ALAN

DATI

I DATI RICHIEDONO, AL FINE DI ESSERE IMMAGAZZINATI, TEMPO E MEMORIA. NELLA MISURAZIONE E ELABORAZIONE DI ESSI VI E' UN ALTO RISCHIO DI ERRORE, OVVERO UN PERICOLO CHE ESSI VENGANO DISTORTI DURANTE UNO DEI PASSAGGI CHE IMPLICA LA LORO ELABORAZIONE.

TEMPO

IL TEMPO DI ELABORAZIONE DEI DATI DIPENDE STRETTAMENTE DALLA LORO QUANTITÀ. IN PARTICOLARE, SE SI EFFETTUANO OPERAZIONI SUI DATI, SI VA AD ANALIZZARE QUANTE OPERAZIONI MOLTIPLICATIVE SONO ESEGUITE AL FINE DI ARRIVARE AL RISULTATO.

IN UN SISTEMA LINEARE, AD ESEMPIO, IL TEMPO DIPENDERÀ DAL NUMERO DI INCOGNITE m, E IL TEMPO PER ARRIVARE AD UN RISULTATO DIPENDERÀ DAL METODO CHE VOGLIAMO USARE PER RISOLVERLO. QUINDI:

COMPLESSITÀ NEL CALCOLO: m INPUT $\longrightarrow C(m) = \#$ OPERAZIONI

ERRORE

VI SONO VARIE FASI NEL PASSAGGIO DA DATI A RISULTATI CHE POSSONO DISTORCERE I DATI DI PARTENZA E DI CONSEGUENZA ANCHE IL RISULTATO.

PER EVITARE QUESTI ERRORI DEVO INIZIALMENTE STUDIARE LE CAUSE PER CUI ESSI AVVENGONO E DI CONSEGUENZA IL PROCESSO ATTO A PASSARE DA DATI A RISULTATI.

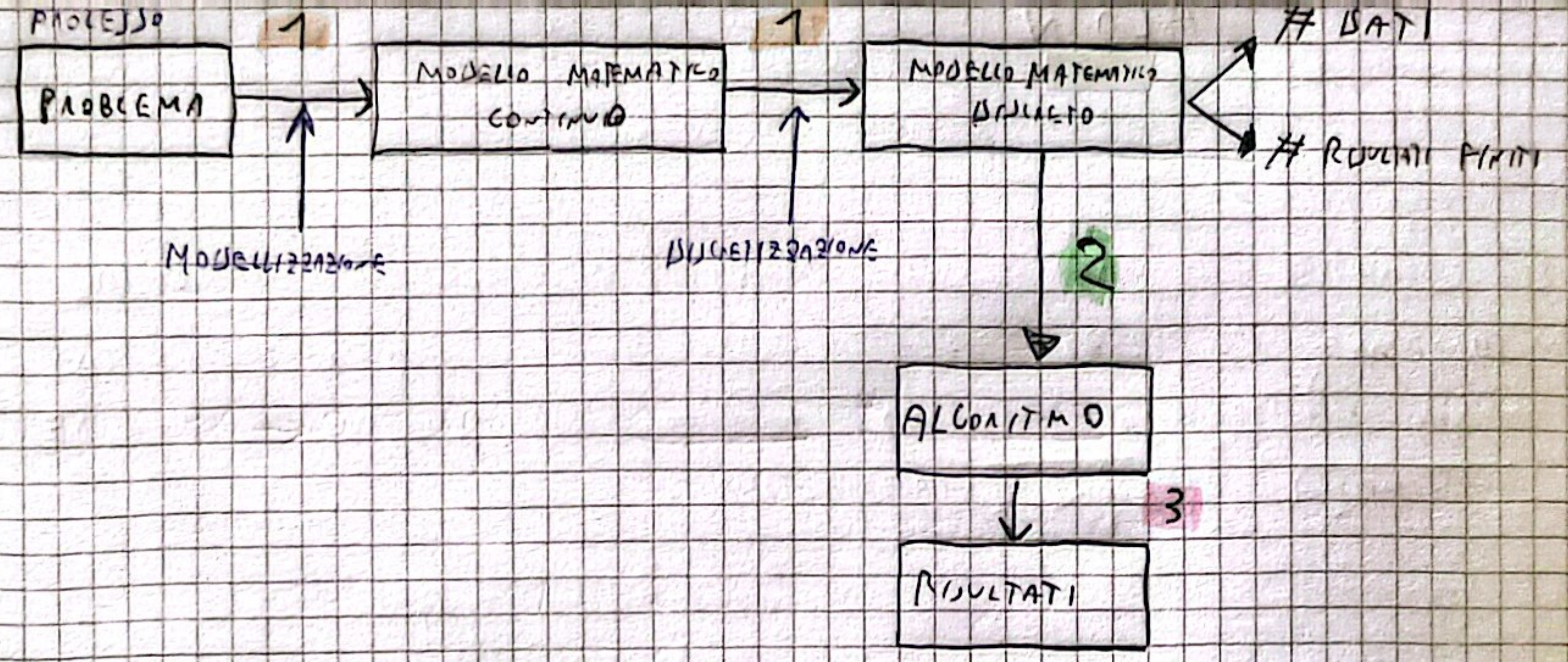
SE HO UN PROBLEMA REALE LO DEVO NECESSARIAMENTE ANALIZZARE ATTRAVERSO UN MODELLO MATEMATICO CONTINUO, IN UN PROCESSO DETTO MODELLIZZAZIONE.

QUESTO TIPO DI MODELLO LAVORA CON DATI E RISULTATI NON NECESSARIAMENTE FINITI.

SICCOME UN CALCOLATORE NON PUÒ LAVORARE CON DATI NON FINITI, ALLORA DEVO PASSARE AD UN MODELLO MATEMATICO DISCRETO, CHE USA SOLO DATI E RISULTATI FINITI; QUESTO PROCESSO È DETTO DISCRETIZZAZIONE.

DA UN MODELLO MATEMATICO DISCRETO SI PUÒ PROCEDERE ALLA REALIZZAZIONE DI UN ALGORITMO. ESSO ELABORA I DATI PER ARRIVARE AD UNO O PIÙ RISULTATI.

MENTRE I MODELLI MATEMATICI ERANO GENERALMENTE STILATI DA CHI ANALIZZA IL PROBLEMA, L'ALGORITMO VIENE IMPLEMENTATO DA UN INFORMATICO.



IN QUESTO PROCESSO, CHE IMPLICA NEI SUOI VARI PASSAGGI APPROSSIMAZIONI, È MOLTO PROBABILE CHE SI VADANO A CREARE DEGLI ERRORI.
ESSI POSSONO ESSERE CLASSIFICATI IN 3 TIPI, IN BASE ALLA LORO PROVENIENZA:

1) ERRORE ANALITICO: ERRORE DOVUTO ALLE APPROSSIMAZIONI NEI PASSAGGI DI MODELLIZZAZIONE E DISCRETIZZAZIONE

2) ERRORE INERENTE: ERRORE DOVUTO AD UN'ERRATA MISURAZIONE DEL DATO

3) ERRORE ALGORITMO: ERRORE NELL'ALGORITMO

SUPPONIAMO DI AVERE $x \in \mathbb{R}$ E DI AVERE UN ERRORE:

$x \in \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{x}$ (ERRATO)

ERRORE ASSOLUTO: $\delta = \tilde{x} - x$ OPPURE $\delta = |\tilde{x} - x|$

ERRORE RELATIVO: $\varepsilon = \dfrac{\tilde{x} - x}{x}$ E QUINDI $\tilde{x} = x(1+\varepsilon)$

DEFINIZIONE:

SIANO:

- d_i = ERRORE RELATIVO DI UN INPUT SU DATO x_i
- r_j = ERRORE RELATIVO DI UN OUTPUT SU RISULTATO y_j

CONDIZIONAMENTO $= \dfrac{r_j}{d_i}$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} x + y = 2 \rightarrow y = 1 \\ 1001x + 1000y = 2001 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{1}{100}\right)\tilde{x} + \tilde{y} = 2 \\ 1001\tilde{x} + 1000\tilde{y} = 2001 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = -1/9 \rightarrow r_x = \frac{-1/9 - 1}{1} = -\frac{10}{9} \\ \tilde{y} = 1901/900 \rightarrow r_y = \frac{1901/900 - 1}{1} = \frac{1001}{900} \end{cases}$$ ERRORE RELATIVO

$$|\text{cond}\, x| = \left|\frac{-10/9}{10^{-2}}\right| > 100$$ PROBLEMA MAL CONDIZIONATO

ESEMPIO 2:

$$x \mapsto f(x) \qquad d = \frac{\tilde{x} - x}{x} \qquad r = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$$

$$\tilde{x} \mapsto f(\tilde{x})$$

$$\text{cond} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \cdot \frac{x}{\tilde{x} - x} \Rightarrow \lim_{\tilde{x} \to x} \text{cond} = \boxed{\frac{x f'(x)}{f(x)}}$$

$f'(x)$

COEFFICIENTE DI AMPLIFICAZIONE

$$\frac{\text{ERRORE OUTPUT}}{\text{ERRORE INPUT}}$$

ESERCIZIO:

CALCOLARE cf PER $f(x) = x^2 - 7x \rightarrow f'(x) = 2x - 7 \rightarrow cf = \frac{x(2x-7)}{x^2 - 7x} =$

$= \frac{2x - 7}{x - 7} \Rightarrow$ MOLTO GRANDE (FORSE) SE $2x - 7 \rightarrow \infty$ OPPURE $x - 7 \rightarrow 0$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} cf} = \lim \frac{2x - 7}{x - 7} = \frac{\infty}{\infty} \text{ F.I.} = \boxed{\frac{2}{1}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 7} cf} = \lim \frac{2x - 7}{x - 7} = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

ESEMPIO 3

$$\varphi(x) = 1-\cos x \rightarrow \varphi'(x) = \sin x \rightarrow c\varphi = \frac{x\sin x}{1-\cos x}$$

QUANDO IL DENOMINATORE SI ANNULLA? QUANDO ABBIAMO $1-1=0$

QUINDI: $x \to 0 = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} =$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 2\cdot 1 = 2$$

ESEMPIO 4

$$\varphi(x) = e^x \rightarrow \varphi'(x) = e^x \rightarrow c\varphi = \frac{x\cdot e^x}{e^x} = x$$

ESEMPIO 5

$$\varphi(x) = \ln x \rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow c\varphi = \frac{x\cdot\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{\ln x}$$

$$\lim_{x\to 1^+} c\varphi = I\infty$$

ESEMPIO 6

$$\varphi(x) = \sqrt{x} \rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow c\varphi = \frac{x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

ESEMPIO 7

$$\varphi(x) = \sin x \rightarrow \varphi'(x) = \cos x \rightarrow c\varphi = \frac{x\cos x}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} c\varphi = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos x}{\sin x} = 1$$ (BEN CONDIZIONATO)

$$\lim_{x\to \pi} \frac{x\cdot\cos x}{\sin x} = \infty$$ (MAL CONDIZIONATO)

ESEMPIO 3

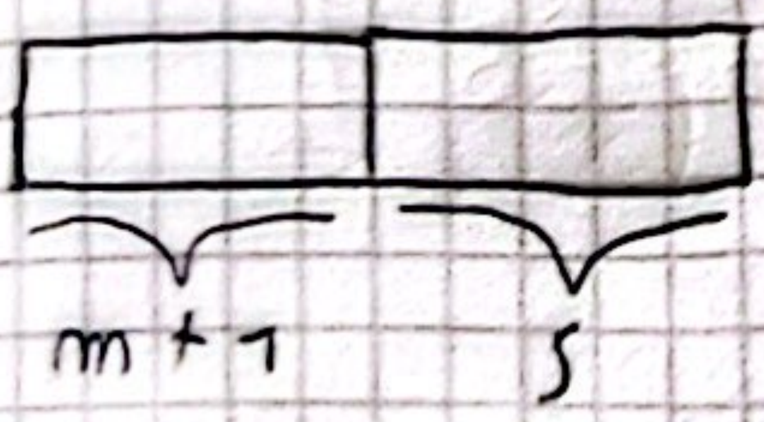
$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x \rightarrow C_f = \frac{x(-\sin x)}{\cos x} = -\frac{x \sin x}{\cos x}$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x \cdot \sin x}{\cos x} = \infty$ (MAL CONDIZIONATO)

ERRORI ALGORITMICI

RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI:

- VIRGOLA FISSA (FIXED POINT)



M = PARTE INTERA

S = PARTE DECIMALE

$\rightarrow X = \sum_{i=-s} d_i \cdot B^i$

$d_i \in \{0, \dots, B-1\}$

$X \geq B^{m+1} \rightarrow$ OVERFLOW

$X < B^{-s-1} \rightarrow$ UNDERFLOW

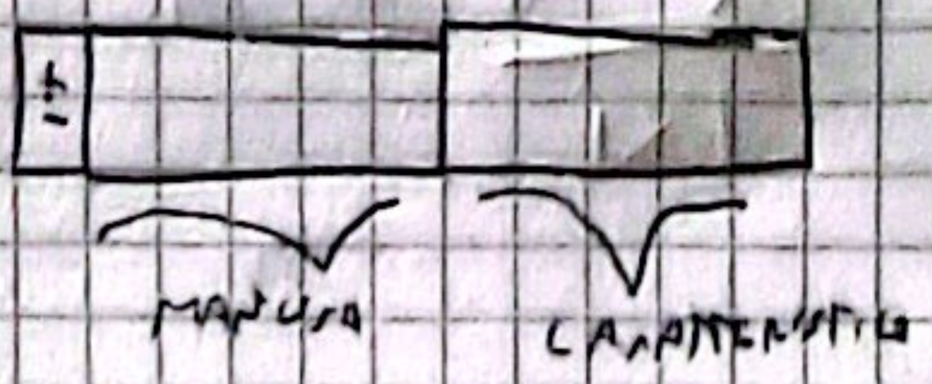
$x = 45{,}61 \ (B=10) = 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2}$

$x = 101{,}011 \ (B=2) = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$

$x = 5C{,}2F \ (B=16) = 5 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 + 2 \cdot 16^{-1} + 15 \cdot 16^{-2}$

- VIRGOLA MOBILE (FLOATING POINT)

$B=10, \quad x = 45{,}61 = \underbrace{0{,}4561}_{\text{MANTISSA}} \cdot \underbrace{10^2}_{\text{CARATTERISTICA}}$



$B=2, \quad x = 101{,}011 = 0{,}101011 \cdot 10^3$

$B=16, \quad x = 5C{,}2F = \underbrace{0{,}5C2F}_{\text{MANTISSA}} \cdot 16^2$

$x = \pm B^p \cdot \sum_{i=1}^{t} d_i \cdot B^{-i}$

NUMERI DI MACCHINA $= \mathbb{F}(B, t, m, M)$ $\quad -m \leq p \leq M$

IEEE singola $\rightarrow \mathcal{F}(2, 24, 128, 127)$

doppia $\rightarrow \mathcal{F}(2, 52, 1024, 1023)$

$x \in \mathbb{R} \longmapsto \tilde{x} \in \mathcal{F}(B, t, m, M)$

TRONCAMENTO $\rightarrow \tilde{x} = 0{,}12345$

ARROTONDAMENTO $\rightarrow \tilde{x} = 0{,}12346$

$x = 0{,}12345 \,|\, 6 \cdot 10^0$

TRONCAMENTO: $|\varepsilon| = \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right| \leq B^{-t} \Rightarrow x = \pm B^p \sum_{i=1}^{+\infty} d_i B^{-i} \Rightarrow \tilde{x} = \pm B \sum_{i=1}^{pt}$

ARROTONDAMENTO:

$d_{t+1} < \frac{1}{2} B \Rightarrow d_{t+1} \geq \frac{1}{2} B \Rightarrow \tilde{x} = B^p \left(\sum_{i=1}^{t} d_i B^{-i} + B^{-t} \right)$

ESEMPIO: $B = 10,\ t = 2,\ x = 0{,}995 \cdot 10^0 \rightarrow \tilde{x} = 0{,}99 + 0{,}01 = 1{,}00 = 0{,}10 \cdot 10^1$

PRECISIONE DI MACCHINA: u (EPS) $\Rightarrow u = 22 \cdot 10^{-6}$

CI SERVE PER AFFRONTARE UN PROBLEMA DI MEMORIZZAZIONE DI UN NUMERO DI MACCHINA.

$x \in \mathbb{R} \longmapsto \tilde{x} \in \mathcal{F}(B, t, m, M)$; $\tilde{x} = \pm B^p \sum_{i=1}^{t} d_i B^{-i}$, $d_i \in \{0 \dots B^{-1}\}$

$$|\varepsilon| = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|} \leq u = \frac{1}{2} B^{-t+1}$$

ESEMPIO:

$\mathcal{F}(2, 52, 1024, 1023) \Rightarrow u = 2^{-52} \simeq 2.2 \cdot 10^{-16}$

ESEMPIO:

$x = 1 + \hat{\varepsilon}$, $B = 10$, $\hat{\varepsilon} = 10^{-5}$

VIRGOLA MOBILE QUINDI $x = 1{,}00001 \Rightarrow 0{,}100001 \,|\, 10^1$

SE METTESSI t TRA 0 E 1 OTTERREI UN FUORI SCALA

QUINDI $x = 1 \rightarrow |\varepsilon| = \frac{|1-1-\varepsilon|}{1+\hat{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{1+\hat{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{1+\hat{\varepsilon}} < \mu \Rightarrow$

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$

$$\hat{\varepsilon} = \mu = 0{,}5 \cdot 10^{-4} = 0.00005$$

$x = 1 + \hat{\varepsilon} = 1{,}00005 \Rightarrow$ SCRIVO IN VIRGOLA MOBILE

$0{,}1000|05 \cdot 10^{1} \longrightarrow \tilde{x} = 0{,}10001 \cdot 10^{1} > 1$

$t = 5$

ARITMETICA DI MACCHINA

$a, b \longmapsto a + b$

IL COMPUTER FA:

$\tilde{a}, \tilde{b} \longmapsto (\tilde{a} + \tilde{b}) \cdot (1 + \varepsilon), \quad |\varepsilon| \leq \mu$

$\tilde{a} = a(1 + \varepsilon_a) \qquad \tilde{b} = b(1 + \varepsilon_b)$

CHE ERRORE DEVO ASPETTARMI? PER CAPIRLO CALCOLIAMO L'ERRORE TOTALE RELATIVO NEL MOMENTO CHE SOMMO 2 NUMERI:

$$\varepsilon_{a+b} = \frac{(\tilde{a} + \tilde{b}) \cdot (1 + \varepsilon) - (a + b)}{a + b} =$$

$$= \varepsilon_a \frac{a}{a+b} \pm \varepsilon_b \frac{b}{a+b} \pm \varepsilon$$

ESEMPIO 1

$B = 10, \quad t = 6$ (6 CIFRE A DISPOSIZIONE), $a = 0{,}123456, \quad b = -0{,}123454$

$a + b = 2 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{a}{a+b} \simeq \frac{10^{-1}}{2 \cdot 10^{-6}} \simeq 50000$

$0{,}200000 \cdot 10^{-5}$

CANCELLAZIONE

$\Delta f = (f_1 - f_0) \cdot 0,1$ $\qquad$ $f_0, f_1 \simeq 100\,H$

$f^1 \cdot 0,1 - f_0 \cdot 0,1$ $\qquad$ $M = 10^{-7}$

LE CANCELLAZIONI VANNO FATTE PRIMA DEI VARI CALCOLI PER EVITARE ERRORI IN FUTURO