CARATTERIZZAZIONE
DELLA CONTINUITÀ

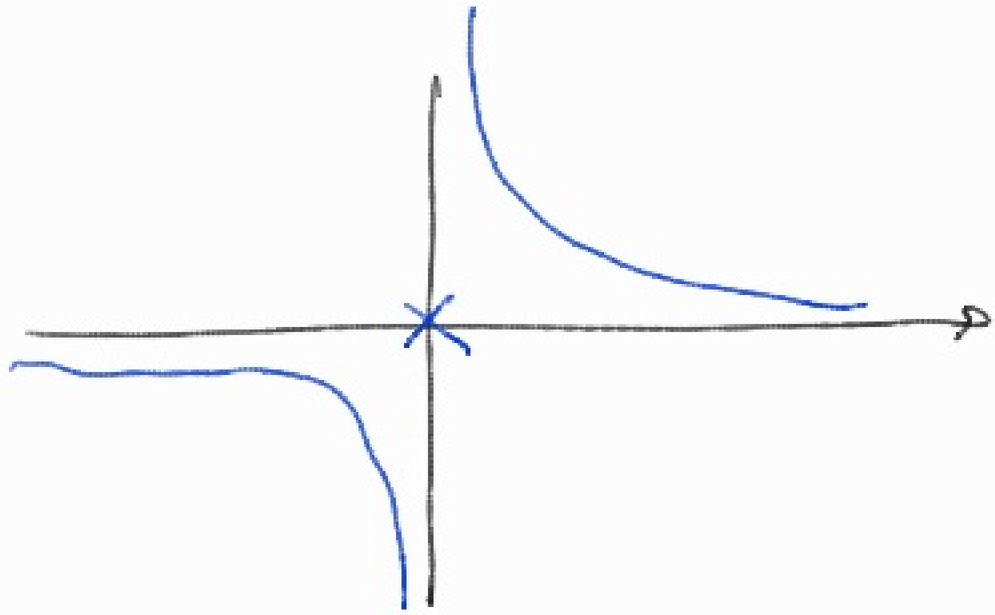
$x_0 \in Dom(f)$

$$\underbrace{\lim_{x \to x_0} f(x)}_{\text{f è definita in un intorno BUCATO}} = \underbrace{f(x_0)}_{\text{IMPLICA CHE f è definita in } x_0}$$

ESEMPIO FUNZIONE CONTINUA
(SPESSO TRATTATA COME DISCONTINUA)

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



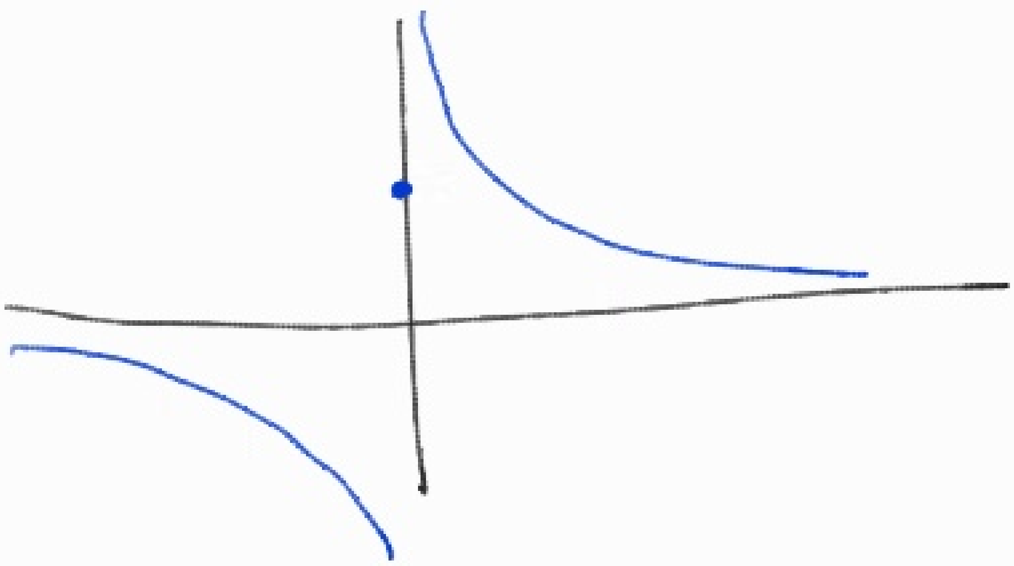
ESAMINO $x_0 = 0$

$f(x_0)$ NON E' DEFINITA

$$\begin{array}{c} f(x_0) \\ \parallel \\ f(0) \end{array} \quad e \quad 0 \notin Dom(f)$$

$$g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$$



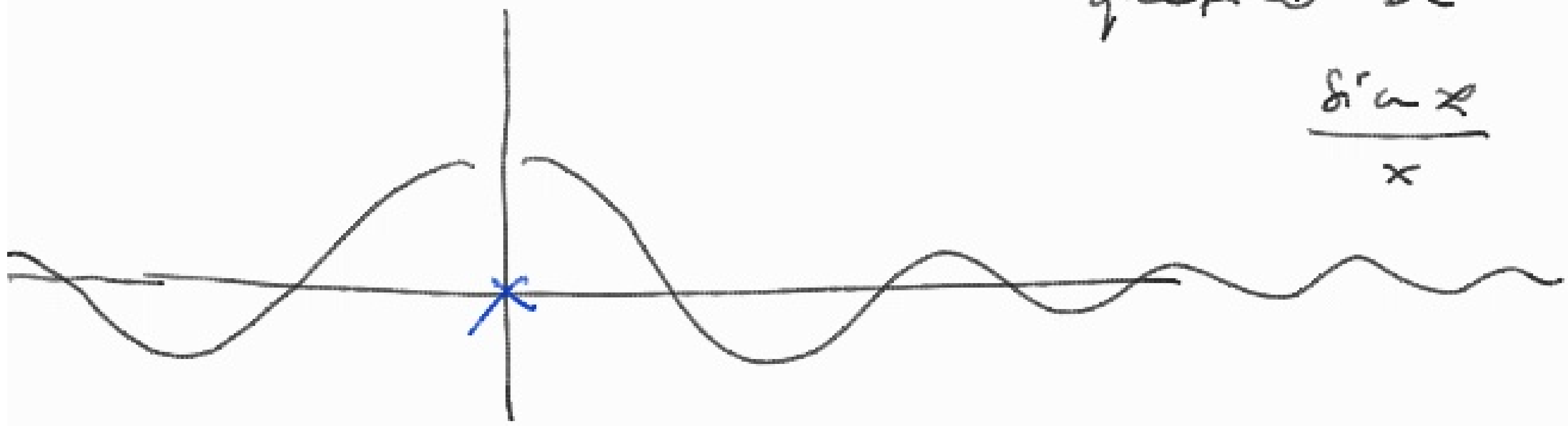
$$h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$h(0)$ non è definita , $h(0) \notin \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

grafico di $\dfrac{\sin x}{x}$



la funzione h è continua

PROLUNGARE UNA FUNZIONE
VUOL DIRE AGGIUNGERE VALORE
AL DOMINIO

$h: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$K: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ K prolungamento se

$$K\big|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = h$$

$$K(x) = \begin{cases} h(x) & x \in \mathrm{Dom}(h) \\ \underline{\text{valore}} & x \notin \mathrm{Dom}(h) \end{cases}$$

IN GENERALE

$$K(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$

se $c = 1 = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \Rightarrow K$ è continua

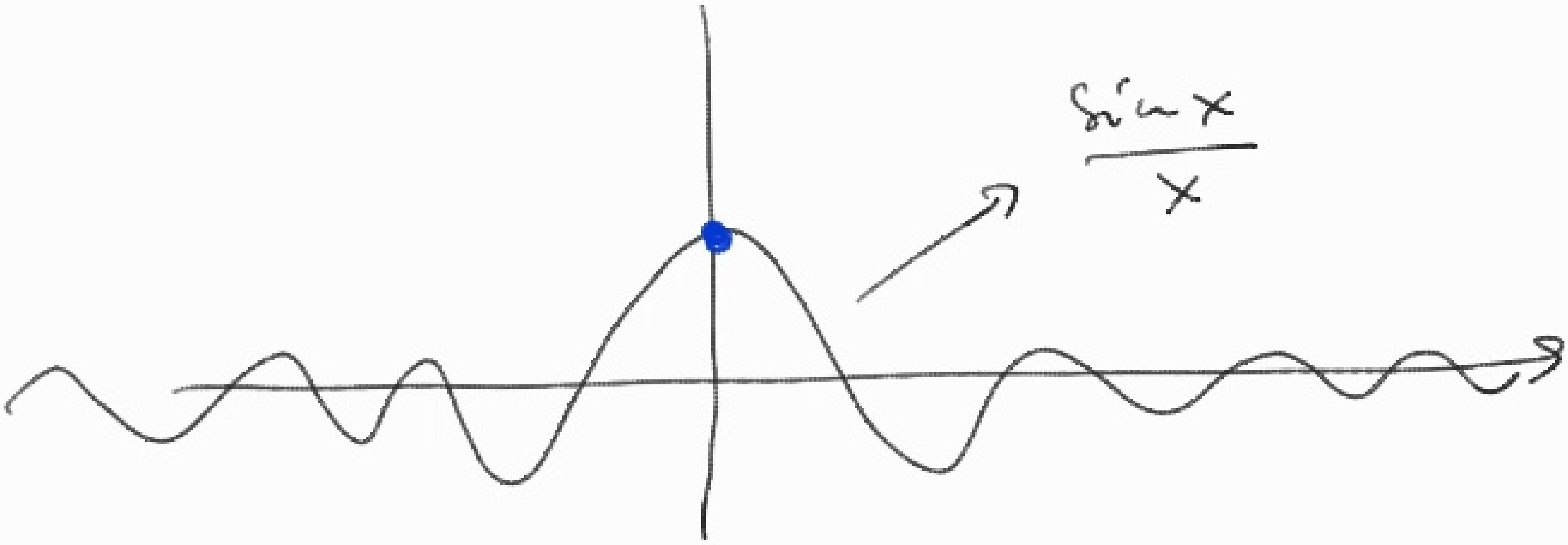
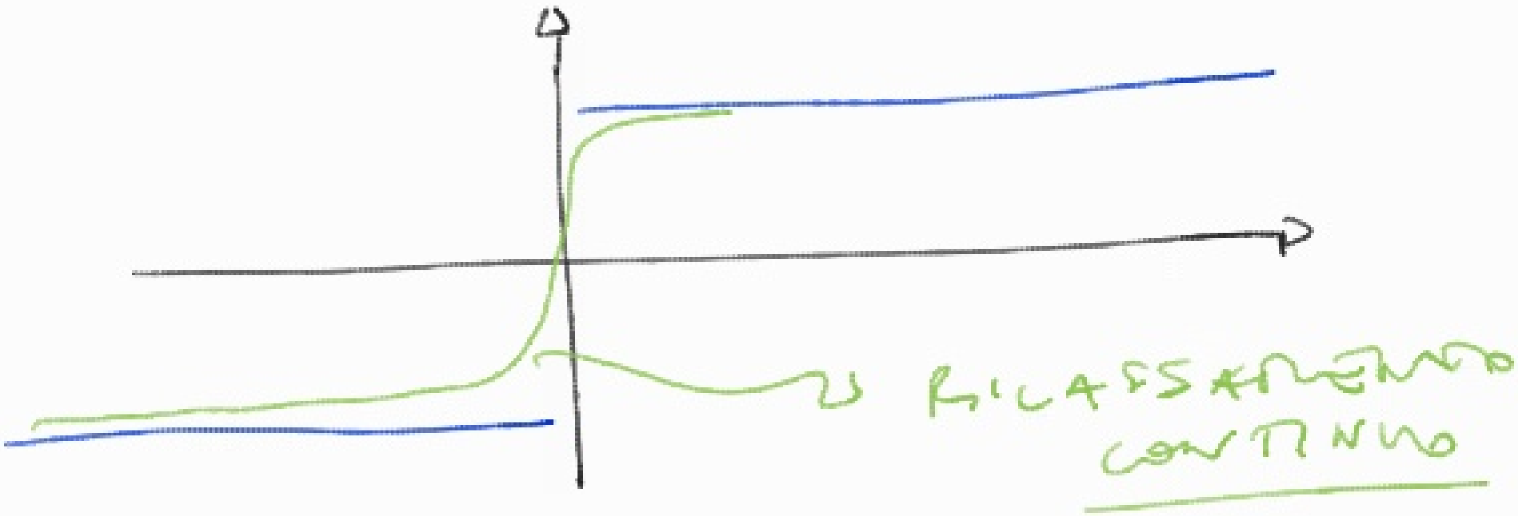


grafico di K : $K\big|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} = h$

$$\operatorname{sign}(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$$

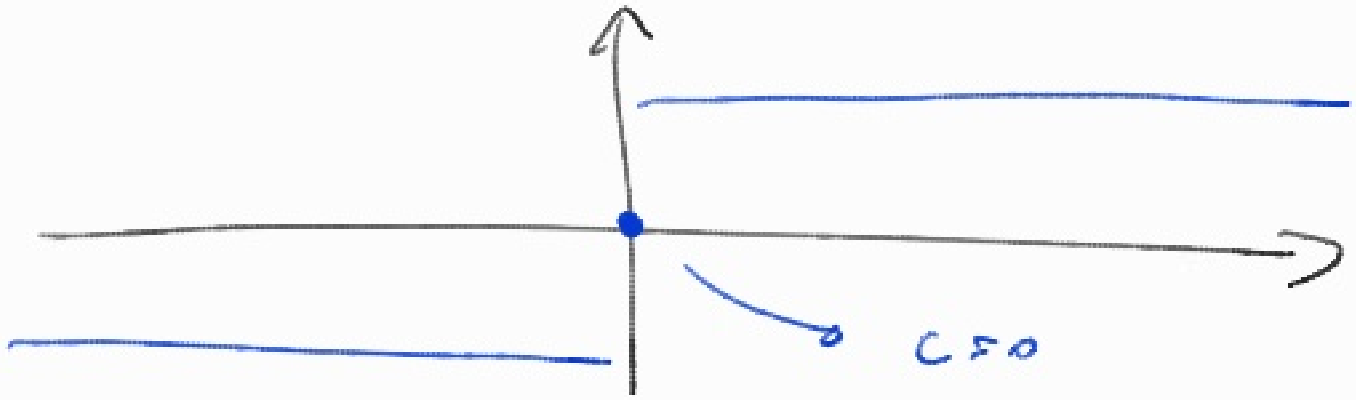
$$\operatorname{sign} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$



Prolungamento della f sign

$$j(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$

$\nexists \; c \; : \; j$ sia continua



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x > 0 \\ x^2 + a & x \leq 0 \end{cases}$$

Esiste $a \in \mathbb{R}$: f è continua su $x_0 = 0$?

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \longleftarrow \quad 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 + a = a \qquad \longleftarrow \quad 0^-$$

$$f(0) = x^2 + a \Big|_{x=0} = a \qquad \longleftarrow \quad 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \iff f \text{ è cont. in } 0$$

$$\boxed{\underset{\overset{\|}{a}}{\lim_{x \to 0^-} f(x)} = \underset{\overset{\|}{a}}{f(0)} = \underset{\overset{\|}{1}}{\lim_{x \to 0^+} f(x)}}$$

$1 = a = a \Rightarrow \boxed{a = 1}$

$\Rightarrow$ f è continua in $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x}}{x^a} & x < 0 \\ a x & x \geq 0 \end{cases}$$

con $a = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \underbrace{f(0)}_{0} = \underbrace{\lim_{x \to 0^+} f(x)}_{0} \quad \forall a \in \mathbb{N}$$

$+\infty$ a pari

$-\infty$ a dispari

$$\lim_{x \to 0^+} ax = 0 \quad \forall a \in \mathbb{N}$$

$$f(0) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x^a} = \frac{\infty}{0} = \infty \quad \begin{cases} +\infty & a \text{ è pari} \\ -\infty & a \text{ è dispari} \end{cases}$$

$-1/x \to +\infty$

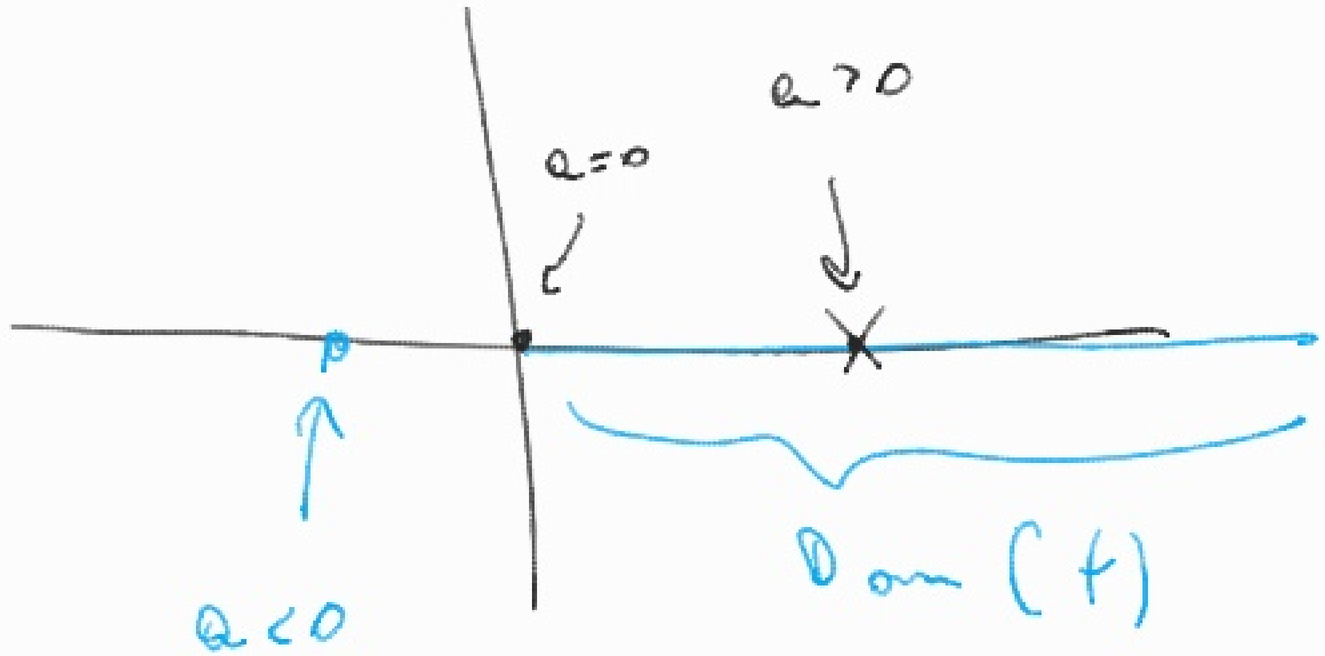
$\forall a \in \mathbb{N}$

f è discontinua in 0 $\forall a \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x - a}$$

$$\text{Dom}(f) = \begin{cases} (0, a) \cup (a, +\infty) & a > 0 \\ (0, +\infty) & a \leq 0 \end{cases}$$

$x \neq a$	DENOMINATORE	CONDIZIONI
$x > 0$	LOGARITMO.	



$a = 0$?

$a > 0$?

Caso $a = 0$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \qquad Dom(f) = (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\overset{\to -\infty}{\ln x}}{\underset{\to 0^+}{x}} = -\infty$$

NON È PROLUNGABILE PER CONTINUITÀ

Caso $a > 0$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x - a} \quad , \quad a > 0$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln x}{\underbrace{x - a}_{\to 0}} = \pm \infty \qquad \ln x \to \ln a$$

NON È PROLUNGABILE PERCHÉ

IL LIMITE <u>NON È FINITO</u> $\Leftrightarrow \notin \mathbb{R}$