TEORIA NP-COMPLETEZZA

SIGNIFICA "NON DETERMINISTIC POLYNOMIAL TIME" PERCHÉ LA CLASSE NP FU ORIGINARIAMENTE STUDIATA NEL CONTESTO DEGLI ALGORITMI NON DETERMINISTICI.

{ALGORITMO DETERMINISTICO = STESSO INPUT → STESSO OUTPUT} I PROBLEMI VENGONO DIVISI IN TERMINI DI COMPLESSITÀ COMPUTAZIONALE IN DUE CLASSI PRINCIPALI:

- QUELLI RISOLVIBILI CON UN ALGORITMO POLINOMIALE $(T(n) = O(n^k))$ SONO CONSIDERABILI TRATTABILI
- QUELLI PER CUI NON ESISTE UN ALGORITMO POLINOMIALE $(T(n) = \Omega(k^n))$ SONO CONSIDERATI NON TRATTABILI (DIFFICILI)

SI PUÒ DIRE QUINDI:

- SOLITAMENTE LA COMPLESSITÀ $O(n^k)$ HANNO k PICCOLI, E POSSONO ESSERE ULTERIORMENTE MIGLIORATI.
- PER DIVERSI MODELLI DI CALCOLO, UN PROBLEMA CHE PUÒ ESSERE RISOLTO IN TEMPO POLINOMIALE IN UN MODELLO, PUÒ ESSERLO ANCHE IN UN'ALTRO
- SE L'OUTPUT DI UN ALGORITMO POLINOMIALE È UTILIZZATO COME INPUT PER UN'ALTRO ALGORITMO COMPOSTO, $\boxed{\text{È POLINOMIALE.}}$

CI SONO ANCHE PROBLEMI DEI QUALI NON SI CONOSCE LA COMPLESSITÀ (PROBLEMI APERTI), NON SI È ANCORA RIUSCITI A DIMOSTRARE CHE $\boxed{T(n) = O(n^k)}$ OPPURE $\boxed{T(n) = \Omega(k^n)}$.

LA CLASSE P, INFORMALMENTE È QUELLA DEI PROBLEMI RISOLVIBILI IN TEMPO POLINOMIALE, MENTRE LA CLASSE NP È QUELLA DEI PROBLEMI VERIFICABILI IN TEMPO POLINOMIALE.

VERIFICARE UN PROBLEMA SIGNIFICA CHE DATA UNA SUA ISTANZA E UNA POSSIBILE SOLUZIONE, SO CONTROLLARE SE QUESTO RISOLVE EFFETTIVAMENTE L'ISTANZA DEL PROBLEMA. *

$P \subseteq NP$: SE SO RISOLVERE UN PROBLEMA IN TEMPO POLINOMIALE, SO ANCHE VERIFICARLO IN TEMPO POLINOMIALE; QUELLO CHE NON SI SA È SE $\boxed{P = NP}$ OPPURE $\boxed{P \subset NP}$, OSSIA SE CI SONO PROBLEMI VERIFICABILI IN TEMPO POLINOMIALE CHE NON SIANO RISOLVIBILI IN TEMPO POLINOMIALE. {SE DIMOSTRIAMO $P \subset NP$ ALLORA $P = NP$ È FALSA, O VICEVERSA}

PROBLEMI ASTRATTI E CONCRETI

NELLA MAGGIOR PARTE DEI CASI È MEGLIO ARRIVARE AI PROBLEMI DI DECISIONE OVVERO:

$$P: \underbrace{\boxed{I}}_{\text{ISTANZE}} \longrightarrow \{\underset{\text{TRUE}}{T}, \underset{\text{FALSE}}{F}\}$$

CON PROBLEMI DI DECISIONE SI INTENDE CHE, DATO UN PROBLEMA LA RISPOSTA È "SI" O "NO".

ESEMPIO:

- PROBLEMI DI RICERCA: SONO QUELLI IN CUI SI CERCA UNA SOLUZIONE
- PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE: SONO QUELLI IN CUI CI SONO DELLE SOLUZIONI E SE NE CERCA UNA CHE SIA OTTIMA

PROBLEMA DI DECISIONE (ASTRATTO): È UN PROBLEMA ASTRATTO IN CUI OGNI INPUT HA COME SOLUZIONE VERO O FALSO: $P: I \rightarrow \{T, F\}$

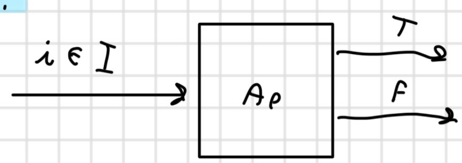
PROBLEMA ASTRATTO: È UNA RELAZIONE $\boxed{P \subseteq I \times S}$ DOVE I È INSIEME DI INPUT E S INSIEME DELLE POSSIBILI SOLUZIONI.

PROBLEMA CONCRETO: UN PROBLEMA CONCRETO P È UN PROBLEMA IL CUI INSIEME DI ISTANZE È L'INSIEME DELLE STRINGHE BINARIE, OSSIA $P: \{0,1\}^* \longrightarrow \{T, F\}$

UN PROBLEMA ASTRATTO P PUO' ESSERE RAPPRESENTATO IN MODO CONCRETO TRAMITE UNA CODIFICA OSSIA UNA FUNZIONE INIETTIVA : $\boxed{c : I \longrightarrow \{0,1\}^*}$

TEMPO POLINOMIALE: PER TEMPO POLINOMIALE SI INTENDE CHE IL TEMPO RICHIESTO PER RISOLVERE UN PROBLEMA CRESCE IN MODO POLINOMIALE, OVVERO IL TEMPO DI ESECUZIONE AUMENTA IN TEMPO RAGIONEVOLE E GESTIBILE ALL'AUMENTARE DELLA COMPLESSITA'

ESEMPIO:



OVVERO DATO UN PROBLEMA $P: I \to \{T, F\}$ DICIAMO CHE UN ALGORITMO A RISOLVE P SE PER OGNI INPUT $i \in I$, $A(i) = P(i)$

PROBLEMI NP-C: SONO PROBLEMI CHE SAPPIAMO RISOLVERE SOLO IN TEMPO ESPONENZIALE MA NON SI ESCLUDE L'ESISTENZA DI UN ALGORITMO DI TEMPO POLINOMIALE CHE LO RISOLVE

PROPRIETA': SE SI SCOPRE UN ALGORITMO POLINOMIALE CHE RISOLVE UN PROBLEMA, ALLORA TALE ALGORITMO LI RISOLVE TUTTI QUELLI NP-C

*
RISOLVERE SIGNIFICA CHE DATA UNA SUA ISTANZA NE FORNISCE UNA SOLUZIONE.

UN PROBLEMA P E' NELLA CLASSE $TIME(f(n))$ SE E SOLO SE ESISTE UN ALGORITMO A RISOLVE P SE, PER OGNI INPUT $i \in I$, $A(i) = P(i)$. ANALOGAMENTE, P E' NELLA CLASSE $SPACE(f(n))$ SE E SOLO SE ESISTE UN ALGORITMO DI COMPLESSITA' SPAZIALE $O(f(n))$ CHE LO RISOLVE.