Il problema 3 SAT è una variante del problema SAT che richiede di verificare se esiste un'assegnazione di valori di verità alle variabili di una formula booleana in forma CNF, tale che ogni clausola sia una disgiunzione di esattamente 3 letterali e che l'intera formula sia vera.

Esempio: $(A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$ in questa formula ogni clausola è disgiunzione di esattamente 3 letterali.

N.B: il problema 3SAT è NP-completo ovvero, non si conosce un algoritmo efficiente in tempo polinomiale per risolverlo. Tuttavia, si è dimostrato che se si trova un algoritmo efficiente per risolvere qualsiasi istanza di 3SAT, allora si potrebbe risolvere in tempo polinomiale qualsiasi problema NP-completo.

clique, gruppo ristretto

Definizione: una clique in un grafo non orientato $G=(V,E)$ è un insieme $V' \subseteq V$ di nodi, tale che per ogni coppia di essi esiste l'arco che li collega, ossia il sottografo indotto* V' è completo. La dimensione di una clique è il numero dei suoi nodi. Il problema della clique richiede di trovare una clique di dimensione massima in un grafo. Il corrispondente problema di decisione richiede di determinare se nel grafo esiste una clique di dimensione k.

N.B.: il problema della clique è NP-completo

Definizione: un insieme indipendente in un grafo $G=(V,E)$ è un insieme $\boxed{V' \subseteq V}$ di nodi tale che per ogni coppia di essi esiste l'arco che li collega, ossia il sottografo indotto da V' non ha archi. La dimensione di un insieme indipendente è il numero dei suoi nodi. Il problema di decisione richiede di determinare se nel grafo esiste un insieme indipendente di dimensione k.

*
Un sottografo indotto è quello che ottieni se prendi una parte di un grafo prendendo alcuni nodi e mantenendo tutti gli archi

Algoritmo per ridurre da 3SAT a clique

Esempio: $(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4)$

Vado a creare un nodo all'interno del grafo per ogni letterale che compare nelle clausole. Vado a collegare i nodi di clausole diverse che non sono uno la negazione dell'altro. Se nella prima clausola ho x e nella seconda $\bar{x}$ non li collego.

Siccome due nodi non possono essere contemporaneamente vero e falso esiste un'assegnazione di valori che permette di rendere soddisfacibile la clausola, per rendere soddisfacibile la clausola basta che ci sia almeno un letterale che sia vero (= True). Così facendo se entrambe le clausole sono True allora l'intera formula sarà True ($\wedge$).

SAT $\leq$ 3 SAT $\leq$ CLIQUE

RIDUZIONE DA SAT A 3 SAT

ESAMINIAMO LE CLAUSOLE, IN BASE AL NUMERO DI LETTERALI SI SEGUONO QUESTI PUNTI:

- UNA CLAUSOLA CON 1 LETTERALE ($k=1$): SE ABBIAMO "X" DIVENTA $(x \vee x \vee x)$
- $k=2$: $(x \vee y) \rightarrow (x \vee y \vee y)$
- $k=3$: NESSUNA MODIFICA
- $k>3$: DOBBIAMO INTRODURRE $k-3$ NUOVE VARIABILI. VEDIAMO DEGLI ESEMPI.

$k=4$: $(A \vee B \vee C \vee D)$ FACCIAMO $4-3=1$ NUOVA VARIABILE QUINDI: $(A \vee B \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee C \vee D)$

$k=5$: $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)$ $5-3=2$. QUINDI: $(x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee x_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee x_4 \vee x_5)$

$k=6$: $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6)$ $6-3=3$ QUINDI:

- $c_1 = (x_1 \vee x_2 \vee y_1)$
- $c_2 = (\neg y_1 \vee x_3 \vee y_2)$
- $c_3 = (\neg y_2 \vee x_4 \vee y_3)$
- $c_4 = (\neg y_3 \vee x_5 \vee x_6)$