1) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Quali delle seguenti affermazioni è vera?:

a) Se $f$ è strettamente monotona, allora $f$ è iniettiva

2) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata allora:

b) l'estremo superiore di $f$ esiste ed è finito.

Spiegazione: se $f$ è limitata, allora esiste un estremo superiore (minimo dei maggioranti) e questo sarà finito

3) Siano $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ allora:

b) per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $f(x) < -M$

Spiegazione: è la definizione di limite che tende a $-\infty$

4) Siano $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $h(x) \leq f \leq g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$. Cosa ci permette di affermare che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$?

b) nessuna delle precedenti

5) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(x) > M$ per ogni $x$ tale che $2 < x < 2 + \frac{1}{M}$, dove $M > 0$ allora:

a) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

Spiegazione: se $f(x) > M$ per $x$ vicino a 2, man mano crescente, la funzione deve tendere a $+\infty$ quando $x$ si avvicina a 2 a destra

6) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ allora:

a) esiste $M > 0$ tale che $f(x) > \frac{1}{2}$ per ogni $x > M$

Spiegazione: se il limite della funzione è 1, allora per ogni $\varepsilon > 0$ (ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{2}$) esiste un punto oltre il quale la funzione è sempre vicina a 1 (quindi maggiore a 1/2)

7) Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, allora

c) per ogni $x_0 \in (a,b)$ si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Spiegazione: questa è la definizione di continuità su un intervallo aperto

8) Sia $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Quali affermazioni sono false?:

c) Se $f$ è strettamente crescente in $(a,b)$ allora $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$

Spiegazione: una funzione può essere strettamente crescente senza che la sua derivata sia strettamente maggiore di zero (ad esempio, può essere zero in un punto)

9) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

b) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si ha $\int_a^b f(x)\,dx = f'(b) - f'(a)$

Spiegazione: questa affermazione confonde il teorema fondamentale del calcolo con la derivata. L'integrale della funzione non è uguale alla differenza delle derivate della funzione

10) Sia $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[0,2] \setminus \{1\}$ e tale che $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$ allora:

a) non esiste nessuna primitiva di $f$ in $[0,2]$

Spiegazione: una funzione con discontinuità di salto (come indicato dai diversi limiti da sinistra e destra) non può avere una primitiva continua nell'intervallo che include il punto di discontinuità.