27/09

PRECISIONE DI MACCHINA

CI SERVE PER AFFRONTARE UN PROBLEMA DI MEMORIZZAZIONE DI UN NUMERO DI MACCHINA

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \tilde{x} \in \mathcal{F}(B, t, m, M), \quad \tilde{x} = \pm B^{p} \sum_{i=1}^{t} d_i B^{-i}, \ d_i \in \{0..B^{-1}\}$$

$$|\varepsilon| = \underbrace{\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}} \leq u = \frac{1}{2} B^{-t+1}$$

ESEMPIO:

$$\mathcal{F}(2, 52, 1024, 1023) \Rightarrow u = 2^{-52} \simeq 2.2 \cdot 10^{-16}$$

ESEMPIO:

$$x = 1 + \hat{\varepsilon}, \quad B = 10, \quad \hat{\varepsilon} = 10^{-5}$$

VIRGOLA MOBILE QUINDI $x = 1.00001 \Rightarrow 0,10000|1 \cdot 10^{1}$ (t)

SE METTESSI t NEL 1 OTTERREI 1 FUORI SCALA

QUINDI $\tilde{x} = 1 \rightarrow |\varepsilon| = \frac{|1 - 1 - \hat{\varepsilon}|}{1 + \hat{\varepsilon}} = \frac{\hat{\varepsilon}}{1 + \hat{\varepsilon}} = \frac{\hat{\varepsilon}}{1 + \hat{\varepsilon}} < u \Rightarrow$

$$u = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$

$$\xi = \mu = 0.5 \cdot 10^{-4} = 0.00005$$

$x = 1 + \hat{\xi} = 1{,}00005 \Rightarrow$ SCRIVO IN VIRGOLA MOBILE

$$0{,}10000|05 \cdot 10^{1} \rightarrow \tilde{x} = 0{,}10001 \cdot 10^{1} > 1$$

$$t = 5$$

ARITMETICA DI MACCHINA

$$a, b \longmapsto a + b$$

IL COMPUTER INVECE FA:

$$\tilde{a}, \tilde{b} \longmapsto (\tilde{a} + \tilde{b}) \cdot (1 + \xi), \quad |\xi| \leq \mu$$

$$\tilde{a} = a(1 + \xi_a) \qquad \tilde{b} = b(1 + \xi_b)$$

CHE ERRORE DEVO ASPETTARMI? PER CAPIRLO CALCOLIAMO L'ERRORE TOTALE RELATIVO NEL MOMENTO CHE SOMMO 2 NUMERI:

$$\xi_{a+b} = \frac{(\tilde{a} + \tilde{b}) \cdot (1 + \xi) - (a + b)}{a + b} =$$

$$= \frac{(a(1 + \xi_a) + b(1 + \xi_b) \cdot (1 + \xi) - a - b}{a + b} =$$

$$= \frac{(a + a\xi_a + b + b\xi_b)(1 + \xi) - a - b}{a + b} =$$

$$= \frac{a + a\varepsilon_a + b + b\varepsilon_b + a\varepsilon + a\varepsilon_a\varepsilon + b\varepsilon_b\varepsilon - a - b}{a+b} =$$

ORDINE DI INFINITESIMO

$$\doteq \varepsilon_a \underbrace{\frac{a}{a+b}} + \varepsilon_b \underbrace{\frac{b}{a+b}} + \varepsilon$$

COEFFICIENTI DI AMPLIFICAZIONE

$$\boxed{\varepsilon_{a+b} \doteq \varepsilon_a \frac{a}{a+b} + \varepsilon_b \frac{b}{a+b} + \varepsilon}$$

ESEMPIO 1

$a, b > 0 \Rightarrow \frac{a}{a+b} < 1 \,, \frac{b}{a+b} < 1$

$\downarrow$

(oppure $a, b < 0$)

ESEMPIO 2

$B = 10$, $f = 6$ (6 cifre a disposizione), $a = 0{,}123456$,

$b = -0{,}123454$

$$a + b = 2 \cdot 10^{-6} \qquad \frac{a}{a+b} \approx \frac{10^{-1}}{2 \cdot 10^{-6}} \approx 50000$$

$$\downarrow$$

$$0.200000 \cdot 10^{-5}$$

CANCELLAZIONE:

$$\Delta f = (f_1 - f_0) \cdot 0.1 \qquad f_0, f_1 \approx 100 \text{ Hz}$$

$$f_1 \cdot 0.1 - f_0 \cdot 0.1 \qquad \mu \approx 10^{-7}$$

LE CANCELLAZIONI VANNO FATTE PRIMA DEI VARI CALCOLI PER EVITARE ERRORI IN FONDO

$$\frac{a}{a+b} \approx \frac{100 \text{ H}}{1 \text{ SEC}}$$

ERRORE DI LOCALIZZAZIONE $\approx$ 500 m

$$a, b \longmapsto a \cdot b \qquad \tilde a = a(1+\varepsilon_a). \ \tilde b = b(1+\varepsilon_a) \rightarrow \tilde a \tilde b (1+\varepsilon)$$

$$\varepsilon_{ab} = \frac{\tilde a \cdot \tilde b (1+\varepsilon) - ab}{ab} = \frac{a(1+\varepsilon_a)\, b(1+\varepsilon_b)(1+\varepsilon) - ab}{ab}$$

$$= \frac{ab \cdot [(1+\varepsilon_a)\cdot(1+\varepsilon_a)\cdot(1+\varepsilon) - 1]}{ab} =$$

$$= (1+\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_a\varepsilon_b)(1+\varepsilon) - 1 =$$

$$= 1+\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon - 1 \Rightarrow \varepsilon_{ab} = \varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon$$

$$a,b \mapsto a/b \cdot \tilde{a} = a(1+\varepsilon_a) \cdot \tilde{b} = b(1+\varepsilon_a) \rightsquigarrow$$

$$\tilde{a}/\tilde{b} \cdot (1+\varepsilon)$$

$$\varepsilon_{a/b} = \frac{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} \cdot (1+\varepsilon) - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b}} = \frac{\frac{a(1+\varepsilon_a)}{b(1+\varepsilon_b)} \cdot (1+\varepsilon) - \frac{a}{b}}{a/b} =$$

$$= \frac{\frac{1+\varepsilon_a}{1+\varepsilon_b}(1+\varepsilon) - 1}{1} = \frac{(1+\varepsilon_a)(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon_b} - 1 =$$

$$= \frac{1+\varepsilon_a+\varepsilon-(1+\varepsilon_b)}{1+\varepsilon_a} = \frac{\varepsilon_a+\varepsilon-\varepsilon_b}{1+\varepsilon_b} =$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon_b} \cdot \frac{1-\varepsilon_b}{1-\varepsilon_b} = \frac{1-\varepsilon_b}{1-\varepsilon_b^2} = 1-\varepsilon_b = (\varepsilon_a+\varepsilon-\varepsilon_b)(1-\varepsilon_b) =$$

$$= \boxed{\varepsilon_a + \varepsilon - \varepsilon_b}$$

$$\boxed{\varepsilon_{a/b} = \varepsilon_a - \varepsilon_b + \varepsilon}$$

ERRORE ALGORITMICO

ESERCIZIO 1

$$f(x) = x^2 - 7x$$

ALGORITMO 1 $\Rightarrow$

$$q := x = x \cdot x$$

$$p := 7 \cdot x$$

$$y_1 := q - p \longrightarrow \varepsilon_{y_1}$$

ALGORITMO 2 $\Rightarrow$

$$d := x - 7$$

$$y_2 := x \cdot d$$

$$c_f = \frac{2x - 7}{x - 7} \qquad \varepsilon_{in} \approx c_f \cdot \varepsilon_x$$

ESEMPIO

ALGORITMO 1

$$\epsilon_{ALG1}^{(TOTALE)} = \epsilon_{a_1}^{(TOT)} \frac{q}{q-p} - \epsilon_{p}^{(TOT)} \cdot \frac{p}{a_1-p} + \epsilon_{y_1} =$$

$$\epsilon_{a_1}^{(TOT)} = \epsilon_{a_1} \qquad \epsilon_{p}^{(TOT)} = \epsilon_{p}$$

$$= \epsilon_{a_1} \frac{x^2}{x^2-7x} - \epsilon_{p} \frac{7x}{x^2-7x} + \epsilon_{y} \Big] \text{ ERRORE ALGORITMICO}$$

$$\frac{x^2}{x^2-7x} = \frac{x}{x-7} \qquad \frac{7x}{x^2-7x} = \frac{7}{x-7}$$

$$\epsilon_{Alg\,2} = \epsilon_{x} + \epsilon_{d}^{(TOT)} + \epsilon_{y_2} = \epsilon_{d} + \epsilon_{y_2}$$