Fiche d'exercices 4 : Calcul de la dérivée d'une fonction

1 Rappel élémentaire sur la dérivation

Nous présentons ici, et de manière exhaustive, l'ensemble des notions apprises au lycée sur la notion de dérivation de fonction. Il sera malgré tout utile d'en donner une illustration en cours. Considérons donc une fonction $f : I_f \longmapsto \mathbb{R}$ qui est définie sur un intervalle ouvert. Nous dirons alors que la fonction f est **dérivable en** $\mathbf{a \in I_f}$ lorsque la fonction admettant pour expression :

$$\varphi_a(h) = \frac{f(a+g) - f(a)}{h} \tag{1.1}$$

est définie au voisinage de a et admet une limite finie (i.e. admet une limite à droite et une limite à gauche qui sont, de plus, égales et finies). Aussi, on appelle **taux d'accroissement** la fonction (1.1).

Propriété 1.1. *Toute fonction $f : I_f \longmapsto \mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert, qui est dérivable en $a \in I_f$ est nécessairement continue en a.*

Nous dirons naturellement qu'une fonction $f : I_f \longmapsto \mathbb{R}$ est dérivable lorsqu'elle est dérivable en tout point $a \in I_f$. On notera alors $f' : I_f \longmapsto \mathbb{R}$ la fonction correspondant à la dérivée de f en chacun des points de I_f.

Remarque 1.1. *Il est important d'avoir en tête les deux remarques suivantes :*

1. *Il sera souvent nécessaire de restreindre l'ensemble de définition d'une fonction pour pouvoir définir sa fonction dérivée. Nous pouvons prendre pour exemple la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ qui est définie sur $[0, +\infty[$ mais dont la dérivée est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$.*
2. *Si toute fonction dérivable est nécessairement continue, il n'est pas toujours vrai que la dérivée d'une fonction dérivable soit continue. En effet, nous pouvons prendre pour exemple la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ admettant pour expression :*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ x^2 Sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \end{cases}$$

et dont la dérivée est la fonction $f' : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ 2xSin\left(\dfrac{1}{x}\right) - Cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \end{cases}$$

et qui n'est clairement pas continue. En particulier, l'étude de cette fonction fera l'objet de l'exercice 5.2.

En prenant en compte la dernière remarque sur la continuité de la dérivée d'une fonction, on dira qu'une fonction $f : I_f \longmapsto \mathbb{R}$ est de **classe $\mathcal{C}^1$** lorsqu'elle est dérivable et que sa fonction dérivée est continue. Pour la culture (même si cela fera très rapidement l'objet d'un cours cette année), nous dirons qu'une fonction $f : I_f \longmapsto \mathbb{R}$ est **de classe $\mathcal{C}^k$** lorsqu'elle est k-fois dérivable et que sa k-ème dérivée est continue.

1.1 Dérivation et opérations usuelles

Pour calculer une dérivée, on n'utilise pas nécessairement la limite du taux de variation en un point. L'exercice consistera généralement à combiner les dérivées des fonctions usuelles via les propriétés suivantes que nous pouvons considérer comme des règles de calcul.

1. **Combinaisons linéaires :** Si $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : I \longmapsto \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables en $a \in I$, alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et admet pour dérivée : $\alpha f'(a) + \beta g'(a)$.
2. **Produit de fonctions :** Si $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : I \longmapsto \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables en $a \in I$, alors la fonction fg est dérivable en a et admet pour dérivée : $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
3. **Inverse d'une fonction pour le produit :** Si $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en $a \in I$ telle que $f(a) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est bien définie au voisinage de a et est dérivable en a dont l'expression de la dérivée est :
$$-\frac{f'(a)}{f(a)^2}$$
4. **Puissance d'une fonction :** Si $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en $a \in I$, alors la fonction f^n, où n est un entier, est dérivable en a et admet pour dérivée : $nf(a)^{n-1}f'(a)$.

1.2 Dérivée d'une composée de fonctions

Considérons deux fonctions $f : I \longmapsto J$ et $g : J \longmapsto \mathbb{R}$ que l'on suppose respectivement dérivables en $a \in I$ et $f(a)$. Alors la fonction composée $g \circ f : I \longmapsto \mathbb{R}$ est dérivable en a telle que la dérivée est :

$$f'(a)g' \circ f(a)$$

Un premier exemple d'application très utile est la dérivation de $f(ax + b)$, où $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction dérivable. En effet, par ce qui précède, on a que :

$$\partial_x[f(ax + b)] = af'(ax + b)$$

Notation. *Il existe plusieurs notations pour la dérivée d'une fonction. En effet, on peut écrire $f'(a)$, $\partial_x f(a)$, $\partial_x [f(x)]|_a$ ou encore $\partial_x[f(x)]$. En particulier, $\partial_x[f(x)]$ correspondra à la fonction dérivée, alors que $\partial_x [f(x)]|_a$ correspondra à l'évaluation de la dérivée en a.*

1.3 Dérivée des fonctions usuelles

En remarquant qu'une grande classe de fonctions correspond à une composée de fonctions usuelles, alors connaître l'expression des dérivées de ces dernières permet, via les règles de dérivation d'une composition de fonctions (voir section 1.2 ci-dessus), de calculer un grand nombre de dérivées.

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
k	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
$ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

1.4 Dérivation et tableau de variation

Une première application du calcul de la dérivation d'une fonction est de déterminer le comportement de la fonction afin de pouvoir compléter son tableau de variation. Considérons donc $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Sens de variation d'une fonction : La fonction f est localement croissante (respectivement décroissante) en $a \in I$ si et seulement si $f'(a) \geq 0$ (respectivement $f'(a) \leq 0$). De plus, la croissance (respectivement la décroissance) est stricte si et seulement si $f'(a) > 0$ (respectivement $f'(a) < 0$).

Propriété des extremums d'une fonction : Si la fonction f admet un extremum local en $a \in I$ (i.e. un maximum ou un minimum local), alors la dérivée $f'(a)$ est nulle. La réciproque est fausse. En effet, il suffit de considérer la fonction $f(x) = x^3$ et $a = 0$.

1.5 La tangente d'une fonction

Considérons une fonction $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ que l'on supposera dérivable en $a \in I$. Alors on appelle **tangente en a** l'unique fonction affine $T_a : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ dont le coefficient directeur correspond à la dérivée en a et telle que $T(a) = f(a)$. Après quelques calculs, il est immédiat que :

$$T_a(x) = f'(a)(x - a) + f(a) \tag{1.2}$$

Note. *L'équation (1.2) est appelée* ***forme réduite*** *de la tangente de f en a. En effet, on considère généralement l'équation $T_a(x) = f'(a)x + f(a) - af'(a)$ comme étant l'****équation de la tangente****.*

2 Calcul de dérivées via les règles de combinaisons

Exercice 2.1. *Déterminez l'ensemble de définition des fonctions ci-dessous ainsi que leurs fonctions dérivées et leur domaine de dérivabilité.*

1. $f(x) = 3x$
2. $f(x) = 4x + 2$
3. $f(x) = 7x^2 + 21$
4. $f(x) = 13x^3 + 3x - 49$
5. $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 13$
6. $f(x) = x^4 + 21$

Exercice 2.2. *Déterminez l'ensemble de définition des fonctions ci-dessous ainsi que leurs fonctions dérivées et leur domaine de dérivabilité.*

1. $f(x) = \dfrac{1}{3x}$
2. $f(x) = \dfrac{3}{4x+2}$
3. $f(x) = \dfrac{7}{2x^6+4}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{10x-5}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{3x^2-6}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{7-2x}$

Exercice 2.3. *Déterminez l'ensemble de définition des fonctions ci-dessous ainsi que leurs fonctions dérivées et leur domaine de dérivabilité.*

1. $f(x) = \sqrt{6x}$
2. $f(x) = -\dfrac{1}{3}x\sqrt{15x}$
3. $f(x) = |x+1|\sqrt{4x+2}$
4. $f(x) = -\sqrt{7-2x}$
5. $f(x) = (2x+1)\sqrt{x^2+1}$
6. $f(x) = \sqrt{x^3+x+2}$

Exercice 2.4. *Déterminez l'ensemble de définition des fonctions ci-dessous ainsi que leurs fonctions dérivées et leur domaine de dérivabilité.*

1. $f(x) = \sqrt{x^2-9}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
4. $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt{3x^4-12}}$

Exercice 2.5. *Déterminez l'ensemble de définition des fonctions ci-dessous ainsi que leurs fonctions dérivées et leur domaine de dérivabilité.*

1. $f(x) = \dfrac{4x+8}{21x-14}$
2. $f(x) = \dfrac{-x^2+x+1}{x-7}$
3. $f(x) = \dfrac{3x^4-6x^2+8}{2x^2+x}$
4. $f(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{-2x+1}$
5. $f(x) = \dfrac{5x^2-2x-7}{3x-4}$
6. $f(x) = \dfrac{6x^2-2x}{3x-4}$

3 Détermination de la tangente d'une fonction

Exercice 3.1. *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

1. *Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?*
2. *Montrer que la fonction f est dérivable en tout réel a de l'ensemble de définition et exprimer $f'(a)$ en fonction de a.*
3. *Déterminer les équations réduites des tangentes de f en $a = 0$ et $a = 3$.*

Exercice 3.2. *On considère les fonctions f et g définies sur $]-1,+\infty[$ par :*

$$f(x) = x^2 - x + 1 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x+1}$$

1. *Après avoir justifié que ces deux fonctions sont dérivables sur leur ensemble de définition, calculer les dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$.*
2. *Justifier que les courbes représentatives de f et g sont sécantes en leur point d'abscisse $a = 0$.*
3. *Les tangentes des courbes représentatives de f et g sont-elles les mêmes en ce point ?*

Exercice 3.3. *Même exercice que l'exercice précédent, mais avec les fonctions $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 1$, qui sont définies sur $\mathbb{R}$. Par contre, il vous faudra déterminer vous-même le point d'intersection.*

Exercice 3.4. *Considérons la fonction polynomiale $f(x) = -x^3 + x - 2$ définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la droite (δ) d'équation $2x + y + 7 = 0$. Montrer qu'il existe une droite tangente à la courbe représentative de la fonction f qui est parallèle à la droite (δ).*

4 Sens de variation et extremum

Exercice 4.1. *Pour chacune des fonctions ci-dessous, vous déterminerez l'ensemble de définition, le domaine de dérivabilité ainsi que le tableau de variation.*

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$
2. $f(x) = -x^3 + 2x$
3. $f(x) = (12 - x)\sqrt{x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
5. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-6}$
6. $f(x) = x^3 - 1$

Exercice 4.2. *Déterminer les extremums des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = x^2 + x + 1$ *définit sur* $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 1$ *définit sur* $\mathbb{R}$.
3. $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$ *définit sur* $]2,+\infty[$.
4. $f(x) = (1 - x)(x + 1)^2$ *définit sur* $[-2, 1]$.
5. $f(x) = -x^3 + 9x + 1$ *définit sur* $\mathbb{R}$.
6. $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$ *définit sur* $\mathbb{R}$.

5 Calcul de dérivée par limite du taux de variation

Exercice 5.1. *Retrouver, par un calcul d'une limite du taux de variation, les formules des dérivées des fonctions usuelles.*

Exercice 5.2. *Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ qui est définie via l'expression suivante :*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ x^2 Sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \end{cases}$$

1. *En appliquant le théorème d'encadrement, montrez que la fonction f est continue en $x = 0$ et en conclure que c'est une fonction continue.*

2. *En utilisant la limite du taux d'accroissement (voir l'expression (1.1)), calculez la dérivée de la fonction f en $x = 0$, sans oublier de justifier qu'elle est bien dérivable en ce point.*
3. *Calculez la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.*
4. *Justifiez que la fonction dérivée f' n'est pas continue.*
5. *Conclusion.*

6 Dérivation et géométrie

Exercice 6.1. *Considérons le repère $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ ainsi que $\mathcal{C}$ le cercle centré en O et de rayon $R = 1$. À présent, pour tout $x \in [0, 1]$, on considère l'unique $y \in [0, 1]$ tel que $(x, y) \in \mathcal{C}$, ainsi que le rectangle formé par les points $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$, $B = (x, y)$ et $C = (0, y)$. Déterminez la position x qui maximise l'aire du rectangle ainsi formé.*

Exercice 6.2. *Montrez, via une limite du taux de variation (voir l'expression (1.1)), que les fonctions $Cos(x)$ et $Sin(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, et calculez leurs dérivées.*

7 Problème

Exercice 7.1. *Pour x tonnes de blé vendues, une entreprise réalise un profit, en €, qui est donné par la fonction π définie sur $[0, 50]$ par $\pi(x) = -x^3 + 10x^2 + 3000x$.*

1. *Étudier les variations de la fonction π.*
2. *Quelle quantité de blé l'entreprise doit-elle vendre pour réaliser un profit maximal ?*
3. *Quel est alors ce profit ?*

Exercice 7.2. *Une entreprise fabrique une quantité q d'un certain produit, où $q \in [0, 20]$ et est exprimé en tonnes. Le coût total de production (en milliers d'euros) est :*

$$C(q) = q^3 - 30q^2 + 300q$$

Aussi, la recette totale (en milliers d'euros) est : $R(q) = 84q$.

1. *Quel est le prix d'une tonne de ce produit ?*
2. *Écrire la fonction bénéfice de cette entreprise, que l'on notera par B.*
3. *Étudier les variations de la fonction B, sachant que $q \in [0, 20]$.*
4. *Pour quelle valeur de q le bénéfice est-il maximal ?*
5. *Déterminer alors ce bénéfice maximal.*