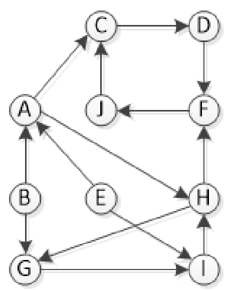
Analisi e progettazione di algoritmi

(III anno Laurea Triennale - a.a. 2022/23)

Prova scritta 6 settembre 2023

Esercizio 1 Si esegua, sul seguente grafo:



l'algoritmo per il calcolo delle componenti fortemente connesse. In particolare, si diano:

1. i tempi di inizio e fine visita ottenuti per ogni nodo in seguito alla visita in profondità (in tutti i casi in cui si deve scegliere un nodo, si consideri l'ordine alfabetico)
2. la sequenza delle componenti fortemente connesse $\mathtt{Ord}^{\leftrightarrow}$ ottenuta
3. il grafo quoziente.

Soluzione (Data in formato non grafico per mia comodità.)

1. Tempi di inizio e fine visita:

   A 1/16 B 17/18 C 2/9 D 3/8 E 19/20 F 4/7 G 11/14 H 10/15 I 12/13 J 5/6

2. Sequenza delle componenti fortemente connesse:

   $$\{E\}, \{B\}, \{A\}, \{H, I, G\}, \{C, J, F, D\}$$

3. Nel grafo quoziente ci sono sette archi:

   - $\{A\} \to \{C, J, F, D\}$
   - $\{A\} \to \{H, I, G\}$
   - $\{B\} \to \{A\}$
   - $\{B\} \to \{H, I, G\}$
   - $\{E\} \to \{A\}$
   - $\{E\} \to \{H, I, G\}$
   - $\{H, I, G\} \to \{C, J, F, D\}$

Esercizio 2

1. Si scriva la matrice corrispondente al calcolo della massima sottosequenza comune delle sequenze MZJAWXU e XMJYAUZ, con l'algoritmo di programmazione dinamica visto nel corso. Si indichino nella matrice solo le lunghezze; alla fine si evidenzi il percorso corrispondente alla massima sottosequenza comune e la si scriva.

2. Si consideri il problema di trovare la (lunghezza della) *massima sottosequenza palindroma* di una sequenza data $X[1..n]$. Per esempio, data la sequenza ABBDCACB, la massima sottosequenza palindroma è lunga 5 (BCACB). Indicando con $LPS(i,j)$ il sottoproblema relativo alla porzione di sequenza $X[i,j]$, con $1 \leq i, j \leq n$, si definisca induttivamente la soluzione di questi sottoproblemi giustificando la correttezza della definizione.

Soluzione

1. La matrice è la seguente. La massima sottosequenza comune è MJAU.

		0	1	2	3	4	5	6	7
		Ø	M	Z	J	A	W	X	U
0	Ø	0	0	0	0	0	0	0	0
1	X	0	0	0	0	0	0	1	1
2	M	0	1	1	1	1	1	1	1
3	J	0	1	1	2	2	2	2	2
4	Y	0	1	1	2	2	2	2	2
5	A	0	1	1	2	3	3	3	3
6	U	0	1	1	2	3	3	3	4
7	Z	0	1	2	2	3	3	3	4

2. **Base** $LPS[i,j] = 0$ per $i > j$
   $LPS[i,j] = 1$ per $i = j$
   (la massima sottosequenza palindroma di una sequenza vuota o di un solo elemento è la sequenza stessa)

   Passo induttivo per $1 \leq i < j \leq n$

$$LPS[i,j] = \begin{cases} LPS[i+1, j-1] + 2 & \text{se } X[i] = X[j] \\ \max(LPS[i+1,j], LPS(i, j-1) & \text{se } X[i] \neq X[j] \end{cases}$$

   (analogamente a quanto visto per LCS)

Esercizio 3 Supponi di applicare il test di Miller Rabin per $n = 27$. Quanti sono i testimoni banali? Quanti, al più, i testimoni non banali? Spiega entrambe le tue risposte.

Soluzione I testimoni banali, oltre 1 e 26, sono i numeri non coprimi di 27: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24.
$Z^{\star}_{27}$ consiste, pertanto, di 18 elementi: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26
Data l'esistenza di almeno un testimone non banale all'interno di $Z^{\star}_{27}$, l'ordine del sottogruppo cui appartengono gli eventuali bugiardi, per il teorema di Lagrange, è certamente un sottomultiplo di 18.