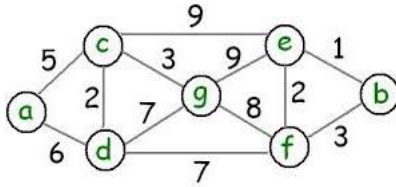


# Analisi e progettazione di algoritmi

(III anno Laurea Triennale - a.a. 2023/24)

Prova scritta 16 gennaio 2025

**Esercizio 1** Si esegua, sul seguente grafo:



l'algoritmo di Prim a partire dal nodo  $a$ . Inizialmente quindi si avrà  $\text{dist}(a)=0$  e  $\text{dist}(u)=\infty$  per tutti gli altri nodi. Per ogni iterazione del ciclo while si dia:

- il nodo che viene estratto con la **getMin**
- i nodi per i quali viene modificata **dist** e come
- l'albero ottenuto alla fine dell'iterazione, evidenziando chiaramente la parte di albero definitiva.

In caso di più scelte possibili si segua l'ordine alfabetico.

Inoltre, si dia il costo del minimo albero ricoprente ottenuto.

**Soluzione** Rappresento l'albero come lista di coppie per mia comodità (scrivendo a mano è più comodo un disegno).

getMin	a	b	c	d	e	f	g	albero
	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	
a	—	$\infty$	5	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	(a,c), (a,d)
c	—	$\infty$	—	2	9	$\infty$	3	(a,c), (c,d), (c,e), (c,g)
d	—	$\infty$	—	—	9	7	3	(a,c), (c,d), (c,e), (c,g), (d,f)
g	—	$\infty$	—	—	9	7	—	(a,c), (c,d), (c,e), (c,g), (d,f)
f	—	3	—	—	2	—	—	(a,c), (c,d), (c,g), (d,f), (f,b), (f,e)
e	—	1	—	—	—	—	—	(a,c), (c,d), (c,g), (d,f), (f,e), (e,b)
b	—	—	—	—	—	—	—	(a,c), (c,d), (c,g), (d,f), (f,e), (e,b)

Il costo del minimo albero ricoprente ottenuto è 20.

**Esercizio 2** Rispondere alle seguenti domande, giustificando le risposte.

Consideriamo un grafo orientato con nodi  $A, B, C, D, E$ , nel quale è presente l'arco  $A \rightarrow B$ .

1. Si dica in quale caso si ha il massimo numero di ordini topologici, e quanti sono, e si dia un caso nel quale si ha un unico ordine topologico.

2. Si aggiungano archi in modo da avere esattamente due componenti fortemente connesse che siano entrambe sorgente e pozzo.
3. Assumiamo ora che il grafo sia pesato. Applicando l'algoritmo di Floyd-Warshall, quante matrici e di che dimensione dovremo calcolare? Nella terza di queste matrici, quale è il significato del peso contenuto nella casella  $(C, E)$ ?

### Soluzione

1. Il massimo numero di ordini topologici si ha quando non ci sono altri archi; in questo caso si hanno 60 ordini topologici possibili. Infatti, le possibili permutazioni dei 5 nodi sono 120, e nella metà di queste  $A$  precede  $B$ . Si ha, invece, un unico ordine topologico per esempio nel caso  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ .
2. Per esempio  $A \rightarrow B \rightarrow A$  e  $C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C$ .
3. Dovremo costruire 6 matrici di dimensione 5 per 5. Il peso contenuto nella casella  $(C, E)$  della terza matrice è il peso minimo di un cammino da  $C$  a  $E$  che può utilizzare come nodi interni solo  $A$  e  $B$ .

**Esercizio 3** Spiegare il motivo per cui è possibile verificare l'uguaglianza matriciale  $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ , con  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$   $n \times n$ , con un algoritmo randomizzato di complessità  $O(n^2)$ . In particolare si risponda alle seguenti domande:

1. Perché anche la matrice  $\mathbf{C}$  deve essere  $n \times n$ ?
2. Quale è la proprietà che consente di ridurre la complessità da  $O(n^3)$  a  $O(n^2)$ ?
3. Quante volte si deve lanciare l'algoritmo randomizzato visto a lezione per verificare l'uguaglianza con probabilità superiore al 99.99%?

### Guida alla correzione

**Es.1** La seconda colonna è relativa al costo finale dell'albero. Nella prima colonna: 0-4 algoritmo sbagliato; -2,5 se mancano alberi parziali; -1,5 se manca distinzione tra albero definitivo e no.

**Es. 2.1** 5 punti per risposta un solo ordine topologico. Per l'altra domanda solo una persona ha capito che il numero massimo era 60 e non 24, ho dato max 9 a tutti gli altri e un bonus di +2 punti a questa persona.

**Es. 2.2** 3 punti per almeno due componenti fortemente connesse.

**Es. 2.3** 3 punti per solo la prima risposta (quante matrici e di che dimensione).