SIMULAZIONE ESAME #1

DIAGONALIZZAZIONE

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -2 \end{bmatrix}$$

a) CALCOLARE, AL VARIARE DEL PARAMETRO λ, LA MATRICE $A-\lambda I$ E IL RELATIVO DETERMINANTE.

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow A-\lambda I = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = (2-\lambda)(-2-\lambda) - (\sqrt{5})(\sqrt{5}) = -4 -2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 5 = \lambda^2 - 9$$

b) $\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3$ TROVARE GLI AUTOVALORI

$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -3$

NON E' NECESSARIO ORDINARLI PER MASSIMO MODULO, L'IMPORTANTE E' MANTENERE L'ORDINE COERENTE.

c) DETERMINARE RANGO DI A E $A-\lambda I$

$\det(A) = -9 \neq 0$ SICCOME A HA UN DET $\neq 0$ IL SUO RANGO E' 2

CASO CON $\lambda = 3$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R2 \to R2 + \sqrt{5}R1} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ RANGO 1

CASO CON $\lambda = -3$

$$A - (-3)I = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1 \to \frac{R1}{5}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2 \to R2 - \sqrt{5}R1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RANGO 1

d) DETERMINARE IL SOTTOSPAZIO $(A-\lambda I)x = 0$

CASO CON $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + \sqrt{5}\,x_2 = 0 \\ \sqrt{5}\,x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{5}\,x_2 \\ \sqrt{5}(\sqrt{5}\,x_2) - 5x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{5}\,x_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{X} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{5}\,x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle|\ x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

CASO $\lambda = -3$

$$\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + \sqrt{5}\,x_2 = 0 \\ \sqrt{5}\,x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + \sqrt{5}(-\sqrt{5}\,x_1) \\ x_2 = -\sqrt{5}\,x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - 5x_1 = 0 \\ x_2 = -\sqrt{5}\,x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x_2 = -\sqrt{5}\,x_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{X} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -\sqrt{5}\,x_1 \end{pmatrix} \middle|\ x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\rangle$$

c) DETERMINARE SE ESISTE UNA DIAGONALIZZAZIONE DELLA MATRICE A

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 \\ 1 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad D = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

USARE ORDINE STABILITO NEL PUNTO b

DOBBIAMO VERIFICARE $A = VDV^{-1}$

NOTA: I PROF SCRIVONO $X \Lambda X^{-1}$ NON CAMBIA NULLA PERO'

$\det(V) = -6 \neq 0$ QUINDI INVERTIBILE

$A_{11} = -\sqrt{5}$ $\qquad A_{12} = \boxed{-}1$ $\qquad \begin{pmatrix} + & \boxed{-} \\ - & + \end{pmatrix}$

$A_{21} = -1$ $\qquad A_{22} = \sqrt{5}$

$$\operatorname{cof}(V) = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -1 \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{cof}(V)^T \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -1 \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} = \frac{1}{\det(V)} \cdot \operatorname{cof}(V)^T = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -1 \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{5}}{6} \end{pmatrix}$$

$$VD = \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & -3 \\ 3 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad VDV^{-1} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & -3 \\ 3 & 3\sqrt{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{5}}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -2 \end{bmatrix}$$ VERIFICATO

LA VERIFICA FINALE QUINDI $A = VDV^{-1}$ I PROF CONSIGLIANO DI LASCIARLA PER ULTIMA IN QUANTO I PUNTI PIU' IMPORTANTI SONO a, b, c E d

F) METODO POTENZE CON SHIFT DATI DA TESTO

CON $p = -1$

$$\mu 1 = \frac{1}{\mu_i - p} \qquad \mu 1 = \frac{1}{\lambda 1 - p} = \frac{1}{3-(-1)} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$\mu 2 = \frac{1}{\lambda 2 - p} = -\frac{1}{2} \approx -0{,}5$$

MASSIMO MODULO E' 0,5 QUINDI RIASSEGNIAMO LE VARIABILI $\mu 1$ SARA' IL MASSIMO MODULO TRA TUTTI I μ CALCOLATI MENTRE $\mu 2$ SARA' QUELLO SUBITO PIU' PICCOLO

$$V = \left|\frac{\mu 2}{\mu 1}\right|^K = \left|\frac{0{,}25}{-0{,}5}\right| = (0{,}5)^K$$

CASO $p = 2$

$$\mu 1 = \frac{1}{3-2} = 1 \qquad \mu 2 = -\frac{1}{5} = -0{,}2 \qquad V = \left|\frac{\mu 2}{\mu 1}\right|^K = \left|\frac{-0{,}2}{1}\right|^K = (0{,}2)^K$$

I MODULI SONO DISTINTI QUINDI CONVERGE

SIMULAZIONE ESAME #2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) CALCOLARE $A - \lambda I$

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$\det(A - \lambda I)$ = SCELGO COLONNA CON PIU' ZERO E USO LA REGOLA PER SEGNI $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(1-\lambda) - 1\right] \Rightarrow (1-\lambda)\left[1 - \lambda - \lambda + \lambda^2 - 1\right] \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)\left[\lambda^2 - 2\lambda\right] = (1-\lambda)\left[\lambda(\lambda-2)\right]$$

b) DETERMINARE AUTOVALORI

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 0 \qquad \lambda_3 = 2$ HANNO TUTTI MOLTEPLICITÀ 1

c) DETERMINARE RANGO DI A E $A - \lambda I$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3 - R1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R2 \to R2 + R1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ RANGO 2

CASO $\lambda = 1$

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1 \to R3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R2 \to R2 + R1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R2 \to R2 + R3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RANGO 2

CASO $\lambda = 0$ SICCOME L'ESPRESSIONE $A - 0I = A$ IL RANGO È UGUALE A QUELLO DI A

CASO $\lambda = 2$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3 + R1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R2 \to R2 - R1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ IL RANGO È 2 MA POTREI CAMBIARE I SEGNI DELLA DIAGONALE

d) $(A - \lambda I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ -x_1 \quad -x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

UN MODO PER RISPARMIARE TEMPO È QUELLO DI USARE I RISULTATI OTTENUTI DALLA RIDUZIONE DI GAUSS NEL PUNTO C E FARE IL SISTEMA CON QUELLI

$\lambda = 0$

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\lambda_3 = 2$

$$\begin{cases} -x_1 \quad + x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e)

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(V) = -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\mathrm{cof}(V) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{cof}(V)^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} = \frac{1}{\det(V)} \cdot \mathrm{cof}(V)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$A = VDV^{-1}$

$$VD = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$VDV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ VERIFICATO

F) DEFINIZIONE METODO POTENZE

IL METODO DELLE POTENZE INVERSE APPLICATO ALLA MATRICE A CONVERGE AGLI AUTOVALORI DI A PIU' VICINI AL PARAMETRO DI SHIFT P.

- SE P E' VICINO A $\lambda_1 = 1$, IL METODO CONVERGE A λ_1
- SE P E' VICINO A $\lambda_2 = 0$, IL METODO CONVERGE A λ_2
- SE P E' VICINO A $\lambda_3 = 2$, IL METODO CONVERGE A λ_3

SPLINE, SIMULAZIONE

$$S(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha x + \beta & \text{SE } 0 \leq x \leq 1 \\ -x^3 + \alpha x^2 & \text{SE } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

a) VERIFICARE CHE SIA UNA SPLINE

PER ESSERE UNA SPLINE DEVE ESSERE:

- POLINOMIO A TRATTI GRADI ≤ 3
- S, S', S'' CONTINUE

LA PRIMA CONDIZIONE E' VERIFICATA.

$$\lim_{x \to 1^-} x^3 + \alpha x + \beta = \lim_{x \to 1^+} -x^3 + \alpha x^2$$

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = 1 + a + \beta \qquad 1 + a + \beta = -1 + a \Rightarrow \beta = -2$$

$$\lim_{x \to 1^+} S(x) = -1 + a$$

$S(x)$ PER ESSERE CONTINUA DEVE AVERE $\beta = -2$

$$S(x)' = \begin{cases} 3x^2 + a & 0 \le x \le 1 \\ -3x^2 + 2ax & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} S(x)' = 3 + a \qquad 3 + a = -3 + 2a \Rightarrow a = 6$$

$$\lim_{x \to 1^+} = -3 + 2a$$

$S'(x)$ PER ESSERE CONTINUA DEVE AVERE $a = 6$ E $\beta = -2$

$$S(x)'' = \begin{cases} 6x & 0 \le x \le 1 \\ -6x + 2a & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} S(x)'' = 6$$

$$\lim_{x \to 1^+} S(x)'' = -6 + 2a \Rightarrow -6 + 2(6) = -6 + 12 = 6$$

$S(x)''$ CONTINUA

b) VERIFICARE SE E' NATURALE

SPLINE NATURALE $\Leftrightarrow S''(a) = S''(b) = 0$

$$\underset{0}{\overset{\|}{a}} \qquad \underset{2}{\overset{\|}{b}}$$

$a = 0$ E $b = 2$ PERCHE' SONO I VALORI ESTERNI

$$S''(0) = 6 \cdot 0 = 0$$

$$S''(2) = -6 \cdot 2 + 2a = 0$$ IN QUANTO a VALE 6 PER LA CONDIZIONE DI CONTINUITA'

SPLINE INTERPOLANTE

$$s(x) = \begin{cases} -x^3 + \beta x & -1 \le x \le 0 \\ \beta x^3 - \alpha x^2 & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

a) VERIFICARE CHE SIA SPLINE

$\lim\limits_{x \to 0^-} s(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} s(x) = 0$ QUINDI $s(x)$ CONTINUA $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$s'(x) = \begin{cases} -3x^2 + \beta & -1 \le x \le 0 \\ 3\beta x^2 - 2\alpha x & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} = -3x^2 + \beta = \lim_{x \to 0^+} 3\beta x^2 - 2\alpha x \Rightarrow \beta = 0$$

$s'(x)$ CONTINUA SE $\beta = 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$s''(x) = \begin{cases} -6x & -1 \le x \le 0 \\ 6\beta x - 2\alpha & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} -6x = \lim_{x \to 0^+} 6\beta x - 2\alpha \Rightarrow \alpha = 0$$

$s''(x)$ CONTINUA SE $\alpha = 0$ $\beta = 0$

b)

$$f(x) = \sin(\pi x) - \frac{6}{7} x$$

PER VERIFICARE CHE SIA INTERPOLANTE I VALORI DI $x = -1, 0, 2$ INSERITI NELLA $f(x)$ DEVONO ESSERE UGUALI A QUELLI DI $s(x)$

$$f(0) = \sin(0) = 0$$

$$\varphi(-1) = \sin(-\pi) + \frac{6}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\varphi(2) = \sin(2\pi) + \frac{12}{7} = \frac{12}{7}$$

$S(x)$ è interpolante con $\varphi(x)$ solo nel punto 0 con $\alpha = 0$ e $\beta = 0$

SVD simulazione

12/02/24

$A = U \Sigma V^T$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad U = \begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Verificare che sia SVD

Ci sono diverse condizioni per verificare che una SVD sia valida:

1) Posso fare il prodotto tra $U \Sigma V^T$
2) A deve avere le stesse dimensioni di Σ
3) U e V devono essere ortogonali
4) Σ deve essere diagonale e gli elementi sulla diagonale devono essere non nulli e decrescenti

$$\underset{3\times 2}{A} = \underset{3\times 3}{U}\ \underset{3\times 2}{\Sigma}\ \underset{2\times 2}{V^T}$$

prima condizione soddisfatta.

Ora controllo se U e V sono ortogonali

$U = (\underline{u_1} | \underline{u_2} | \underline{u_3})$ $\quad u_m$ = colonna di U

$$\langle \underline{u_1}, \underline{u_2} \rangle = -\frac{3}{5} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot 0 = 0$$

$$\langle \underline{u_3}, \underline{u_2} \rangle = 0$$

$$\langle u_1, u_3 \rangle = -\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + 0 \cdot 0 + \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = 0$$

ORA VERIFICO CHE $\|u_1\|_2 = \|u_2\|_2 = \|u_3\|_2 = 1$

$$\|\underline{u_1}\|_2 = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$$

$$\|\underline{u_2}\|_2 = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\underline{u_3}\|_2 = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = 1$$

FACCIAMO STESSE VERIFICHE PER V

$$V = \left(\underline{u_1} \,|\, \underline{u_2}\right)$$

$$\langle \underline{u_1}, \underline{u_2} \rangle = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 0$$

$$\|\underline{u_1}\|_2 = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

$$\|\underline{u_2}\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

U E V SONO ENTRAMBE VERIFICATE. PER L'ULTIMA VERIFICA BASTA OSSERVARE AD OCCHIO Σ, NEL NOSTRO CASO SODDISFA LA CONDIZIONE.

σ = VALORI SINGOLARI

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$$

RANGO 1, A HA LE STESSE PROPRIETÀ DI Σ

b) DETERMINARE IMMAGINE E NUCLEO

$$A\underline{v_1} = \sigma_1 \underline{u_1} \qquad A\underline{v_1} = 2\underline{u_1} \qquad A: V \xrightarrow{\Sigma} U$$

$$A\underline{v_2} = \sigma_2 \underline{u_2} \qquad A\underline{v_2} = 0\underline{u_2} = 0$$

$$\mathrm{Im}(A) = \langle u_1 \rangle$$

DUE VETTORI DISTINTI $\in \mathrm{Im}(A)$: $\underline{u_1}\begin{pmatrix} -3/5 \\ 0 \\ -4/5 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{2u_1}\begin{pmatrix} -6/5 \\ 0 \\ -8/5 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Ker}(A) = \langle v_2 \rangle \qquad \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{2v_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

LE COLONNE DI U ASSOCIATE AI VALORI SINGOLARI NON NULLI → $Im(A)$
LE COLONNE DI V ASSOCIATE AI VALORI SINGOLARI NULLI → $Ker(A)$

RELAZIONE TRA SVD, L'IMMAGINE, NUCLEO E RANGO DI UNA MATRICE

1) IMMAGINE

- L'IMMAGINE DI A E' GENERATA DAI VETTORI COLONNA DI U ASSOCIATI AI VALORI SINGOLARI POSITIVI DI Σ
- I PRIMI r VETTORI DI U (CON r PARI AL RANGO DI A) FORMANO UNA BASE ORTONORMALE PER $Im(A)$

2) NUCLEO

- IL NUCLEO DI A E' GENERATO DAI VETTORI COLONNA DI V ASSOCIATI AI VALORI SINGOLARI NULLI DI Σ

3) RANGO: IL NUMERO DI VALORI SINGOLARI POSITIVI DI Σ DETERMINA IL RANGO DI A

4) ORTOGONALITA': GLI SPAZI $Im(A)$ E $Ker(A)$ SONO ORTOGONALI: OGNI VETTORE IN $Im(A)$ E' ORTOGONALE A OGNI VETTORE $Ker(A)$

ESERCIZIO "LUNGO" SVD

a) PROPRIETA' SVD

STESSA SPIEGAZIONE PAGINA PRIMA

b) VERIFICARE UGUAGLIANZE

CONTROLLIAMO INNANZITUTTO LE VARIE Σ, CONTROLLIAMO SE U E V SONO ORTOGONALI QUINDI STESSI CONTROLLI DELL'ESERCIZIO A PAGINA PRIMA. INFINE SVOLGIAMO IL PRODOTTO E VERIFICHIAMO SE EFFETTIVAMENTE IL RISULTATO E' UGUALE.

GIVENS

13/2/23

$$X = \begin{pmatrix} -2 \\ \boxed{0} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SCEGLIAMO COME PIVOT $\boxed{0}$ IN QUANTO m SI TROVA IN 2° POSIZIONE, DOBBIAMO APPLICARE LE SEGUENTI FORMULE:

$$c = \cos(x) = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} \qquad s = \sin(x) = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

PER COMODITA' IL DENOMINATORE LO CHIAMO r:

$$r = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

QUINDI:

$$c = \frac{0}{r} \qquad s = -\frac{2}{2} = -1$$

$$G(2,1,\theta) = \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G(2,1,\theta)\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

RIPETIAMO IL PASSAGGIO:

$$\sqrt{2^3} = \sqrt{2^{2+1}} = \sqrt{2^2 \cdot 2^1} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2}$$

$$r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$c = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad s = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$G(2,4,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & -s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 0 & c \end{bmatrix} \qquad G(2,4,\theta)\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SONO STATE APPLICATE IN SEQUENZA DUE ROTAZIONI: LA PRIMA NEL PIANO $\langle e_2, e_1 \rangle$ LA SECONDA NEL PIANO $\langle e_2, e_4 \rangle$.

SETTEMBRE 2016

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$c = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad s = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$G(1,2,\theta) = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G(1,2,\theta) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$c = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \qquad s = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$G(1,3,\theta') = \begin{bmatrix} c & 0 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G(1,3,\theta') \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad s = -\frac{1}{2}$$

$$G(1,4,\theta'') = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \qquad G(1,4,\theta'') \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

LA PRIMA ROTAZIONE HA AGITO SUL PIANO $\langle e_1, e_2 \rangle$, LA SECONDA SUL PIANO $\langle e_1, e_3 \rangle$ E LA TERZA HA AGITO SUL PIANO $\langle e_1, e_4 \rangle$

23-1-23

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$c = \frac{-4}{\sqrt{17}} \qquad s = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$G(2,1,\theta) = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G(2,1,\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{17} \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{17})^2 + 8^2} = 9$$

$$c = \frac{\sqrt{17}}{9} \qquad s = -\frac{8}{9}$$

$$G(2,4,\theta') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & -s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 0 & c \end{bmatrix} \qquad G(2,4,\theta') \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{17} \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SONO STATE APPLICATE IN SEQUENZA DUE ROTAZIONI: LA PRIMA NEL PIANO $\langle e_2, e_1 \rangle$ LA SECONDA NEL PIANO $\langle e_2, e_4 \rangle$

HOUSE HOLDER SIMULAZIONE

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \|x\|_2 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

$$u = x - \beta e_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-5 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$u^T u = \begin{pmatrix} -8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} = 64 + 16 = 80$$

$$u u^T = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & -32 \\ -32 & 16 \end{pmatrix}$$

$$P = I - 2 \cdot \frac{u u^T}{u^T u} = I - 2 \cdot \frac{1}{80}\begin{pmatrix} 64 & -32 \\ -32 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}6 & -0{,}8 \\ -0{,}8 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

LA MATRICE P RAPPRESENTA UNA RIFLESSIONE RISPETTO AL PIANO ORTOGONALE AL VETTORE $W = \frac{u}{\|u\|_2}$.

APPLICANDO P AL VETTORE X, SI OTTIENE UN NUOVO VETTORE CON LA FORMA DESIDERATA $\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ DOVE $\beta = 5$

$$\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$ VERIFICATO

12-2-20

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \|x\|_2 = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$M = x - \alpha e_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$M^T M = \begin{pmatrix} -8 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 80$$

$$M M^T = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \\ 32 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$P = I - 2 \frac{M M^T}{M^T M} = I - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 64 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \\ 32 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}6 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0 & -0{,}8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0{,}8 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

LA RIFLESSIONE DI HOUSEHOLDER P RIFLETTE IL VETTORE $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ RISPETTO AL PIANO ORTOGONALE AL VETTORE $W = \frac{M}{\|M\|_2}$ TRASFORMANDOLO NELLA FORMA

$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ CON $\alpha = 5$

$$\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0 & -0{,}8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0{,}8 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

23-6-21

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \|x\|_2 = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$u = x - \alpha e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u^T u = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 30$$

$$u u^T = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 5 & -10 \\ 5 & 1 & -2 \\ -10 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P = I - 2 \frac{u u^T}{u^T u} = I - 2 \cdot \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25 & 5 & -10 \\ 5 & 1 & -2 \\ -10 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{25}{30} & \frac{5}{30} & -\frac{10}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & -\frac{2}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{2}{30} & \frac{4}{30} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{14}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix}$$

LA RIFLESSIONE DI HOUSEHOLDER P RIFLETTE IL VETTORE $x = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ RISPETTO AL PIANO ORTOGONALE AL VETTORE $w = \frac{u}{\|u\|_2}$ TRASFORMANDOLO NELLA FORMA $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ CON

$\alpha = 3$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{14}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

MEGLIO TENERE LE FRAZIONI INTATTE PIUTTOSTO CHE FARE LA DIVISIONE PER EVITARE ERRORI DI APPROSSIMAZIONI.

MINIMI QUADRATI SIMULAZIONE #1

x	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1
y	7	4	-14	-4	7

$$y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -14 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

b) A^2 NON ESSENDO UNA MATRICE QUADRATA NON POSSIAMO SVOLGERE IL CALCOLO

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/4 & 7/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1 \\ -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7/4 & 1 & 3/4 & 1 \\ 7/4 & 21/16 & 1 & 13/16 & 3/4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3/4 & 13/16 & 1 & 21/16 & 7/4 \\ 1 & 3/4 & 1 & 7/4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1 \\ -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/8 & 0 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 5/2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^Ty = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1 \\ -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -14 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y^TA = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -14 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} \text{RIGA 1} \cdot \text{COL 1} & \text{RIGA 1} \cdot \text{COL 2} & \dots & \text{RIGA 1} \cdot \text{COL 5} \\ \text{RIGA 2} \cdot \text{COL 1} & \text{RIGA 2} \cdot \text{COL 2} & \dots & \text{RIGA 2} \cdot \text{COL 5} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{RIGA 5} \cdot \text{COL 1} & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \text{RIGA 1} \cdot \text{COL 1} & \text{RIGA 1} \cdot \text{COL 2} & \text{RIGA 1} \cdot \text{COL 3} \\ \text{RIGA 2} \cdot \text{COL 1} & \text{RIGA 2} \cdot \text{COL 2} & \text{RIGA 2} \cdot \text{COL 3} \\ \text{RIGA 3} \cdot \text{COL 1} & \text{RIGA 3} \cdot \text{COL 2} & \text{RIGA 3} \cdot \text{COL 3} \end{bmatrix}$$

$$A^T Y = \begin{bmatrix} \text{RIGA 1} \cdot Y \\ \text{RIGA 2} \cdot Y \\ \text{RIGA 3} \cdot Y \end{bmatrix} \qquad Y^T A = \begin{bmatrix} Y \cdot \text{COL 1} & Y \cdot \text{COL 2} & Y \cdot \text{COL 3} \end{bmatrix}$$

) DIMOSTRARE CHE a_1 a_2 Y SIANO LINEARMENTE INDIPENDENTI

TRE VETTORI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE L'UNICA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE

$$\boxed{c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 Y = 0}$$

È $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 1/4 & -1/2 & -4 \\ 0 & 0 & -14 \\ 1/4 & 1/2 & -4 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 - c_2 + 7c_3 = 0 \\ 1/4c_1 - 1/2c_2 - 4c_3 = 0 \\ -14c_3 = 0 \\ 1/4c_1 + 1/2c_2 - 4c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + 7c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} // \\ 1/4c_1 = 1/2c_2 \\ c_3 = 0 \\ // \\ // \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c_2 - c_2 = 0 \\ c_1 = 2c_2 \\ c_3 = 0 \\ // \\ // \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

SICCOME $c_1, c_2, c_3 = 0$ ABBIAMO VERIFICATO CHE I VETTORI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI TRA LORO

d) VETTORE ORTOGONALE

$$\begin{array}{c} a_1^T \\ a_2^T \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 0 & 1/4 & 1 \\ -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \\ \tilde{y}_4 \\ \tilde{y}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SICCOME $\tilde{y}_3$ È UNA VARIABILE LIBERA POSSO SCEGLIERE IL VETTORE

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) $A^T A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^T y$

$$\begin{cases} 17/8\,x + 5/2\,z = 14 \\ 5/2\,y = -4 \\ 5/2\,x + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} // \\ y = -\frac{8}{5} \\ 5z = -5/2\,x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17/8\,x + 5/2\left(-\frac{1}{2}\right) = 14 \\ y = -\frac{8}{5} \\ z = -\frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{17}{8}x - \frac{5}{4}x = 14 \\ // \\ // \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{17-10}{8}x = 14 \\ // \\ // \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = -8/5 \\ z = -8 \end{cases}$$

f) $\gamma(x) = 16x^2 - \frac{8}{5}x - 8$

LA FUNZIONE $\gamma(x)$ APPROSSIMA AI MINIMI QUADRATI I DATI RICONTATI, MINIMIZZANDO LA SOMMA DEGLI SCARTI CHE ASSUME E I DATI Y

SIMULAZIONE A 2

x	-6	1	2	3
y	6	5	1	-1

$$\varphi(x) = a\frac{6}{x} + bx + c$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 24 & 10 \\ 12 & 50 & 0 \\ 10 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 38 & -11 & -14 & -19 \\ -11 & 38 & 21 & 16 \\ 14 & 21 & 14 & 13 \\ -19 & 16 & 13 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ RIGA M PER CIASCUNA COLONNA

YA^T = NON POSSIAMO SVOLGERE QUESTO PRODOTTO IN QUANTO Y E' UNA MATRICE 4×1 MENTRE A^T E' 3×4. POICHE' IL NUMERO DI COLONNE DA PARTE DELLA PRIMA MATRICE (Y) NON E' UGUALE AL NUMERO DI RIGHE DELLA SECONDA MATRICE NON E' POSSIBILE SVOLGERE IL CALCOLO.

$$A^T Y = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ -26 \\ 10 \end{bmatrix}$$

c) LINEARMENTE INDIPENDENTI

$$\boxed{c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 Y = 0}$$

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$$\begin{cases} -c_1 - 6c_2 + 5c_3 = 0 \\ 6c_1 + c_2 + 5c_3 = 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 + 3c_2 - c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -c_1 - 6(-6c_1 - 5c_3) + 5c_3 = 0 \\ c_2 = -6c_1 - 5c_3 \\ // \\ // \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -c_1 + 36c_1 + 30c_3 + 5c_3 = 0 \\ // \\ // \\ // \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_3 \\ c_2 = 6c_3 - 5c_3 = c_3 \\ -3c_3 + 2(c_3) + c_3 = 0 \\ // \\ // \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} // \\ // \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

OTTENIAMO c_1 E $c_2 = 0$, c_3 ESSENDO VARIABILE LIBERA POSSIAMO ASSEGNARCI $c_3 = 0$ PER DIMOSTRARE CHE I 3 VETTORI SONO INDIPENDENTI

d) TROVARE $\tilde{y}$ DIPENDENTE DA a_1 E a_2

UN VETTORE $\tilde{y}$ È LINEARMENTE DIPENDENTE DA a_1 E a_2 SE ESISTONO SCALARI k_1 E k_2 TALI CHE:

$$\boxed{\tilde{y} = k_1 a_1 + k_2 a_2}$$

SCEGLIAMO $k_1 = k_2 = 1$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

e) $A^T A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = A^T y$

$$\begin{cases} 50\alpha + 24\beta + 10\gamma = 26 \\ 12\alpha + 50\beta + 0\gamma = -26 \\ 10\alpha + 0\beta + 4\gamma = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} // \\ \frac{50\beta}{50} = \frac{-26}{50} - \frac{12\alpha}{50} \Rightarrow -\frac{13}{25} - \frac{6}{25}\alpha \\ \frac{4\gamma}{4} = \frac{10}{4} - \frac{10\alpha}{4} \Rightarrow \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 50\alpha + 24\left(-\frac{13}{25} - \frac{6}{25}\alpha\right) + 10\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\alpha\right) \\ // \\ // \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50\alpha - \frac{312}{25} - \frac{144\alpha}{25} + 25 - 25\alpha = 0 \\ // \\ // \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50\alpha - \frac{144}{25}\alpha - 25\alpha = \frac{312}{25} - 25 \\ // \\ // \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1250 - 144 - 625}{25}\alpha = \frac{312 - 625}{25} \\ // \\ // \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{481}{25}\alpha = -\frac{313}{25} \\ // \\ // \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -0{,}6 \\ \beta = -\frac{13}{25} - \frac{6}{25}(-0{,}6) \\ \gamma = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}(-0{,}6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0{,}6 \\ \beta = 0{,}66 \\ \gamma = 4 \end{cases}$$

$$\varphi(x) = -0{,}6 \cdot \left(\frac{6}{x}\right) + 0{,}66x + 4$$

LA NUOVA FUNZIONE $\varphi(x)$ APPROSSIMA AI MINIMI QUADRATI I DATI RIPORTATI, MINIMIZZANDO LA SOMMA DEGLI SCARTI CHE ASSUME E I DATI Y

CONDIZIONAMENTO MATRICE (ES 4)

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 50 & -49 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \text{POSSO CALCOLARE L'INVERSA}$$

$$A11 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 50 & -49 \end{vmatrix} = -1 \qquad A12 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -49 \end{vmatrix} = 0 \qquad A13 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 50 \end{vmatrix} = 0$$

$$A21 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 50 & -49 \end{vmatrix} = 0 \qquad A22 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -49 \end{vmatrix} = -49 \qquad A23 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A31 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A32 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A33 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\mathrm{COF}(V) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -49 & -50 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{COF}(V)^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -49 & -1 \\ 0 & -50 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\det(V)} \cdot COF(V)^T = -1 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -49 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 1 \\ 0 & 50 & 1 \end{pmatrix}$$ MATRICE INVERSA VERIFICATO

b) $$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 50 & -49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{RICA m PER} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

c) CALCOLO DI $\|A\|_1$: LA NORMA DI $\|A\|_1$ È LA SOMMA MASSIMA DEGLI ELEMENTI IN VALORE ASSOLUTO DI OGNI COLONNA.

CALCOLO DI $\|A\|_\infty$: SOMMA MASSIMA DEGLI ELEMENTI IN VALORE ASSOLUTO DI OGNI RIGA.

$$\boxed{M_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1} \qquad \boxed{M_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty}$$

$$\|A\|_1 = \max\left(|1| + |0| + |0|,\ |0| + |-1| + |50|,\ |0| + |1| + |-49|\right) =$$
$$= (1, 51, 50) = 51$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \max(1, 99, 2) = 99$$

$$M_1(A) = 51 \cdot 99 = 5049$$

$$\|A\|_\infty = \max(1, 2, 99) = 99$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max(1, 50, 51) = 51$$

$$M_\infty = 99 \cdot 51 = 5049$$

d) $\|x\|_1 = 1 + 1 + 1 = 3$

$$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\|\delta b\|_1 = |-10^{-2}| + |10^{-2}| + |-10^{-2}| = \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{3}{100}$$

$$\|\delta b\|_2 = \sqrt{(-10^{-2})^2 + (10^{-2})^2 + (-10^{-2})^2} = \sqrt{10^{-4} + 10^{-4} + 10^{-4}} = \sqrt{\frac{3}{10^4}}$$

$$\|b\|_1 = 2$$

$$\|b\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

e) CALCOLO ERRORE RELATIVO SU b $\|\tilde{x} - x\|_1$

$$\boxed{\epsilon_b = \frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1}} = \frac{\frac{3}{100}}{2} \Rightarrow \frac{\frac{3}{10^2}}{2} = 0,015$$

CALCOLO DELLA MAGGIORANZA DELL'ERRORE SU x

$$\boxed{\epsilon_x = M_1(A) \cdot \epsilon_b} = 5049 \cdot 0,015 = 75,735$$

QUINDI LA MAGGIORANZA DELL'ERRORE È APPROSSIVAMENTE 75,735

21-7-23

$$A = \begin{pmatrix} -49 & 50 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \delta b = \begin{pmatrix} 10^{-2} \\ -10^{-2} \end{pmatrix}$$

a) $\det(A) = 49 - 50 = -1 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \end{pmatrix}$$

$A_{11} = -1 \qquad A_{12} = -1$

$A_{21} = -50 \qquad A_{22} = -49$

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -50 & -49 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{cof}(A)^T = \begin{pmatrix} -1 & -50 \\ -1 & -49 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{cof}(A)^T = \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 1 & 49 \end{pmatrix}$$ VERIFICATO

$$\|A\|_1 = \max(50, 51) = 51$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \max(2, 99) = 99$$

$$\mu_1(A) = 51 \cdot 99 = 5049$$

$$\|A\|_\infty = \max(99, 2) = 99$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max(51, 50) = 51$$

$$\mu_\infty(A) = 51 \cdot 99 = 5049$$

c) $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$

$$\|x\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\|x\|_\infty = 1$$

$$\|\delta b\|_2 = \sqrt{(10^{-2})^2 + (-10^{-2})^2} = \sqrt{10^{-4} + 10^{-4}} = \sqrt{2 \cdot 10^{-4}} = \frac{\sqrt{2}}{10^2}$$

$$\|\delta b\|_\infty = 10^{-2}$$

$$b = A \cdot x \Rightarrow \begin{pmatrix} -49 & 50 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{RIGA M PER } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

$$\|b\|_2 = 1$$

$$\|b\|_\infty = 1$$

D) $\|\tilde{x} - x\|_\infty$

$$\boxed{\varepsilon_b = \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{10^{-2}}{1} = 0{,}01}$$

$\{x = M_{00}(A) \cdot \{b = 50{,}49 \cdot 0{,}01 = 50{,}49$

23-6-21

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1000 \\ 0 & -1 & 1001 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \delta b \begin{pmatrix} 10^{-2} \\ -10^{-2} \\ 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$$b = A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1000 \\ 0 & -1 & 1001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 999 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

a) $$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1000 \\ -1 & 1001 \end{vmatrix} = -1001 + 1000 = -1 = \det \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$A11 = \begin{vmatrix} -1 & 1000 \\ -1 & 1001 \end{vmatrix} = -1 \qquad A12 = \begin{vmatrix} 0 & 1000 \\ 0 & 1001 \end{vmatrix} = 0 \qquad A13 = 0$$

$$A21 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1001 \end{vmatrix} = 0 \qquad A22 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1001 \end{vmatrix} = 1001 \qquad A23 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A31 = 0 \qquad A32 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1000 \end{vmatrix} = -1000 \qquad A33 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\mathrm{cof}(V) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1001 & 1 \\ 0 & -1000 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{cof}(V)^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1001 & -1000 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(V)} \cdot \mathrm{cof}(V)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1001 & 1000 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ VERIFICATO

b) $\|A\|_1 = \max(1, 2, 2001) = 2001$

$\|A^{-1}\|_1 = \max(1, 1002, 1001) = 1002$

$\mu_1 = 2001 \cdot 1002 = 2'005'002$

$\|A\|_\infty = \max(1, 1001, 1002) = 1002$

$\|A^{-1}\|_\infty = \max(1, 2001, 2) = 2001$

$\mu_\infty = 1002 \cdot 2001 = 2'005'002$

c) $\|x\|_\infty = 1$

$\|x\|_2 = \sqrt{3}$

$\|b\|_\infty = 1000$

$\|b\|_2 = \sqrt{1000^2 + 999^2 + 1^2} = \sqrt{1'998'002}$

$\|\delta b\|_\infty = 10^{-2}$

$\|\delta\|_2 = \sqrt{(10^{-2})^2 + (-10^{-2})^2 + (10^{-2})^2} = \sqrt{3 \cdot 10^{-4}} = \frac{\sqrt{3}}{10^2}$

d) $\|\tilde{x} - x\|_\infty$

$$\boxed{\varepsilon_b = \frac{\|\delta_b\|_\infty}{\|b\|_\infty}} = \frac{10^{-2}}{1000} = \frac{\frac{1}{10^2}}{1000} = 0,00001$$

$$\boxed{\varepsilon_x = \mu_\infty(A) \cdot \varepsilon_b} = 2'005'002 \cdot 0,00001 = 20,50$$