* ***matrice transposée*** *de A, noté $A^\top$, est une matrice de taille $n \times m$ dont les lignes sont les colonnes de A (et inversement). Autrement dit, on a $a^\top_{i,j} = a_{j,i}$.*

Propriété : *Si A est une matrice-ligne et B une matrice-colonne de même taille, alors*

- *$A^\top$ est une matrice-colonne ;*
- *$B^\top$ est une matrice-ligne ;*
- *$AB = B^\top A^\top$.*

Attention, généralement, on a $AB \neq B^\top A^\top$.

Propriété : *Soient A et B deux matrices compatibles. On a*

- $I_n^\top = I_n$
- $\left(A^\top\right)^\top = A$
- $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$
- $(kA)^\top = kA^\top$
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$

Définition 8. *Une matrice A est dite* ***symétrique*** *si $A^\top = A$.*
Une matrice A est dite ***antisymétrique*** *si $A^\top = -A$.*

4 Graphe : Représentation et Implémentation

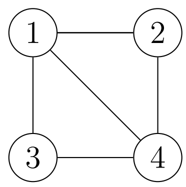
4.1 Représentation

On définit un graphe en spécifiant ses ensembles de sommets et d'arêtes/arcs.
On peut le représenter par une représentation sagittale ou par la matrice d'adjacence.

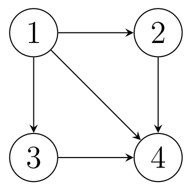
4.1.1 Représentation Sagittale

Une **représentation sagittale** est un diagramme où les sommets sont des cercles numérotés et les arêtes/arcs sont des liens entre ces cercles.
Pour un graphe pondéré, on ajoute le poids de chaque arête/arc dans la représentation.

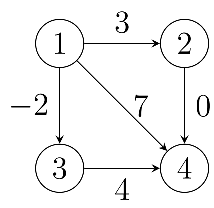
Exemple :



Graphe non orienté G_1



Graphe orienté G_2



Graphe G_2 pondéré

4.1.2 Matrice d'Adjacence

La **matrice d'adjacence** d'un graphe G d'ordre n est une matrice carrée de taille n dont les coefficients indiquent l'existence d'un lien entre deux sommets :

- $c_{i,j}$ est à 1 (ou vrai) si il existe une **arête entre** i **et** j, ou un **arc de** i **vers** j,
- $c_{i,j}$ est à 0 (ou faux) si il n'existe pas d'arête entre i et j, ou pas d'arc de i vers j.

Pour un graphe pondéré, on associe également une **matrice de poids** dont les coefficients sont égaux aux poids des arêtes/arcs.

Exemple :

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice d'adjacence de G_1

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice d'adjacence de G_2

$$W(G_2) = \begin{bmatrix} / & 3 & -2 & 7 \\ / & / & / & 0 \\ / & / & / & 4 \\ / & / & / & / \end{bmatrix}$$

Matrice de poids de G_2

Un graphe non orienté possède une **matrice d'adjacence symétrique**, c'est-à-dire, une matrice C où $c_{i,j} = c_{j,i}$, pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

4.2 Implémentation

Pour implémenter un graphe, nous utiliserons la **matrice d'adjacence** ou les **listes d'adjacence**.

4.2.1 Matrice d'adjacence

L'implémentation par **matrice d'ajdacence** consiste à représenter la matrice d'adjacence sous forme d'un tableau à deux dimensions de taille $n \times n$ et contenant des booléens (0 ou 1).
La matrice des poids peut remplacer la matrice d'adjacence, sous condition de trouver une valeur spéciale représentant l'abscence de liaisons.
Les caractéristiques de l'implémentation par matrice d'adjacence sont :

- L'accès à une liaison (recherche/ajout/suppresion) s'effectue en temps constant (accès à une case d'un tableau).
- Le parcours des successeurs d'un sommet nécessite de parcourir entièrement la ligne du tableau du sommet (de l'ordre de n).
- La mémoire nécessaire au stockage de la matrice est de l'ordre de n^2 quelque soit le nombre de liaisons.

4.2.2 Listes d'adjacence

L'implémentation par **listes d'ajdacence** consistent à donner pour chaque sommet la liste de ses voisins ou successeurs : la **liste d'adjacence**.

Exemple :

$$G_1 = \begin{array}{l} 1 : \{2,3,4\} \\ 2 : \{1,4\} \\ 3 : \{1,4\} \\ 4 : \{1,2,3\} \end{array} \qquad G_2 = \begin{array}{l} 1 : \{2,3,4\} \\ 2 : \{4\} \\ 3 : \{4\} \\ 4 : \{\} \end{array}$$

Listes d'adjacence de G_1 Listes d'adjacence de G_2

L'implémentation par **listes d'adjacence** est une implémentation dynamique : chaque liste possède une taille différente.
Cette implémentation repose sur l'implémentation dynamique de liste (étudiée en première année).
La liste des sommets du graphe peut aussi être implémenté de façon dynamique.
Les caractéristiques de l'implémentation par matrice d'adjacence sont :

- L'accès à une liaison nécessite de parcourir entièrement la liste du sommet i (de l'ordre de $d^+(i)$).
- Le parcours de la liste des successeurs du sommet i est de l'ordre du degré extérieur de i, $d^+(i)$.
- La mémoire nécessaire au stockage de la liste d'adjacence est de l'ordre de $n+m$ où m est le nombre d'arcs orientés (ou le double du nombre d'arêtes pour un graphe non orienté).

Le tableau ci-dessous résume les ordres de grandeur des opérations dans les graphes pour les deux implémentations proposées :

Opération	**matrice d'adjacence**	**listes d'adjacence**
accès arc (i,j)	1	$d^+(i)$
parcours successeurs de i	n	$d^+(i)$
parcours complet de G	n^2	$n+m$

L'implémentation est donc choisie principalement en fonction de la **densité du graphe**, c'est-à-dire, son nombre d'arêtes/d'arcs par rapport au nombre maximal.