

PRIMITIVEN: Elementar & Proprietary (Integrals)

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

↑  
PRIMITIVA  
 $F(x)$

Sei  $F$  eine primitive von  $f$ :  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$

PRIMITIVEN: Elementar:

$f(x)$	$F(x)$
$\cos x$	$\sin x$
$-\sin x$	$-\cos x$
$e^x$	$e^x$
$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

Exempli:

$$1) \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \left[ -\cos x \right]_0^{\pi/2} = \left( -\cos \frac{\pi}{2} \right) - \left( -\cos 0 \right)$$

$$= 0 + 1 = 1$$

$$2) \int_1^2 x^3 \, dx = \left[ \frac{x^{3+1}}{3+1} \right]_1^2 = \left( \frac{2^4}{4} \right) - \left( \frac{1^4}{4} \right) = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$3) \int (3x + \cos x) \, dx = \int 3x \, dx + \int \cos x \, dx =$$

$$= 3 \int x \, dx + \int \cos x \, dx = 3 \frac{x^2}{2} + \sin x + C$$

Proprietăți ale integrației:

$$1) \int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

$$2) \int K f(x) \, dx = K \int f(x) \, dx$$

$$3) \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

$$4) \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

## APPUNTI - LEZIONE:

**DEF:** SIA  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  SU I INTERVALLI APERTI.

UNA FUNZIONE  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  SI DICE PRIMITIVA DI

$\varphi$  SE  $F'$  DENOMINAZIONE DI  $F' = \varphi$  ( $F'(x) = \varphi(x)$

$\forall x \in I$ ). L'INSIEME DI TUTTE LE PRIMITIVE DI  $\varphi$

(SE NE ESISTONO) È DETTO INTEGRALE (NOLEGGIATO SEI

$\varphi$ , ED È DENOMINATO CON  $\int \varphi(x) dx$

**ESSEMENZIALI:**

① L'INTEGRALE INDISPENSABILE UNA FUNZIONE  $f'$  VI INSIEME DI FUNZIONI.

$$\int \varphi(x) dx = \{ F: I \rightarrow \mathbb{R} \mid F' = \varphi \}$$

② SE  $\varphi$  AMMETTE UNA PRIMITIVA, NE AMMETTE UN'ALTRA.  
 $\exists c: F' = \varphi$ , ALLORA  $(F + c)' = F' = \varphi \quad \forall c \in \mathbb{R}$

DIVISO  $F + c$  DA' UNA PRIMITIVA DI  $\varphi \quad \forall c \in \mathbb{R}$

VICENDA ESEGUONO  $F$  E  $G$  SONO PRIMITIVE DI  $\varphi$ ,

$$(F - G)' = F' - G' = \varphi - \varphi = 0$$

ALLORA  $\exists c \in \mathbb{R}: F - G = c$ , OVVERO  $F = G + c$

PENSANTO: SE  $F$  È UNA PRIMITIVA DI  $\varphi$ ,

$$\int \varphi(x) dx = \{ F(x) + c: c \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{Satz von Newton: } \int f(x) dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

③ LA NOTAZIONE  $\int f(x) dx$  PUÒ ANCHE DIRE  
ESISTE ALCUNO IN CUI  $\text{DOM}(f)$  È UNIONE DI  
DUE (O PIÙ) INTERVALLI DISGIUNTI. SE  $f: I_1 \cup I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  CON  $I_1, I_2$  INTERVALLI, SE  $F$  È UNA PRIMITIVA  
DI  $f$

$$\int f(x) dx = \begin{cases} F(x) + c_1 & x \in I_1 \\ F(x) + c_2 & x \in I_2 \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

APPROX. L'810

INTRODUZIONE:

$$1) \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1}$$

$$2) \int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + c$$

$$3) \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c \quad 4) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh} x + c$$

$$5) \int e^x dx = e^x + c$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$7) \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$8) \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$9) \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$10) \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$11) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$12) \int f(x)^2 \cdot f'(x) dx = \frac{f(x)^{2+1}}{2+1} + c$$

$$12) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + c$$

$$13) \int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

$$14) \int \cos(f(x)) \cdot f'(x) dx = \sin(f(x)) + c$$

$$15) \int \sin(f(x)) \cdot f'(x) dx = -\cos(f(x)) + c$$

INTEGRATION BY PARTS

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni di classe  $C^1$

se si fa:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = \left[ f(x) \cdot g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

ESEMPIO:

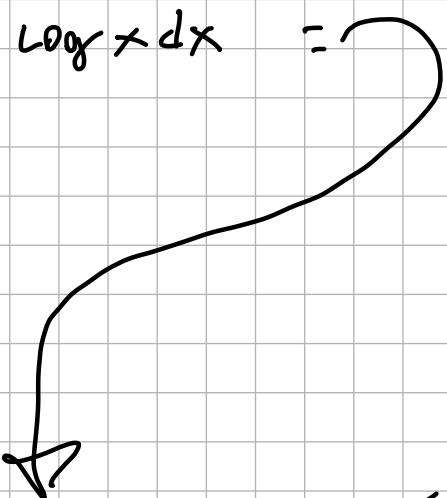
$$\begin{aligned} 1) \int x \cos x dx &= x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx \\ &\quad \boxed{\text{f}} \quad \boxed{\text{g'}} \\ &= \boxed{x \sin x + \cos x} \end{aligned}$$

$$2) \int x e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x$$

$$3) \int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int \boxed{2x} e^x dx =$$

Lo passiamo davanti funz.

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot (x e^x - e^x)$$

$$4) \int \ln x dx = \text{...}$$


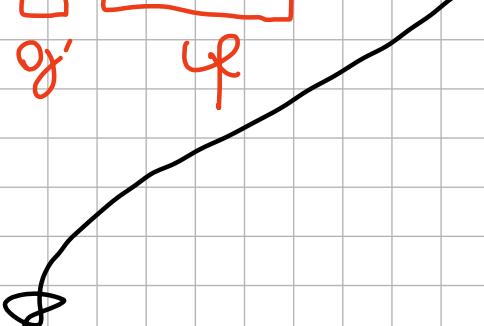
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$g'(x) = 1$	$g(x) = x$

$$= \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln(x) - \int 1 dx$$

$$= x \ln(x) - x$$

$$5) \int x \ln x dx =$$

o<sub>j</sub> f



$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$g'(x) = x$	$g(x) = \frac{x^2}{2}$

$$\ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \int x dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

5)  $\int \cos^2 x dx = \int \cos x \cdot \cos x dx = \int \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x dx =$   
 $= \int \sin \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx$

INTEGRALRECHNUNG P.E. SOSTITUZIONE

SIA  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  (I intervallo) una funzione che AMMETTE PRIMITIVA  $F$ .

SIA  $g: J \rightarrow I$  DEFINIBILE IN  $J$  INTENNALE. ALLORA

$(\varphi \circ g): g'$  AMMETTE PRIMITIVA SU  $J$  E UNGA

$$\text{PRIMITIVA } g' F \circ g \text{ OVE } \int \varphi(g(x)) g'(x) dx =$$

$$= F(g(x)) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \varphi(y) dy = \left[ \int \varphi(g(x)) g'(x) dx \right]$$

$$\int_2^6 \psi(y) dy = \int_c^d \psi(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

für Emps:

$$1) \int \sin(e^x) e^x dx = \int \sin y dy \quad y = e^x$$

$$= -\cos y = -\cos(e^x) \quad dy = e^x dx$$

$$2) \int \cos x \cdot \sin(\sin x) dx = \quad y = \sin x$$

$$= \int \sin y dy = \quad dy = \cos x dx$$

$$= -\cos y = -\cos(\sin x) + C$$

$$3) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \frac{e^x}{1+(e^x)^2} = \quad y = e^x$$

$$dy = e^x dx$$

$$= \int \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan(y) = \arctan(e^x)$$

$$4) \int x \sin(x^2) dx =$$

$$y = x^2$$

$$dy = 2x \ dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin(y) dy =$$

$$\therefore \frac{1}{2} - \cos(y) = -\frac{1}{2} \cos(x^2)$$

$$5) \int \sin(x) e^{-\cos x} dx$$

$$y = -\cos x$$

$$dy = \sin x \ dx$$

$$= \int e^{y'} dy' = e^y = e^{-\cos x}$$

$$6) \int_0^s \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx = \int_2^3 \frac{t^2 - 4}{t} \cdot 2t dt$$

$$\sqrt{x+4} = t$$

$$x + 4 = t^2$$

$$x = t^2 - 4$$

$$x = g(t)$$

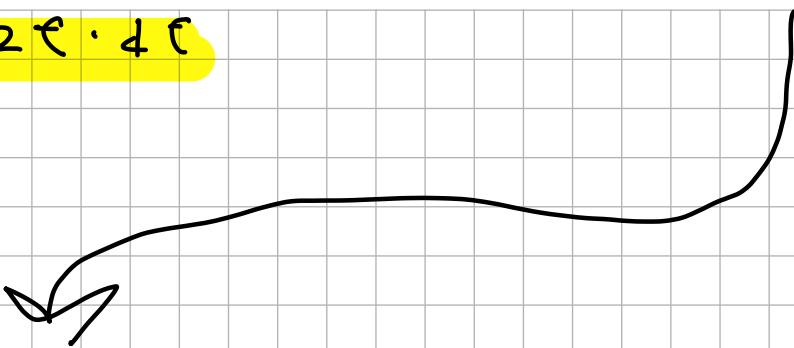
$$\frac{dx}{dt} = g'(t)$$

$$dx = g'(t) \cdot dt$$

$$x=0 \rightarrow t=2$$

$$x=s \rightarrow t=3$$

$$dx = 2t \cdot dt$$



$$= \int_2^3 (2t^2 - 8) dt = \int_2^3 2t^2 dt - \int_2^3 8 dt =$$

$$= 2 \cdot \int_2^3 t^2 dt - 8 \cdot \left[ t \right]_2^3 = 2 \cdot \left[ \frac{t^3}{3} \right]_2^3 - 8 \cdot \left[ t \right]_2^3 =$$

$$= 2 \cdot \left( 9 - \frac{8}{3} \right) - 8 \cdot (3 - 2) = 2 \cdot \frac{19}{3} - 8 = \frac{38}{3} - 8 = \frac{14}{3}$$

$$\text{7) } \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}} dx = \quad f = \sqrt{x} \quad x = t^2 \quad dx = 2t dt$$

$$= \int_1^4 \frac{2t}{t + t^3} dt = 2 \int_1^4 \frac{1}{t^2 + 1} dt = 2 \left[ \arctan t \right]_1^4 =$$

$$= 2 \arctan 4 - \frac{\pi}{2}$$