Appello di Teoria dell'Informazione e Inferenza (1/9/25)

1.1 Quante sono le combinazioni di un lucchetto con quattro numeri? E quante quelle in cui le cifre sono tutte diverse tra loro?

1.2 La v.c. X può assumere i valori 1 e 2 e la v.c. Y i valori 2, 3 e 4. Se $p(X=1, Y=2) = 2/5$, $p(Y=3|X=1) = 1/4$ e $p(X=1) = 4/5$ quanto valgono $P(X=1, Y=3)$ e $P(X=1, Y=4)$? Quanto valgono invece $p(Y=2|X=2)$ e $P(X=2, Y=2)$ se per $X=2$ i possibili valori di Y sono equiprobabili? Per quale motivo puoi affermare che $H(X,Y) < \log_2 6$?

1.3 Determina il valore di C per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} C - 2x & -2 \le x \le -1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una densità di probabilità. Trova e produci il grafico della *cdf* $F(\cdot)$ corrispondente. Quanto valgono $F(-3)$ ed $F(3)$?

1.4 Spiega i motivi per i quali una distribuzione cumulativa di probabilità ha valori nell'intervallo $[0,1]$. Discuti la sua forma nel caso in cui sia ottenuta a partire da una distribuzione di probabilità di massa e da una densità di probabilità.

2.1 Quali valori può assumere $H(Y)$ se $H(X,Y) = 4$ e $H(X) = 2$? Quanto vale $H(Y|X)$? Se $H(Y) = 3$, quanto vale $I(X;Y)$? (commenta le tue risposte).

2.2 Produci una codifica di Huffman C per un alfabeto di 5 simboli in cui $p(a) = 3/8$, $p(b) = 2/8$ e $p(d) = p(e) = p(f) = 1/8$ e mostra che la sua lunghezza attesa è $9/4$. Esiste una codifica di Huffman con lunghezze diverse rispetto a C ma con la stessa lunghezza attesa?

2.3 In una codifica convoluzionale C le quattro coppie di bit sono codificate come

$$C(00) = 000\,000, \quad C(01) = 000\,111, \quad C(10) = 111\,110 \text{ e } C(11) = 111\,001$$

Se ricevi la stringa 010 101, quale coppia di bit è stata spedita e perché?

2.4 Fornisci un esempio di una codifica univocamente decifrabile che non sia istantanea.

3.1 Lanciando una moneta 6 volte ottieni 2 volte *testa*. Sai che potresti aver lanciato una moneta che restituisce *testa* con probabilià $1/2$ oppure una che restituisce *testa* con probabilità $1/4$. Quanto vale la verosimiglianza nei due casi? .

3.2 Un cassetto contiene 4 monete che restituiscono *testa* con probabilità $1/2$ e 2 monete che restituiscono *testa* con probabilità $1/4$. Qual è la probabilità di ottenere *croce* pescando una moneta a caso? E quale quella di ottenere *croce* al secondo lancio dopo aver ottenuto *croce* nel primo?

3.3 Data la matrice di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

determina le probabilità di passare dallo stato 2 allo stato 2 in due passi e in tre passi.

3.4 Determina la distribuzione limite per la matrice dell'esercizio **3.3**.

1.1

4 NUMERI CON RIPETIZIONI: $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10'000$

4 NUMERI SENZA RIPETIZIONE: $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5'040$

1.2

$$P(X=1, Y=3) = P(X=1) \cdot P(Y|X) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=1) - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \boxed{\frac{1}{5}} \rightarrow P(X=1, Y=4)$$

$$P(Y=2 \mid X=2) = \frac{1}{3}$$ SICCOME $Y \in \{2,3,4\}$ E SONO EQUIPROBABILI.

$$P(X=2) = 1 - P(X=1) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=2, Y=2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

POSSIAMO AFFERMARE $H(X,Y) < \log_2 6$ IN QUANTO LE PROBABILITA' CONGIUNTE <u>NON</u> SONO EQUIPROBABILI.

1.3

TROVO C

$$\int_{-2}^{-1} c-2x = 1 \Rightarrow c\int_{-2}^{-1} 1 - \int_{-2}^{-1} 2x = 1 \Rightarrow c\int_{-2}^{-1} x - 2\int_{-2}^{-1}\frac{x^2}{2} = 1 \Rightarrow c(-1+2) - 2\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{-2^2}{2}\right)\right) = 1$$

$$\Rightarrow c - 2\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{2}\right) = 1 \Rightarrow c - 2\left(-\frac{3}{2}\right) = 1 \Rightarrow c+3 = 1 \Rightarrow \boxed{c = -2}$$

CALCOLIAMO CDF

$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \Rightarrow$

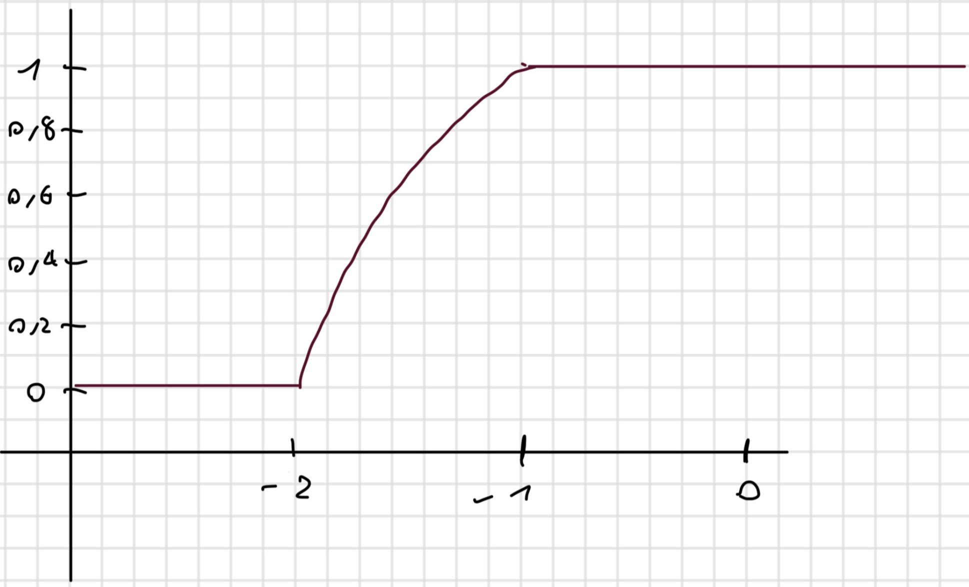
• CASO 1: $x<0$: $F(x)=0$

• CASO 2: $-2 \le x \le -1$: $\int_{-2}^{x} -2-2x\,dt \Rightarrow -2\int_{-2}^{x}1 - 2\int_{-2}^{x} x \Rightarrow -2\int_{-2}^{x} x - 2\int_{-2}^{x} \frac{x^2}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -2(x+2) - 2\left(\frac{x^2-4}{2}\right) \Rightarrow -2x-4-x^2+4 \Rightarrow -x^2-2x$$

• CASO 3: $x>0$: 1

$F(-3)=0$, $F(3)=1$



1.4

LA CDF DI UNA VARIABILE CASUALE X E' LA FUNZIONE CHE, A OGNI VALORE DI x, ASSOCIA LA PROBABILITA' CHE X ASSUMA UN VALORE MINORE O UGUALE A x:

$$F(x) = P(X \le x)$$

SE LA VARIABILE E' DISCRETA (LANCIO DI UN DADO) LA CDF E' UNA FUNZIONE A GRADINI. PER OGNI VALORE x, SOMMO TUTTE LE PROBABILITA' DEI VALORI POSSIBILI FINO A x. PARTIAMO DA 0 FINO A 1.

CASO CONTINUO: SE LA VARIABILE E' CONTINUA LA CDF E' DATA DA UN INTEGRALE DELLA DENSITA' DI PROBABILITA' $f(t)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

2.1

$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) \Rightarrow 4 = 2 + H(Y|X) \Rightarrow H(Y|X) = 2$

SICCOME $H(Y) \leq H(X,Y)$ E $H(Y) \geq H(Y|X)$, $H(Y) \in [2, 4]$

$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = 3 - 2 = 1$ SICCOME > 0 LE VARIABILI X E Y SONO DIPENDENTI. CONOSCERE UNA VARIABILE RIDUCE L'INCERTEZZA SULL'ALTRA

2.2

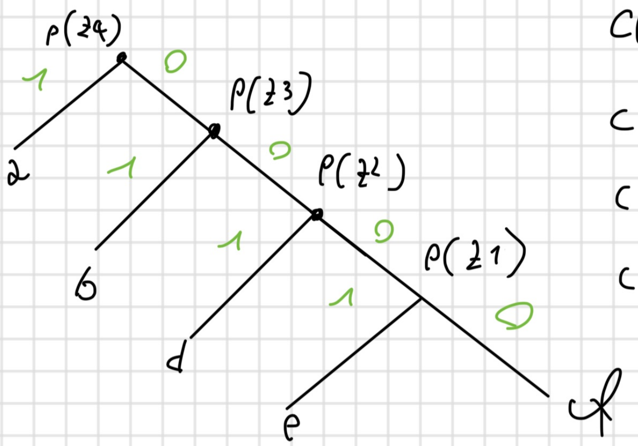
$Q = \left\{ p(a) = \frac{3}{8},\ p(b) = \frac{2}{8},\ p(d) = \frac{1}{8},\ p(e) = \frac{1}{8},\ p(f) = \frac{1}{8} \right\}$

$p(z_1) = p(e) + p(f) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$

$p(z_2) = p(d) + p(z_1) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

$p(z_3) = p(b) + p(z_2) = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

$p(z_4) = \frac{3}{8} + p(z_3) = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$



$c(a) = 1$

$c(b) = 01$

$c(d) = 001$

$c(e) = 0001$

$c(f) = 0000$

$$L(C) = \frac{3}{8}(1) + \frac{2}{8}(2) + \frac{1}{8}(3) + \frac{1}{8}(4) + \frac{1}{8}(4) = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{4}{8}$$

$$= \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \checkmark$$

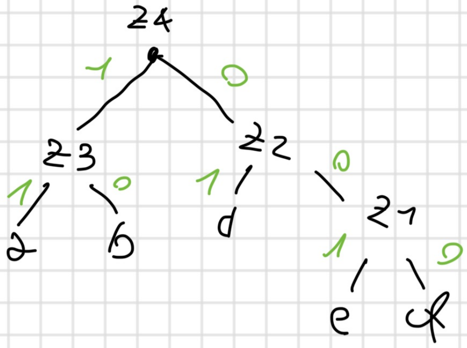
FACCIAMO UNA SECONDA CODIFICA DI HUFFMAN

$p(z_1) = p(e) + p(f) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$

$p(z_2) = p(d) + p(z_1) = \frac{3}{8}$

$p(z_3) = p(a) + p(b) = \frac{5}{8}$

$P(z_4) = \frac{5}{8} + P(z_2) = 1$



$c(a) = 11$

$c(b) = 10$

$c(d) = 01$

$c(e) = 001$

$c(f) = 000$

$$\left(\frac{3}{8}\cdot 2\right) + \left(\frac{2}{8}\cdot 2\right) + \left(\frac{1}{8}\cdot 2\right) + \left(\frac{1}{8}\cdot 3\right) + \left(\frac{1}{8}\cdot 3\right) = \frac{6+4+2+3+3}{8} = \frac{18}{8}$$

$$= \frac{9}{4}$$

2.3

DOBBIAMO TROVARE QUALE TRA LE QUATTRO CODIFICHE FORNITE SI AVVICINA DI PIU' A 010101.

CONFRONTIAMO UNA AD UNA:

010101 TESTO

000000

3 DIFFERENZE

010101

000111

2 DIFFERENZE

010101

111110

3

010101

111001

3

LA CODIFICA SPEDITA E' 01 IN QUANTO HA DISTANZA HAMMING MINORE

2, 4

UNA CODIFICA E' UNIVOCAMENTE DECIFRABILE SE OGNI SEQUENZA DI CODICI CORRISPONDE A UNA E UNA SOLA SEQUENZA DI SIMBOLI SORGENTE.

ESEMPIO:

$a = 1$

$b = 10$

$c = 100$

$d = 1000$

E' UNIVOCAMENTE DECIFRABILE MA NON ISTANTANEA IN QUANTO PER ESSERE ISTANTANEA LA b NON DOVREBBE INIZIARE CON '1'.

3.1

$$L(m) = \binom{m}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{m-k}$$

CASO 1/2

$$\binom{6}{2} \cdot \frac{1}{2}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6!}{(6-2)!\,2!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{720}{48} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = 15 \cdot \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$$

≈ 0.23

CASO 1/4

$$\binom{6}{2} \cdot \frac{1}{4}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^4 = 15 \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{15}{16} \cdot \frac{81}{256} = \frac{1215}{4096} \approx 0.29$$

3.2

$P(T1|A) = \frac{1}{2}$ $\quad P(T1|B) = \frac{1}{4}$ $\quad P(A) = \frac{4}{6}$ $\quad P(B) = \frac{2}{6}$

$$P(T) = P(T1|A) \cdot P(A) + P(T1|B) \cdot P(B) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6}\right) = \frac{2}{6} + \frac{1}{12} = \frac{4+1}{12} = \frac{5}{12}$$

TESTA A CASO

$$P(C1) = 1 - P(T) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

$$P(C_2|C1) = P(C2|A) \cdot P(A|C1) + P(C2|B) + P(B|C1)$$

$$P(C2|A) = 1 - P(T1|A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(C2|B) = 1 - P(T1|B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A|C1) = \frac{P(C1|A) \cdot P(A)}{P(C1)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{7}{12}} = \frac{2}{6} \cdot \frac{12}{7} = \frac{4}{7}$$

$$P(B|C1) = \frac{P(C1|B) \cdot P(B)}{P(C1)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{12} \cdot \frac{12}{7} = \frac{3}{7}$$

$$P(C2|C1) = P(C2|A) \cdot P(A|C1) + P(C2|B) \cdot P(B|C1) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{7}\right) =$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{9}{28} = \frac{8+9}{28} = \frac{17}{28}$$

3.3

IN DUE PASSI: $P^2_{22} = (0.8 \cdot 0.5) + (0.2 \cdot 0.2) = 0.4 + 0.04 = 0.44$

IN TRE PASSI: CI CALCOLIAMO PRIMA $P^2_{21} = (0.8 \cdot 0.5) + (0.2 \cdot 0.8) = 0.4 + 0.16 = 0.56$

$$P^3_{22} = (0.56 \cdot 0.5) + (0.44 \cdot 0.2) = 0.368$$

3.4

$$\begin{cases} M_1 = M_1 \cdot 0.5 + M_2 \cdot 0.8 \\ M_2 = \Pi_1 \cdot 0.5 + M_2 \cdot 0.2 \end{cases}$$ CON VINCOLO $M_1 + M_2 = 1$

$M_1 = 0.5M_1 + 0.8M_2 \Rightarrow -0.5 + M_1 = 0.8M_2 \Rightarrow 0.5M_1 = 0.8M_2 \Rightarrow M_1 = 1.6M_2$

$1.6M_2 + M_2 = 1 \Rightarrow 2.6M_2 = 1 \Rightarrow M_2 = 0.38$

$M_1 = 0.608$