# Institut ${f N}$ ational des ${f S}$ ciences ${f A}$ ppliquées des ${f H}$ auts-de- ${f F}$ rance





### Département d'Informatique et de Cybersécurité

### RAPPORT DES TRAVAUX PRATIQUES

# INTELLIGENCE ARTIFICIELLE APPLIQUÉE AU JEU D'OTHELLO

**Date**: 15 Avril 2024

Professeur: René Mandiau - HDR

Elias BOULANGER

INSA Hauts-de-France - ICY Université Polytechnique Hauts-de-France elias.boulanger@uphf.fr

## Table des matières

1 Introduction					
<b>2</b>	Ana	alyse		2	
	1	Modél	lisation et structures de données	2	
		1.1	Structure du projet	2	
		1.2	Bitboards	3	
		1.3	Structure Node	Į.	
		1.4	Boucle de jeu et séparation des connaissances	6	
	2	Algori	thmes	7	
		2.1	Décaler un bitboard	7	
		2.2	Trouver les coups valides	7	
		2.3	Jouer un coup	Ć	
		2.4	Minimax et Alpha-Beta	10	
		2.5	Évaluateur de la qualité d'une position avec PyTorch	10	
3	Validation		11		
4	1 Discussion		12		
5	5 Conclusion		13		
$\mathbf{A}$	Alg		nes et Code	]	
	1		tions Logiques		
	2	Trouve	er et jouer coups valides	III	
	3	Minim	nax	IV	

## Liste des Acronymes

IA Intelligence Artificielle

**MSB** Bit de Poids Fort

**LSB** Bit de Poids Faible

## Table des figures

2.1	Exemple d'une configuration (non complète)	3
2.2	Configuration initiale du plateau de jeu. Source : eOthello	4
A.1	Opérations logiques pour obtenir l'état du plateau	I
A.2	Opérations logiques pour définir l'état du plateau	I
A.3	Opérations de décalage pour les coups valides	H
A.4	Trouver les coups valides	III
A.5	Jouer un coup	III

## Liste des tableaux

### Introduction

Dans le cadre de ce travail pratique, nous avons abordé la conception et l'implémentation d'une Intelligence Artificielle (IA) pour jouer au jeu d'Othello. Ce jeu de réflexion à deux joueurs sur un damier de 64 cases, avec des pions de deux couleurs, présente un défi intéressant pour l'IA en raison de la complexité de ses règles et de son espace de recherche combinatoire. L'objectif principal était de développer un algorithme capable de jouer contre un joueur humain ou contre une autre IA.

Nous explorerons dans un premier temps la modélisation du jeu et les structures de données utilisées pour représenter le plateau et les pions. Nous décrirons ensuite les algorithmes développés, en particulier l'algorithme Minimax, et plusieurs de ses variantes. Nous présenterons également une fonction d'évaluation pour mesurer la qualité des positions.

De plus, nous détaillerons la conception d'un classifieur pour prédire le résultat d'une partie en cours, ainsi qu'évaluer la qualité d'une position. Nous expliquerons comment ce classifieur a été entraîné et comment il se compare aux autres heuristiques.

Enfin, nous discuterons des résultats obtenus et des améliorations possibles.

### Analyse

Notre implémentation comprend notamment une représentation binaire, aussi appelé Bitboard, les algorithmes de recherches Minimax et Alpha-Beta, et un classifieur pour prédire le résultat d'une partie en cours. Nous détaillons également les structures de données utilisées, et les algorithmes de décalage pour les coups valides. Nous avons réalisé ce projet en Python, pour des raisons de simplicité et de rapidité de développement, notamment à propos de la visualisation, et du développement du modèle de deep learning via PyTorch <sup>1</sup>.

#### 1 Modélisation et structures de données

#### 1.1 Structure du projet

```
Othello-Reversi/
   config.yaml : fichier de configuration des paramètres globaux du projet
  main : point d'entrée du programme, permet de réaliser des tests, lancer
   des parties, faire jouer des algorithmes, etc
  game.py : contient la logique de la boucle de jeu, permet de lancer une
  partie selon les paramètres donnés
  node.py : contient la classe Node, encapsulant un état du jeu, et les informations
  nécessaires pour l'exploration de l'arbre de recherche, ou pour rejouer
  une partie
  strategies.py : contient les algorithmes de recherche, et retourne le plateau
   après jouer un coup selon la stratégie choisie
  next.py : contient les fonctions de calcul des coups valides, et celles
  pour jouer un coup
  heuristics.py : contient les fonctions d'évaluation basées sur des heuristiques
  utils/
   Ensemble de fonctions utilitaires telles que des tables d'heuristiques,
     la visualisation, les opérations logiques, etc
  model_pipeline.ipynb : notebook Jupyter pour data preprocessing, model training,
   et evaluation
  understanding_bitboards.ipynb : notebook Jupyter pour comprendre les bitboards,
   de nombreux exemples illustrent les opérations logiques
```

<sup>1.</sup> PyTorch est une bibliothèque de tenseurs optimisée pour l'apprentissage profond. Voir Documentation PyTorch.

Une partie peut être lancée depuis le programme main.py, ce dernier prendra les paramètres définies dans le fichier config.yaml. Par exemple, pour lancer une partie avec *Interface* entre un joueur *Humain* et un joueur *Negamax-AlphaBeta*, en utilisant une stratégie *Positionnelle* pour l'évaluation avec une profondeur d'exploration maximale de 4 coups, nous obtenons le fichier de configuration suivant :

```
1 # Whether to display the board with a graphical interface
2 display: False
```

FIGURE 2.1 – Exemple d'une configuration (non complète).

Plus de paramètres sont disponibles, accompagnés de leurs valeurs par défaut, ainsi que des descriptions et commentaires.

#### 1.2 Bitboards

Une représentation classique d'un plateau de jeu d'Othello est une matrice de 8x8, où chaque case peut contenir trois valeurs : par exemple (-1, 0, 1) pour les pions noirs, vides et blancs respectivement. Celle-ci est intuitive, et est la première approche que nous avions envisagée. Cependant, nous avons finalement opté pour une meilleure alternative, plus efficace en termes de temps et d'espace : les bitboards.

En effet, au lieu de contenir 64 entiers de 32bits chacun (soit 2048bits), nous pouvons encoder l'ensemble du plateau de jeu dans 2 entiers de 64bits chacun (soit 128bits): ce qui est 16 fois moins lourd!

De plus, les opérations logiques sur les bitboards sont très rapides, un avantage supplémentaire pour les algorithmes de recherche.

#### Comment encoder un pion, un coup, ou un plateau de jeu?

Nous pouvons en fait tous les encoder de la même manière, à travers un entier sur 64bits. Chaque bit représente une case du plateau, sa valeur égale à 1 si elle est occupée par un pion, ou si le coup est valide. Le Bit de Poids Fort (MSB) correspond à la case h8, et le Bit de Poids Faible (LSB) à la case a1. Les positions sont usuellement notés de a1 à h8, où a est la colonne la plus à gauche, et 1 la ligne la plus haute. [Ros05]

Par exemple, la configuration initiale du plateau de jeu est la suivante :

- Les pions noirs sont en d5 et e4.
- Les pions blancs sont en d4 et e5.

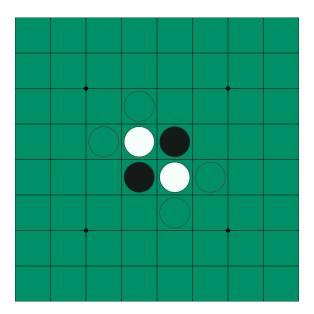


FIGURE 2.2 – Configuration initiale du plateau de jeu. Source : eOthello.

Cette dernière s'encode comme suit, avec dans l'ordre, le plateau noir, puis blanc :

Ces deux entiers peuvent être réécris en hexadécimal pour une meilleure lisibilité :

$$0x00\_00\_00\_08\_10\_00\_00\_00$$
 (noir)  $0x00\_00\_00\_10\_08\_00\_00\_00$  (blanc)

De fait, il est possible de récupérer la valeur de la case  $c_{i,j}$  d'un bitboard b en utilisant la formule suivante :

$$(b \gg (8 \times i + j)) \& 1, \forall i, j \in \{0, ..., 7\}$$

Avec i la ligne, j la colonne,  $\gg$  l'opérateur de décalage à droite, et & l'opérateur logique 'et'.

Similairement, nous pouvons définir la case  $c_{i,j}$  d'un bitboard b en utilisant la formule suivante :

$$b \mid (1 \ll (8 \times i + j)), \forall i, j \in \{0, \dots, 7\}$$

Avec ≪ l'opérateur de décalage à gauche, et | l'opérateur logique 'ou'.

Nous obtenons toutes les pièces posées et toutes les cases vides avec les opérations logiques suivantes :

$$pieces = noir | blanc$$
  
 $vides = \sim pieces$ 

Avec  $\sim$  l'opérateur logique 'non'. Les programmes équivalents en python sont donnés dans l'appendice 1. De manière générale, n'importe quel pion peut être ajouté au plateau avec l'opérateur logique 'ou'. Aussi, 8 peut être remplacé par n'importe quel entier représentant la taille du plateau, ici 8x8.

#### 1.3 Structure Node

Dans le contexte de ce projet, nous aimerions pouvoir rejouer des parties, déterminer les états déjà traités, et reprendre les anaylyses formulés lors de tours précédants. Pour cela, nous avons défini une structure de données nommée Node, qui encapsule un état du jeu, et les informations nécessaires pour l'exploration de l'arbre de recherche. Nous l'avons défini dans le fichier node.py via une classe Python.

#### Attributs:

- parent : Référence au nœud parent dans l'arbre de jeu.
- pièces joueur : Représente les pièces du joueur actuel.
- pièces ennemi : Représente les pièces de l'ennemi.
- tour : Indique à qui est le tour de jouer.
- taille : La taille du plateau de jeu.
- enfants : Liste des nœuds enfants générés par expansion.
- **coups** : Liste des coups possibles à partir de ce nœud.
- **directions**: Dictionnaire associant à chaque coup les directions des pièces à capturer.
- coups\_vers\_enfant : Dictionnaire reliant les coups aux nœuds enfants correspondants.
- valeur : Valeur évaluative du nœud pour les algorithmes de recherche.
- **visité** : Booléen indiquant si le nœud a été visité lors de la recherche.

#### Méthodes:

- développer() : Génère tous les coups possibles et prépare les structures pour l'expansion.
- définir\_enfant(coup) : Crée un nœud enfant à partir d'un coup spécifié et l'ajoute à la liste des enfants.
- ajouter\_autre\_enfant(autre) : Ajoute un autre nœud enfant qui n'est pas généré par un coup direct. Permet de transférer des noeuds d'un joueur à l'autre.
- inverser() : Échange les pièces du joueur et de l'ennemi et inverse le tour de jeu.
- compter\_tous\_les\_enfants() : Compte récursivement le nombre total de nœuds enfants.

#### 1.4 Boucle de jeu et séparation des connaissances

La boucle de jeu est le cœur de notre implémentation. Elle gère les interactions entre les différents composants du jeu, tels que les joueurs, les nœuds, les stratégies, et les paramètres de configuration. La boucle de jeu suit un processus itératif qui se déroule en plusieurs étapes, comme décrit ci-dessous :

#### 1. Initialisation:

- Le jeu commence avec un plateau de 8x8 cases par défaut, équipé initialement de deux pièces noires et deux pièces blanches au centre.
- Les joueurs sont initialisés avec un système de bitboards qui gère les positions des pièces sur le plateau.
- Deux instances de joueurs (nœuds) sont créées, représentant le joueur actuel et son adversaire.

#### 2. Déroulement du jeu :

- La boucle de jeu continue tant que des coups sont possibles.
- Pour chaque tour, le jeu vérifie si le joueur actuel a des coups disponibles. Si c'est le cas, il les génère en utilisant la méthode d'expansion du nœud.
- Si le joueur actuel ne peut pas jouer (aucun coup possible), le jeu vérifie si l'autre joueur peut jouer. Si aucun des deux joueurs ne peut jouer, le jeu se termine.
- $\rightarrow$  Séparation des connaissances : il y a dupplication des noeuds, un pour chaque joueur. Pendant la phase de statégie, seul le noeud du courant est utilisé.

#### 3. Affichage:

— Si l'affichage est activé, le plateau est mis à jour visuellement après chaque coup pour montrer la progression du jeu.

#### 4. Stratégie de jeu :

- Une stratégie détermine le coup suivant du joueur en cours en fonction des configurations définies.
- La stratégie peut intégrer différentes approches et niveaux de complexité selon les règles de jeu ou les paramètres d'IA spécifiés.
- Si le joueur actuel est un humain, le jeu attend un clic de souris sur un coup valide pour continuer.
- L'algorithme de stratégie retourne le prochain noeud.

#### 5. Gestion de la mémoire et des statistiques :

- Après chaque mouvement, les enfants du nœud précédent sont éventuellement nettoyés pour optimiser l'utilisation de la mémoire.
- Des statistiques de jeu peuvent être collectées et enregistrées, notamment le nombre de pièces jouées et le nombre de nœuds générés.
- → Préservation des connaissances : à chaque fin d'itération, lorsque les joueurs doivent être inversés, la méthode ajouter\_autre\_enfant(autre) compare les noeuds enfants des deux joueurs, et soit crée une copie du noeud de l'autre joueur, soit récupère le noeud enfant si il existe déjà.

#### 6. Fin du jeu:

- Le jeu se termine lorsque plus aucun coup n'est possible pour les deux joueurs. À ce stade, on détermine le vainqueur en comptant le nombre de pièces pour chaque joueur.
- Les résultats finaux, y compris les statistiques et l'état final du jeu, peuvent être enregistrés ou affichés selon les configurations.

#### 2 Algorithmes

Le calcul des coups valides est une étape cruciale pour le jeu, c'est par ailleurs la plus couteuse en temps de calcul. La représentation en bitboards nous permet de réaliser ces opérations de manière très efficace, comparable à une vectorisation. Il est en effet possible de calculer simultanément les coups valides qui sont dans la même direction, en utilisant des masques prédéfinis.

#### 2.1 Décaler un bitboard

Pour réaliser cela, nous devons être capable de décaler un plateau entier dans les 8 directions cardinales. Nous y parvenons tel que suit :

#### Algorithm 1 Opérations de décalage pour les coups valides.

```
1: function NORD(x)

2: return x \gg 8

3: end function

4: function SUD(x)

5: return (x \& 0x00fffffffffffff) \ll 8

6: end function

7: function Est(x)

8: return (x \& 0x7f7f7f7f7f7f7f7f) \ll 1

9: end function

10: function OUESt(x)

11: return (x \& 0xfefefefefefefe) \gg 1

12: end function
```

Les masques permettent d'éviter un débordement ou overflow, une sortie de plateau, et de préserver les bords. Ils consistent à mettre à 0 les bits qui sont des positions sensibles dans la direction donnée. Nous obtenons ensuite Nord-Est, Nord-Ouest, Sud-Est, Sud-Ouest en combinant les opérations précédentes. (Voir appendix 1 pour plus de détails).

#### 2.2 Trouver les coups valides

Pour générer les coups valides à partir d'un position donnée, nous avons besoin de la position des pions du joueur, des pions de l'adversaire, et de la taille du plateau. L'algorithme 2 illustre la génération des coups valides pour un joueur donné, en utilisant les opérations de décalage définies précédemment.

#### Algorithm 2 Génération des Coups Valides avec Bitboards

```
1: function GÉNÉRERCOUPS(joueur, ennemi, taille)
        casesVides \leftarrow \sim (joueur \lor ennemi)
        coupsUniques \leftarrow []
 3:
 4:
        sautsDir \leftarrow \{\}
        for all direction in [nord, sud, est, ouest, nord ouest, ..., sud est] do
 5:
           compteur \leftarrow 0
 6:
           victimes \leftarrow direction(joueur) \& ennemi
 7:
           if victimes = faux then
 8:
 9:
               continue
           end if
10:
11:
           for i \leftarrow 1 to taille do
12:
               compteur \leftarrow compteur + 1
               prochainePiece \leftarrow direction(victimes) \& ennemi
13:
               if prochainePiece = faux then
14:
                   break
15:
               end if
16:
17:
               victimes \leftarrow victimes \lor prochainePiece
           end for
18:
           captures \leftarrow direction(victimes) \& casesVides
19:
           while captures \neq 0 do
20:
               capture \leftarrow captures \& - captures
21:
22:
               captures \leftarrow captures \oplus capture
               if capture \notin sautsDir then
23:
                   Ajouter capture à coupsUniques
24:
25:
                   sautsDir[capture] \leftarrow []
26:
               end if
               Ajouter (direction, compteur) à sautsDir[capture]
27:
28:
           end while
29:
        end for
30:
        return coupsUniques, sautsDir
31: end function
```

L'objectif de cette fonction est de remplir une liste de coups possible, mais également de stocker les informations nécessaires pour réaliser ces coups. À cette fin, nous remplissons dans une table de transposition <sup>2</sup> pour chaque coup trouvé, une liste de couples 'nombre de sauts' et 'direction'.

Nous pouvons décomposer l'algorithme 2 en plusieurs étapes :

- 1. Calculer les cases vides et initiliser les 2 structures à retourner (lignes 2-4).
- 2. Pour chaque direction, trouver les pions de l'adversaire qui sont des candidats pour être capturés (lignes 7-10). Un ensemble de pions est candidat si son intersection avec les pions adverses n'est pas vide.
- 3. Tant qu'au moins un pion est candidat, continuer de décaler dans la direction donnée, et ajouter les candidats à la liste des victimes, en mettant à jour la métrique du nombre de saut (lignes 11-18).
- 4. Vérifier si les candidats peuvent être capturés en vérifiant l'intersection avec la liste des cases vides (lignes 19).

<sup>2.</sup> un simple de dictionnaire en Python

À ce niveau, nous avons obtenu tous les coups valides, mais si nous voulons les jouer, nous devons les séparer. Cette opération, ainsi que les ajouts aux structures sont effectués dans les lignes 20-29.

- 1. Tant qu'il existe des pions à capturer, nous les isolons un par un en faisant un 'ou exclusif' avec le LSB (lignes 21-22)
- 2. Le pion obtenu est ajouté à la liste des coups, et une liste vide est ajoutée à la table de transposition pour ce pion si aucun couple n'a été ajouté (lignes 23-25).
- 3. Pour chaque direction, le couple 'nombre de sauts' et 'direction' est ajouté à la liste de la table de transposition du pion capturé. (lignes 27).

#### 2.3 Jouer un coup

#### Algorithm 3 Réalisation d'un Coup en Othello

```
1: function RéaliserCoup(joueur, ennemi, coupAJouer, directions)
       for all (direction, compte) in directions[coupAJouer] do
 2:
 3:
           victimes \leftarrow coupAJouer
           opposeeDirection \leftarrow directionsOpposees[direction]
 4:
           for i \leftarrow 1 to compte do
 5:
 6:
               victimes \leftarrow victimes \mid (opposeeDirection(victimes) \& ennemi)
 7:
           end for
           joueur \leftarrow joueur \oplus victimes
 8:
           ennemi \leftarrow ennemi \oplus (victimes \& \sim coupAJouer)
 9:
       end for
10:
11:
       joueur \leftarrow joueur \mid coupAJouer
       return joueur, ennemi
12:
13: end function
15: directionsOpposees \leftarrow \{nord : sud, sud : nord, est : ouest, ouest : est, \}
        nord ouest: sud est, nord est: sud ouest,
        sud ouest: nord est, sud est: nord ouest}
```

Nous initialisons d'abord les victimes avec le coup à jouer. Puis, nous déterminons la direction opposée à celle dans laquelle le coup a été effectué. Cette étape est cruciale car, au lieu de commencer par nos pierres et de se diriger vers une direction candidate, nous partons du coup joué et nous orientons dans la direction opposée afin de capturer les pièces adverses.

Nous poursuivons ensuite par la récupération des pièces adverses pouvant être capturées dans cette direction, jusqu'à atteindre le nombre requis.

La mise à jour du plateau se fait ensuite via l'opérateur XOR:

- 1. Nous ajoutons le coup joué à nos propres pièces.
- 2. Nous retirons les pièces adverses capturables de l'ensemble des pièces de l'ennemi.

Étant donné que plusieurs directions sont envisageables pour un coup spécifique, l'opérateur XOR peut retourner une pièce plusieurs fois. Nous contournons cette problématique en employant l'opérateur OR vers la fin, pour garantir la présence du coup joué parmi nos pièces.

Pour une raison analogue, nous excluons le coup joué des pierres capturées lors de l'application de l'opérateur XOR entre l'ennemi et les pièces capturables.

Voir appendix 2 pour les équivalents en Python.

#### 2.4 Minimax et Alpha-Beta

Dans cette section, nous parcourons les différents algorithmes de recherche utilisés pour la prise de décision. Puisque les codes se ressemblent beaucoup, nous ne développerons que l'algorithme Negamax avec l'élagage Alpha-Beta, et nous expliquerons les différences avec les autres algorithmes. Toutes les versions de Minimax sont disponibles dans l'appendice 3.

#### 2.5 Évaluateur de la qualité d'une position avec PyTorch

Extraire les données de la WTHOR database

Prétraitement des données

Création du modèle

Entraînement du modèle

## Validation

## Discussion

## Conclusion

### Annexe A

### Algorithmes et Code

#### 1 Opérations Logiques

En 1.2, nous avons vu comment encoder en pseudo-code un pion et un plateau.

#### En Python:

```
def get_state(bitboard: int, x: int, y: int, size: int):
    """Return the state of the cell by shifting the board
    to the right by x * size + y and taking the LSB"""
    return (bitboard >> (x * size + y)) & 1
```

FIGURE A.1 – Opérations logiques pour obtenir l'état du plateau.

```
def set_state(bitboard: int, x: int, y: int, size: int):
    """Add a bit to the board by shifting a 1 to the left
    by x * size + y and performing a bitwise OR with the board"""
    return bitboard | (1 << (x * size + y))</pre>
```

 $\label{eq:figure} \mbox{Figure A.2-Op\'erations logiques pour d\'efinir l'état du plateau.}$ 

En 2.1, nous avons vu comment décaler un bitboard dans 4 directions cardinales. Voyons maintenant comment décaler un bitboard dans les 4 directions diagonales, et leur équivalent en python.

#### Algorithm 4 Opérations de décalage en diagonales.

```
1: function Nord(Est(x))
2: return Nord(Est(x))
3: end function
4: function NordOuest(x)
5: return Nord(Ouest(x))
6: end function
7: function SudEst(x)
8: return Sud(Est(x))
9: end function
10: function SudOuest(x)
11: return Sud(Ouest(x))
12: end function
```

#### En Python:

```
1  def NW(x):
2    return N(W(x))
3  def NE(x):
4    return N(E(x))
5  def SW(x):
6    return S(W(x))
7  def SE(x):
8    return S(E(x))
```

Figure A.3 – Opérations de décalage pour les coups valides.

#### 2 Trouver et jouer coups valides

En 2.2, nous avons vu comment trouver les coups valides et les jouer. Voyons maintenant en Python comment se traduit les pseudo-codes.

```
def generate_moves(own, enemy, size) -> tuple[list, dict]:
    """Generate the possible moves for the current player using bitwise operations"""
    empty = ~(own | enemy) # Empty squares (not owned by either player)
    unique_moves = [] # List of possible moves
    dir_jump = {} # Dictionary of moves and the number of pieces that can be captured in each direction

# Generate moves in all eight directions
for direction in [north, south, east, west, north_west, north_east, south_west, south_east]:
    # We get the pieces that are next to an enemy piece in the direction
    count = 0
    victims = direction(own) & enemy
if not victims:
    continue

# We keep getting the pieces that are next to an enemy piece in the direction
for _ in range(size):
    count += 1
    next_piece = direction(victims) & enemy
    if not next_piece:
        break
    victims |= next_piece

# We get the pieces that can be captured in the direction
captures = direction(victims) & empty
# if there are multiple pieces in captures, we separate them and add them to the set
while captures:
    capture = captures & -captures # get the least significant bit
    captures ^ capture # remove the lsb
    if capture not in dir_jump:
        unique_moves.append(capture)
    dir_jump[capture] = []
    dir_jump[capture].append((direction, count))

return unique_moves, dir_jump
```

Figure A.4 – Trouver les coups valides.

```
def make_move(own: int, enemy: int, move_to_play: int, directions: dict) -> tuple[int, int]:
    """Make the move and update the board using bitwise operations."""
    for direction, count in directions[move_to_play]:
        victims = move_to_play # Init the victims with the move to play

        op_dir = opposite_dir(direction) # opposite direction since we
        #go from the move to play to the captured pieces
        for _ in range(count):
            victims |= (op_dir(victims) & enemy)
            own ^= victims
        enemy ^= victims & ~move_to_play
# because of the XOR, the move to play which is considered a victim
# can be returned a pair number of times
own |= move_to_play
return own, enemy
```

FIGURE A.5 – Jouer un coup.

### 3 Minimax

En 2.4, nous avons vu comment implémenter l'algorithme Negamax avec AlphaBeta. Voyons maintenant en Python comment se traduit le pseudo-code, et les autres versions de l'algorithme.

## Bibliographie

[Ros05] Brian Rose. Othello: A Minute to Learn, A Lifetime to Master. 2005. URL: https://www.ffothello.org/livres/othello-book-Brian-Rose.pdf.