PROBLEMA: DATO UN GRAFO ORIENTATO PESATO, TROVARE I CAMMINI MINIMI TRA TUTTE LE COPPIE DI NODI. SONO AMMESSI COSTI NEGATIVI MA NON $\underbrace{\text{CICLI DI COSTO NEGATIVO}}_{\text{LA SOMMA DEI PESI} < 0}$. PER SEMPLICITA' IDENTIFICHIAMO I NODI CON I NUMERI $1 \dots n$.

IDEA: CHIAMIAMO K-VINCOLATO UN CAMMINO CHE PASSA SOLO PER NODI IN $1 \dots K$, PER $K \leq n$, E INDICHIAMO CON $\boxed{d^K(x,y)}$ LA DISTANZA K-VINCOLATA TRA X E Y, CIOE' LA LUNGHEZZA MINIMA DI UN CAMMINO K-VINCOLATO.

SE ESISTE UN CAMMINO DA X A Y, ESISTE UN CAMMINO MINIMO SEMPLICE. POSSIAMO CONSIDERARE SOLO I CAMMINI SEMPLICI.

POSSIAMO ESPRIMERE d^K IN FUNZIONE DI d^{K-1} NEL MODO SEGUENTE:

$$\boxed{d^K(x,y) = \min\left\{d^{K-1}(x,y),\ d^{K-1}(x,K) + d^{K-1}(K,y)\right\}} \ *$$

INFATTI, DATO UN CAMMINO MINIMO K-VINCOLATO DA X A Y, SI HANNO DUE CASI:

- NON PASSA PER K, QUINDI E' ANCHE UN CAMMINO MINIMO K-1-VINCOLATO
- PASSA PER K, QUINDI E' COMPOSTO DA UN CAMMINO K-1-VINCOLATO DA X A K E DA UN CAMMINO K-1-VINCOLATO DA K A Y

INOLTRE:

$$\underbrace{d^0}_{\text{MATRICE INIZIALE}}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x = y \\ c_{x,y} & \text{SE } x \neq y \text{ ED ESISTE L'ARCO } (x,y) \\ \infty & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

0 CONFRONTO IL NODO CON SE STESSO, INFATTI LE DIAGONALI SONO 0

ALGORITMO CON PROGRAMMAZIONE DINAMICA

```
FLOYD WARSHALL(G)
    FOREACH (X,Y: NODI IN G)
        D^0[X,Y] = 0 SE X=Y, C X,Y SE X≠Y ED ESISTE L'ARCO (X,Y), ∞ ALTRIMENTI
    FOR (K=1; K<=n; K++)
        FOR (X,Y: NODI IN G) D^K[X,Y] = D^(K-1)[X,Y]   POPOLO LA MATRICE NUOVA COI VALORI VECCHI
        IF (D^(K-1)[X,K] + D^(K-1)[K,Y] < D^K[X,Y])
            D^K[X,Y] = D^(K-1)[X,K] + D^(K-1)[K,Y]
    RETURN D^n → RITORNA n MATRICI, SAREBBE L'ALGORITMO CHE FACCIAMO ALL'ESAME SCRITTO.
```

COMPLESSITA': $O(n^3)$. PERCHE' TENGO IN MEMORIA OGNI MATRICE.

PSEUDOCODICE

FLOYD WARSHALL (G)

FOR EACH (x, y : NODI IN G)

$D[x,y] = 0$ SE $x = y$, $c_{x,y}$ SE $x \neq y$ ED ESISTE L'ARCO (x,y), ∞ ALTRIMENTI

MATRICE DELLE DISTANZE

$M[x,y] = x$ SE $x \neq y$ ED ESISTE L'ARCO (x,y), NULL ALTRIMENTI.

MATRICE DEI PREDECESSORI

```
FOR (k = 1; k <= n; k++)
    FOR (x, y : NODI IN G)
        IF (D[x,k] + D[k,y] < D[x,y])
            D[x,y] = D[x,k] + D[k,y]
            M[x,y] = M[k,y]
RETURN D, M
```

LA STRADA DA x A y PASSANDO PER k E' PIU' CORTA DELLA STRADA MIGLIORE CHE CONOSCEVO FINO ORA?

COMPLESSITA'

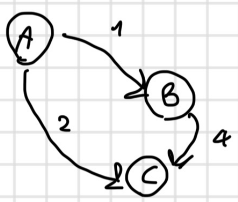
$\Theta(n^2)$ GENERO UNA SOLA MATRICE CHE SOVRASCRIVO.

DATO UN ALBERO DI CAMMINI MINIMI G_{Mx} POSSIAMO OTTENERE UN CAMMINO MINIMO DA x A y NEL MODO SEGUENTE:

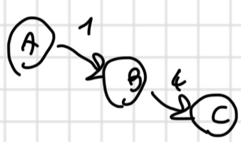
```
SHORTEST_PATH (M, x, y)
    IF (x = y) RETURN x
    ELSE IF (M[x,y] = NULL) RETURN ...    NON ESISTE CAMMINO
    ELSE RETURN SHORTEST_PATH(M, x, M[x,y]) · y
```

CONCATENAZIONE

*



$\min(2, 1+4) \Rightarrow 2$



$\min(\infty, 1+4) \Rightarrow 5$