Teoria dell'Informazione e Inferenza: prova d'esame del 4/9/23

1.1 (2pt) In quanti modi Alice, Berto, Carla, Dado, Eva e Franco possono dividersi in due gruppi da tre?

1.2 (3pt) Se X e Y sono due variabili casuali discrete con $p(X=3, Y=3) = 5/25$ e

$$\begin{aligned} p(X=1,Y=2) = p(X=2,Y=3) &= \frac{1}{25}, \quad p(X=3,Y=4) = p(X=1,Y=3) = \frac{2}{25} \\ p(X=2,Y=2) = p(X=3,Y=2) &= \frac{3}{25}, \quad p(X=1,Y=4) = p(X=2,Y=4) = \frac{4}{25} \end{aligned}$$

calcola $p(X=2|Y=3)$, $p(Y=3|X=2)$ e $\mathbb{E}[XY]$. Le due variabili casuali X e Y sono indipendenti?

1.3 (3pt) Determina il valore di a per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1/2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una densità di probabilità. Produci il grafico della *cdf* della variabile casuale continua X sottostante.

1.4 *(3pt) Enuncia gli assiomi della Teoria della Probabilità.

2.1 (2pt) Se nella ricerca di un sottomarino in una tabella di 128 caselle fallisci 64 volte, quanti bit di informazione hai guadagnato?

2.2 (3pt) Produci una codifica di Huffman per un alfabeto di 6 simboli con

$$p(a) = p(b) = \frac{7}{20}, \quad p(c) = p(d) = \frac{2}{20}, \quad p(e) = p(f) = \frac{1}{20}$$

2.3 (3pt) Se $p(0) = 1/10$ e $p(1) = 9/10$, determina gli intervalli nella codifica aritmetica delle sequenze di bit 110 e 001. Commenta i risultati che ottieni.

2.4 *(3pt) Produci una codifica di Huffman per l'alfabeto dell'esercizio **2.2** in modo che le lunghezze delle codifiche siano diverse da quelle che hai ottenuto in precedenza.

3.1 (2pt) In una piccola città in cui i taxi sono numerati da 1 a n, osservi i taxi numero 4, 20 e 50. Calcola e confronta la verosimiglianza di $n = 4$, $n = 20$, $n = 50$ ed $n = 100$. Commenta i risultati che ottieni.

3.2 (3pt) Un cassetto contiene 5 monete che restituiscono *testa* con probabilità $1/3$ e 1 moneta che restituisce *testa* con probabilità $3/4$. Qual è la probabilità di ottenere *testa* pescando una moneta a caso? E quale quella di ottenere *testa* al secondo lancio dopo aver ottenuto *testa* nel primo?

3.3 (3pt) Data la matrice di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

calcola la probabilità di passare dallo stato 2 allo stato 1 in due passi.

3.4 *(3pt) Determina la distribuzione limite di una matrice di transizione regolare simmetrica 2×2

1.1

$$\frac{6!}{(6-3)!\,3!} = \frac{720}{36} = 20$$

$20/2 = 10$ MODI POSSIBILI

1.2

$$P(X=2 \mid Y=3) = \frac{P(X=2,\,Y=3)}{P(Y=3)} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{8}{25}} = \frac{1}{25}\cdot\frac{25}{8} = \frac{1}{8}$$

$$P(Y=3) = \frac{5}{25} + \frac{1}{25} + \frac{2}{25} = \frac{8}{25}$$

$$P(Y=3 \mid X=2) = \frac{P(Y=3,\,X=2)}{P(X=2)} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{8}{25}} = \frac{1}{8}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{3}{25} = \frac{8}{25}$$

$$\mathbb{E}[XY] = \left(3\cdot 3\cdot\frac{5}{25}\right) + \left(2\cdot\frac{1}{25}\right) + \left(6\cdot\frac{1}{25}\right) + \left(12\cdot\frac{2}{25}\right) + \left(3\cdot\frac{2}{25}\right) + \left(4\cdot\frac{3}{25}\right) + \left(6\cdot\frac{3}{25}\right)$$
$$+ \left(4\cdot\frac{4}{25}\right) + \left(8\cdot\frac{4}{25}\right) = \frac{45}{25} + \frac{2}{25} + \frac{6}{25} + \frac{24}{25} + \frac{6}{25} + \frac{12}{25} + \frac{16}{25} + \frac{32}{25} = \frac{143}{25} \approx 5{,}72$$

$P(X=2,\ Y=3) = P(X=2)\cdot P(Y=3)$ SICCOME SONO $\neq$ NON SONO INDIPENDENTI

1.3

TROVO a

$$\int_0^1 ax + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow a\int_0^1 x + \int_0^1 \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x\right]_0^1 = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{a+1}{2} = 1 \Rightarrow$$

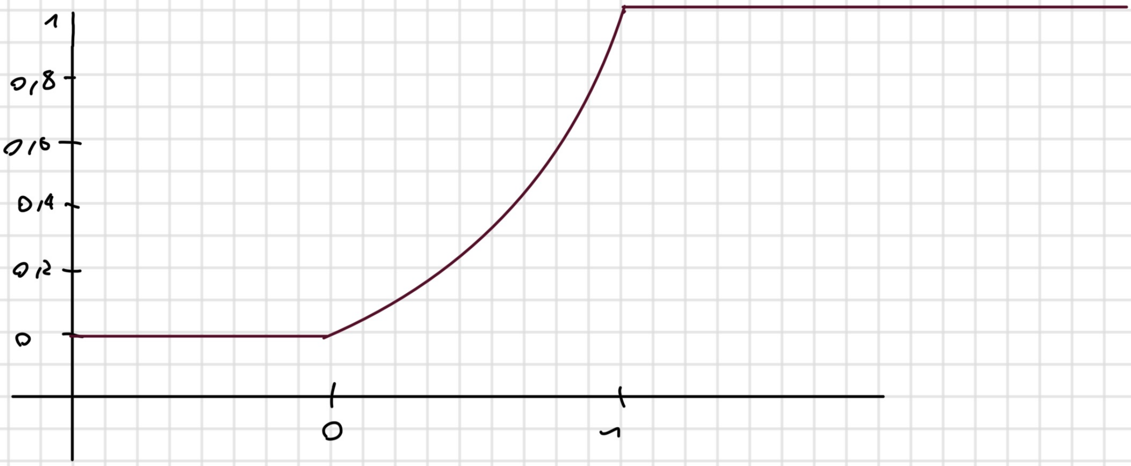
$$a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$$

CALCOLO CDF

PER $x < 0$: $F(x) = 1$

PER $0 \le x \le 1$: $\int_0^x x + 1/2 \Rightarrow \int_0^x x + \int_0^x \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x$

PER $x > 1$: $F(x) = 1$



1.4

1) $P(A) \geq 0$ NON ESISTE PROBABILITA' NEGATIVA

2) $P(S) = 1$ LA PROBABILITA' DELLO SPAZIO CAMPIONARIO E' UGUALE A 1

3) $P\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i P(E_i)$: PER UNA SEQUENZA NUMERABILE DI EVENTI DISGIUNTI (EVENTI CHE NON POSSONO ACCADERE CONTEMPORANEAMENTE) LA PROBABILITA' DELLA LORO UNIONE E' UGUALE ALLA SOMMA DELLE PROBABILITA' DEI SINGOLI EVENTI.

2.1

$\log_2(128) - \log_2(64) = 7 - 6 = 1$ bit

LO SPAZIO DELLE PROBABILITA' SI E' DIMEZZATO E OGNI DIMEZZAMENTO E' 1 BIT D'INFORMAZIONE GUADAGNATO

2.2

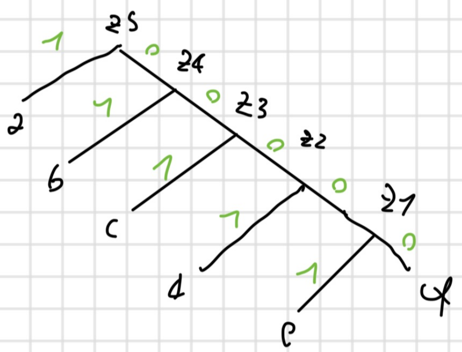
$P(z_1) = P(e) + P(f) = \frac{2}{20}$

$P(z_2) = P(d) + P(z_1) = \frac{4}{20}$

$P(z_3) = P(c) + P(z_2) = \frac{6}{20}$

$P(z_4) = P(b) + P(z_3) = \frac{13}{20}$

$P(z_5) = P(a) + P(z_4) = 1$



$c(a) = 1$

$c(b) = 01$

$c(c) = 001$

$c(d) = 0001$

$c(e) = 0001$

$c(f) = 00000$

2.3

110

$- x_1 = 1$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + L_0 \cdot \mathrm{cdf}(1-1) = 0 + 1 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\beta_1 = \alpha_0 + L_0 \cdot \mathrm{cdf}(1) = 1$$

$$I\left[\frac{1}{10}, 1\right) \qquad L_1 = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

$- x_2 : 1$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + L_1 \cdot \mathrm{cdf}(1-1) = \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} + \frac{9}{100} = \frac{10+9}{100} = \frac{19}{100}$$

$$\beta_2 = \alpha_1 + L_1 \cdot \mathrm{cdf}(1) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} = 1$$

$$I\left[\frac{19}{10}, 1\right) \qquad L_2 = 1 - \frac{19}{100} = \frac{81}{100}$$

$- x_3 = 0$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + L_2 \cdot \mathrm{cdf}(-1) = \frac{19}{100}$$

$$\beta_3 = \alpha_2 + L_2 \cdot \mathrm{cdf}(0) = \frac{19}{100} + \left(\frac{81}{100} \cdot \frac{1}{10}\right) = \frac{19}{100} + \frac{81}{1'000} = \frac{190+81}{1'000} = \frac{181}{1000}$$

001

$- x_1 = 0$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + L_0 \cdot \mathrm{cdf}(-1) = 0$$

$$\beta_1 = \alpha_0 + L_0 \cdot \mathrm{cdf}(0) = \frac{1}{10}$$

$$I\left[0, \frac{1}{10}\right) \qquad L_1 = \frac{1}{10}$$

$- x_2 = 0$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + L_0 \cdot \mathrm{cdf}(-1) = 0$$

$$\beta_2 = \frac{1}{100}$$

$$I\left[0, \frac{1}{100}\right) \qquad L_2 = \frac{1}{100}$$

$- x_3 = 1$

$$\alpha_3 = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$$

$$\beta_3 = 1/100$$

L'INTERVALLO PIU' CORTO E' 001 IN QUANTO 0 HA PROBABILITA' BASSA E RIDUCE DRASTICAMENTE L'INTERVALLO. OGNI VOLTA CHE COMPARE 1 SI RIDUCE DI POCO L'INTERVALLO IN QUANTO 1 HA PROBABILITA' ALTA.

2.4

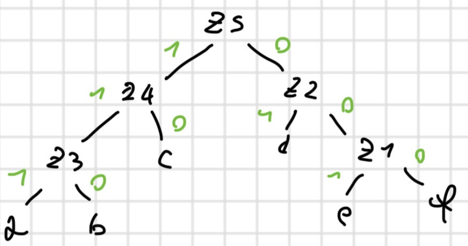
$P(z1) = P(e) + P(f) = \frac{2}{20}$ $\qquad Q = \{ z3, c, z2 \}$

$P(z2) = P(d) + P(z1) = \frac{4}{20}$

$P(z3) = P(a) + P(b) = \frac{14}{20}$

$P(z4) = P(z3) + P(c) = \frac{16}{20}$

$P(z5) = P(z4) + P(z2) = 1$



$c(a) = 111$

$c(b) = 110$

$c(c) = 10$

$c(d) = 01$

$c(e) = 001$

$c(f) = 000$

3.1

CASO M = 4: LA VEROSIMIGLIANZA E' 0 IN QUANTO NON E' POSSIBILE AVER OSSERVATO I TAXI 4, 20, 50 IN UN INSIEME COSI' PICCOLO

M = 20 STESSO MOTIVO DI SOPRA

M = 50: VEROSIMIGLIANZA MASSIMA, CORRISPONDE AL MASSIMO VALORE OSSERVATO E PERCIO' $L = \frac{1}{(50)^3}$

M = 100: $\frac{1}{100^3}$ POTREBBE ESSERE POSSIBILE MA COME NOTIAMO LA PROBABILITA' DI AVER OSSERVATO QUELLA TIPOLOGIA DI VALORI IN UN INSIEME PIU' GRANDE E' MOLTO BASSA

3.2

$P(T1|A) = \frac{1}{3}$ $\quad P(A) = \frac{5}{6}$ $\quad P(T1|B) = \frac{3}{4}$ $\quad P(B) = \frac{1}{6}$

$P(T1) = P(T1|A) \cdot P(A) + P(T1|B) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18} + \frac{3}{24} = \frac{29}{72} \approx 0.40$

$P(T2|T1) = P(T2|A) \cdot P(A|T1) + P(T2|B) \cdot P(A|T1)$

$P(A|T1) = \frac{P(T1|A) \cdot P(A)}{P(T1)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{29}{72}} = \frac{5}{18} \cdot \frac{72}{29} = \frac{20}{29}$

$$P(B|Y1) = \frac{P(Y1|B) \cdot P(B)}{P(Y1)} = \frac{3}{24} \cdot \frac{72}{29} = \frac{9}{29}$$

$$P(Y2|Y1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{20}{29} + \frac{9}{29} \cdot \frac{3}{4} = \frac{20}{87} + \frac{27}{116} = \frac{2320 + 2349}{10'092} \approx 0.46$$

3.3

$$P_{21}^{2} = (0.7 \cdot 0.2) + (0.3 \cdot 0.7) = 0.35$$

3.4