

COGNOME:
NOME:
MATRICOLA:

Calculus 1
12 luglio 2023

1. Sia data la funzione f definita da

$$f(x) = x \frac{\ln(x) + 1}{\ln(x) - 1}.$$

- (a) Calcolare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e determinare il segno e gli asintoti orizzontali e/o verticali di f .
- (b) Calcolare la derivata prima e determinare eventuali massimi e/o minimi assoluti e/o relativi di f .
- (c) Determinare l'immagine di f e stabilire quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 1$.
- (d) Tracciare un grafico qualitativo di f .

2. (a) Data la funzione

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} + x \cos(x+1),$$

si trovino tutte le sue primitive F , se esistono, tali che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x}$ è finito.

- (b) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx.$$

3. Per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$g_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha x)}{x} & \text{se } x < 0 \\ \beta + (\alpha - 1)x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Stabilire per quali α, β , se esistono, $g_{\alpha, \beta}$ è continua su \mathbb{R} .
- (b) Stabilire per quali α, β , se esistono, $g_{\alpha, \beta}$ è derivabile su \mathbb{R} .