Calculus 1 **2024/25**

Lezione 1: 26/02/25

☡. Queste note devono servire come guida per lo studio: non sono un libro di testo (ve ne sono di ottimi da consultare in biblioteca), non sono una trascrizione di quanto detto a lezione (gli appunti sono essenziali), mancano i commenti ed i disegni (indispensabili per la comprensione), vi sono alcuni argomenti che non sono stati trattati a lezione (ma che possono servire di approfondimento).
Il simbolo ☡ indica punti che richiedono particolare attenzione.

Il template LaTeX è stato adattato da un modello della UC Berkeley EECS Department.

Notazione.

$\varnothing$	insieme vuoto
$\mathbb{N}$	insieme dei numeri naturali
$\mathbb{Z}$	insieme dei numeri relativi
$\mathbb{Q}$	insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$	insieme dei numeri reali
$\mid$ o $:$	tale che
$\Rightarrow$	implica che
$\Longleftrightarrow$	se e solo se, equivale
$\forall$	per ogni
$\exists$	esiste
$\nexists$	non esiste

Intervalli. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leqslant b$,

intervallo limitato aperto	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
intervallo limitato chiuso	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
intervallo limitato	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$
intervallo limitato	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
intervallo illimitato aperto	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
intervallo illimitato chiuso	$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$
intervallo illimitato aperto	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
intervallo illimitato chiuso	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$
intervallo illimitato	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Il punto a (o $-\infty$) è detto estremo sinistro e b (o $+\infty$) è detto estremo sinistro dell'intervallo.

☡. Se $a = b$, $[a, b] = \{a\}$ e $(a, b) = (a, b] = [a, b) = \varnothing$.

Relazioni tra insiemi. Dati due insiemi A e B

- inclusione: $A \subseteq B$ oppure $B \supseteq A$, se
$$\text{per ogni } x \in A \text{ allora } x \in B$$
(si dice che A è un sottoinsieme di B o, equivalentemente, che A è contenuto in B oppure che B contiene A)
- inclusione propria: $A \subsetneq B$ oppure $B \supsetneq A$, se
$$\begin{cases} \text{per ogni } x \in A \text{ allora } x \in B \\ \text{esiste } x \in B \text{ tale che } x \notin A \end{cases}$$
(si dice che A è un sottoinsieme proprio di B)

Operazioni tra insiemi. Dati due sotto-insiemi $A, B \subseteq X$

- unione
$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$
- intersezione
$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ e } x \in B\};$$
- complementare
$$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$$
- differenza insiemistica
$$A \backslash B = \{x \in X \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$
- prodotto cartesiano
$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$
dove (x, y) denota la coppia ordinata.

. Se $x, y \in \mathbb{R}$, la stessa notazione (x, y) è usata per indicare sia la coppia ordinata sia l'intervallo aperto di estremi x e y.

Numeri reali. Dati $x, y \in \mathbb{R}$, sono definite le operazioni di

- somma $x + y$
- prodotto xy
- relazione d'ordine $x < y$

che soddisfano le seguenti proprietà

(a) associatività: per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$
$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z \qquad (xy)z = x(yz) = xyz$$
(b) commutatività: per ogni $x, y \in \mathbb{R}$
$$x + y = y + x \qquad xy = yx$$
(c) proprietà distributiva: per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$
$$(x + y)z = xz + yz.$$
(d) esistenza elemento neutro: per ogni $x \in \mathbb{R}$
$$x + 0 = 0 + x = x \qquad x1 = 1x = x$$
(e) esistenza inverso:

i) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un unico elemento $-x \in \mathbb{R}$, detto opposto, tale che $x + (-x) = 0$

ii) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ esiste un unico elemento $1/x \in \mathbb{R}$, detto reciproco, tale che $x(1/x) = 1$

(f) relazione d'ordine totale: per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ una ed una sola delle seguenti relazioni è vera

$$\begin{cases} x < y \\ x = y \\ y < x \end{cases}$$

(g) proprietà transitiva: dati $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\text{se } x < y \text{ e } y < z \text{ allora } x < z$$

(h) compatibilità con la somma, dati $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\text{se } x < y \text{ allora } x + z < y + z$$

(i) compatibilità con il prodotto, dati $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\text{se } x < y \text{ e } z > 0 \text{ allora } xz < yz$$

Funzioni. Una funzione (reale di variabile reale) $f\colon A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ è una legge che assegna ad ogni elemento $x \in A$ un unico valore $y = f(x) \in \mathbb{R}$. L'insieme A è detto dominio di f e denotato anche con $\operatorname{dom} f$.

Grafico. Si chiama grafico della funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ il sottoinsieme del piano cartesiano

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x),\ x \in A\}$$

Immagine. Si chiama immagine della funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ l'insieme di valori effettivamente presi dalla funzione e si denota con $\operatorname{Im} f$ o $f(A)$

$$\operatorname{Im} f = f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in A\}$$

Nota. Le rette parallele all'asse delle ascisse (asse x) hanno equazione $y = y_0$, mentre quelle parallele all'asse delle ordinate (asse y) hanno equazione $x = x_0$.

Osservazione. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione.

a) Il grafico di f è una *curva* nel piano caratterizzata dal fatto che, dato $x_0 \in A$, la retta $x = x_0$, parallela all'asse delle ordinate, interseca il grafico di f in un solo punto P_0 le cui coordinate sono $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

b) Un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ sta sul grafico di f se e solo se $x_0 \in A$ e $y_0 = f(x_0)$.

c) Il dominio A della funzione è un sottoinsieme dell'asse delle ascisse ed è la proiezione del grafico della funzione su tale asse.

d) L'immagine $\operatorname{Im} f$ è un sottoinsieme dell'asse delle ordinate, costituito da tutti i valori $y_0 \in \mathbb{R}$ per cui la retta $y = y_0$, parallela all'asse delle ascisse, interseca il grafico di f in **almeno** un punto, cioé $\operatorname{Im} f$ è la proiezione del grafico della funzione sull'asse delle ordinate.

e) Dato $y_0 \in \mathbb{R}$, l'equazione $y_0 = f(x)$ equivale a trovare le intersezioni tra il grafico $y = f(x)$ e la retta $y = y_0$ parallela all'asse delle ascisse

$$y_0 = f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y = f(x) \\ y = y_0 \end{cases} .$$

☡. Vi sono curve del piano che non sono il grafico di alcuna funzione.

Funzioni iniettive, surgettive e bigettive. Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è detta

a) iniettiva se per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ l'equazione $y_0 = f(x)$ ammette al più una soluzione;
b) surgettiva se per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ l'equazione $y_0 = f(x)$ ammette almeno una soluzione;
c) bigettiva se per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ l'equazione $y_0 = f(x)$ ammette una ed una sola soluzione.

Osservazione. Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$,

a) f è iniettiva se ogni retta $y = y_0$, parallela all'asse delle ascisse, interseca il grafico di f in al più un punto;
b) f è surgettiva se ogni retta $y = y_0$, parallela all'asse delle ascisse, interseca il grafico di f in almeno un punto;
c) f è bigettiva se ogni retta $y = y_0$, parallela all'asse delle ascisse, interseca il grafico di f in esattamente un punto.

Proposizione 1.1. *Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$,*

a) f è iniettiva se e solo se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$ si ha $x_1 = x_2$;
b) f è iniettiva se e solo se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$;
c) f è surgettiva se e solo se l'immagine di f è tutto $\mathbb{R}$, cioè $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$;
d) f è bigettiva se e solo se f è sia iniettiva sia surgettiva.

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 2: 28/02/25

Funzioni monotone. Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è detta

a) crescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$, allora
$$f(x_1) < f(x_2);$$

b) decrescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$, allora
$$f(x_1) > f(x_2);$$

c) debolmente crescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 \leqslant x_2$, allora
$$f(x_1) \leqslant f(x_2);$$

d) debolmente decrescente se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 \leqslant x_2$, allora
$$f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

Una funzione crescente o decrescente è detta monotona.

Operazioni tra funzioni.
Date due funzioni $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon B \to \mathbb{R}$

a) la somma/differenza $f \pm g$ è definita da
$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \qquad x \in \operatorname{dom}(f \pm g) = A \cap B$$

b) il prodotto fg è definito da
$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad x \in \operatorname{dom}(fg) = A \cap B =$$

c) il rapporto f/g è definito da
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad x \in \operatorname{dom}\frac{f}{g} = \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$$

La funzione
$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} \qquad x \in \operatorname{dom}\frac{1}{f} = \{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$$
è detta reciproco di f ed è anche denotata con $f(x)^{-1}$.

Funzione composta.
Date due funzioni $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon B \to \mathbb{R}$ la funzione
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad x \in A,$$
con dominio
$$\operatorname{dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ e } f(x) \in B\}$$
si chiama funzione *composta* di g e f.

Il risultato della composizione di due funzioni dipende dall'ordine, per cui in generale $g(f(x)) \neq f(g(x))$. Ad esempio, se

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = 1 + x$$

allora

$$g(f(x)) = 1 + x^2 \qquad f(g(x)) = (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

dove entrambe le funzioni composte sono definite su $\mathbb{R}$.

Se

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \operatorname{dom} f = [0, +\infty) \qquad g(x) = 1 + x \quad \operatorname{dom} g = \mathbb{R}$$

allora

$$g(f(x)) = 1 + \sqrt{x} \qquad f(g(x)) = \sqrt{1 + x}$$

dove

$$\operatorname{dom} g \circ f = [0, +\infty) \qquad \operatorname{dom} f \circ g = [-1, +\infty)$$

Funzione inversa.
Data una funzione iniettiva $f\colon A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, la legge che assegna ad ogni $y \in \operatorname{Im} f$ l'unica soluzione $x \in A$ dell'equazione

$$f(x) = y$$

si chiama funzione inversa e si denota con

$$f^{-1} : B \to \mathbb{R} \qquad x = f^{-1}(y) \qquad B = \operatorname{Im} f$$

Valgono le seguenti proprietà

$$\begin{aligned}
&\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{Im} f \\
&\operatorname{Im} f^{-1} = \operatorname{dom} f \\
&f^{-1}(f(x)) = x && x \in \operatorname{dom} f \\
&f(f^{-1}(y)) = y && y \in \operatorname{dom} f^{-1}
\end{aligned}$$

Inoltre, la funzione f^{-1} è iniettiva e $(f^{-1})^{-1} = f$.

Nel definire la funzione inversa è utile usare la lettera y per indicare la variabile indipendente, $x = f^{-1}(y)$, tuttavia quando si vuole disegnare il grafico di f^{-1} occorre *scambiare* la x con la y (per convenzione la variabile indipendente corrisponde ai punti dell'asse delle ascisse). Ne segue che il grafico della funzione inversa f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto alla retta $y = x$, la bisettrice del primo e terzo quadrante, vedi Fig. 2.1.

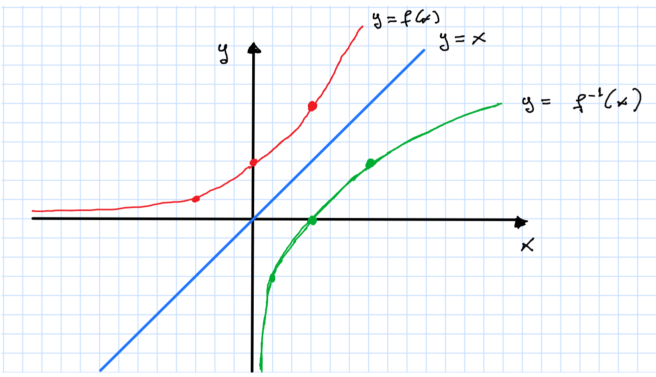


FIGURA 2.1. Grafico di $y = f(x)$ (rosso) e della sua inversa $y = f^{-1}(x)$ (verde) .

. La condizione che la funzione f sia iniettiva è necessaria per assicurare che, dato $y \in \operatorname{Im} f$, l'equazione $y = f(x)$ ammetta un'unica soluzione $x \in \operatorname{dom} f$. Se $y \notin \operatorname{Im} f$ l'equazione $y = f(x)$ non ha soluzione.

. Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$

$$f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$$

denota il reciproco purché $x \in A$ e $f(x) \neq 0$, mentre

$$f^{-1}(x)$$

denota il valore della funzione inversa purché f sia iniettiva e $x \in \operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{Im} f$. Inoltre

$$f(x)f(x)^{-1} = 1 \qquad f(f^{-1}(x)) = x.$$

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 3: 05/03/25

2 ore

Traslazioni, dilatazioni e riflessioni.
Data una funzione $y = f(x)$,

a) dato $x_0 > 0$ il grafico della funzione $y = f(x + x_0)$ si ottiene traslando a sinistra di x_0 ed il grafico della funzione $y = f(x - x_0)$ si ottiene traslando a destra di x_0

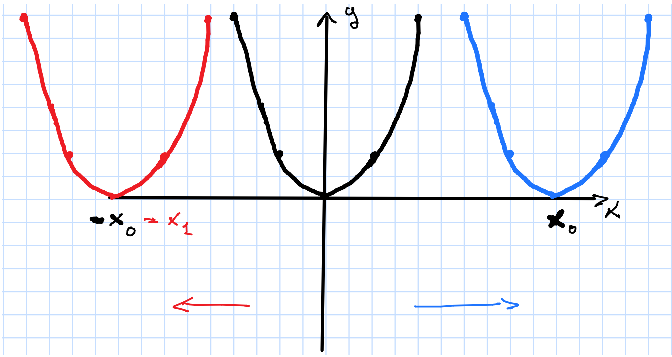


FIGURA 3.1. Grafico di $y = f(x-x_0)$ (blu) e di $y = f(x+x_0) = f(x-x_1)$ (rosso)

b) dato il grafico $y_0 > 0$ della funzione $y = f(x) + y_0$ si ottiene traslando in alto di y_0 ed il grafico della funzione $y = f(x) - y_0$ si ottiene traslando in basso di $y_0 > 0$

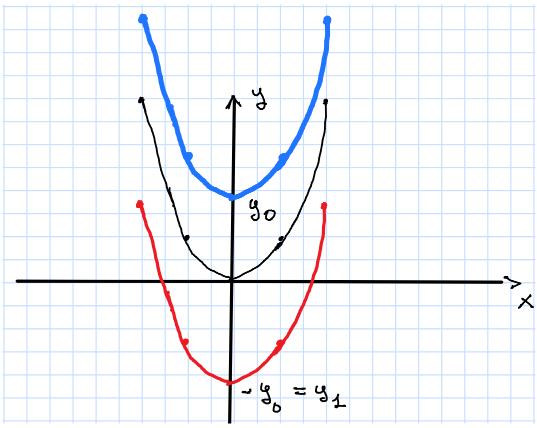


FIGURA 3.2. Grafico di $y = f(x)+y_0$ (blu) e di $y = f(x)-y_0 = f(x)+y_1$ (rosso)

c) dato $a > 1$, il grafico della funzione $y = f(x/a)$ si ottiene dilatando di a lungo l'asse x ed il grafico della funzione $y = f(ax)$ si ottiene contraendo di a lungo l'asse x

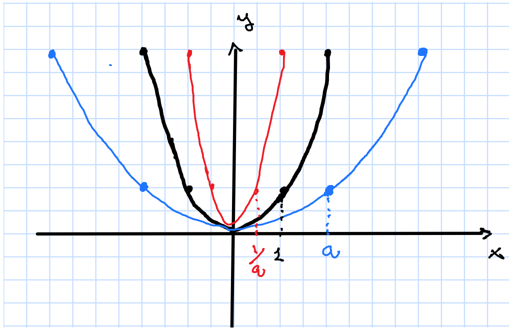


FIGURA 3.3. Grafico di $y = f(x/a)$ (blu) e di $y = f(ax) = f(x/a^{-1})$ (rosso)

d) dato $a > 1$, il grafico della funzione $y = af(x)$ si ottiene dilatando di a lungo l'asse y ed il grafico della funzione $y = f(x)/a$ si ottiene contraendo di a lungo l'asse y

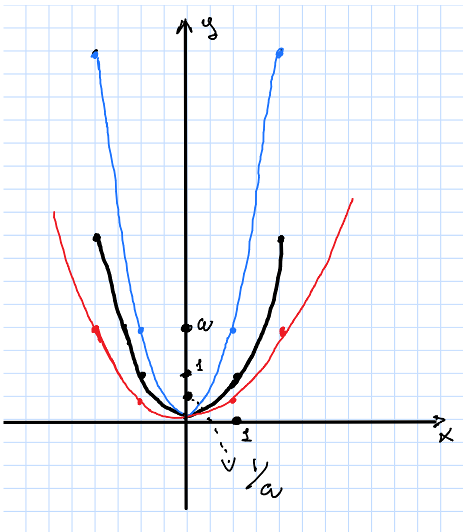


FIGURA 3.4. Grafico di $y = af(x)$ (blu) e di $y = f(x)/a = a^{-1}f(x)$ (rosso)

e) il grafico della funzioni $y = f(-x)$, $y = -f(x)$ $y = -f(-x)$ si ottengono riflettendo il grafico di f rispetto all'asse delle ordinate, all'asse delle ascisse o all'origine, rispettivamente.

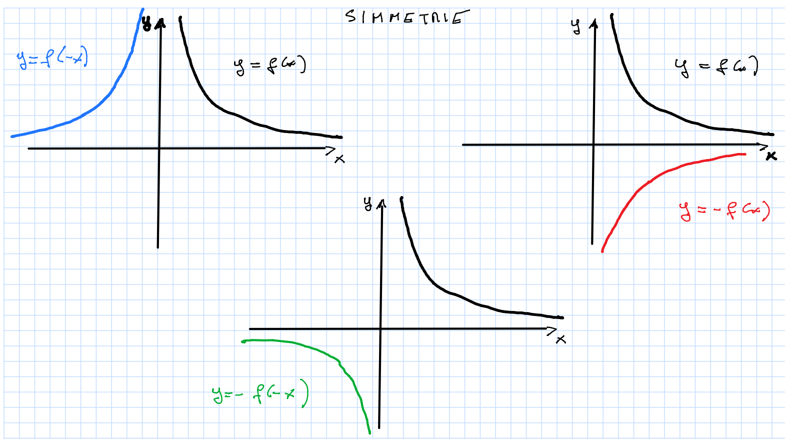


FIGURA 3.5. Grafico di $y = f(-x)$ (blu), di $y = -f(x)$ (rosso) e di $y = -f(-x)$ (verde)

Simmetrie. Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ è detta

a) pari se per ogni $x \in A$, allora $-x \in A$ e $f(-x) = f(x)$;
b) dispari se per ogni $x \in A$, allora $-x \in A$ e $f(-x) = -f(x)$.

Una funzione è pari se il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, mentre una funzione è dispari se il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 4: 07/03/25

2 ore

Potenze con esponente intero.

- dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ la funzione potenza n-esima è definta da

$$f(x) = x^n = \underbrace{x\,x \dots x}_{n\text{-volte}} \qquad \text{dom}\, f = \mathbb{R} \qquad \text{Im}\, f = \begin{cases} [0, +\infty) & n \text{ pari} \\ \mathbb{R} & n \text{ dipari} \end{cases}$$

il cui grafico è riportato in Fig. 4.1.

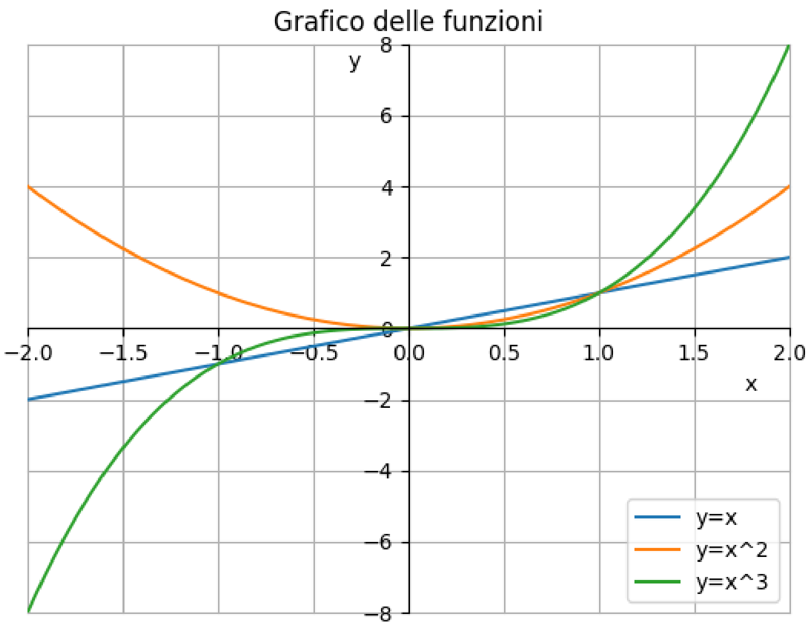


FIGURA 4.1. Grafico di $y = x^n$ per $n = 1, 2, 3$.

- se $a = 0$ si definisce

$$f(x) = x^0 = 1 \qquad \text{dom}\, f = \mathbb{R} \qquad \text{Im}\, f = \{1\}$$

. Con la convenzione che $x^0 = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale l'uguaglianza $0^0 = 0$. Questa convenzione non è adottata in tutti i libri di analisi.

Polinomi.
Una funzione del tipo

$$f(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \text{dom}\, f = \mathbb{R},$$

dove i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$, è detto polinomio o funzione polinomiale di grado n.

Potenze con esponente reale.
Fissato un esponente $a \in \mathbb{R}$ la funzione potenza è

$$f(x) = x^a,$$

la cui definizione e dominio dipendono dal valore dell'esponente a. Il caso $a = n \in \mathbb{N}$ è stato discusso nella precedente paragrafo, vediamo gli altri casi.

Esponente negativo $a = -n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \operatorname{dom} f = \mathbb{R}\backslash\{0\} \qquad \operatorname{Im} f = \begin{cases} (0, +\infty) & n \text{ pari} \\ \mathbb{R}\backslash\{0\} & n \text{ dipari} \end{cases}$$

il cui grafico è riportato in Fig. 4.2.

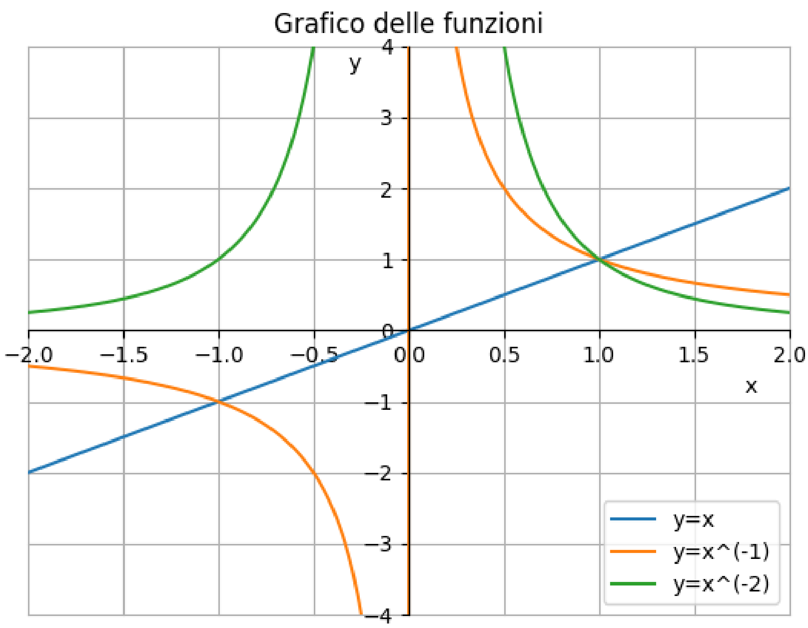


FIGURA 4.2. Grafico di $y = x^n$ per $n = -1, -2$.

Esponente reciproco di un naturale $a = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad \operatorname{dom} f = \begin{cases} [0, +\infty) & n \text{ pari} \\ \mathbb{R} & n \text{ dipari} \end{cases} \qquad \operatorname{Im} f = \begin{cases} [0, +\infty) & n \text{ pari} \\ \mathbb{R} & n \text{ dipari} \end{cases}$$

il cui grafico è riportato in Fig. 4.3.

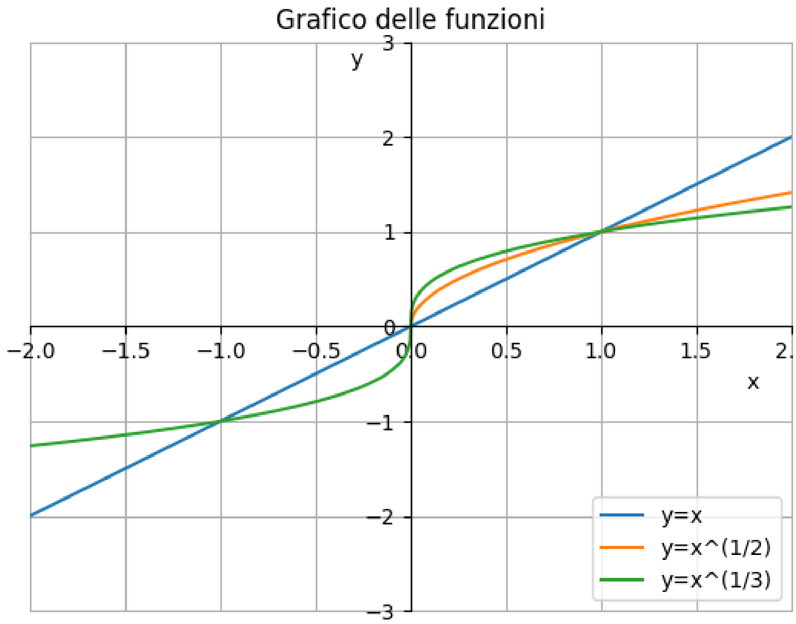


FIGURA 4.3. Grafico di $y = x^a$ per $n = 1/2, 1/3$.

Esponente razionale $a = m/n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $m \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \qquad \mathrm{dom}\, f = (0, +\infty) \qquad \mathrm{Im}\, f = (0, +\infty)$$

il cui grafico è riportato in Fig. 4.4.

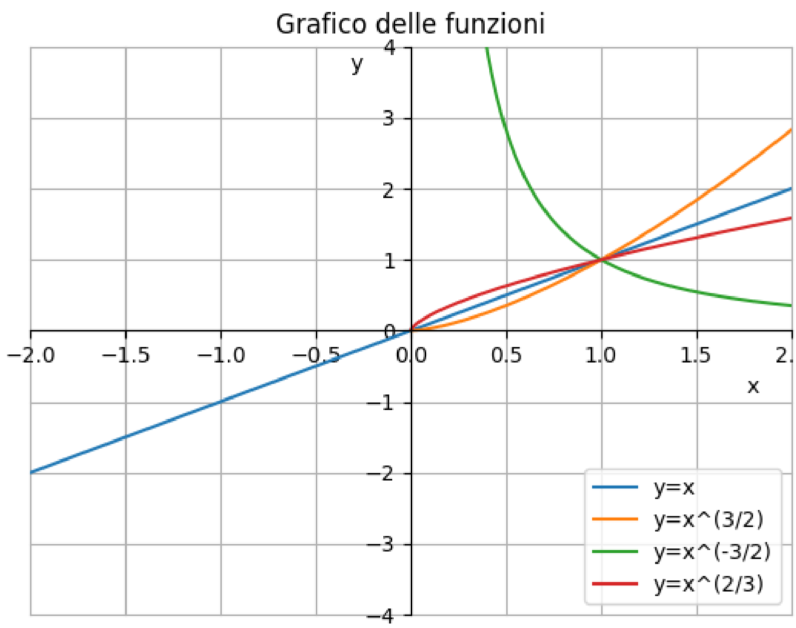


FIGURA 4.4. Grafico di $y = x^q$ per $q = 3/2, 2/3, -3/2$.

Esponente reale $a \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^a = \begin{cases} \sup\{x^q \mid q \in \mathbb{Q},\ q \leqslant a\} & x \geqslant 1 \\ \inf\{x^q \mid q \in \mathbb{Q},\ q \leqslant a\} & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad \operatorname{dom} f = (0, +\infty) \qquad \operatorname{Im} f = (0, +\infty)$$

. La definizione di estremo superiore sup e di estremo inferiore inf verrà data più avanti. In modo intuitivo, si tratta di definire x^a per approssimazioni successive. Ad esempio, se $x = 2$ e $a = \pi = 3.141\ldots$, possiamo definire 2^π per approssimazioni successive

$$2^3 = 8 < 2^{\frac{31}{10}} \simeq 8.574 < 2^{\frac{314}{100}} \simeq 8.815 < 2^{\frac{3141}{1000}} \simeq 8.822 < \ldots 2^\pi \simeq 8.825$$

Il grafico della funzione è riportato in Fig. 4.5.

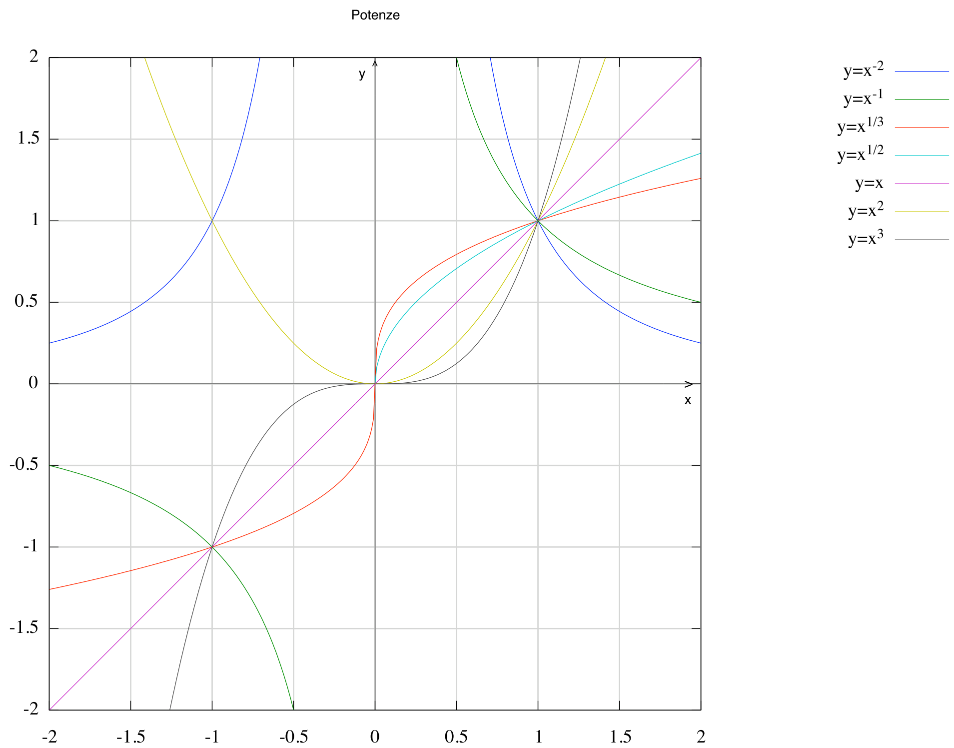


FIGURA 4.5. Grafici di $y = x^a$ con $a = 1, 2, 3, -1, -2, 1/2$ ed $1/3$.

Valgono le seguenti proprietà

a) se $a > 0$, f è crescente su $(0, +\infty)$
b) se $a < 0$, f è decrescente su $(0, +\infty)$
c) se $a < b$

$$\begin{cases} x^a < x^b & \text{se } x > 1 \\ x^a > x^b & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

d) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$1^q = 1$$
$$x^{a+b} = x^a x^b$$
$$x^{ab} = (x^a)^b$$

Esponenziale.
Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione esponenziale è

$$f(x) = a^x \qquad \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \qquad \operatorname{Im} f = (0, +\infty).$$

Se si sceglie come base il numero di Nepero $e = 2.71828\ldots > 1$, la funzione esponenziale si denota

$$f(x) = e^x = \exp x$$

Il grafico delle funzioni esponenziali è riportato in Fig. 4.6

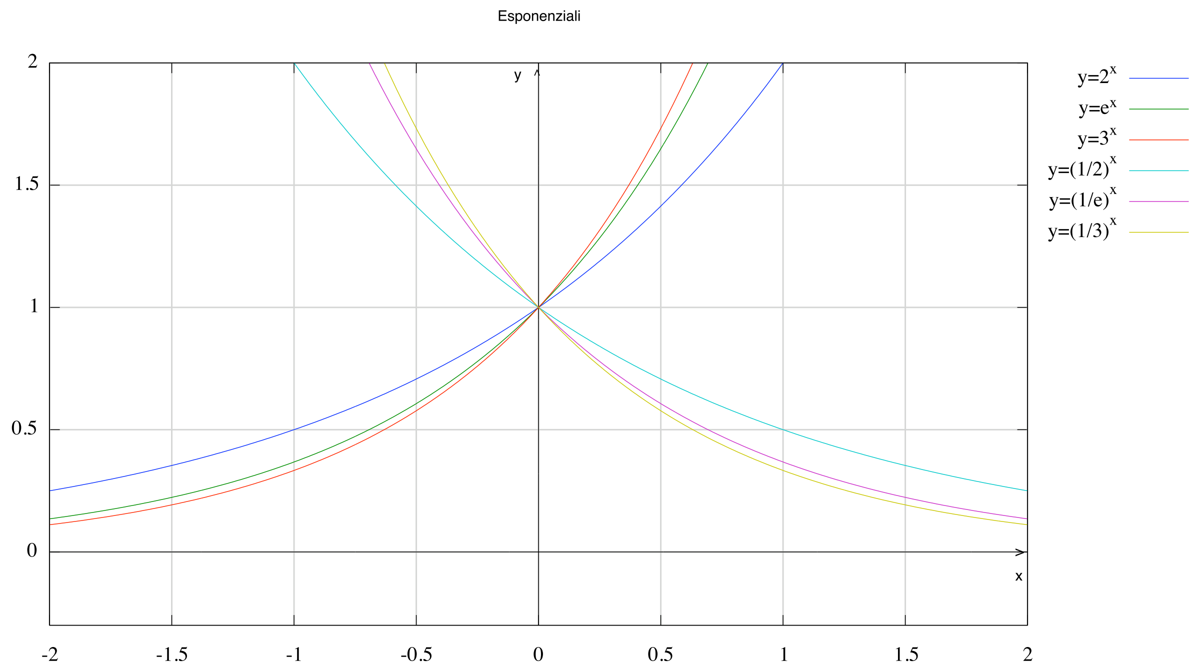


FIGURA 4.6. Grafici di $y = a^x$ con $a = 2, e, 3, 1/2, 1/e$ ed $1/3$.

Valgono le seguenti proprietà

a) se $a > 1$, allora la funzione a^x è crescente
b) se $0 < a < 1$, allora la funzione a^x è decrescente
c) se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} a^x < b^x & \text{se } x > 0 \\ a^x > b^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

d)

$$\begin{aligned} & a^0 = 1 \\ & a^1 = a \\ & a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2} && x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ & a^{-x} = \left(\tfrac{1}{a}\right)^x && x \in \mathbb{R} \\ & (a^x)^b = a^{bx} && x, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Funzione logaritmo.
Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione logaritmo
$$f(x) = \log_a x \qquad \mathrm{dom}\, f = (0, +\infty) \qquad \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$$
è definita come la funzione inversa della funzione esponenziale a^x, vedi Fig. 4.7.

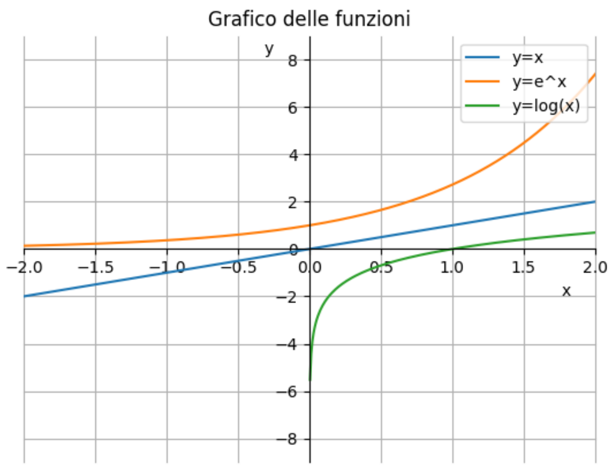


FIGURA 4.7. Grafico di $y = e^x$ e della sua inverse $y = \ln x$.

Se si sceglie come base il numero di Nepero e, il logaritmo si denota
$$f(x) = \log_e = \log x = \ln x.$$
Il grafico delle funzioni logaritmo è riportato in Fig. 4.8.

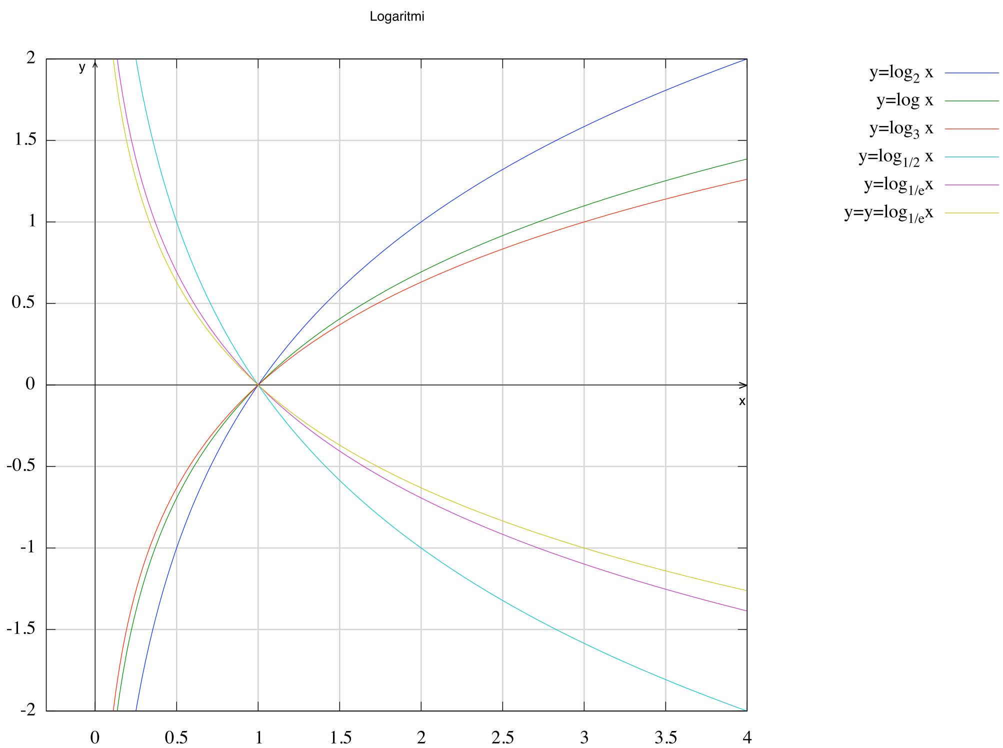


FIGURA 4.8. Grafici di $y = \log_a x$ con $a = 2, e, 3, 1/2, 1/e$ ed $1/3$.

Valgono le seguenti proprietà

a) se $a > 1$, allora la funzione $\log_a x$ è crescente
b) se $0 < a < 1$, allora la funzione $\log_a x$ è decrescente
c) se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} \log_a x > \log_b x & \text{se } x > 1 \\ \log_a x < \log_b x & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

d) valgono le seguenti proprietà

$$\begin{aligned}
&\log_a a^x = x && x \in \mathbb{R} \\
&a^{\log_a x} = x && x > 0 \\
&\log_a 1 = 0 && \\
&\log_a a = 1 && \\
&\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 && x_1, x_2 > 0 \\
&\log_a(\frac{x_1}{x_2}) = \log_a x_1 - \log_a x_2 && x_1, x_2 > 0 \\
&\log_a x^b = b \log_a x && x > 0,\ b \in \mathbb{R} \\
&\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a} && x > 0 \text{ e } b > 0\ b \neq 1 \\
&a^x = e^{(\ln a)x} && x \in \mathbb{R} \text{ e } a > 0\ a \neq 1
\end{aligned}$$

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 5: 12/03/25

2 ore

Radianti. Si chiama circonferenza goniometrica la circonferenza di centro l'origine O e raggio 1. Denotiamo con P_0 l'intersezione della circonferenza con la semiretta delle ascisse positive. Data una semiretta con origine in O, questa individua un angolo θ con la semiretta delle ascisse positive, ed un punto P sulla circonferenza goniometrica. La lunghezza dell'arco di circonferenza di estremi P_0 e P è la misura in radianti dell'angolo con la convenzione che θ è positivo se la semi-retta passante per P è ottenuta ruotando in senso anti-orario e θ è negativo se la semi-retta è ottenuta ruotando in senso orario: per un angolo proprio $\theta \in [0, 2\pi]$ (senso anti-orario) o $\theta \in [-2\pi, 0]$ (senso orario) e l'angolo giro corrispondente a 2π o -2π, vedi Fig 5.1.

Angoli impropri corrispondono a rotazioni multiple in modo tale che due angoli θ e θ' tali che $\theta' - \theta = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ individuano lo stesso punto P sulla circonferenza goniometrica. La relazione tra radianti e gradi è data da

$$\frac{\theta_{\text{radianti}}}{2\pi} = \frac{\theta_{\text{gradi}}}{360}$$

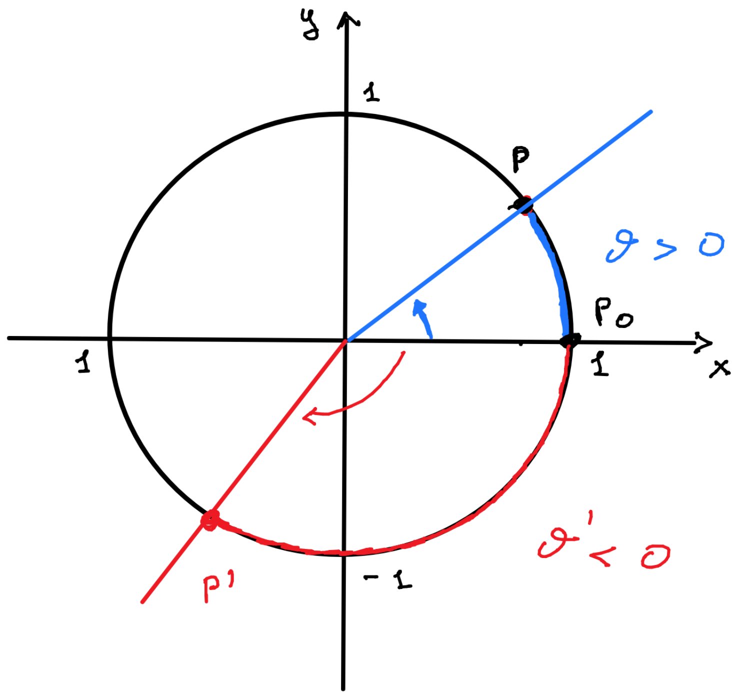


Figura 5.1. Circonferenza goniometrica.

Funzioni trigonometriche.
Dato un angolo $x \in \mathbb{R}$, sia P il punto sulla circonferenza goniometrica tale che la semiretta di centro O e passante per P formi un angolo x con la semiretta delle ascisse positive (in senso antiorario se x è positivo, in senso orario se x è negativo). Si definiscono $\cos x$ e $\sin x$ come l'ascissa e l'ordinata di P, rispettivamente, cioè

$$P = (\cos x, \sin x).$$

Se la retta OP non coincide con l'asse delle ordinate, sia Q l'intersezione della retta OP con la retta verticale passante per il punto $P_0 = (1, 0)$, intersezione della circonferenza goniometrica con l'asse delle ascisse. La tangente è definita come l'ordinata del punto Q, cioè

$$Q = (1, \tan x).$$

Vedi Fig. 5.2 e 5.3.

☡. L'argomento delle funzioni trigonometriche è l'angolo espresso in radianti.

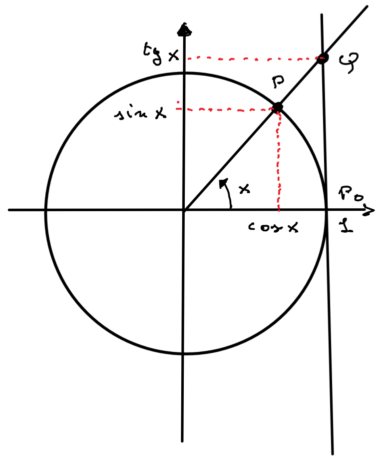


FIGURA 5.2. Definizione funzioni trigonometriche

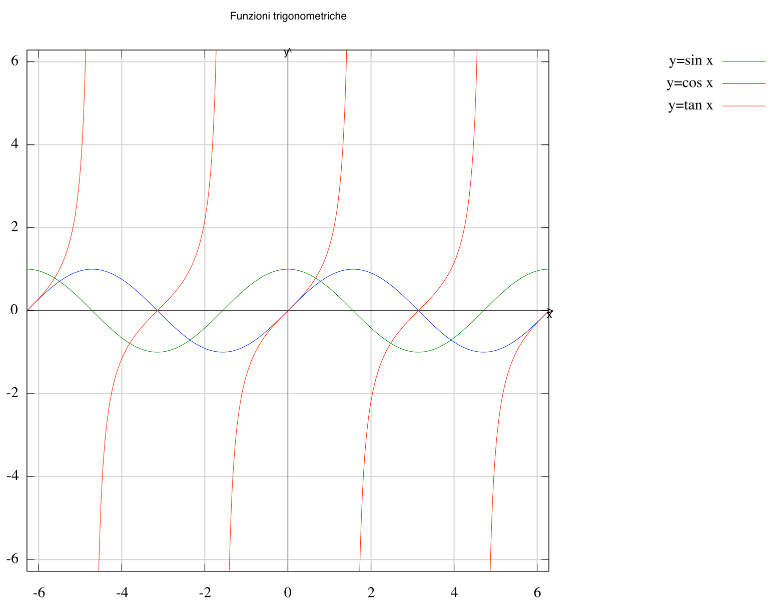


FIGURA 5.3. Grafici delle funzioni trigonometriche.

Valgono le seguenti proprietà.

a) dominio e immagine

$$\operatorname{dom}\sin x = \mathbb{R} \qquad \operatorname{dom}\cos x = \mathbb{R} \qquad \operatorname{dom}\tan x = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\operatorname{Im}\sin x = [-1,1] \qquad \operatorname{Im}\cos x = [-1,1] \qquad \operatorname{Im}\tan x = \mathbb{R}$$

b) periodicità: per ogni $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin(x+2k\pi) = \sin x \qquad \cos(x+2k\pi) = \cos x \qquad \tan(x+k\pi) = \tan x$$

c) parità

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

d) zeri: per ogni $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \sin x = 0 &\iff x = 0 + 2k\pi \quad x = \pi + 2k\pi \\ \cos x = 0 &\iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \tan x = 0 &\iff x = 0 + k\pi \end{aligned}$$

e) intervalli di monotonia: per ogni $k \in \mathbb{Z}$

i) la funzione $\sin x$ è crescente su $[-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$

ii) la funzione $\sin x$ è decrescente su $[\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi]$

iii) la funzione $\cos x$ è crescente su $[-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi]$

iv) la funzione $\cos x$ è decrescente su $[0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$

v) la funzione$\tan x$ è crescente su $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$

f) teorema di Pitagora

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

g) trigonometria

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{N}.$$

h) traslazione

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos(\frac{\pi}{2} - x) & \cos x &= \sin(\frac{\pi}{2} - x) \\ \sin x &= \cos(x - \frac{\pi}{2}) & \cos x &= \sin(x + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

i) somma

$$\begin{aligned} \sin(x_1 + x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2 \\ \sin(x_1 - x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2 \\ \cos(x_1 + x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2 \\ \cos(x_1 - x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2 \end{aligned}$$

j) duplicazione

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin x \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

k) riduzione potenza

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1-\cos(2x)}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1+\cos(2x)}{2} \end{aligned}$$

l) bisezione

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 06: 14/03/25

2 ore

Funzioni trigonometriche inverse.
Le funzioni trigonometriche inverse sono definite come

$$\begin{aligned} \arcsin x &= f^{-1}(x) \qquad f(x) = \sin x \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \arccos x &= f^{-1}(x) \qquad f(x) = \cos x \quad x \in [0, \pi] \\ \arctan x &= f^{-1}(x) \qquad f(x) = \tan x \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

•

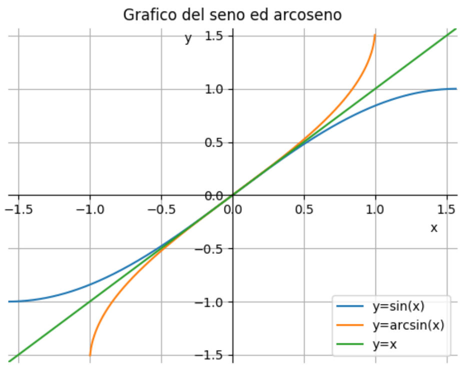


FIGURA 6.1. Grafici dell'arcoseno

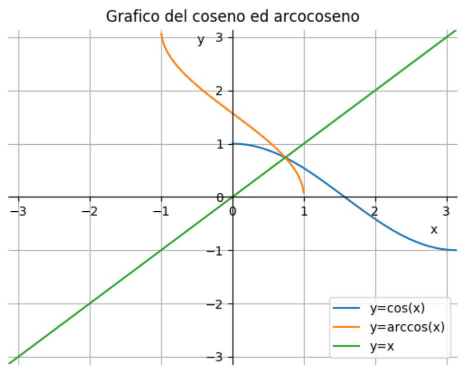


FIGURA 6.2. Grafici dell' arcocoseno

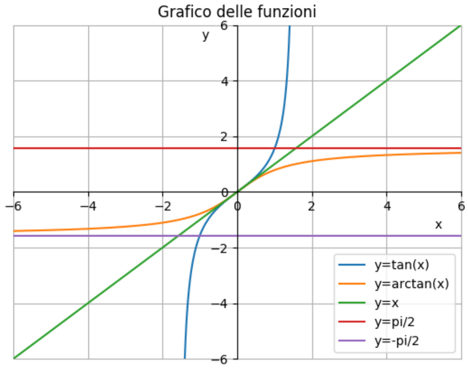


FIGURA 6.3. Grafico dell'arcotangente.

Principali proprietà delle funzioni trigonometriche inverse

a) dominio e immagine

$$\operatorname{dom} \arcsin x = [-1, 1] \qquad \operatorname{dom} \arccos x = [-1, 1] \qquad \operatorname{dom} \arctan x = \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Im} \arcsin x = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad \operatorname{Im} \arccos x = [0, \pi] \qquad \operatorname{Im} \arctan x = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

b) parità

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \qquad \arctan(-x) = -\arctan x$$

c) valori

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \qquad \arcsin 0 = 0 \qquad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$
$$\arccos(-1) = \pi \qquad \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \qquad \arccos 1 = 0$$
$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \qquad \arctan 0 = 0 \qquad \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

d) zeri:

$$\arcsin x = 0 \iff x = 0$$
$$\arccos x = 0 \iff x = 1$$
$$\arctan x = 0 \iff x = 0$$

e) intervalli di monotonia:
  a) la funzione $\arcsin x$ è crescente
  b) la funzione $\arccos x$ è decrescente
  c) la funzione $\arctan x$ è crescente

f) relazioni

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 07 : 19/03/25

2 ore

Funzioni continue. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione

a) dato un punto $x_0 \in A$, la funzione f è detta continua in x_0 se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon \qquad \text{per ogni } x \in A \text{ e } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \tag{7.1}$$

b) La funzione è detta continua se è continua in x_0 per ogni $x_0 \in A$.

Il significato geometrico di continuità è illustrato nella Fig. 7.1

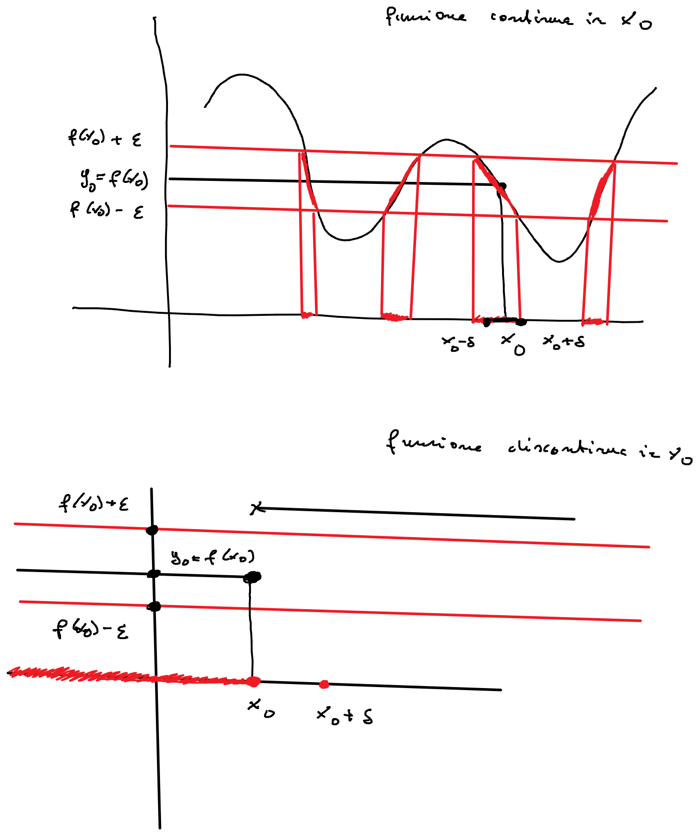


FIGURA 7.1. Funzione continua in x_0 (alto), funzione discontinua in x_0 (basso)

☡. Nella definizione di funzione continua è necessario assumere che x_0 appartenga al dominio di f per poter calcolare $f(x_0)$. La condizione (23.2) equivale al fatto che $f(x)$ è arbitrariamente vicino a $f(x_0)$ se x è sufficientemente vicino a x_0.

Teorema 7.1 (Continuità funzioni elementari)**.**
Le funzioni

i) potenza $f(x) = x^a$ *con* $a \in \mathbb{R}$
ii) esponenziale $f(x) = a^x$ *con* $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$

iii) logaritmo $f(x) = \log_a x$ *con* $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$
iv) trigonometriche $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$
v) trigonometriche inverse $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \arctan x$

sono continue.

Teorema 7.2. *Date due funzioni continue* $f \colon A \to \mathbb{R}$ *e* $g : B \to \mathbb{R}$ *allora*

a) fissati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, la combinazione lineare* $\alpha f + \beta g$ *è una funzione continua;*
b) il prodotto fg *è una funzione continua;*
c) il rapporto f/g *è una funzione continua*
d) il reciproco $1/f$ *è una funzione continua*

Teorema 7.3. *Date due funzioni continue* $f \colon A \to \mathbb{R}$ *e* $g : B \to \mathbb{R}$ *allora la funzione composta*

$$g \circ f : \{x \in A \mid f(x) \in B\} \to \mathbb{R} \qquad y = g(f(x))$$

è continua.

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 08: 21/03/25

Punto di accumulazione. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$

a) un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto punto di accumulazione per A se per ogni $\delta > 0$ esiste $x \in A$ tale che
$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \qquad \text{e} \qquad x \neq x_0;$$
b) $+\infty$ è detto punto di accumulazione per A se per ogni $R > 0$ esiste $x \in A$ tale che $x > R$

c) $-\infty$ è detto punto di accumulazione per A se per ogni $R > 0$ esiste $x \in A$ tale che $x < -R$

Limite. Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, un punto di accumulazione $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ per A ed $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, si scrive
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

a) caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$: se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \qquad \text{per ogni } x \in A,\ x \neq x_0 \text{ e } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta.$$
b) caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell = \pm\infty$: se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$\begin{cases} f(x) > M & \text{se } \ell = +\infty \\ f(x) < -M & \text{se } \ell = -\infty \end{cases} \qquad \text{per ogni } x \in A, \quad x \neq x_0 \text{ e } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta.$$
c) caso $x_0 = \pm\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$: se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che
$$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \qquad \text{per ogni } x \in A \text{ e } \begin{cases} x > R & \text{se } x_0 = +\infty \\ x < -R & \text{se } x_0 = -\infty \end{cases}$$
d) caso $x_0 = \pm\infty$ e e $\ell = \pm\infty$: se per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che
$$\begin{cases} f(x) > M & \text{se } \ell = +\infty \\ f(x) < -M & \text{se } \ell = -\infty \end{cases} \qquad \text{per ogni } x \in A \text{ e } \begin{cases} x > R & \text{se } x_0 = +\infty \\ x < -R & \text{se } x_0 = -\infty \end{cases}$$
In tal caso, si dice che esiste il limite di f per x che tende a x_0 e vale ℓ oppure che $f(x)$ tende ad ℓ per x che tende a x_0.

Proposizione 8.1. *Data $f\colon A \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in A$ punto di accumulazione per A, f è continua in x_0 se e solo se*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 09: 26/03/25

Limite destro e sinistro.
Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ per A tale che per ogni $\delta > 0$

$$A \cap (x_0 - \delta, x_0) \neq \varnothing \qquad \text{e} \qquad A \cap (x_0, x_0 + \delta) \neq \varnothing,$$

si scrive

a) **limite destro**

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \qquad \text{per ogni } x \in A, \quad x_0 < x < x_0 + \delta,$$

b) **limite sinistro**

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \qquad \text{per ogni } x \in A, \quad x_0 - \delta < x < x_0,$$

Analoghe definizioni valgono se $\ell = \pm\infty$.

Proposizione 9.1.
Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $\delta > 0$

$$A \cap (-\delta, x_0) \neq \varnothing \qquad e \qquad A \cap (x_0, \delta) \neq \varnothing,$$

allora x_0 è un punto di accumulazione per A e

$$\textit{esiste } \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \textit{esistono} \begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \end{cases}.$$

Limiti agli estremi del dominio di definizione delle funzioni elementari.

- potenze con esponente intero $n \in \mathbb{N}$ $n > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty \qquad n \text{ pari}$$
$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty \qquad n \text{ dispari}$$

- potenze con esponente intero negativo $b = -n$ $n \in \mathbb{N}$ $n > 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^{-n} = 0 \qquad n > 0$$
$$\lim_{x \to 0} x^{-n} = +\infty \qquad n \text{ pari}$$
$$\lim_{x \to 0^\pm} x^{-n} = \pm\infty \qquad n \text{ dispari}$$

- radici n-esime $n \in \mathbb{N}$ $n > 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{n}} = +\infty \\
&\lim_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{n}} = 0 && n \text{ pari} \\
&\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to-\infty} x^{\frac{1}{n}} = -\infty && n \text{ dispari}
\end{aligned}$$

- potenze con esponente reale $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} x^b = +\infty && b > 0 \\
&\lim_{x\to+\infty} x^b = 0 && b < 0 \\
&\lim_{x\to 0} x^b = 0 && b > 0 \\
&\lim_{x\to 0} x^b = +\infty && b < 0
\end{aligned}$$

- esponenziale e logaritmo in base natuarle

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty && \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \\
&\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty && \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty
\end{aligned}$$

- esponenziali e logaritmi

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty && a > 1 \\
&\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 && 0 < a < 1 \\
&\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 && a > 1 \\
&\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty && 0 < a < 1 \\
&\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty && a > 1 \\
&\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty && 0 < a < 1 \\
&\lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty && a > 1 \\
&\lim_{x\to 0} \log_a x = +\infty && 0 < a < 1
\end{aligned}$$

- funzioni trigonometriche ed inverse

$$\begin{gathered}
\text{non esiste } \lim_{x\to\pm\infty} \sin x \\
\text{non esiste } \lim_{x\to\pm\infty} \cos x \\
\text{non esiste } \lim_{x\to\pm\infty} \tan x \\
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^\pm} \tan x = \mp\infty \\
\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^\pm} \tan x = \mp\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \\
\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}
\end{gathered}$$

Teorema 9.2 (Algebra dei limiti).
Date due funzioni $f, g : A \to \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per A, se

esistono

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

allora

a) somma

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) =$$

	$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_2 = +\infty$	$\ell_2 = -\infty$
$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_1 = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*f.i.*
$\ell_1 = -\infty$	$-\infty$	*f.i.*	$-\infty$

dove f.i=forma indeterminata $+\infty - \infty$.

b) prodotto

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) =$$

	$\ell_2 < 0$	$\ell_2 = 0$	$\ell_2 > 0$	$\ell_2 = +\infty$	$\ell_2 = -\infty$
$\ell_1 < 0$	$\ell_1\ell_2$	0	$\ell_1\ell_2$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_1 = 0$	0	0	0	*f.i.*	*f.i.*
$\ell_1 > 0$	$\ell_1\ell_2$	0	$\ell_1\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_1 = +\infty$	$-\infty$	*f.i.*	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_1 = -\infty$	$+\infty$	*f.i.*	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

dove f.i=forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

c) rapporto

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

	$\ell_2 < 0$	$\ell_2 = 0^\pm$	$\ell_2 > 0$	$\ell_2 = +\infty$	$\ell_2 = -\infty$
$\ell_1 < 0$	ℓ_1/ℓ_2	$\mp\infty$	ℓ_1/ℓ_2	0	0
$\ell_1 = 0$	0	*f.i.*	0	0	0
$\ell_1 > 0$	ℓ_1/ℓ_2	$\pm\infty$	ℓ_1/ℓ_2	0	0
$\ell_1 = +\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	*f.i.*	*f.i.*
$\ell_1 = -\infty$	$+\infty$	$\mp\infty$	$-\infty$	*f.i.*	*f.i.*

dove f.i=forma indeterminata $0/0$ *o* ∞/∞ *e la notazione* $\ell_2 = 0^\pm$ *significa che*

i) esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

ii) esiste $\delta > 0$ *tale che per ogni* $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$

$$\begin{cases} g(x) > 0 & \textit{se } \ell_2 = 0^+ \\ g(x) < 0 & \textit{se } \ell_2 = 0^- \end{cases}$$

se $x_0 \in \mathbb{R}$ *(analoga definizione se* $x_0 = \pm\infty$*).*

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 10: 28/03/25

2 ore

Forme indeterminate del tipo $0/0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad a>0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a} \quad a>0 \qquad a>0,\ a\neq 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^b-1}{x}=b \qquad b\in\mathbb{R}.$$

Forme indeterminate del tipo ∞/∞ o $0\cdot\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \qquad n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\ln x}=+\infty \qquad n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^n e^x=0 \qquad n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$$

$$\lim_{x\to 0}x^n\ln x=0 \qquad n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^b}=+\infty \qquad a>1,\ b>0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{\log_a x}=+\infty \qquad a>1,\ b>0$$

$$\lim_{x\to-\infty}|x|^b a^x=0 \qquad a>1,\ b>0$$

$$\lim_{x\to 0}x^b\log_a x=0 \qquad a,b>0,\ a\neq 1.$$

Teorema 10.1 (Limite funzione composta)**.**
Date due funzioni $f\colon A\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$, e $g:B\to\mathbb{R}$, $z=g(y)$, tali che

a) per ogni $x\in A$, allora $f(x)\in B$,
b) il punto x_0 è di accumulazione per A ed esiste

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=y_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\},$$

c) il punto y_0 è di accumulazione per B ed esiste

$$\lim_{y\to y_0}g(x)=\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\},$$

allora esiste

$$\lim_{x\to x_0}g(f(x))=\ell.$$

. Le condizioni del teorema non sono sufficiente per assicurare l'esistenza del limite $\lim_{x\to x_0}g(f(x))=\ell$. Occorre aggiungere delle ipotesi tecniche, che però sono sempre verificate negli esercizi. Ad esempio, è sufficiente richiedere che una delle seguenti tre condizioni sia soddisfatta

c1): il punto y_0 non appartiene a $\operatorname{dom} g$
c2): la funzione g è continua in y_0
c3): esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \in A$, $x \neq x_0$ e $x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta$.

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 11: 02/04/25

Teorema 11.1 (Teorema del confronto)**.**
Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ di accumulazione per A, se

a) esistono due funzioni $g, h : A \to \mathbb{R}$ tali che

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \qquad \textit{per ogni } x \in A\ x \neq x_0,$$

b) esistono i limiti

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell,$$

dove $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora esiste

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

Intorno. Dato $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un intorno I di x_0 è un insieme tale che

a) **Caso** $x_0 \in \mathbb{R}$: esiste $\delta > 0$

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$$

b) **Caso** $x_0 = +\infty$: esiste $a \in \mathbb{R}$

$$(a, +\infty) \subseteq I$$

c) **Caso** $x_0 = -\infty$: esiste $b \in \mathbb{R}$

$$(-\infty, b) \subseteq I$$

Teorema 11.2 (Teorema della permanenza del segno)**.**
Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ di accumulazione per A tale che esista

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

a) se $\ell > 0$ oppure $\ell + \infty$, allora esiste un intorno I di x_0 tale che

$$f(x) > 0 \qquad \textit{per ogni } x \in A \cap I,\ x \neq x_0$$

b) se esiste un intorno I di x_0 tale che

$$f(x) > 0 \qquad \textit{per ogni } x \in A \cap I,\ x \neq x_0,$$

allora

$$\ell \geqslant 0 \qquad \textit{oppure} \qquad \ell = +\infty.$$

Un analogo risultato vale se $\ell < 0$ o $\ell = -\infty$ o la funzione è negativa in un intorno di x_0.

Limiti di successioni.
Una successione è una famiglia di numeri reali

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

indicizzata dai numeri naturali e si denota con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Poiché una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definisce una funzione con dominio $\mathbb{N}$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad f(n) = a_n \quad n \in \mathbb{N},$$

ed $x_0 = +\infty$ è un punto di accumulazione per $\mathbb{N}$, si può considerare il limite per n che tende a $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Valgono tutti i teoremi visti per i limiti di funzioni.

Teorema 11.3 (Caratterizzazione per successioni)**.**
Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ di accumulazione per A sono fatti equivalenti

a) *esiste*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\};$$

b) *per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che*

$$x_n \in A \qquad x_n \neq x_0 \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 12: 04/04/25

2 ore

Estremo superiore, inferiore, massimo e minimo assoluto.
Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$,

- f è detta superiormente limitata se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale
$$f(x) \leqslant M \text{ per ogni } x \in A$$
- $x_M \in A$ è detto punto di massimo assoluto se
$$f(x) \leqslant f(x_M) \text{ per ogni } x \in A$$
e $f(x_M) = \max_{x \in A} f(x)$ è detto massimo assoluto di f
- un elemento $M \in \mathbb{R}$ è detto estremo superiore di f se
$$\begin{cases} f(x) \leqslant M \text{ per ogni } x \in A \\ \text{per ogni } \epsilon > 0 \text{ esiste } x \in A \text{ tale che } f(x) > M - \epsilon \end{cases}$$
e si scrive $M = \sup_{x \in A} f(x)$. Se esiste, f è superiormente limitata
- se f non è superiormente limitata, si pone
$$\sup_{x \in A} f(x) = +\infty$$
- f è detta inferiormente limitata se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale
$$f(x) \geqslant m \text{ per ogni } x \in A$$
- un elemento $x_m \in A$ è detto punto di minimo assoluto di f se
$$f(x) \geqslant f(x_m) \text{ per ogni } x \in A$$
e $f(x_m) = \min_{x \in A} f(x)$ è detto minimo assoluto di f
- un elemento $m \in \mathbb{R}$ è detto estremo inferiore se
$$\begin{cases} f(x) \geqslant m \text{ per ogni } x \in A \\ \text{per ogni } \epsilon > 0 \text{ esiste } x \in A \text{ tale che } f(x) < m + \epsilon. \end{cases}$$
e si scrive $m = \inf_{x \in A} f(x)$. Se esiste, allora f è inferiormente limitata.
- se f non è inferiormente limitata, si pone
$$\inf_{x \in A} f(x) = -\infty$$
- f è detta limitata se è inferiormente e superiormente limitata, cioè se esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che
$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad \text{per ogni } x \in I.$$

Osservazione. Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$,

i) se $x_m \in A$ è un punto di minimo assoluto, allora
$$\min_{x \in A} f(x) = \inf_{x \in A} f(x) = f(x_m)$$
ii) se $x_M \in A$ è un punto di massimo assoluto, allora
$$\max_{x \in A} f(x) = \sup_{x \in A} f(x) = f(x_M)$$

iii) se f è limitata, allora
$$\operatorname{Im} f \subseteq [\inf_{x\in A} f(x), \sup_{x\in A} f(x)]$$

Teorema 12.1 (Completezza di $\mathbb{R}$)**.** *Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$,*

- *se f è superiormente limitata, allora ammette un unico estremo superiore finito* $\sup_{x\in A} f(x) = M \in \mathbb{R}$
- *se f è inferiormente limitata, allora ammette un unico estremo inferiore finito* $\inf_{x\in A} f(x) = m \in \mathbb{R}$

Rette nel piano.
Dato un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ le rette passanti per P_0 hanno equazione
$$y = m(x - x_0) + y_0 \qquad \text{oppure} \qquad x = x_0 \quad \text{(retta verticale)},$$
dove $m = \tan\theta$ è il coefficiente angolare e $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ è l'angolo che la retta forma con la retta $y = y_0$, parallela all'asse delle ascisse.

Dati due punti $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, la retta passante per P_0 e P_1 ha equazione
$$\begin{cases} y = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x - x_0) + y_0 & \text{se } x_0 \neq x_1 \\ x = x_0 & \text{se } x_0 = x_1 \end{cases}$$
Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su intervallo I ed $x_0 \neq x_1 \in I$, l'equazione della retta secante il grafico di f nei punti $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ è
$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$
In particolare, la retta secante non è parallela all'asse delle ordinate ed il suo coefficiente angolare è
$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Derivata e retta tangente.
Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I

a) fissato $x_0 \in I$, si dice che f è derivabile in x_0 se esiste finito
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0),$$
il valore del limite $f'(x_0)$ si chiama derivata della funzione f nel punto x_0

b) la funzione f si dice derivabile se è derivabile in x_0 per ogni $x_0 \in I$ e la funzione
$$f' : I \to \mathbb{R} \qquad y = f'(x)$$
è detta derivata prima

. La definizione di funzione derivabile si estende al caso di funzioni definite su un unione di intervalli disgiunti.

Osservazione. Se si pone $h = x - x_0$ la definizione di derivata diventa
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
dove è inteso che il limite esiste finito. La quantità
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

è detta *rapporto incrementale* della funzione ed è il coefficiente angolare della retta secante il grafico di $f(x)$ nei punti $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_h = (x_0+h, f(x_0+h))$. Facendo tendere h a zero, il punto P_h tende a P_0 e la corrispondente retta secante converge alla retta tangente, se f è derivabile (vedi Fig. 12.1). Ne segue che l'equazione della retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ è

$$y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(y_0)$$

In particolare la derivata $f'(x_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente.

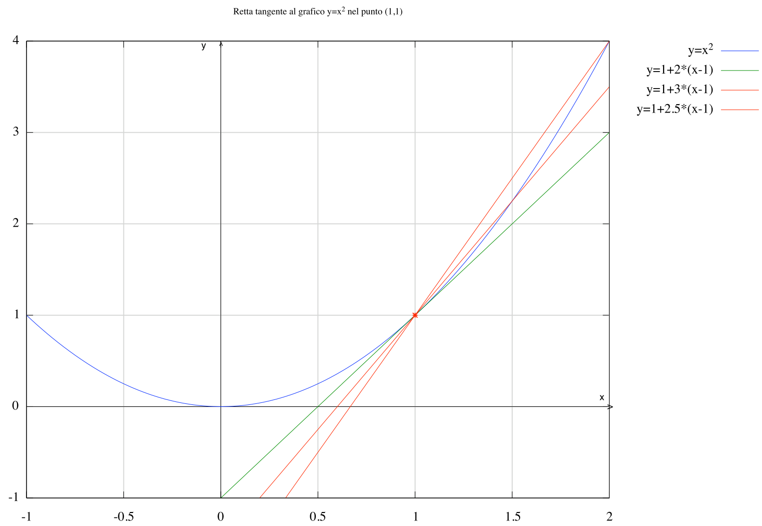


FIGURA 12.1. Retta tangente (verde) e rette secanti (rosso) al grafico di $y = x^2$ nel punto $(1, 1)$.

Osservazione. Dalle definizione di derivata segue che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{x - x_0} = 0 \tag{12.1}$$

Si osservi che $y = f(x)$ e $y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ sono i grafici di f e della sua retta tangente nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$, $f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ è la distanza (con segno) tra l'ordinata del punto $P = (x, f(x))$ sul grafico di f e l'ordinata del punto $Q = (x, f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ sulla retta tangente. Allora la (12.1) implica che tale distanza tende a zero più velocemente di quanto $x - x_0$ tenda a zero, vedi Fig. 12.2.

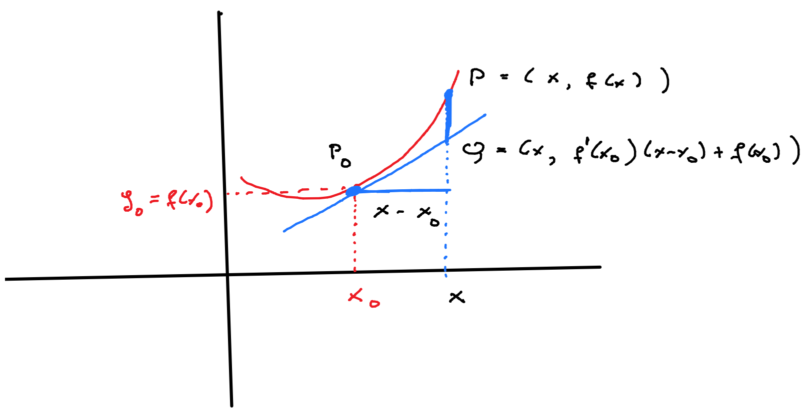


FIGURA 12.2

Esempio 12.2. Dimostriamo che la funzione $f(x) = x^2$ con dominio $I = [0, +\infty)$ è derivabille e $f'(x) = 2x$. Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, poiché $x^2 - x_0^2 = (x - x_0)(x + x_0)$ allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

e, quindi, $f'(x_0) = 2x_0$.

Esempio 12.3.
Dimostriamo che la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ con dominio $I = [0, +\infty)$ è derivabille per ogni $x_0 \neq 0$, ma non è derivabile in $x_0 = 0$. Infatti, poiché

$$\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x_0}} & x_0 > 0 \\ +\infty & x_0 = 0 \end{cases}$$

Se $x_0 > 0$ f è derivabile e $f'(x_0) = 1/(2\sqrt{x_0})$, ma se $x_0 = 0$ f non è derivabile.

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 13: 09/04/25

2 ore

Nella Tabella 13.1 sono elencate le derivate delle funzioni elementari.

$f(x)$		$f'(x)$	I
1		0	$\mathbb{R}$
x^n	$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$	$-n\frac{1}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$	n pari $(0, +\infty)$, n dispari $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
x^b	$b \in \mathbb{R}$	bx^{b-1}	$(0, +\infty)$
e^x		e^x	$\mathbb{R}$
a^x	$a > 0$	$\log a \ a^x$	$\mathbb{R}$
$\ln x$		$\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$
$\log_a x$	$a > 0, \ a \neq 1$	$\frac{1}{\log a}\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$
$\sin x$		$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$		$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$		$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin x$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos x$		$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arctan x$		$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

TABELLA 13.1. Derivate di alcune funzioni elementari.

Proprietà delle funzioni derivabili.

Proposizione 13.1 (Continuità funzioni derivabili)**.**
Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo I. Se $f(x)$ è derivabile in $x_0 \in I$, allora $f(x)$ è continua in x_0.

. Esistono funzioni continue che non sono derivabili. Ad esempio, la funzione

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

è continua sul suo dominio, ma non è derivabile in $x_0 = 0$, come visto nell'Esempio 12.3.

Teorema 13.2 (Algebra delle funzioni derivabili I).
Date due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ definite su un intervallo I e derivabili, allora

a) dati $a, b \in \mathbb{R}$ la combinazione linerare $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è derivabile e vale
$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$$
in particolare,
$$(\alpha f(x))' = \alpha f'(x) \qquad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x);$$

b) il prodotto $f(x)g(x)$ è derivabile e vale
$$(f(x)g(x))' = \underbrace{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}_{\textit{regola di Leibniz}};$$

c) se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, allora il rapporto $f(x)/g(x)$ è derivabile e vale
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2},$$
in particolare
$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2},$$
purché $f(x) \neq 0$

Dimostrazione. Dimostriamo la derivata del rapporto. Fissato $x_0 \in I$, poichè
$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{g(x)g(x_0)}\end{aligned}$$
allora
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)\frac{1}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)\frac{1}{g(x)g(x_0)} \\ &= (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0))\frac{1}{g(x_0)^2} \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2},\end{aligned}$$
essendo g continua e, quindi, $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. □

Algebra delle funzioni derivabili II.

Teorema 13.3 (Derivata funzione composta).
Date due funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ dove I e J sono due intervalli, tali che

a) per ogni $x \in I$ allora $f(x) \in J$

b) le funzioni f e g sono derivabili

allora la funzione composta $g \circ f : I \to \mathbb{R}$, $z = g(f(x))$, è derivabile e
$$g(f(x))' = g'(f(x))\, f'(x) \qquad \textit{regola di derivazione in catena.}$$

☡. Notazioni alternative per la derivata prima f' sono

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{dy}{dx}(x) = Df(x)$$

Usando la seconda notazione la regola di derivazione in catena diventa

$$\frac{dz}{dx}(x) = \frac{dz}{dy}(y)\,\frac{dy}{dx}(x)$$

dove $z = g(y)$ e $y = f(x)$.

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 14: 11/04/25

2 ore

Teorema 14.1 (di De l'Hôpital).
Date due funzioni $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ dove I è un intervallo ed $x_0 \in I$ tali che

a) f e g sono derivabili e

$$g'(x) \neq 0 \qquad \textit{per ogni } x \in I, x \neq x_0$$

b) vale una delle due seguenti condizioni

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \\ &\lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \end{aligned} \qquad (14.1a) \qquad \textit{oppure} \qquad \begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \\ &\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty \end{aligned} \qquad (14.1b)$$

c) esiste

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

allora esiste

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

. Il teorema si applica solo se sono soddisfatte le condizioni (14.1a)–(14.1b), cioè alle forme indeterminate $0/0$ e ∞/∞. Ad esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

ma

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \pi}{\pi} = 0 \qquad \text{mentre} \qquad \lim_{x \to \pi} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \to \pi} \frac{\cos x}{1} = \cos \pi = -1.$$

Teorema 14.2.
Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, tale che

a) il dominio I è un intervallo
b) f è iniettiva
c) f è continua

allora, posto $J = \operatorname{Im} f$, la funzione inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ è continua.
Se inoltre

d) f è derivabile
e) per ogni $x \in I$, $f'(x) \neq 0$

allora f^{-1} è derivabile e

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad x \in J$$

. Se il dominio di f non è un intervallo, l'inversa di una funzione continua può avere delle discontinuità. Ad esempio, data la funzione

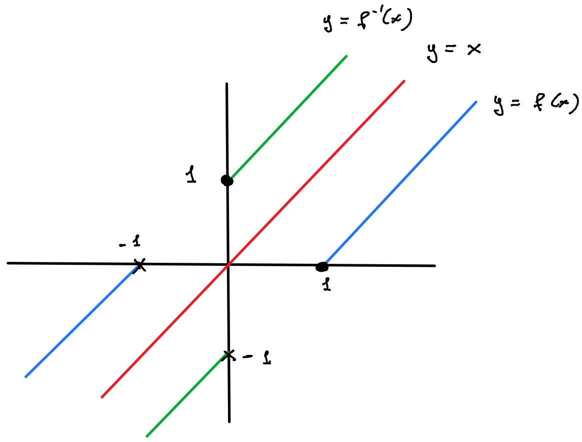
$$\begin{cases} f(x) = x + 1 & x < -1 \\ f(x) = x - 1 & x \geqslant 1 \end{cases},$$

definita su $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$, allora si verifica immediatamente che f è iniettiva, continua, l'immagine è l'intervallo $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, ma l'inversa

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = x - 1 & x < 0 \\ f^{-1}(x) = x + 1 & x \geqslant 0, \end{cases}$$

non è continua in 0 poiché

$$\lim_{x \to 0^-} f^{-1}(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} f^{-1}(x) = 1.$$



Inoltre, se f è derivabile, ma la derivata prima di f is annulla, l'inversa non è derivabile. Ad esempio $f(x) = x^3 + 1$ è derivabile su $\mathbb{R}$ con derivata $f'(x) = 3x^2$, tuttavia l'inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ non è derivabile in $1 = f(0)$ poiché $f'(0) = 0$.

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 15: 16/04/25

2 ore

Derivata destra e sinistra. Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I di estremo sinistro $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ed estremo destro $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ed un punto $x_0 \in I$, $x_0 \neq a$, se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_-(x_0)$$

il valore $f'_-(x_0)$ si chiama derivata sinistra. Se $x_0 \neq b$ se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_+(x_0)$$

Osservazione. Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I di estremo sinistro $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ed estremo destro $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ed un punto $x_0 \in I$, $x_0 \neq a$ e $x_0 \neq b$, allora sono fatti equivalenti

a) la funzione f è derivabille in x_0

b) la funzione f ammette derivata sinistra e destra in x_0 e sono uguali tra di loro.

In tal caso

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

Esempio 15.1. Sia $f(x) = |x|$ la funzione modulo. La funzione non è derivabile in $x_0 = 0$. Infatti

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{\pm x}{x} = \pm 1.$$

Ne segue che f ammette derivata destra e sinistra in x_0, ma sono diverse tra di loro

$$f'_-(0) = -1 \neq f'_+(0) = 1.$$

Teorema 15.2 (Teorema di Weierstrass).
Data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ allora f ammette massimo e minimo assoluti, cioè esistono $x_m, x_M \in [a, b]$ tali che

$$\min f = f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) = \max f \qquad \forall x \in [a, b]$$

. Affinché il teorema di Weierstrass possa essere applicato, il dominio deve essere un intervallo della forma $I = [a, b]$ e la funzione deve essere continua. Ad esempio, la funzione $f(x) = \arctan x$ dove $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ non ammette né massimo né minimo assoluti.
La funzione $f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ dove $\operatorname{dom} f = (-1, 1)$, allora $\min f = f(0) = 1$ e $x_0 = 0$ è il punto di minimo assoluto, ma non ammette massimo e $\sup f = +\infty$.

Teorema 15.3 (Teorema dei valori intermedi).
Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ se

a) il dominio I è un intervallo

b) la funzione f è continua

allora l'immagine di f è un intervallo di estremo sinistro $\inf f$ *ed estremo destro* $\sup f$*, cioè* *i) se f ammette minimo e massimo assoluti, allora*

$$\operatorname{Im} f = [\min f, \max f]$$

ii) se f ammette massimo assoluto, ma non il minimo assoluto, allora

$$\operatorname{Im} f = (\inf f, \max f]$$

iii) se f ammette minimo assoluto, ma non il massimo assoluto, allora

$$\operatorname{Im} f = [\min f, \sup f)$$

iv) se f non ammette né minimo né massimo assoluto, allora

$$\operatorname{Im} f = (\inf f, \sup f).$$

Osservazione. Dalla definizione di estremo superiore ed inferiore, per ogni valore $y_0 < \inf f$ oppure $y_0 > \sup f$, l'equazione $f(x) = y_0$ non ha soluzioni. Il teorema del valori intermedi assicura che per ogni $y_0 \in (\inf f, \sup f)$ l'equazione $f(x) = y_0$ ammette almeno una soluzione. Se $y_0 = \inf f$, l'equazione $f(x) = y_0$ ha soluzione solo se f ammette minimo assoluto e le soluzioni sono i punti di minimo assoluti. Analogo risultato vale per l'equazione $f(x) = y_0$ dove $y_0 = \sup f$.

Teorema 15.4 (Teorema degli zeri)**.**
Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ tale che

a) il dominio I è un intervallo
b) la funzione f è continua
c) esistono $x_0, x_1 \in I$, $x_0 < x_1$, tali che

$$f(x_0)f(x_1) < 0,$$

allora esiste $x^* \in I$ tale che

$$f(x^*) = 0 \qquad e \qquad x_0 < x^* < x_1.$$

Esempio 15.5.

a) Data la funzione

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 2x^3 + \sqrt{1 - x^2}$$

poiché $f(-1) = -2 < 0$ e $f(1) = 2$, esiste $x^* \in (-1, 1)$ tale che $f(x^*) = 0$. Osservando che

$$\begin{aligned} &f(0) = 1 > 0 && \Longrightarrow && x^* \in (-1, 0) \\ &f(-0.5) \simeq 0.62 > 0 && \Longrightarrow && x^* \in (-1, -0.5) \\ &f(-0.75) \simeq -0.18 < 0 && \Longrightarrow && x^* \in (-0.75, -0.5) \end{aligned}$$

Si prova che la soluzione esatta è $x^* = -1/\sqrt{2} \simeq -0.70711$

b) Data la funzione

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x + \ln x$$

poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ allora esiste $x^* \in (0, +\infty)$ tale che $f(x^*) = 0$. Essendo f crescente la soluzione è unica. Poiché $f(1) = 1$, allora tale che $x^* \in (0, 1)$. Poiché $f(1/e) = 1/e - 1$, allora tale che $x^* \in (1/e, 1)$ dove $1/e \sim 0.368$ (soluzione approssimata $x^* = 0.567143$, $f(x^*) = -8 \cdot 10^{-7}$).

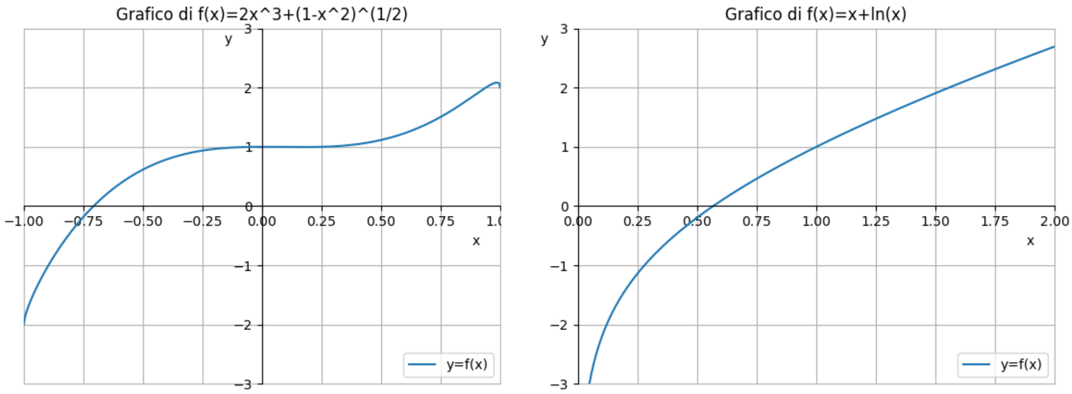


Figura 15.1. Grafico delle funzioni degli esempi a) e b)

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 16: 30/04/25

2 ore

Teorema 16.1 (Teorema di Lagrange)**.**
Data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *tale che*

i) f *è continua in* x *per ogni* $x \in [a,b]$
ii) f *è derivabile in* x *per ogni* $x \in (a,b)$

allora esiste $x_0 \in (a,b)$ *tale che*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a) \tag{16.1}$$

Osservazione. Dal punto di vista grafico, la (16.1) significa che esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ è parallela alla retta secante passante per i punti $P_1 = (a, f(a))$ e $P_2 = (b, f(b))$.

Osservazione. Se esistono $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$m_1 \leqslant f'(x) \leqslant m_2 \qquad \text{per ogni } x \in [a,b]$$

applicando la (16.1) con $b = x$, allora

$$m_1(x-a) \leqslant f(x) - f(a) = f'(x_0)(x-a) \leqslant m_2(x-a) \qquad x \in [a,b],$$

cioè il grafico $y = f(x)$ è compreso tra le due rette

$$y = m_1(x-a) + f(a) \qquad \text{e} \qquad y = m_2(x-a) + f(a)$$

entrambe passanti per il punto del grafico $P_1 = (a, f(a))$.

☡. Nel caso in cui $f(a) = f(b)$ il teorema di Lagrange implica che esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ (tale risultato è noto come teorema di Rolle).

Estremi relativi.
Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in A$ è detto *punto di estremo relativo* se esiste $\delta > 0$ tale che

- minimo relativo

$$f(x) \geqslant f(x_0) \qquad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

- massimo relativo

$$f(x) \leqslant f(x_0) \qquad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A.$$

Il valore $f(x_0)$ è detto estremo (minimo/massimo) relativo.

☡. I punti di minimo e massimo assoluti, sono anche punti di minimo e massimo relativo, ma non è vero il contrario (in Fig. 16.1 $x_0 = -2$ è il punto di massimo assoluto e $x_0 = \pm 1$ sono i punti di minimo assoluto, mentre $x_0 = 0$ e $x_0 = 1,5$ sono estremi relativi, ma non assoluti).

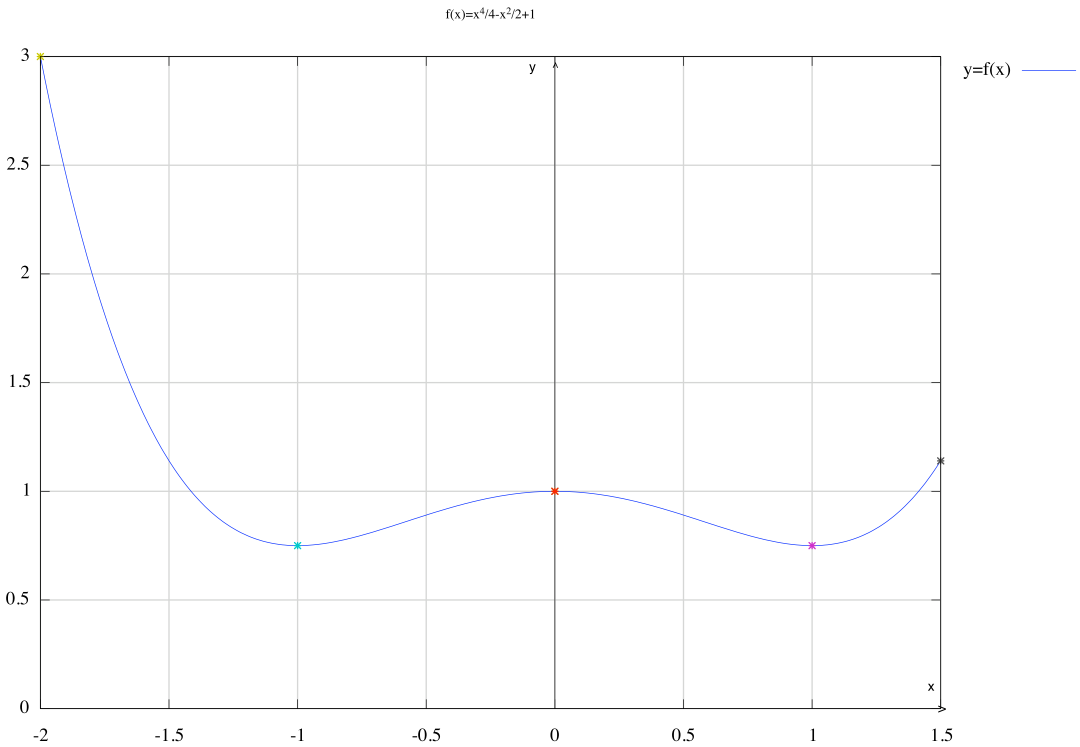


FIGURA 16.1. Estremi relativi di $f(x) = x^4/4 - x^2/2 + 1$ nell'intervallo $[-2, 3/2]$. Punti di minimo relativo: $x_0 = -1$ e $x_0 = 1$, punti di massimo relativo: $x_0 = -2$, $x_0 = 0$ e $x_0 = 3/2$.

Teorema 16.2 (Condizione necessaria del I ordine)**.**
Data $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I di estremo sinistro $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ed estremo destro $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ed un punto $x_0 \in I$ tali che

i) la funzione f è derivabile in x_0
ii) x_0 è un punto di estremo relativo per f
iii) $x_0 \neq a$ e $x_0 \neq b$

allora $f'(x_0) = 0$.

Osservazione. Il teorema assicura che la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ è parallela all'asse delle ascisse purché

i) f sia derivabile in x_0 e quindi ammette retta tangente
ii) il punto x_0 sia di minimo o massimo relativo relativo;
iii) x_0 non coincida con gli estremi a e b, cioè $x_0 \in (a, b)$.

. La condizione che $x_0 \in (a, b)$ non si può togliere. Ad esempio in Fig. 16.1 $x_0 = -2$ è un punto di massimo assoluto (e quindi relativo), ma la retta tangente al grafico di $y = x^4/4 - x/2 + 1$ nel punto $(-2, 3)$ non è orizzontale.

. I punti $x_0 \in I$ in cui f è derivabile ed $f'(x_0) = 0$ sono detti punti critici. Per tali valori, la retta tangente al grafico di f in $(x_o, f(x_0))$ è parallela all'asse delle ascisse, tuttavia in generale x_0 non è un punto di estremo relativo. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$ ha derivata $f'(x) = 3x^2$, che si annulla in $x_0 = 0$. Tuttavia, $x_0 = 0$ non è un punto di estremo relativo poiché

$$\begin{cases} f(x) < f(0) = 0 & x < 0 \\ f(x) > f(0) = 0 & x > 0. \end{cases}$$

Teorema 16.3 (Caratterizzazione monotonia)**.**
Data $f : I \to \mathbb{R}$ *definita su un intervallo* I *di estremo sinistro* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *ed estremo destro* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tale che*

i) f *è continua in* x_0 *per ogni* $x_0 \in I$
ii) f *è derivabile in* x_0 *per ogni* $x_0 \in (a, b)$

allora

$$f'(x) \geqslant 0 \text{ per ogni } x \in (a,b) \iff f(x) \text{ è debolmente crescente su } I$$
$$f'(x) \leqslant 0 \text{ per ogni } x \in (a,b) \iff f(x) \text{ è debolmente decrescente su } I$$
$$f'(x) = 0 \text{ per ogni } x \in (a,b) \iff f(x) \text{ è costante su } I$$

Inoltre

$$f'(x) > 0 \text{ per ogni } x \in (a,b) \implies f(x) \text{ è crescente su } I$$
$$f'(x) < 0 \text{ per ogni } x \in (a,b) \implies f(x) \text{ è decrescente su } I$$

Dimostrazione. (Facoltativa)
Dimostriamo la prima affermazione. Le altre si provano in modo simile.
Caso 1 $f'(x) \geqslant 0 \implies f$ è debolmente crescente.
Dati $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, la funzione f ristretta all'intervallo $[x_1, x_2] \subset I$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange, Teo. 16.1, per cui esiste $x_0 \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) \geqslant 0$$

poiché $f'(x_0) \geqslant 0$ e $x_2 - x_1 > 0$. Ne segue che $f(x_2) \geqslant f(x_1)$.
Caso 2 f è debolmente crescente $\implies f'(x) \geqslant 0$.
Fissato $x_0 \in (a, b)$, poiché f è debolmente crescente, se $x > x_0$ allora $f(x) \geqslant f(x_0)$, da cui segue che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \qquad x > x_0.$$

Analogamente, se $x < x_0$ allora $f(x) \leqslant f(x_0)$, da cui segue che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \qquad x < x_0.$$

Dal teorema della permanenza del segno, Teo 11.2, segue che

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

□

☡. Se il dominio della funzione f non è un intervallo, il segno della derivata prima non permette di caratterizzare la monotonia della funzione. Infatti, se $f(x) = \frac{1}{x}$ con dominio$\mathbb{R}\backslash\{0\}$, la sua derivata $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ per ogni $x \neq 0$. Il grafico di $f(x)$ è l'iperbole equilatera $yx = 1$, per cui la funzione è decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ così come nell'intervallo $(0, +\infty)$. Tuttavia non è decrescente su l'unione dei due intervalli $\mathbb{R}\backslash\{0\}$: infatti

$$f(x_1) < 0 < f(x_2) \qquad \text{se } x_1 < 0 < x_2.$$

Calculus 1	**2024/25**

Lezione 17: 07/05/25

2 ore

Derivate di ordine successivo.
Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ su un intervallo I si dice derivabile due volte se

a) la funzione f è derivabile
b) la derivata prima f' è derivabile

e la funzione

$$f'' : I \to \mathbb{R} \qquad f''(x) = (f'(x))'$$

si chiama derivata seconda. In modo analogo si definiscono le derivate di ordine successivo

$$f''' = (f'')', \quad f^{(4)} = (f''')', \qquad , f^{(k+1)} = (f^{(k)})',$$

dove l'indice $k \in \mathbb{N}$ è detto ordine di derivazione.

. Se $k = 0$ si pone $f^{(0)} = f$.

Notazioni alternative per le derivate sono

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}(x) = \frac{d^k y}{dx^k}(x) = D^k f(x)$$

Funzioni convesse e concave.
Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I è detta

- convessa se per ogni $x_1, x_2 \in I$ e per ogni $t \in [0, 1]$
$$f((1-t)x_1 + tx_2)) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{17.1a}$$
- concava se per ogni $x_1, x_2 \in I$ e per ogni $t \in [0, 1]$
$$f((1-t)x_1 + tx_2)) \geqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{17.1b}$$

Dal punto di vista geometrico la condizione (17.1a) (risp. (17.1b)) afferma che, dati due punti $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$ sul grafico di f, il segmento di estremi P_1 e P_2 sta sopra (risp. sotto) il grafico di f. Infatti, al variare di $t \in [0, 1]$,

- al variare di $t \in [0, 1]$
$$x_t = (1-t)x_1 + tx_2 = x_1 + t(x_2 - x_1)$$
descrive i punti sull'asse delle ascisse compresi tra x_1 e x_2
- al variare di $t \in [0, 1]$
$$((1-t)x_1 + tx_2), f((1-t)x_1 + tx_2)) = (x_t, f(x_t))$$
parametrizza i punti sul grafico di f compresi tra P_1 e P_2
- al variare di $t \in [0, 1]$
$$((1-t)x_1 + tx_2), (1-t)f(x_1) + tf(x_2))$$
parametrizza i punti del piano che stanno sul segmento di estremi P_1 e P_2. Infatti, la retta secante passante per P_1 e P_2 ha equazione
$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) \underset{(x=x_t)}{=} (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

Teorema 17.1 (Caratterizzazione convessità).
Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I e derivabile due volte. Sono fatti equivalenti

a) la funzione f è convessa

b) fissato $x_0 \in I$

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{per ogni } x \in I \tag{17.2}$$

c) per ogni $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.

Dal punto di vista geometrico la condizione (17.2) afferma che, dato un punto qualunque $P_0 = (x_0, f(x_0))$ sul grafico di f, la retta tangente al grafico di f in P_0 sta sotto il grafico di f. Un'analoga caratterizzazione vale per le funzione concave (basta cambiare il verso delle disequazioni).

Studio di funzioni. Lo schema seguente indica i passi principali da fare per lo studio di funzioni. Ogni volta che si è risolto un punto occorre rappresentare l'informazione sul grafico e verificare che sia in accordo con quanto dedotto precedentemente.

1) Determinare il dominio della funzione f e scriverlo come unione di intervalli

$$\operatorname{dom} f = I_1 \cup I_2 \cup \ldots$$

2) Stabilire se la funzione è continua, quante volte è derivabile e calcolare f' ed f''.
3) Determinare le simmetrie (pari/dispari) e periodicità. Studiare il segno della funzione e calcolare le intersezioni con gli assi cartesiani: $f(0)$ se $0 \in \operatorname{dom} f$ e risolvere l'equazione $f(x) = 0$.
4) Calcolare i limiti di f agli estremi di ciascun intervallo I_1, I_2, ...
5) Studiare il segno della derivata prima f' calcolando i punti critici, e dedurne gli intervalli di monotonia della funzione (Teorema 16.3).
6) Determinare i punti di massimo e minimo relativi, ricordando che il Teorema 16.2 dà solo una condizione necessaria affinché un punto sia un estremo relativo.
   a) I punti critici x_0 (non coincidenti con gli estremi degli intervalli $I_1, I_2, \ldots$) in cui la derivata *cambia segno* sono punti di estremi relativo. Infatti, se

   $$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{se } x_0 - \delta < x < x_0 \\ f'(x) > 0 & \text{se } x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$

   allora x_0 è un punto di minimo relativo. Analogamente, se

   $$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } x_0 - \delta < x < x_0 \\ f'(x) < 0 & \text{se } x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$

   allora x_0 è un punto di massimo relativo. Per tali valori, calcolare il corrispondente estremo relativo $f(x_0)$.
   b) Verificare se gli estremi degli intervalli I_1, I_2, ..., purché appartenenti al dominio, siano punti di estremi relativi (in tali punti in generale la derivata prima non si annulla). Ad esempio se $I_1 = [a, b)$ e

   $$f'(x) > 0 \quad a < x < a + \delta$$

   allora $x_0 = a$ è un punto di minimo relativo, mentre $b \notin \operatorname{dom} f$ per cui non ha senso chiedersi se sia un punto di estremo relativo.

7) Studiare il segno della derivata seconda f'' e dedurne gli intervalli di convessità/concavità della funzione (Teorema 17.1). In particolare i punti in cui f'' *cambia segno*, sono detti punti di flesso e, in tali punti, può essere utile calcolare la derivata e tracciare la retta tangente).
8) Disegnare il grafico di f in modo coerente con i risultati dei punti precedenti
9) Determinare $\inf f$ e $\sup f$, stabilendo se sono o meno minimo e massimo assoluti.
10) Determinare l'immagine di f utilizzando il teorema dei valori intermedi (Teo. 15.3).

. In molti casi non si riescono a svolgere esplicitamente i calcoli per tutti i punti e si dovrà dedurre l'andamento del grafico solo attraverso i punti svolti.

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 18: 09/05/25

2 ore

Teorema 18.1 (Limite per funzioni monotone).
Data una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$,

- *se la funzione* f *è crescente, allora esiste*

$$\lim_{x\to b} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

- *se la funzione* f *è decrescente, allora esiste*

$$\lim_{x\to b} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Teorema 18.2 (Limite per successioni monotone).
Data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- *se la successione è crescente, allora esiste*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

- *se la successione* f *è decrescente, allora esiste*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Proposizione 18.3 (Numero di Nepero e).
Data la successione $(a_n)_{n\geqslant 1}$

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \qquad n \geqslant 1$$

esiste finito

$$\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Si definisce numero di Nepero il valore del limite, cioè

$$e = \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Una stima del numero di Nepero è $e = 2.7182818284\ldots$.

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 19: 14/05/25

2 ore

Integrali indefiniti. Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I, si chiama primitiva di f una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ derivabile tale che

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{per ogni } x \in I.$$

L'insieme di tutte le primitive di f è detto integrale indefinito di f e si denota con

$$\int f(x)\,dx = \{F : I \to \mathbb{R} \mid F \text{ derivabile e } F'(x) = f(x) \text{per ogni } x \in I\}.$$

Osservazione. Se F è una primitiva di f, F è continua, poiché è derivabile. Inoltre, anche $F + c$ è una primitiva di f. Viceversa, se G è un altra primitiva di f, allora

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad x \in I.$$

Poiché I è un intervallo, allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c$ per ogni $x \in I$. Ne segue che

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \text{costante}, \tag{19.1}$$

dove con lieve abuso di notazione $F(x) + \text{costante}$ denota l'insieme

$$\{G : I \to \mathbb{R} \mid G(x) = F(x) + c \text{ dove } c \in \mathbb{R}\}.$$

Inoltre, per definizione di primitiva

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x) \qquad \text{e} \qquad \int f'(x)\,dx = f(x) + c, \tag{19.2}$$

☡. La definizione di primitiva si può estendere a funzioni definite su unione di intervalli. Tuttavia in tal caso non è più vero che due primitive della stessa funzione differiscono per una costante. Ad esempio, se $f(x) = x^{-1}$ con $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ allora l'integrale generale è

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} \ln(x) + c_1 & x > 0 \\ \ln(-x) + c_2 & x < 0 \end{cases}$$

☡. Esistono funzioni f che non ammettono primitive. Ad esempio la funzione

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Infatti, se F fosse una primitiva, allora

$$F(x) = \begin{cases} c_1 & x < 0 \\ x + c_2 & x > 0 \end{cases}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. La continuità di F in $x_0 = 0$ implica che $F(0) = c_1 = c_2 = c$. Tuttavia, per qualunque scelta di $c \in \mathbb{R}$, F non è derivabile in $x_0 = 0$.
Il teorema fondamentale del calcolo integrale assicura che, se f è continua, allora ammette sempre una primitiva.

Teorema 19.1 (Linearità)**.** *Date due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ continue definite su un intervallo I, allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$\int \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big) dx = \Big(\alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx\Big).$$

Dimostrazione. (Facoltativa)
Segue dalla linearità dell'operazione di derivata. Infatti, se $F, G : I \to \mathbb{R}$ sono primitive rispettivamente di f e g, cioè

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \iff F'(x) = f(x) \quad x \in I \tag{19.3}$$

$$\int g(x)\, dx = G(x) + c \iff G'(x) = g(x) \quad x \in I \tag{19.4}$$

allora la funzione

$$H : I \to \mathbb{R} \qquad H(x) = \alpha F(x) + \beta G(x)$$

è derivabile con derivata

$$H'(x) = (\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \quad x \in I$$

dove si è usato (19.3) e (19.4). Allora H è una primitiva di $\alpha f(x) + \beta g(x)$, cioè

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) = H(x) + c = \Big(\alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx\Big).$$

□

Teorema 19.2 (Formula di integrazione per parti)**.** *Date due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ definite su un intervallo I, derivabili con derivate f' e g' continue, allora*

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx. \tag{19.5}$$

Dimostrazione. Sia F una primitiva di $f'g$, per definizione

$$F'(x) = f'(x)g(x) \qquad x \in I.$$

Posto

$$G : I \to \mathbb{R} \qquad G(x) = f(x)g(x) - F(x)$$

G è derivabile poiché f, g ed F sono derivabili e, per regola di derivazione del prodotto

$$G'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f'(x)g(x).$$

Allora

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - (F(x) + c) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx.$$

□

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 20: 16/05/25

2 ore

Teorema 20.1 (Formula di integrazione per sostituzione)**.** *Date due funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ tali che*

a) i domini I e J sono intervalli e $g(x) \in I$ per ogni $x \in J$;
b) la funzione f è continua;
c) la funzione g è derivabile e la derivata g' è continua,

allora

$$\left(\int f(t)\ dt\right)_{|t=g(x)} = \int f(\underbrace{g(x)}_{t=g(x)})\underbrace{g'(x)\ dx}_{dt=g'(x)dx}. \tag{20.1}$$

Dimostrazione. (Facoltativa)
Sia $F : I \to \mathbb{R}$ una primitiva di f. Per ipotesi $g(x) \in I$ per ogni $x \in J$, allora la funzione composta

$$G : J \to \mathbb{R} \qquad G(x) = F(g(x))$$

è definita su J e, per il teorema di derivazione di funzione composte, G è derivabile, poiché F e g lo sono, con derivata

$$G'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) \qquad x \in J,$$

cioé $G(x)$ è una primitiva di $f(g(x))g'(x)$. Quindi

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x)) + c = (F(t) + c)_{|t=g(x)} = \left(\int f(t)\ dt\right)_{|t=g(x)}.$$

□

Come conseguenza della definizione di primitiva, nella Tabella 20.1 sono riportati alcuni integrali elementari. Nella Tabella 20.2 sono elencati alcuni integrali notevoli.

$$
\begin{aligned}
\int x^a\,dx &= \frac{1}{a+1}x^{a+1} + c && \text{con } a \neq -1\\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + c\\
\int e^x\,dx &= e^x + c\\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + c\\
\int \cos x\,dx &= \sin x + c\\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \tan x + c\\
\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx &= -\frac{\cos x}{\sin x} + c\\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + c\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x + c = -\arccos x + c
\end{aligned}
$$

Tabella 20.1. Integrali elementari.

$$
\begin{array}{lcll}
\displaystyle\int \ln x\, dx & = & x(\log x - 1) + c & \\
\displaystyle\int \tan x\, dx & = & -\log|\cos x| + c & \\
\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a}\, dx & = & \displaystyle\frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + c & a > 0 \\
\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a}\, dx & = & \displaystyle\frac{1}{2\sqrt{a}} \log\frac{|x-\sqrt{a}|}{|x+\sqrt{a}|} + c & a > 0 \\
\displaystyle\int \frac{x}{x^2+a}\, dx & = & \displaystyle\frac{1}{2}\log|x^2+a| + c & a \in \mathbb{R} \\
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\, dx & = & \displaystyle\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + c & a > 0 \\
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\, dx & = & \log\left(x + \sqrt{x^2+a}\right) + c & a \neq 0 \\
\displaystyle\int \sqrt{a-x^2}\, dx & = & \displaystyle\frac{a}{2}\left(\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + \frac{x}{a}\sqrt{a-x^2}\right) + c & a > 0 \\
\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\, dx & = & \displaystyle\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right) + c & a \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Tabella 20.2. Integrali notevoli.

Integrali funzioni razionali.
In questa lezione si accenna all'integrazione di alcune funzioni razionali, cioé della forma $\frac{N(x)}{D(x)}$ dove sia il numeratore $N(x)$ sia il denominatore $D(x)$ sono polinomi.
Abbassamento di grado.
Se il grado del numeratore è maggiore o uguale al grado del denominatore, il primo passo è quello di abbassare il grado del numeratore. Posto n = grado $N(x)$ e $d = \text{grado}\, D(x)$, si determinano due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \tag{20.2}$$

dove $Q(x)$ ha grado $n - d \geqslant 0$ e $R(x)$ ha grado minore o uguale a $d-1$. I coefficienti di $Q(x)$ e $R(x)$ si calcolano applicando il principio di identità dei polinomi all'uguaglianza

$$N(x) = Q(x)D(x) + R(x).$$

Esempio 20.2. Se

$$N(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \qquad D(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

allora, $n = 3$, $d = 2$ e

$$Q(x) = A + Bx \qquad R(x) = C + Dx.$$

Le costanti A, B, C, D si calcolano imponendo che

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = (A + Bx)\left(b_0 + b_1x + b_2x^2\right) + (C + Dx),$$

da cui

$$\begin{cases} a_0 = Ab_0 + C \\ a_1 = Ab_1 + Bb_0 + D \\ a_2 = Ab_2 + Bb_1 \\ a_3 = Bb_2 \end{cases}.$$

Dalla (20.2), per la linearità dell'integrale segue che

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx.$$

Poiché $Q(x)$ è un polinomio, il primo integrale è elementare. Consideriamo il secondo. Trattiamo solo due casi: il denominatore $D(x)$ è un polinomio di primo grado (ed $R(x)$ è una constante) oppure $D(x)$ è di secondo grado (ed $R(x) = mx + q$).

Denominatore di grado 1.

Se il grado del denominatore è 1, allora

$$D(x) = ax + b \qquad R(x) = c \qquad a \neq 0.$$

Con il cambio di variabile $t = ax + b$

$$\int \frac{c}{ax+b}\,dx = \frac{c}{a}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{c}{a}\log|ax+b| + \text{constante}.$$

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 21: 21/05/25

2 ore

Denominatore di grado 2.
Se il grado di $Q(x)$ è 2, allora

$$R(x) = mx + q \qquad D(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0.$$

Si calcola il discriminante dell'equazione $D(x) = ax^2 + bx + c = 0$. In base al segno di Δ ci sono tre casi distinti.

a) $\Delta > 0$. Denotiamo con x_1 ed x_2 le due soluzioni reali distinte dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, per cui

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Poiché

$$\frac{mx+q}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}\right), \tag{21.1}$$

dove le costanti A e B si determinato imponendo che

$$mx + q = A(x - x_2) + B(x - x_1),$$

allora, dalla (21.1),

$$\begin{aligned}\int \frac{mx+q}{ax^2+bx+c}\,dx &= \frac{1}{a}\left(A\int \frac{1}{x-x_1}\,dx + B\int \frac{1}{x-x_2}\,dx\right)\\ &= \frac{A}{a}\ln|x-x_1| + \frac{B}{a}\ln|x-x_2| + \text{costante}.\end{aligned}$$

b) $\Delta = 0$. Denotiamo con $x^* = x_1 = x_2$ le due soluzioni reali coincidenti dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, per cui

$$ax^2 + bx + c = a(x - x^*)^2.$$

Poiché

$$\frac{mx+q}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{a(x-x^*)} + \frac{B}{a(x-x^*)^2}, \tag{21.2}$$

dove le costanti A e B si determinato imponendo che

$$mx + q = A(x - x^*) + B,$$

allora dalla (21.2)

$$\begin{aligned}\int \frac{mx+q}{ax^2+bx+c}\,dx &= \left(\frac{A}{a}\int \frac{1}{(x-x^*)}\,dx + \frac{B}{a}\int \frac{1}{(x-x^*)^2}\,dx\right)\\ &= \frac{A}{a}\ln|x-x^*| - \frac{B}{a}\frac{1}{x-x^*} + \text{costante},\end{aligned}$$

c) $\Delta < 0$. Senza perdita di generalità supponiamo che $a > 0$. Poiché

$$ax^2 + bx + c = \beta^2 + (\alpha x + \gamma)^2,$$

dove le costanti α, β e γ si determinato imponendo che

$$ax^2 + bx + c = \alpha^2x^2 + 2\alpha\gamma x + (\beta^2 + \gamma^2).$$

Inoltre, analogamente a sopra,

$$\frac{mx+q}{ax^2+bx+c} = A\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + B\frac{1}{ax^2+bx+c}, \tag{21.3}$$

dove le costanti A e B si determinato imponendo che

$$mx+q = A(2ax+b)+B,$$

allora, dalla (21.3),

$$\begin{aligned}
\int \frac{mx+q}{ax^2+bx+c}\,dx &= \left(A\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + B\int \frac{1}{\beta^2+(\alpha x+\gamma)^2}\,dx\right)\\
&= \left(A\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \frac{B}{\beta^2}\int \frac{1}{1+(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta})^2}\,dx\right)\\
&= A\ln(ax^2+bx+c) + \frac{B}{\alpha\beta}\arctan\big(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta}\big) + \text{costante},
\end{aligned}$$

dove nel primo integrale si è fatto il cambio di variabili $t = ax^2+bx+c$ e $dt = 2ax+b$ e nel secondo il cambio di variabili $t = (\alpha x+\gamma)/\beta$ e $dt = (\alpha/\beta)dx$.

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 22: 23/05/25

2 ore

Somme parziali inferiori e superiori. Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, definiamo la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ delle somme inferiori

$$s_0 = (b-a) \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$s_1 = \frac{b-a}{2} \inf_{x\in[a_0,a_1]} f(x) + \frac{b-a}{2} \inf_{x\in[a_1,a_2]} f(x)$$

$$\text{dove } a_0 = a,\ a_1 = \frac{a+b}{2},\ a_2 = b$$

$$s_2 = \frac{b-a}{4} \inf_{x\in[a_0,a_1]} f(x) + \frac{b-a}{4} \inf_{x\in[a_1,a_2]} f(x) + \frac{b-a}{4} \inf_{x\in[a_2,a_3]} f(x) + \frac{b-a}{4} \inf_{x\in[a_3,a_4]} f(x)$$

$$\text{dove } a_0 = a, \quad a_1 = a + \frac{b-a}{4}, \quad a_2 = a + 2\frac{b-a}{4}, \quad a_3 = a + 3\frac{b-a}{4}, \quad a_4 = b$$

...

$$s_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{b-a}{2^n} \inf_{x\in[a_{k-1},a_k]} f(x) \qquad \text{dove } a_k = a + k\frac{b-a}{2^k} \quad k = 0, 1, \dots, 2^n$$

....

Analogamente, definiamo la successione $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ delle somme superiori

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{b-a}{2^n} \sup_{x\in[a_{k-1},a_k]} f(x) \qquad \text{dove } a_k = a + k\frac{b-a}{2^k} \quad k = 0, 1, \dots, 2^n.$$

Proposizione 22.1. *Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, allora esistono finiti*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \ell \in\mathbb{R} \tag{22.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L \in\mathbb{R} \tag{22.2}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che la successione delle somme inferiori è crescente. Per costruzione, è sufficiente mostrare che $s_1 \geqslant s_0$. Infatti

$$\inf_{x\in[a,(a+b)/2]} f(x) \geqslant \inf_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{e} \qquad \inf_{x\in[(a+b)/2,b]} f(x) \geqslant \inf_{x\in[a,b]} f(x),$$

da cui segue che

$$s_1 \geqslant \frac{b-a}{2} \inf_{x\in[a,b]} f(x) + \frac{b-a}{2} \inf_{x\in[a,b]} f(x) = (b-a) \inf_{x\in[a,b]} f(x) = s_0.$$

Dimostriamo che la successine è superiormente limitata. Posto $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, poiché per ogni $x \in [a_{k-1}, a_k]$, $f(x) \leqslant M$ allora

$$\inf_{x\in[a_{k-1},a_k]} f(x) \leqslant M \qquad \text{per ogni } k = 0, 1, \dots, 2^n,$$

da cui segue che

$$s_n \leqslant M \sum_{k=1}^{2^n} \frac{b-a}{2^n} = M(b-a).$$

Poiché $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente e limitata per il Teo. (18.1), allora esiste finito $\lim_{n\to\infty} s_n$. Analogamente si dimostra che la successione delle somme superiori è decrescente e inferiormente limitata, per cui esiste finito (22.2). □

Funzioni integrabili. Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata si dice integrabile su $[a, b]$ (secondo Riemann) se

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

e il valore

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

è detto integrale definito di f sull'intervallo $[a, b]$. La funzione f si chiama funzione integranda.
Se f è positiva l'integrale esprime l'area della regione compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse. Per una funzione negativa, l'integrale esprime l'area della regione compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse cambiata di segno.

☡. L'integrale definito $\int_a^b f(x)\, dx$ è un numero, mentre la variabile di integrazione x è *muta*. Il fattore $f(x)\, dx$ è un simbolo che ricorda la procedura di approssimazione nella costruzione dell'integrale.

☡. Esistono funzioni limitate patologiche per cui

$$\lim_{n\to\infty} S_n \neq \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Teorema 22.2. *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua è integrabile.*

Teorema 22.3. *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona è integrabile.*

Teorema 22.4. *Data due funzioni $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che*

i) f è integrabile
ii) esiste un insieme finito $\{x_1, \ldots, x_N\} \subset I$ tale che

$$g(x) = f(x) \qquad \forall x \in I,\ x \neq x_i \quad i = 1, \ldots N$$

allora g è integrabile e

$$\int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

☡. Se f è continua, per il teorema di Weierstrass,

$$\inf_{x\in[a_{k-1},a_k]} f(x) = \min_{x\in[a_{k-1},a_k]} f(x) = f(\overline{x}_k)$$

dove $\overline{x}_k \in [a_{k-1}, a_k]$, allora

$$s_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{b-a}{2^n} f(\overline{x}_k)$$

è detta somma di Cauchy.

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 23: 28/05/25

2 ore

Integrale orientato e funzione integrale. Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I e limitata su ogni intervallo $[a, b] \subset I$, allora

a) fissati $a, b \in I$, il valore

$$\int_a^b f(x)\, dx = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx & a < b \\ 0 & a = b \\ \displaystyle -\int_b^a f(x)\, dx & a > b \end{cases}$$

è detto integrale orientato di f

b) fissato $a \in I$, la funzione $F : I \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad x \in I$$

è detta funzione integrale (di estremo a)

Teorema 23.1. *Date due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ definite su un intervallo I ed integrabili su ogni intervallo $[a, b] \subset I$, allora*

- **linearità** *dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la funzione $\alpha f + \beta g$ è integrabile su ogni intervallo $[a, b] \subset I$ e, per ogni $a, b \in I$*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx \tag{23.1}$$

- **additività sui domini***: dati $a, b, c \in I$*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \tag{23.2}$$

- **monotonia***: dati $a, b \in I$*

$$\text{se } a < b \text{ e } g(x) \leqslant f(x) \quad \forall x \in I \quad \text{allora} \quad \int_a^b g(x)\, dx \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \tag{23.3}$$

In particolare

$$(b - a) \inf_{x \in [a,b]} f(x) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant (b - a) \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

- **positività***: se f è positiva e $a < b$, allora*

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0$$

Esempio 23.2 (Integrale funzioni costanti)**.** Coerentemente con il significato geometrico, dato $c \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b c\, dx = c(b - a). \tag{23.4}$$

Supponiamo che $a < b$, posto $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ allora le somme inferiori sono

$$s_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{b-a}{2^n}(b-a) \inf_{x\in[a_{k-1},a_k]} f(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{b-a}{2^n}(b-a)c = (b-a)c \sum_{k=1}^{2^n} 1 = (b-a)c.$$

Se $b < a$ allora, per definizione di integrale orientato

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -c(a-b) = c(b-a)$$

Teorema 23.3 (Teorema della media integrale)**.**
Data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a).$$

Dimostrazione. Poiché f è continua ed è definita su $[a, b]$, per il teorema di Weierstrass, Teo. 15.2, esistono $x_m, x_M \in [a, b]$ tali che

$$f(x_m) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad f(x_M) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

e per il teorema dei valori intermedi, Teo. 15.3,

$$\operatorname{Im} f = [f(x_m), f(x_M)].$$

Per la proprietà di monotonia dell'integrale, (23.3),

$$(b-a)f(x_m) = \int_a^b f(x_m)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b f(x_M)\,dx = (b-a)f(x_M).$$

Allora,

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \in [f(x_m), f(x_M)] = \operatorname{Im} f$$

Allora, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(x_0)$$

da cui la tesi. $\square$

Calculus 1 **2024/25**

Lezione 24: 30/05/25

2 ore

Teorema 24.1 (Teorema fondamentale del calcolo integrale I)**.**
Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita su un intervallo I. Allora

i) dato $a \in I$, la funzione integrale

$$F : I \to \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

di estremo a è una primitiva di $f(x)$, cioé

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I.$$

ii) dati $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = G(x)\,\big|_a^b\,, \tag{24.1}$$

dove $G(x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$.

Dimostrazione. Fissato $x_0 \in I$, dimostriamo che F è derivabile in x_0. Per ogni $x \in I$, $x > x_0$

$$\begin{aligned}\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0} \underset{(*)}{=} \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x - x_0} \\ &\underset{(**)}{=} \frac{f(t_x)(x - x_0)}{x - x_0} = f(x_t)\end{aligned}$$

dove $(*)$ è conseguenza della (23.2) e $(**)$ è conseguenza del teorema della media integrale e $t_x \in I$ tale che

$$x_0 \leqslant t_x \leqslant x.$$

Dalla precedente disuguaglianza, per il teorema del confronto

$$\lim_{x \to x_0^+} t_x = x_0$$

e, per la continuità di f in x_0

$$\lim_{x \to x_0^+} f(t_x) = f(x_0).$$

Ne segue che

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f(x_t) = f(x_0).$$

Con un'analoga dimostrazione, si prova che $\lim_{x \to x_0^-} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ per cui F è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$. Per l'arbitrarietà di x_0 ne segue che F è una primitiva di f.
Dimostriamo (24.1). Sia G una primitiva di f, allora $F(x) = G(x) + c$, allora per definizione di F

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) = G(b) - G(a).$$

□

Teorema 24.2 (Teorema fondamentale del calcolo integrale II)**.**
Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ *definita su un intervallo* I *e integrabile su ogni intervallo chiuso e limato* $J \subseteq I$*, allora*

a) dato $a \in I$*, la funzione integrale*

$$F : I \to \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

di estremo a *è continua*

b) dato $x_0 \in I$*, se* f *è continua in* x_0 *allora* F *è derivabile in* x_0 *e*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

. E' importante ricordare che

l'integrale definito	$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$	è un numero
la funzione integrale	$\displaystyle F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$	è una funzione
l'integrale indefinito	$\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + c$	è una famiglia di funzioni.