

Probabilités Discrètes

Cours n°8 - Lois Usuelles et Inégalités

EPITA 2025-2026

1 Introduction

Lors des cours précédents nous avons eu l'occasion d'étudier la loi uniforme. Cette loi de probabilité est intéressante car elle décrit de nombreuses expériences probabilistes (jet d'un dé équilibré, tirage de jetons dans une urne, roulette au casino...), connaître cette loi nous permet donc de mieux comprendre un panel varié d'expérience. Pour cette raison il est intéressant de se demander si il existe d'autres lois de probabilité communes à un nombre conséquent de phénomènes probabilistes. Le but de ce cours est justement de présenter certaines de ces lois *usuelles*, ou *classiques*.

Afin de bien comprendre chacune des lois suivantes, nous nous intéresserons notamment à leurs espérances et leurs variances, lorsque celles-ci existent. Pour cela nous aurons besoin de calculer des sommes et des séries, c'est pourquoi les premières parties de ce cours portent sur ces thèmes.

Enfin, pour conclure ce cours, nous étudierons quelques inégalités utiles en probabilités. En effet jusqu'à maintenant nous avons vu comment calculer des probabilités, trouver des lois de variables aléatoires, leurs espérances... nous nous sommes donc intéresser au calcul exact de chacune de ces quantités. Toutefois il est parfois difficile et peu utile d'établir de telles égalités, et il peut suffire d'une approximation pour obtenir toute l'information nécessaire à une étude. Nous nous intéresserons donc à différents exemples d'inégalités probabilistes.

2 Sommes

Nous rappelons dans cette partie quelques formules de sommes utiles.

2.1 Somme à termes constants

Soient $n_1 < n_2 \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbb{R}$. On a

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} u = (n_2 - n_1)u .$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbb{R}$. On a

$$\sum_{k=1}^n u = nu .$$

2.2 Somme d'entiers

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} .$$

2.3 Somme de carrés

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Remarque : Il existe de nombreuses démonstrations des formules 2.2 et 2.3, il peut être intéressant d'en connaître certaines afin de retrouver les formules.

2.4 Binôme de Newton

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = (x+y)^n .$$

Une formule utile afin de manipuler plus facilement la formule du binôme de Newton est la suivante :

Formule du pion : Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 \leq k \leq n$. Alors

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} .$$

3 Séries

Nous étudions dans cette partie quelques formules de séries utiles.

Rappel : Définition

En mathématiques une **série** peut être définie comme l'addition des termes d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Intuitivement cela peut être vu comme une "somme infinie", bien que cette vision manque de précision.

3.1 Série Géométrique

Soient $n_1 < n_2 \in \mathbb{N}$ et $a, q \in \mathbb{R}$. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} = (aq^k)_{k \in \mathbb{N}}$. On a

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} u_k = a \sum_{k=n_1}^{n_2} q^k = a \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q} .$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} .$$

Enfin, si $q \in]-1, 1[$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} .$$

3.2 Série Géométrique Dérivée

Soit $q \in]-1, 1[$. On a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} .$$

Remarque : Cette série est appelée série géométrique *dérivée* car elle est obtenue à partir de la dérivée de $q \mapsto q^k$. Si $k \in \mathbb{N}^*$ et $q \in]-1, 1[$ alors

$$\frac{\partial}{\partial q}(q^k) = kq^{k-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{1}{(1-q)^2} .$$

Remarque : Lorsque l'on manipule des séries on ne peut pas toujours dériver *terme à terme* comme dans le cas de la série géométrique. Il existe pour cela des critères, mais ceux-ci ne feront pas l'objet de ce cours.

3.3 Série Géométrique Dérivée Seconde

Soit $q \in]-1, 1[$. On a

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3} .$$

Remarque : Les formules des séries géométriques, géométriques dérivées et géométriques dérivées secondes ne sont valables que pour $q \in]-1, 1[$. Elles sont fausses si $q \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

3.4 Série Exponentielle

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x .$$

Remarque : Cette série est parfois utilisée pour définir la fonction exponentielle, d'où son nom.

4 Lois Usuelles

Dans ce qui suit X désigne une variable aléatoire.

4.1 Loi de Bernouilli

On dit que X suit une loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0, 1]$ si X ne peut prendre que les valeurs 0 et 1 et que

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p .$$

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Description : La loi de Bernouilli décrit le lancer d'une pièce non équilibrée à pile ou face.

Espérance : $\mathbb{E}(X) = p$.

Variance : $\text{Var}(X) = p(1 - p)$.

4.2 Loi Uniforme

On dit que X suit une loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ si

$$\mathbb{P}(X = x_k) = \frac{1}{n} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} .$$

On note $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\})$.

Description : La loi uniforme décrit le lancer d'un dé équilibré à n faces.

Espérance : $\mathbb{E}(X) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

Variance : Si $\{x_1, \dots, x_n\} = \{1, \dots, n\}$, $\text{Var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$.

4.3 Loi Binomiale

On dit que X suit une loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$ si l'ensemble des valeurs de X est $\{0, \dots, n\}$ et si

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\} .$$

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Description : La loi binomiale décrit le nombre de succès lorsque l'on répète n épreuve de Bernouilli indépendantes de paramètres p . On peut la voir comme la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernouilli $\mathcal{B}(p)$.

Espérance : $\mathbb{E}(X) = np$.

Variance : $\text{Var}(X) = np(1-p)$.

4.4 Loi Hypergéométrique

On dit que X suit une loi hypergéométrique de paramètre $N, M, n \in \mathbb{N}$ si l'ensemble des valeurs de X est $\{0, \dots, M\}$ et si

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{et} \quad 0 \leq n - k \leq N - M \quad \forall k \in \{0, \dots, n\} .$$

On note $X \sim \mathcal{H}(N, M, n)$.

Description : N personnes participent à un vote pour une réforme. M personnes sont pour cette réforme (donc $N - M$ sont contre) et on tire aléatoirement (sans remise) n personnes dans le groupe pour sonder leurs opinions sur le vote. La loi hypergéométrique, parfois surnommée loi des sondages, décrit le nombre de votant favorable à la réforme dans l'échantillon de n personnes.

Espérance : $\mathbb{E}(X) = n \frac{M}{N}$.

Variance : $\text{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1} \times n \frac{M}{N} \times \left(1 - \frac{M}{N}\right)$.

4.5 Loi Géométrique

On dit que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ si l'ensemble des valeurs de X est $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et si

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = +\infty) = 0 .$$

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Description : La loi géométrique décrit le nombre d'expérience de Bernouilli indépendantes et de même paramètre p à réaliser pour obtenir le premier succès.

Espérance : $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.

Variance : $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

4.6 Loi de Poisson

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ si l'ensemble des valeurs de X est \mathbb{N} et si

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Description : La loi de Poisson décrit le nombre d'évènements identiques arrivant dans un intervalle de temps donné. Par exemple le nombre de voiture traversant un pont entre midi et 14 heures. Pour cela il faut supposer les évènements indépendants.

Espérance : $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

Variance : $\text{Var}(X) = \lambda$.

5 Inégalités

5.1 Markov

Lorsque l'on étudie une variable aléatoire X , on se demande souvent si les valeurs éloignées de son espérance ont une grande probabilité d'être prise par X , ou si au contraire cette probabilité est faible. L'inégalité de Markov nous permet de contrôler cette probabilité.

Inégalité de Markov :

Soit X une variable aléatoire positive et intégrable. On a

$$\forall t > 0 , \mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t} .$$

Remarque : Une variable aléatoire est dite positive si elle ne prend que des valeurs positives.

5.2 Tchebychev

Lorsque l'on étudie une variable aléatoire X , on se demande souvent si ses valeurs sont éloignées les unes des autres autour de son espérance, ou si au contraire elles sont rapprochées. L'inégalité de Tchebychev nous permet de contrôler cet éloignement.

Inégalité de Tchebychev :

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. On a

$$\forall t > 0 , \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > t) \leq \frac{\text{Var}(X)}{t^2} .$$

Remarque : On peut également formuler cette inégalité comme suit :

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. On a

$$\forall u > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq u\sigma(X)) \leq \frac{1}{u^2}.$$

On passe de la première inégalité à la seconde en posant $t = u\sigma(X)$ et en se souvenant que $\sigma(X)^2 = \text{Var}(X)$.

6 Exercices

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer la formule suivante grâce à la formule de l'aire d'un triangle.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2 :

Démontrer la formule du pion.

Exercice 3 :

On joue avec deux dés équilibrés à 6 faces. On jette un premier dé. On jette le second dé jusqu'à obtenir la même valeur que le premier dé. On note X le nombre de lancer du second dé.

1. Établir la loi de X .
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.

Exercice 4 :

On jette deux fois un dé équilibré à 6 faces, on note D_1 et D_2 les résultats des deux lancers. Soient $X = D_1 + D_2$ et $Y = D_1 - D_2$.

1. Rappeler la loi de D_1 . Calculer son espérance et sa variance. En déduire les espérances et les variances de X et Y .
2. Calculer $\mathbb{E}(D_1 D_2)$.

Exercice 5 :

On lance 3600 fois un dé équilibré à 6 faces. On note S le nombre de 1 obtenus.

1. Calculer $\mathbb{P}(480 < S < 720)$.
2. Sans vous aidez de la question 1, minorer $\mathbb{P}(480 < S < 720)$.
3. Trouver une valeur $u \in \{0, \dots, 3600\}$ telle que $\mathbb{P}(S \geq u) \leq 0,05$.

Exercice 6 :

Calculer l'espérance et la variance de chacune des lois usuelles du cours.