16/12

# DECOMPOSIZIONE AI VALORI SINGOLARI

$$A = U \Sigma V^T \qquad A \underbrace{V}_{\text{BASE } V} = \underbrace{U}_{\text{BASE } U} \underbrace{\Sigma}_{\text{MOLTIPLICATORI (VALORI SINGOLARI)}}$$

1) RANGO DI A È $rk(A) = r \leq \min\{m, n\}$

$$\ker(A) = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$$

$$Im(A) = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$$

RISCRITTURA DEL PROBLEMA AI MINIMI QUADRATI TRAMITE VALORI SINGOLARI

$m$ = N° EQUAZIONI
$n$ = N° PARAMETRI

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \| Ax - b \|_2^2 \qquad \| U \Sigma V^T x - b \|_2^2 = \| \overbrace{\Sigma V^T x - U^T b}^{A} \|_2^2 = \| \Sigma V^T x - \overbrace{U^T b}^{z} \|^2$$

$$\| \Sigma y - z \|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \right\|$$

$\boxed{V^T \underline{x} = \underline{y}}$ QUESTA TRASFORMAZIONE È INVERTIBILE $z = U^T b$

$x \longleftrightarrow y \qquad z \longleftrightarrow b$

$$\sum_{i=1}^{n} (\sigma_i y_i - z_i)^2 + \sum_{j=n+1}^{m} (z_j)^2 \quad \text{(SUPPOSTO CHE IL RANGO } = n)$$

POSSO MUOVERE SOLO $y_i$

$y_i = \frac{1}{\sigma_i} \cdot z_i \quad \forall i = 1, \dots, r$ DOVE $r$ È IL RANGO

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \| Ax - b \| = \sum_{j=n+1}^{m} (z_j)^2$$

$$y_i = \frac{z_i}{\sigma_i} \qquad y_i = \frac{1}{\sigma_i} (U^T b)_i$$

$\sigma_i > 0 \quad \forall i = n, \dots, r$

$$= \boxed{\frac{1}{\sigma_i} \langle u_i^T, b \rangle}$$

$$\left( U^T \right) \left( b \right) = \left( z \right) \text{ i-ESIMA RIGA}$$

$$\left( U \middle| u_i \right)$$

$$\begin{pmatrix} V^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\phantom{y}} \\ y \end{pmatrix} \leftarrow y_i$$

$$y_i = \boxed{\frac{1}{\sigma_i} \langle u_i , b \rangle} = \frac{1}{\sigma_i} \; u_i^T b$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \min \left\{ \|Ax - b\|^2 \mid x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \|\Sigma y - z\|^2 = \sum_{i=1}^{r} (\sigma_i y_i - z_i)^2 + \sum_{j=r+1}^{m} z_j^2$$

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_r \end{pmatrix}$$

$$Vy = x \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i} \langle u_i , b \rangle \, v_i \quad (*)$$

VETTORE $y, x \in \mathbb{R}^n$

SUPPONIAMO CHE $r < n$

SE $r = n$ È LA $x$ CHE RISOLVE I MINIMI QUADRATI

SE $r < n$ È LA SOLUZIONE CHE VERIFICA I MINIMI QUADRATI E CHE A NORMA MINIMA TRA TUTTE LE SOLUZIONI DEI MINIMI QUADRATI

PROBLEMA DI MINIMI QUADRATI

$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$ $\quad m > n$ SE IL RANGO DI A È MASSIMO $(n)$ LA SOLUZIONE È UNICA

$$\underbrace{(A^T A)}_{\text{INVERTIBILE}} x = A^T b$$

SE IL RANGO È $< n$ $\exists$ INFINITE SOLUZIONI AI MINIMI QUADRATI LA FORMULA $(*)$ È QUELLA DI NORMA MINIMA

INVERSA GENERALIZZATA DI $Ax = b$ SI INDICA CON $x^+$

$$x = \boxed{\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^T} \, b$$

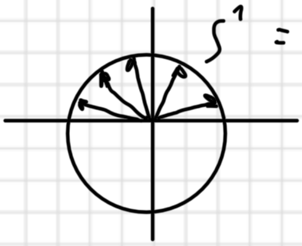
È DETTO $A^+ b$ $\qquad$ $A^+$ È L'INVERSA GENERALIZZATA DI A

$$Ax = \left[ \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \, u_i \, v_i^T \right]^{\in \mathbb{R}} x$$

$$A^+ y = \left[ \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} v_i \, u_i^T \right] y$$

$$A^T y = \left[ \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \, v_i \, u_i^T \right] y$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^m \arrow[l, shift left=2, "A^T"] \arrow[l, shift left=5, "A^+"] \end{tikzcd}$$



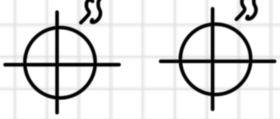
$S^1 = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\|_2^2 = 1 \}$ SFERA DI RAGGIO UNITARIO

$$S^{n-1} := \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|_2^2 = 1 \}$$

$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$A(S^{n-1}) = \{ A\underline{v} \mid \underline{v} \in S^{n-1} \} = \{ A\underline{v} \mid \|\underline{v}\| = 1 \}$$

$S^{n-1}$ $S^{n-1}$



$\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ INIT (RAND)

$$x_1 = \frac{A\underline{x}_k}{\|A x_k\|}$$

$A\underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1$

$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots |\lambda_n| \geq 0$

STRETTAMENTE

$\lim_{k \to \infty} \underline{x}_k = \underline{v}_1$ DOVE $\underline{v}_1$ E' L'AUTOVETTORE DI MASSIMO MODULO