Fiche d'exercice 2 : Système d'équations à deux ou trois inconnues

1 Système d'équations à deux inconnues

1.1 Résolution algébrique d'un système

Exercice 1.1. *Résoudre chacun des systèmes suivants en précisant le nombre de solutions :*

1. $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-y=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x-6y=2 \\ 6x-9y=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=2y-5 \\ 3y=7x-2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2=5 \\ 3x+4y=7 \end{cases}$

Exercice 1.2. *On considère le système suivant :*

$$\begin{cases} 4x-3y=6 \\ x+5y=13 \end{cases}$$

1. *Vérifiez que le couple* $(3,2)$ *est une solution du système.*
2. *Est-ce la seule ? Si non, en donnez une autre.*

Exercice 1.3. *On considère le système paramétré par a suivant :*

$$\begin{cases} (a+1)x+(3a+2)y=4 \\ 2ax-6ay=5 \end{cases}$$

1. *Pour quelle(s) valeur(s) de a, le système a-t-il une unique solution ?*
2. *Donner pour les autres cas, le nombre de solutions.*

Exercice 1.4. *Résoudre chacun des systèmes suivants :*

1. $\begin{cases} 8x+4y=-3 \\ 6x+3y=-4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x+2y=130 \\ 3x+4y=135 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4s-3t=32 \\ -s+3t=19 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \alpha+\beta=40 \\ 5\alpha+3\beta=180 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -10x+4y=-74 \\ 3x+2y=19 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x+4y=3 \\ x+2y=-4 \end{cases}$

Exercice 1.5. *Résolvez chacun des systèmes suivants après les avoir remis sous forme classique.*

1. $\begin{cases} x+1=2(y-1) \\ x-1=y+1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} d+3=u \\ 10d+u+27=10u+d \end{cases}$

3. $\begin{cases} g-p=75 \\ g=4p+21 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{a+3}{b+3}=\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{a-3}{b-3}=\dfrac{1}{7} \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2(y-(x-y))=x \\ x+(x+x-y)=90 \end{cases}$

6. $\begin{cases} (x+1)(y+2)=xy-4 \\ (x+1)^2+(y-3)^2=x^2+y^2 \end{cases}$

Exercice 1.6. *On considère le système :*

$$\begin{cases} 6x-12y=-18 \\ -15x+30y=45 \end{cases}$$

1. *Justifiez que le système d'équations admet plusieurs solutions.*
2. *Déterminez l'ensemble des solutions du système.*

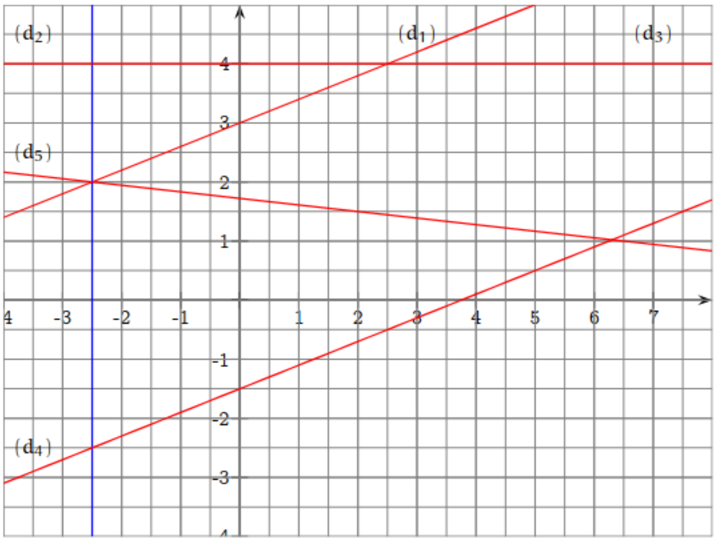
1.2 Résolution graphique d'un système

Exercice 1.7. *On considère le système :*

$$\begin{cases} -2x+y=-1 \\ -5x+y=2 \end{cases}$$

1. *Justifiez le nombre de solutions du système.*
2. *Donnez les équations réduites des droites associées à ce système.*
3. *À l'aide de la calculatrice graphique, tracez les droites et déduisez-en une approximation de la solution.*
4. *Vérifiez par le calcul que le couple obtenu est bien la solution exacte du système.*

Exercice 1.8. *Déterminez une équation de chacune des droites tracées ci-dessous, puis en déduisez la résolution graphique de chacun des systèmes donnés.*



1. $\begin{cases} y = \frac{2}{5}x + 3 \\ 2x + 5 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x - 10y = 15 \\ 2x + 18y = 31 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = 4 \\ 2x + 5 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{2} \\ 2x - 5y = -15 \end{cases}$

1.3 Changement de variable

On appelle **changement de variable** le fait d'associer certaines formes, correspondant aux variables du système, à un nouveau système de variables afin de transformer le système initial en un autre système que l'on sait résoudre. Ici, il va donc s'agir de transformer les systèmes en des systèmes linéaires. Une telle manipulation (qui est bien pratique) n'est malheureusement pas toujours possible... Cela dépend évidemment de la "forme" du système que l'on considère.

Exercice 1.9. *On considère le système :*

$$\begin{cases} 4\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \\ -3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 10 \end{cases}$$

1. *Le système peut-il être qualifié de linéaire ? Expliquer.*
2. *Réécrivez le système en posant $u = \sqrt{x}$ et $v = \sqrt{y}$. C'est précisément cela que l'on appelle un changement de variable.*
3. *Résoudre le système obtenu.*
4. *En déduisez les solutions du système initial.*

Exercice 1.10. *Résoudre chacun des systèmes suivants après avoir effectué un changement de variables :*

1. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} + \dfrac{y-3}{4} = 7 \\ 3\dfrac{x+3}{2} + \dfrac{y-3}{4} = 13 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3(x-3)^2 - \dfrac{2}{y-1} = -5 \\ 7(x-3)^2 + \dfrac{4}{y-1} = 23 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ -2x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 35 \\ 3x^2 + 2y^2 = 30 \end{cases}$

2 Système d'équations à trois inconnues

L'objet de cette section est de généraliser la méthode de résolution par combinaison des équations d'un même système pour résoudre des systèmes à trois variables. Il s'agit peut-être même d'introduire la notation matricielle, qui simplifie grandement le travail et évite les erreurs de calcul.

Exercice 2.1. *Résoudre les systèmes suivants :*

1. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ -x + 2y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$

Exercice 2.2. *Résoudre les systèmes suivants :*

1. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -2x - y = 1 \\ x + z = -1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

3 Mise en équation de problèmes

Exercice 3.1. *Mettre chacun de ces problèmes en équation. On ne demande pas de résoudre les systèmes obtenus.*

1. *Quatre DVD et deux CD coûtent 130 €. Trois DVD et quatre CD coûtent 135 €. Quel est le prix d'un DVD ? d'un CD ?*
2. *Simon a 40 livres. Les uns ont une épaisseur de 5 cm, les autres ont une épaisseur de 3 cm. S'il les range tous sur un même rayon, ils occupent 1,80 m. Combien Simon a-t-il de livres de chaque sorte ?*
3. *Dans un troupeau de chameaux et de dromadaires, on compte 28 têtes et 45 bosses. Combien y a-t-il de dromadaires ? (une bosse)*
4. *Trouver une fraction telle que, si l'on ajoute 3 à son numérateur et à son dénominateur, on trouve $\frac{2}{5}$ mais si l'on retranche 3 à son numérateur et à son dénominateur, on trouve la fraction $\frac{1}{7}$.*

5. *Trouver deux nombres, sachant que la différence du plus grand et du plus petit est 75 et que si l'on divise le plus grand par le plus petit, le quotient est 4 et le reste est 21.*
6. *Dans un nombre de deux chiffres, le chiffre des dizaines est inférieur de 3 à celui des unités. Si on inverse les deux chiffres, on obtient un nombre qui dépasse de 27 le premier. Donner toutes les solutions possibles.*
7. *Un cheval et un mulet, portant tous les deux de lourds sacs, marchaient côte à côte. Le cheval, se plaignant du poids excessif de son fardeau, le mulet lui répondit : "Si je te prends un sac, ma charge sera deux fois plus lourde que la tienne, mais si tu me prends un sac, ton fardeau sera égal au mien." Dites, mathématiciens éclairés, combien de sacs portait le cheval et combien de sacs portait le mulet.*
8. *J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez, et quand vous aurez l'âge que j'ai, la somme de nos âges sera de 90 ans. Peut-on connaître l'âge du narrateur ? Si oui, quel est cet âge ?*

Exercice 3.2. *Dans le plan P muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les deux droites D_1 et D_2 d'équations respectives : $x + 2y - 4 = 0$ et $2x - y - 3 = 0$. Déterminer les coordonnées du point A, intersection des droites D_1 et D_2. Donner la forme générale de l'équation cartésienne d'une droite de P passant par A. Retrouver cette forme pour les équations de D_1 et D_2.*

Exercice 3.3. *Le plan P est muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.*

1. *Déterminer une équation de la parabole passant par les points $A = (-2, 5)$, $B = (-1, -4)$ et $C = (1, 2)$.*
2. *Déterminer la forme générale d'une équation d'une parabole passant par les points $A = (-2, 5)$ et $C = (1, 2)$.*