Introduction aux graphes et aux matrices

Cours n°2

EPITA Cyber 2
2025-2026

Ce cours présente certains graphes particuliers ainsi que des problèmes de modélisation.

1 Introduction

La théorie des graphes fournie des outils pour modéliser et résoudre de nombreux problèmes dans des domaines très variés. En particulier, on utilise certains types de graphes pour modéliser des problèmes de localisation d'installation, de couplage, et bien d'autres.

2 Graphes particuliers

2.1 Graphe Complet

Définition 1 (Graphe Complet)**.** *Un graphe simple non orienté $G := (X, U)$est dit* ***complet*** *lorsque toute paire de sommets $i, j \in X$ est reliée par une arête.*

Proposition : *Le nombre d'arêtes dans un graphe complet $G := (X, U)$ d'ordre n est* $\sharp U = \frac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration. Il suffit de dénombrer le nombre de couples $(i, j) \in X^2$ pour lesquels $i \neq j$ (graphe simple). Ce qui nous donne $n(n-1)$ couples (orientés) possibles.
On remarque ensuite que dans un graphe non orienté (i, j) et (j, i) représentent la même arête $\{i, j\}$ et donc, dans notre comptage précédent, nous avons compté deux fois chaque arête ; d'où le facteur $\frac{1}{2}$ dans la formule finale. □

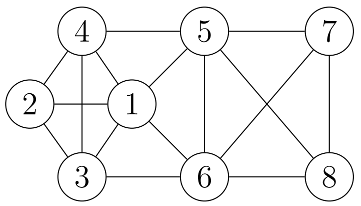
Remarque : La quantité $\frac{n(n-1)}{2}$ est simplement le coefficient binomial $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$ qui représente exactement ce que l'on cherche à dénombrer.

Exercice : Généralisez la notion de graphe complet pour les graphes orientés et non orientés, simples et non simples (avec boucles). Dénombrez à chaque fois, le nombre d'arêtes ou arcs.

2.2 Clique

Définition 2 (Clique)**.** *Soit un graphe simple non orienté $G := (X, U)$.*
Une ***clique*** *est un sous-ensemble de sommets $K \subseteq X$ tel que le sous-graphe engendré par K soit complet, c'est-à-dire que toute paire de sommets $i, j \in K$ est reliée par une arête.*
La ***taille d'une clique*** *est son nombre de sommets.*

Exemple :



Tout sommet isolé est une clique ;
$X_1 = \{1; 2; 3; 4\}$ est une clique de taille 4 ;
$X_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ n'est pas une clique ;
$X_3 = \{1; 5; 6\}$ est une clique de taille 3 ;
$X_4 = \{5; 6; 7; 8\}$ est une clique de taille 4 ;
$X_5 = \{2\}$ est une clique de taille 1.

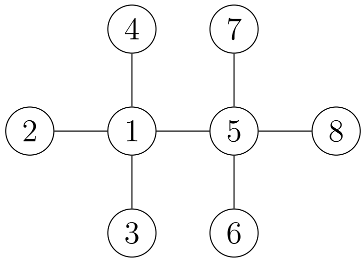
FIGURE 1 – Un graphe non orienté G d'ordre 8.

Exemple de modélisation :
Considérons un réseau social professionel dans lequel les utilisateurs sont connectés si ils ont déjà travaillé ensemble. L'entreprise qui gère le réseau souhaite connaître le plus grand groupe d'utilisateurs dans lequel tous les membres ont déjà travaillé ensemble. Comment modéliser ce problème à l'aide d'un graphe ?

2.3 Stable

Définition 3 (Stable)**.** *Soit un graphe simple non orienté $G := (X, U)$.*
Un ***stable*** *est un sous-ensemble de sommets $K \subseteq X$ tel qu'aucune paire de sommets $i, j \in K$ ne soit reliée par une arête.*
La ***taille d'un stable*** *est son nombre de sommets.*

Exemple :



Tout sommet isolé est un stable ;
$X_1 = \{2; 4; 5\}$ est un stable de taille 3 ;
$X_2 = \{2; 3; 5; 7\}$ n'est pas un stable ;
$X_3 = \{3; 4; 6; 7\}$ est un stable de taille 4 ;
$X_4 = \{2; 3; 4; 6; 7; 8\}$ est une stable de taille 6 ;
$X_5 = \{2\}$ est stable de taille 1.

FIGURE 2 – Un graphe non orienté G d'ordre 8.

Exemple de modélisation :
Une entreprise d'installation d'antennes radio souhaite s'implanter dans une nouvelle ville. Une étude préalable a recensé les sites potentiels pour ces antennes $\{s_1, s_2, \ldots, s_l\}$. Pour des raisons d'interférences les antennes ne peuvent pas être situées à moins de 500m les unes des autres. L'entreprise souhaite maximiser le nombre d'antennes a installer. Comment modéliser ce problème à l'aide d'un graphe ?

2.4 Graphe Biparti et Couplage

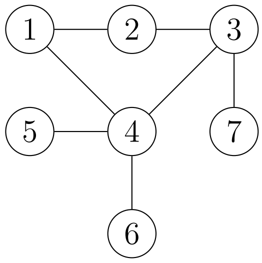
Une **partition** de l'ensemble des sommets X d'un graphe est un ensemble de *parties* $X_1, \ldots, X_l \subseteq X$, tel que

(1) tout sommet appartient à une partie de la partition, c'est-à-dire $\bigcup_{i=1}^{l} X_i = X$,

(2) chaque sommet n'appartient qu'à une seule partie de la partition, c'est-à-dire $X_i \cap X_j = \emptyset$ pour tout couple de parties (X_i, X_j).

Définition 4 (Graphe biparti)**.** *Un graphe G est un **graphe biparti** si il existe une partition en deux sous-ensembles X_1 et X_2 telle que tout arc/arête de G possède une extrémité dans X_1 et une autre dans X_2.*
*Autrement dit, un graphe G est un **graphe biparti** si il existe une partition en deux sous-ensembles X_1 et X_2 telle que X_1 et X_2 soient des stables.*

Exemple :



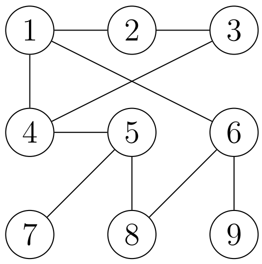
Soit $X_1 = \{1;3;5;6\}$; $X_2 = \{2;4;7\}$; $X_3 = \{3;4;6;7\}$; $X_4 = \{1;2;5\}$
X_1 et X_2 forment une partition de X.
X_3 et X_4 forment une partition de X.
X_1 et X_3 ne forment pas une partition de X.
X_1 et X_2 sont tels que toutes les arêtes de G ont une extrémité dans X_1 et l'autre dans X_2. $\Rightarrow G$ est un graphe biparti.

Figure 3 – Un graphe non orienté G d'ordre 7.

Les graphes bipartis sont fréquemment utilisés pour modéliser des problèmes de **couplage**, c'est-à-dire, des situations où l'on cherche à former des couples de sommets.

Définition 5 (Couplage)**.** *Soit un graphe G.*
*Un **couplage** W est un ensemble d'arêtes/arcs deux à deux non adjacents.*
*Un couplage W sur G est dit **maximal** s'il possède un nombre maximal d'arêtes pour G.*
*Un couplage W sur G est dit **parfait** si tout sommet de G est extrémité d'une arête de W.*

Exemple :



$W_1 = \{\{1,4\};\{2,3\};\{5,8\}\}$ est un couplage de G.
$W_2 = \{\{1,2\};\{3,4\};\{5,7\};\{6,8\}\}$ est un couplage maximal de G.
W_2 n'est pas un couplage parfait de G.
On ne peut pas avoir un couplage parfait dans un graphe d'ordre impair.

Figure 4 – Un graphe non orienté G d'ordre 9.

Exemple de modélisation :
Durant la seconde guerre mondiale, l'armée de l'air anglaise possédait des avions biplaces, nécessitant deux pilotes. Certains pilotes ne pouvaient pas faire équipe pour des raisons de différence de langues ou de compétences. Dans ce contexte, on cherche à déterminer le nombre maximum d'avions pouvant voler simultanément. Comment modéliser ce problème à l'aide d'un graphe ?

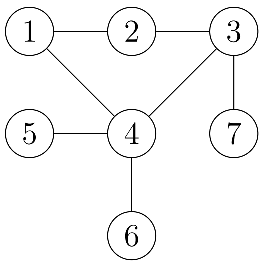
2.5 Arbre et Arboresence

Définition 6 (Arbre)**.** *Un* ***arbre*** *est un graphe simple non-orienté, connexe, et sans cycle élémentaire.*

Un arbre ne contient pas de boucle (une boucle est un cycle particulier). C'est donc nécessairement un graphe simple.

Définition 7 (Forêt)**.** *Une* ***forêt*** *est un graphe sans cycle élémentaire. Ainsi, une forêt est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.*

Exemple :



Soit $X_1 = \{1;2;3\}$; $X_2 = \{1;2;3;4\}$; $X_3 = \{1;2;3;7\}$; $X_4 = \{4;5;6\}$; $X_5 = \{4;5;6;2\}$
Le sous-graphe $G[X_1]$ est un arbre de taille 3.
Le sous-graphe $G[X_2]$ n'est pas un arbre.
Le sous-graphe $G[X_3]$ est un arbre de taille 4.
Le sous-graphe $G[X_4]$ est un arbre de taille 3.
Le sous-graphe $G[X_5]$ n'est pas un arbre.

FIGURE 5 – Un graphe non orienté G d'ordre 7.

Proposition : *Soit un graphe non orienté G d'ordre n.*
Les trois affirmations suivantes sont équivalents :

(i) G est un arbre,

(ii) G contient $(n-1)$ arêtes et est sans cycle,

(iii) G contient $(n-1)$ arêtes et est connexe.

Définition 8 (Arborescence)**.** *Une* ***arborescence*** *de racine r, ou* ***arbre enraciné*** *en r, est un graphe orienté, sans circuit, et tel que chaque sommet (sauf la racine r) possède un unique prédécesseur.*

Les **arbres binaires** étudiés en première année sont en fait des **arborescences**, dont l'orientation est implicite (de la racine vers les feuilles).