Examen Blanc - Probabilités Discrètes

19/11/2025 - Durée : 1h30 (+30 min. tiers-temps)

Calculatrice interdite

Le soin apporté à votre copie entrera en compte dans l'évaluation de votre devoir. Vous devez prêter une attention particulière à la rédaction et à la justification de vos réponses.

Exercice n°1 :
On étudie un jeu vidéo. À chaque partie le joueur, Bob, commence par choisir le personnage qu'il va jouer parmi 2 qui lui sont proposés. Il existe 108 personnages au total.

1. Calculer la probabilité que Bob puisse jouer avec son personnage préféré en lançant une partie. Détailler vos calculs.

Pour augmenter la probabilité d'avoir son personnage préféré, Bob peut acheter un *ticket saisonnier*. Ce ticket lui permet d'avoir le choix entre 4 personnages au lieu de 2 au début de chaque partie.

2. Calculer la probabilité que Bob puisse jouer avec son personnage préféré en lançant une partie si il a acheté le ticket saisonnier. Détailler vos calculs.

Soient $k, n \in \mathbb{N}$. On considère un ensemble E de cardinal n et un élément $x_0 \in E$.

3. En choisissant aléatoirement un sous-ensemble $E_0 \subset E$ de cardinal k, quelle est la probabilité que x_0 appartienne à E_0 ?

Exercice n°2 :
Soit $n \geq 2$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et suivant la même loi uniforme $\mathcal{U}(\{1, ..., n\})$.
Soient $a \in \{1, ..., n\}$ et Y une variable aléatoire définie par :

$$\begin{cases} Y = X_1 & \text{si } X_2 \leq a \ . \\ Y = X_2 & \text{si } X_2 > a \ . \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer l'espérance de Y et la comparer à l'espérance de X_1.
3. Pour quelles valeurs de a cette espérance est-elle maximale ?

Exercice n°3 :
Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
Deux personnes, Alice et Bob, joue à un jeu. Si X est impair, Alice gagne et reçoit X euros de Bob. Si X est paire et non nulle, Bob gagne et reçoit X euros d'Alice. Si $X = 0$, il y a égalité. On note p la probabilité qu'Alice gagne, et q la probabilité que Bob gagne.

1. Expliciter la loi de X et calculer $\mathbb{P}(X = 0)$.
2. Calculer $p + q$.
3. Montrer que $p - q = e^{-a}(1 - e^{-a})$.
4. Calculer p et q.

On appelle G le gain d'Alice. On admet que G est intégrable.

5. Calculer l'espérance de G.
6. Le jeu est-il équilibré ?