19/12/24

METODO DELLE POTENZE

A DIAGONALIZZABILE

$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots |\lambda_n| \geq 0$ PRENDIAMO GLI AUTOVALORI ORDINATI SECONDO IL VALORE DEL MODULO

INIT.

$$\boxed{\underline{v}_0 \in \mathbb{R}^n}$$

STEP.

$$\boxed{\underline{v}_{k+1} := \frac{A v_k}{\|A v_k\|}}$$

STOP

$$\boxed{\frac{\|\underline{v}_{k+1} - \underline{v}_k\|}{\|v_k\|} < \varepsilon}$$

ε E' SCELTO > 0

$\boxed{\|v_k\| = 1}$ PER COSTRUZIONE

$\underline{v}_k \xrightarrow{k \to \infty}$ AUTOVETTORE DI MASSIMO MODULO $=: \underline{x}_1$ AUTOVETTORE CORRISPONDENTE A λ_1

" CON AUTOVALORE DI MASSIMO MODULO

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$ $\qquad (A \underline{x}_1 = \lambda_1 \underline{x}_2)$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq 0$$

ESEMPIO

$$A = V \Lambda V^{-1} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \qquad V = \left(\underline{v}_1 \,|\, \underline{v}_2 \,|\, \underline{v}_3 \right)$$

IL METODO DELLE POTENZE APPLICATO AD A CONVERGE $(|\lambda_1| = 3 > |\lambda_2| = 2)$

$1 \qquad |3| = 3 = \lambda_1$

$3 \qquad |2| = 2 = \lambda_2$

$2 \qquad |1| = 1 = \lambda_3$

E' STRETTAMENTE MAGGIORE

DEVE ESISTERE UN SOLO AUTOVALORE DI MOLTEPLICITA' 1 CHE SUPERA IL MODULO TUTTI GLI ALTRI MODULI

SE 3 E' L'AUTOVALORE DI AUTOVETTORE $\underline{v}_2$ $\qquad A \underline{v}_2 = 3 \underline{v}_2$

CONVERGE A $\underline{v}_2$ POI CALCOLO $\underline{v}_2^T A \underline{v}_2$ E TROVO $3 = \lambda_1$ AUTOVALORE DI MAX MODULO

VEDIAMO QUANDO NON CONVERGE!

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

ABBIAMO 2 AUTOVALORI CON MODULO MASSIMO $\Rightarrow$ NON SI APPLICA IL TEOREMA DI CONVERGENZA PER IL METODO DELLE POTENZE

$$A = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 0 & \\ & & -4 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = 0$$

DA SCRIVERE ALL'ESAME

$$\boxed{\text{IL METODO DELLE POTENZE CONVERGE ALL'AUTOVETTORE DI AUTOVALORE } \lambda_1 = -4}$$

METODO DELLE POTENZE INVERSE

$$A \qquad |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq 0$$

TROVARE $\lambda_i \neq \lambda_1$

SE PRENDIAMO $p \in \mathbb{R}$

p AUTOVALORE

SUPPONIAMO CHE p SIA TALE CHE

$$\boxed{\det(A - pI) = 0 \quad \vee \quad \det(A - pI) \neq 0}$$

CONSIDERIAMO $B = (A - pI)^{-1}$ ESISTE PERCHÉ p NON E' AUTOVALORE

$$(A - pI)\underline{x} = A\underline{x} - pI\underline{x} = \lambda\underline{x} - p\underline{x} = (\lambda - p)\underline{x}$$

$$\boxed{B = (A - pI)^{-1}} \qquad (A - pI)\underline{x} = (A - pI)^{-1}(\lambda - p)\underline{x} = \underline{x}$$

$$(A - pI)^{-1}\underline{x} = \frac{1}{\lambda - p} \cdot \underline{x} \qquad B\underline{x} = \frac{1}{\lambda - p}\underline{x}$$

DATO A $(\lambda, \underline{x})$ AUTOVALORE E AUTOVETTORE DI A. DATO $p \in \mathbb{R}$ $p \neq \lambda$

$$\boxed{p \text{ NON AUTOVALORE DI } A}$$

$$B\underline{x} = \frac{1}{\lambda - p} \cdot \underline{x} \qquad \left(\frac{1}{\lambda - p} ; \underline{x}\right) \text{ AUTOVALORE E AUTOVETTORE DI } B = (A - pI)^{-1}$$

SE APPLICO IL METODO DELLE POTENZE A $B = (A - pI)^{-1}$ DETTI

$|\mu_1| > |\mu_2| \geq |\mu_3| \geq \dots |\mu_n| \geq 0$ CON $\mu_1, \dots, \mu_n$ AUTOVALORI DI B

TROVO μ_1 AUTOVALORE DI MASSIMO MODULO DI B.

$|\mu_1| = \max_{i=1,\dots,n} \{ |\mu_i| , \mu_i \text{ AUTOVALORI DI } B \}$ μ_i

$(\lambda, \underline{x}) \longrightarrow A$

$\left(\frac{1}{\lambda - p}, \underline{x}\right) \longrightarrow B = (A - pI)^{-1}$

$\mu_i \longleftrightarrow \lambda_i$

$\boxed{\mu_i = \frac{1}{\lambda_i - p}}$ ← IN MODULO

$\left\{ \frac{1}{|\lambda_i - p|} , \lambda_i \text{ AUTOVALORI DI } A \right\}$

FISSO p ⟶ TROVO $B = (A - pI)^{-1}$

$|\mu| = \frac{1}{|\lambda - p|}$

APPLICO METODO POTENZE DI B TROVO IL MASSIMO $\left\{ \frac{1}{|\lambda_i - p|} , \lambda \text{ AUTOVALORI DI } A \right\}$

QUESTA FUNZIONE DIVENTA MASSIMA QUANDO $\lambda_i \approx 0$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

APPLICO METODO POTENZE TROVO $\lambda_1 = -3$

$p = -\frac{1}{2}$ POTENZE INVERSE TROVO $\lambda_2 = -1$

$\left.\begin{array}{ll} \mu_1 & \frac{1}{-1+\frac{1}{2}} = -2 \\ \mu_2 & \frac{1}{-3+\frac{1}{2}} = -2/5 \\ \mu_3 & \frac{1}{1+1/2} = 2/3 \end{array}\right\}$ APPLICO IL MODULO $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} 2 = \mu_1 \\ 2/5 = \mu_3 \\ 2/3 = \mu_2 \end{array}$

VELOCITA' DI CONVERGENZA

$$\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k \qquad |\lambda_2| < |\lambda_1| \qquad \boxed{0 \leq \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1}$$

NEL CASO DELLE POTENZE INVERSE

$$\left(\frac{|\mu_2|}{|\mu_1|}\right)^k$$