Probabilités Discrètes

Cours n°7 - Variables Aléatoires Discrètes

EPITA 2025-2026

1 Introduction

L'objectif de ce cours est la formalisation de ce que nous avons précédemment étudié en probabilité. Commençons par essayer de comprendre précisément ce qui se déroule réellement lors d'une expérience probabiliste.
Prenons un exemple : on lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6, et on se demande quelle est la probabilité d'obtenir chaque numéro. Nous avons 6 issues possibles dans cette expérience, ces issues sont les évènements :

- A : "obtenir un 1"
- B : "obtenir un 2"
- C : "obtenir un 3"
- D : "obtenir un 4"
- E : "obtenir un 5"
- F : "obtenir un 6"

Nous pouvons alors associer une valeur à chaque issue de cette expérience :

- $A \mapsto 1$
- $B \mapsto 2$
- $C \mapsto 3$
- $D \mapsto 4$
- $E \mapsto 5$
- $F \mapsto 6$

Remarque : Nous aurions pu associer n'importe quelle valeur à chaque issue, même si cela aurait été moins naturel. Par exemple :

- $A \mapsto 6$
- $B \mapsto 3$
- $C \mapsto 5$
- $D \mapsto 1$
- $E \mapsto 2$
- $F \mapsto 4$

En faisant les associations ci-dessus, nous venons de créer une fonction définie sur Ω et à valeur dans $\mathbb{Z}$. Appelons cette fonction X. Calculer la probabilité d'une issue revient alors à calculer la probabilité que X prenne la valeur associer à cette issue.
Exemple : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(1))$.

La suite de ce cours est dédiée à la compréhension de ces fonctions associant une valeur à chaque issue.

2 Variables Aléatoires

Définition : Soit Ω un ensemble au plus dénombrable. On dit (dans ce cours) que Ω est un **espace probabilisable** si l'on peut définir une probabilité sur Ω.

Définition : Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et Ω' un espace probabilisable. On appelle

variable aléatoire de Ω vers Ω' toute fonction X définie sur Ω dont l'image est au plus dénombrable.

Remarque : Ici, comme Ω' est au plus dénombrable, on dit que X est une variable aléatoire discrète.

Définition : Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, Ω' un espace probabilisable et $X : \Omega \to \Omega'$ une variable aléatoire. On appelle **loi de probabilité de** X la famille de nombres $p_X(x)$ définis pour tout $x \in \Omega'$ par

$$p_X(x) = \mathbb{P}(A_x)$$

où A_x est l'évènement $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = x\}$, c'est-à-dire $X^{-1}(x)$.

Remarque : Cette dernière définition signifie $p_X(x)$ est la probabilité que X prenne la valeur x.

Remarque : En pratique on simplifie souvent les notations en écrivant $X = x$ au lieu de $X(\omega) = x$.

3 Indépendance

De même que pour les évènements, on peut parler d'indépendance entre des variables aléatoires. Le principe est similaire, mais un peu plus concis dans le cas des variables aléatoires.

Définition : Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires définies sur Ω. On dit que $X_1, ..., X_n$ sont **(mutuellement) indépendantes** si

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) \ .$$

4 Fonction de répartition

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est une fonction qui nous permet de quantifié la *répartition* des valeurs prises par X. Dans cette même idée, nous pouvons définir une autre fonction : la fonction de répartition de X.

Définition : Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On appelle **fonction de répartition** de X la fonction

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X \leq x) \end{array} .$$

Théorème :
La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X vérifie les propriétés suivantes.

- F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $F_X(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.
- $F_X(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

De plus, si Y est une autre variable aléatoire et que $F_X(x) = F_Y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors X et Y suivent la même loi de probabilité.

5 Espérance

Lorsque l'on étudie une variable aléatoire une question intéressante est celle du comportement moyen qu'elle va adopter. Autrement dit on peut se demander quelles valeurs va prendre cette variable aléatoire en moyenne.
Exemple : On lance un dé équilibré à 6 faces, le but étant d'obtenir le meilleur score possible. On peut lancer le dé une ou deux fois, mais seul le dernier lancer réalisé comptera. Quelle est alors la meilleure stratégie pour obtenir le meilleur score ?
Pour répondre à cette question, il faut connaître le score moyen que l'on va obtenir en lançant le dé. Ce score moyen est

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5 \ .$$

Ainsi, pour optimiser le score final, on relance le dé si on obtient un score inférieur à 3,5 au premier lancer (c'est-à-dire 1, 2 ou 3), sinon on garde le score du premier lancer.
Intuitivement, cette quantité (3,5) est le score que l'on peut espérer obtenir avant de commencer à jouer. Ceci nous mène vers les définitions suivantes :

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers Ω. On dit que X est **intégrable** si

$$\sum_{x\in\Omega} |x|\mathbb{P}(X=x) \in \mathbb{R} \ .$$

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète intégrable définie sur un univers Ω. On appelle **espérance** de X la quantité

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{x\in\Omega} x\mathbb{P}(X=x) \ .$$

Remarque : Si $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, on retrouve bien la formule de l'exemple précédent :

$$1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3,5 \ .$$

Une propriété utile de l'espérance, pour son calcul, est sa linéarité, que l'on décrit dans la proposition suivante.

Propriété : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mu\mathbb{E}(Y) \ .$$

6 Variance

Une autre quantité intéressante concernant les variables aléatoires est la variance. Si X est une variable aléatoire, la variance de X représente l'éloignement des valeurs de X à l'espérance de X. Ceci permet de savoir si les valeurs de X sont proches les unes des autres ou au contraire très éloignées. Cette partie est dédiée à la définition formelle de la variance.

Définition : Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire discrète définie sur un univers Ω. On dit que X est de **puissance r intégrable** si

$$\sum_{x\in\Omega} |x|^r\mathbb{P}(X=x) \in \mathbb{R} \ .$$

Dans ce cas, on appelle **moment d'ordre r** de X la quantité

$$\mathbb{E}(X^r) := \sum_{x\in\Omega} x^r \mathbb{P}(X = x) .$$

Remarque : L'espérance de X correspond au moment d'ordre 1 de X.

Remarque : Si X admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$ alors X admet un moment d'ordre n pour tout $1 \leq n \leq r$.

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. On appelle **variance** de X la quantité

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) .$$

On appelle également **écart-type** de X la quantité

$$\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}(X)} .$$

Propriété : Soient X une variable aléatoire et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\mathrm{Var}(\lambda X + \mu) = \lambda^2 \ \mathrm{Var}(X) .$$

Propriété : Formule de Koenig
Soient X une variable aléatoire. On a

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 .$$

7 Exercices

Exercice 1 :
Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. Vérifier que la formule

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

est bien définie.

Exercice 2 :
Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. Montrer que si X est constante alors $\mathrm{Var}(X) = 0$.

Exercice 3 :
On jette deux dés équilibrés à 6 faces. On note S la variable aléatoire qui calcule la somme des résultats des lancers obtenus.

1. Quel est l'univers de cette expérience ?
2. Déterminer la loi de probabilité de S.
3. Calculer $F_S(5)$.
4. Calculer l'espérance et la variance du double de S.

Exercice 4 :
On jette deux dés équilibrés à 6 faces, un rouge et un bleu. Soient X la variable aléatoire du score du dé rouge, et Y la variable aléatoire du score du dé bleu.

1. Donner l'univers de l'expérience qui concerne X et celui de l'expérience qui concerne Y.
2. Donner les lois de probabilités respectives de X et Y.
3. Calculer la probabilité que X et Y soient égales.

Exercice 5 :
Durant le semestre, les étudiants d'une classe passent trois évaluations : deux contrôles continues (X_1 et X_2) notées sur 5 et un examen final (Z) noté sur 25. Seules deux notes sont retenues au final : le maximum (Y) des deux notes de contrôle continue, et la racine carré (T) de la note de l'examen final arrondie à l'entier supérieur.
On considèrera dans cet exercice que les notes X_1, X_2 et Z sont entières et non nulles.

1. Donner les univers de Y et de T.
2. Déterminer les lois de probabilités de Y et de T.
3. Que constate-t-on ?

Exercice 6 :
On lance un dé équilibré à 6 faces, le but étant d'obtenir le meilleur score possible. On peut lancer le dé une ou deux fois, mais seul le dernier lancer réalisé comptera. Quelle est l'espérance du score à la fin du jeu ? Et si on a le droit à trois lancers ?

Exercice 7 : Paradoxe de Saint-Pétersbourg
On étudie un jeu d'argent dans lequel le joueur mise une somme M (fixée par la banque), et démarre avec une cagnotte de 1 euro. Le jeu se déroule en plusieurs tours, et à chaque tour le joueur tire une pièce à pile ou face. Si c'est pile, le joueur remporte la cagnotte et le jeu s'arrête. Si c'est face, la valeur de la cagnotte est doublée et on passe au tour suivant.
Pour quelle valeur de M la joueur a-t-il intérêt à jouer ?

Exercice 8 :
On considère trois dés A, B et C.

- L'ensemble des valeurs de A est $E_A = \{3, 3, 3, 3, 3, 6\}$.
- L'ensemble des valeurs de B est $E_B = \{2, 2, 2, 5, 5, 5\}$.
- L'ensemble des valeurs de C est $E_C = \{1, 4, 4, 4, 4, 4\}$.

Lorsqu'on lance deux dés X et Y simultanément, on dit que X gagne si la valeur de X est supérieure à celle de Y, et que Y gagne si la valeur de Y est supérieure à celle de X. On note $X \succ Y$ si $\mathbb{P}(X \text{ gagne contre } Y) \geq \mathbb{P}(Y \text{ gagne contre } X)$.

1. Calculer l'espérance et la variance de chaque dé.
2. Montrer que $A \succ B$.

3. Montrer que $B \succ C$.

4. Qu'est-il tentant d'en déduire sur A et C ? Cette déduction est-elle juste ?

Exercice 9 :
Une urne contient 7 jetons : 2 bleus, 3 blancs, 2 rouges. On tire 3 jetons au hasard sans remise. On note X le nombre de jetons bleus tirés, et Y le nombre de jetons blancs tirés. Calculer les probabilités suivantes.

1. $\mathbb{P}(X > Y)$.
2. $\mathbb{P}(X = Y)$.
3. $\mathbb{P}(X + Y = 1)$.

Exercice 10 :
Soient X une variable aléatoire et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Démontrer la formule de Koenig ainsi que la formule

$$\mathrm{Var}(\lambda X + \mu) = \lambda^2 \ \mathrm{Var}(X) \ .$$

Exercice 11 :
Alice et Bob jouent aux dés. Ils lancent tour à tour un dé équilibré à 6 faces, Alice commence, et le gagnant est le premier à obtenir un 6. On s'intéresse aux trois évènements :

- A : "Alice gagne."
- B : "Bob gagne."
- C : "Il n'y a pas de gagnant."

Pour calculer les probabilités de A, B et C, nous pourrons utiliser d'autres évènements :

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n : "Fin de la partie au n-ème lancer."
- Pour $j \in \mathbb{N}^*$, S_j : "Le j-ème lancer donne un 6."

On considèrera également que les lancers sont mutuellement indépendants.

1. Réécrire A, B et C en fonction des F_n et des S_j.
2. Quelle condition sur S_1 permet la réalisation de F_1.
3. Soit $n \geq 2$. Quelle condition sur les S_j, $j \leq n$, permet la réalisation de F_n ?
4. Donner l'univers du jeu en tant qu'expérience probabiliste.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(F_n)$.
6. En déduire $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.
7. Que vaut $\mathbb{P}(C)$?