15/01

SIMULAZIONE ESAME

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* ESERCIZI OBBLIGATORI PER SUPERARE L'ESAME

a)* $A - \lambda I$, $\det(A - \lambda I)$

$$\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \underbrace{1-\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{\text{SI CHIAMA METODO DI LAPLACE}} = \pm\ 0 \cdot \det(\ ) \to 0$$

$$\pm\ (1-\lambda) \det(\ )$$

$$\pm\ 0 \cdot \det(\ ) \to 0$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow +(1-\lambda) \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] \Rightarrow$$

KRAMER

$$\Rightarrow (1-\lambda)\left[1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1\right] \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

b)

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda(\lambda - 2) \Rightarrow \lambda_2 = 0 \qquad \lambda_3 = 2$$

ORDINO PER MASSIMO MODULO OTTENENDO: $\lambda_3 = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$

IN QUESTO CASO HANNO TUTTI MOLTEPLICITA' 1.

ORDINARE PER MASSIMO MODULO NON E' OBBLIGATORIO MA CONSIGLIABILE PER IL PUNTO C c*) RANGO DI A: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3 - R1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2 \to R2 + R1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

RANGO 2 OPPURE PROCESSO TRAMITE SOTTOMATRICI

CASO $\lambda = 0$, STESSO RANGO DI A

CASO $A - \lambda I$ CON $\lambda = 1$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2 \to R2 + R1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R3 + R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CASO $\lambda = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1 \to R1 + R3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

d*) SI PUÒ USARE I RISULTATI RICAVATI DA GAUSS NEL PUNTO C PER TROVARE I VETTORI PER LA MATRICE V NEL PUNTO F OPPURE FARE GAUSS DIRETTAMENTE IN QUESTO PUNTO:

$$\lambda_2 = 0 \rightarrow Ax = 0 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

QUANDO SI HA $\boxed{0 = 0}$ ABBIAMO UNA VARIABILE LIBERA

QUINDI VALE 1

COME RISPOSTA POSSO METTERE $\left\{ \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

OPPURE SCRIVERE: $\left\{ x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = X \Lambda X^{-1} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

F) $p \in \mathbb{R}$

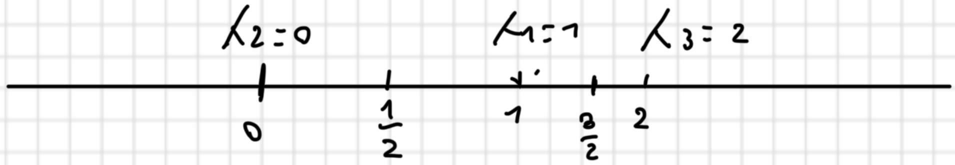
$$B = (A - pI)^{-1}$$

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i - p}$$

$\mu_1 \quad \lambda_1$

$\mu_2 \quad \lambda_2$

$\mu_3 \quad \lambda_3$



• SE $p < \frac{1}{2}$ IL METODO DELLE POTENZE INVERSE $p \neq 0$ CONVERGE SE

$\lambda_2 = 0$

• SE $\frac{1}{2} < p < \frac{3}{2}$ $p \neq 1$ CONVERGE A $\lambda_1 = 1$ $\quad p \neq 1$

• SE $p > \frac{3}{2}$ CONVERGE A $\lambda_3 = 2$ $\quad p \neq 2$

$$A \longrightarrow B = (A - pI) \qquad |\mu_i| = \max\{|\mu_1|, |\mu_2|, |\mu_3|\}$$

$$|\mu_1| = \max\left\{ \frac{1}{|\lambda_1 - p|}, \frac{1}{|\lambda_2 - p|}, \frac{1}{|\lambda_3 - p|} \right\}$$

$\boxed{\text{SVD}}$

$\boxed{12/02/24}$

$$A = U \Sigma V^T \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) VERIFICARE CHE SIA UNA SVD

$A = U \Sigma V^T$ POSSO FARE LE MOLTIPLICAZIONI

A DEVE AVERE LE STESSE DIMENSIONI DI Σ E U DEVE ESSERE ORTOGONALE, V DEVE ESSERE ORTOGONALE QUINDI U, V SONO QUADRATE

Σ DEVE ESSERE DIAGONALE E GLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE DEVONO ESSERE NON NULLI E DECRESCENTI.

$$\underset{3\times 2}{A} = \underset{3\times 3}{U}\ \underset{3\times 2}{\Sigma}\ \underset{2\times 2}{V^T}$$

$$U = \left(\underline{u}_1 \,\middle|\, \underline{u}_2 \,\middle|\, \underline{u}_3 \right) \qquad \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle = -\frac{3}{5}\cdot 0 + 0\cdot 1 + \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot 0 =$$

$= 0$ | $\langle \underset{\sim}{u_3}, \underset{\sim}{u_2} \rangle = 0$ | $\langle u_1, u_3 \rangle = -\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + 0 \cdot 0 + \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = 0$

IN POCHE PAROLE MOLTIPLICO LE COLONNE OVVERO u_1 E u_2 SONO LE PRIME DUE COLONNE E DEVONO FARMI 0, SE FOSSE $\neq 0$ NON E' UNA SVD QUINDI DEVE ESSERE:

$$\boxed{\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_3, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = 0}$$

$$\boxed{\|u_1\|_2 = \|u_2\|_2 = \|u_3\|_2 = 1}$$

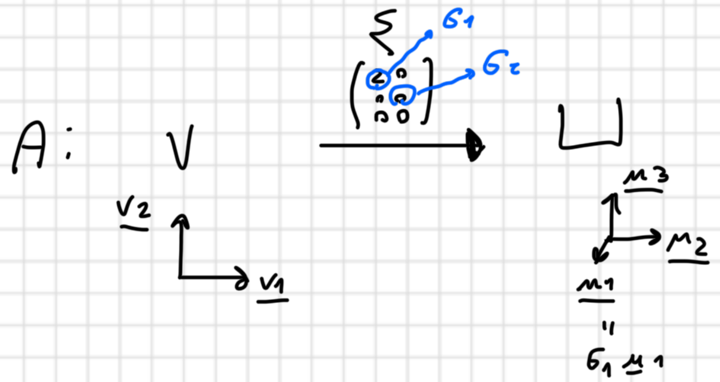
DEVO FARE ENTRAMBE LE CONDIZIONI ANCHE PER V

L'ULTIMA VERIFICA LO SI FA AD "OCCHIO" PERCHE' PER DEFINIZIONE GLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE DEVONO ESSERE NON NEGATIVI E DECRESCENTI E GLI ALTRI ELEMENTI DEVONO ESSERE NULLI

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sigma_1 = 2 \geq \sigma_2 = 0 \geq 0}$$

TUTTE LE PROPRIETA' DI A SONO DI Σ, QUINDI IN QUESTO CASO RANGO 1



$$A\,\underline{v_1} = \sigma_1\,\underline{u_1} \qquad\qquad A\,\underline{v_1} = \boxed{2}\,\underline{u_1}$$

$$A\,\underline{v_2} = \sigma_2\,\underline{u_2} \qquad\qquad A\,\underline{v_2} = \boxed{0}\,\underline{u_2} = 0$$

$\underline{u_3}$ IN QUESTO CASO $\underline{u_3}$ NON ESISTE PERCHÉ È UNA MATRICE 2×3

$$\mathrm{Im}(A) = \langle u_1 \rangle \qquad u_1,\ 2u_1 \in \mathrm{Im}(A)$$

$$\underline{u_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 0 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \qquad 2\,\underline{u_1} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 0 \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}(A) = \langle v_2 \rangle$$