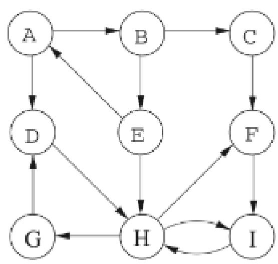
Analisi e progettazione di algoritmi

(III anno Laurea Triennale - a.a. 2023/24)

Prova scritta 4 luglio 2024

Esercizio 1 Si esegua, sul seguente grafo:



l'algoritmo per il calcolo delle componenti fortemente connesse. In particolare, si diano:

1. i tempi di inizio e fine visita ottenuti per ogni nodo in seguito alla visita in profondità (in tutti i casi in cui si deve scegliere un nodo, si consideri l'ordine alfabetico)
2. la sequenza delle componenti fortemente connesse $\texttt{Ord}^{\leftrightarrow}$ ottenuta
3. il grafo quoziente
4. infine, si dica quale è il minimo numero di archi che occorre aggiungere nel grafo di partenza per ottenere un'unica componente connessa

Soluzione (Data in formato non grafico per mia comodità.)

1. Tempi di inizio e fine visita:

   A 1/18 B 2/17 C 3/14 D 8/9 E 15/16 F 4/13 G 7/10 H 6/11 I 5/12
2. Sequenza delle componenti fortemente connesse:

   $$\{A, E, B\}, \{C\}, \{F, H, D, G, I\}$$
3. Nel grafo quoziente ci sono tre archi:
   - $\{A, E, B\} \to \{C\}$
   - $\{A, E, B\} \to \{F, H, D, G, I\}$
   - $\{C\} \to \{F, H, D, G, I\}$
   - Basta aggiungere un qualunque arco da un nodo in $\{F, H, D, G, I\}$ a un nodo in $\{A, E, B\}$, per esempio un arco da F ad A.

Esercizio 2

1. Si consideri un grafo non orientato pesato connesso con nodi A, B, C, D, E. Assumendo di iniziare la visita dal nodo A e di considerare l'ordine alfabetico in tutti i casi in cui si deve scegliere un nodo, si completi il grafo con archi pesati in modo che l'algoritmo di Prim effettui il numero massimo di cambi di distanza.

2. Si consideri un grafo orientato con nodi A, B, C, D. Si completi il grafo con archi in modo che vi siano *esattamente due* ordini topologici.

3. Si dia un algoritmo *ricorsivo* di complessità lineare per calcolare l'ennesimo numero di Fibonacci (suggerimento: ogni chiamata di *fib* deve effettuare *una* chiamata ricorsiva) .

Soluzione Rappresento gli archi come triple/coppie per mia comodità.

1. Per esempio:
   $(A, B, 5)$, $(A, C, 5)$, $(A, D, 5)$, $(A, E, 5)$, $(B, C, 4)$, $(B, D, 4)$, $(B, E, 4)$, $(C, D, 3)$, $(C, E, 3)$, $(D, E, 2)$.

2. Per esempio: (A, B), (B, C). I due ordini topologici sono A, B, C, D e D, A, B, C.

3. `fibs(i)` restituisce due numeri, il numero di Fibonacci i-esimo e il successivo.

```
fibs(i)
  if i==0 return (0,1)
 (fib, next) = fibs(i-1)
 return next, (fib+next)

linearfib(i)
  (fib, next) = fibs(i)
  return fib
```

Esercizio 3 Dimostra che nessuna base è un bugiardo di Miller Rabin per $n = 9$ (trattandosi di aritmetica modulo 9 non dovresti aver bisogno della calcolatrice).

Guida alla correzione

1.2 7,5 punti per sequenza CFC giusta ma sequenze interne sbagliate; 5 punti per sequenza CFC sbagliata

2.3 soluzioni (giuste) che usano l'array come parametro aggiuntivo 6-8 punti