5/12

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\det(A - \lambda I) = 0$ $\left.\begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{matrix}\right\}$ AUTOVALORI DI A

POLINOMIO CARATTERISTICO DELLA MATRICE A E HA GRADO n

LE RADICI DEL POLINOMIO CON $n \in \mathbb{C}$

= RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO

$A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ $\lambda \in \mathbb{C} \in \mathbb{R}$ E $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ $\underline{x} \neq 0$

$\Updownarrow$ SE E SOLO SE

$A\underline{x} - \lambda \underline{x} = 0$

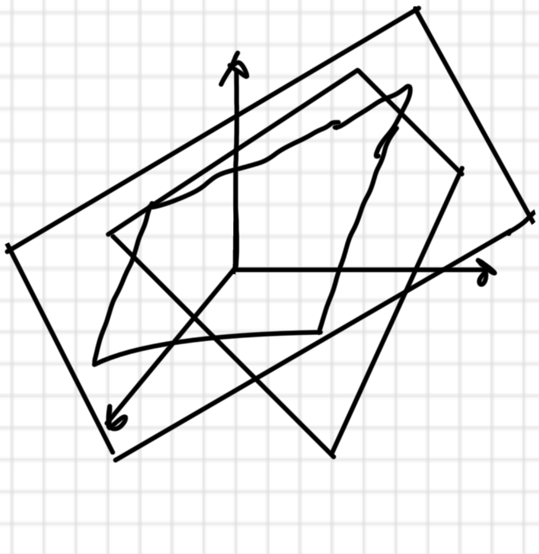
$\Updownarrow$

MATRICE CHE DIPENDE DA λ

$A\underline{x} - \lambda I \underline{x} = \underline{0} \iff (A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0} \iff C_\lambda := A - \lambda I \quad \boxed{C_\lambda}\underline{x} = \underline{0}$

C_λ NON DEVE ESSERE INVERTIBILE

$$\begin{cases} c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3 = 0 \\ c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + c_{23} x_3 = 0 \\ c_{31} x_1 + c_{32} x_2 + c_{33} x_3 = 0 \end{cases}$$

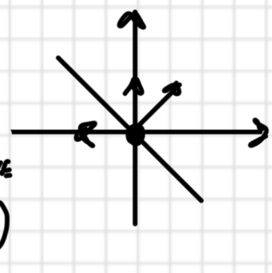


SE I 3 PIANI SONO INDIPENDENTI L'UNICA SOLUZIONE È $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ← NON È UN AUTOVETTORE PER DEFINIZIONE

INVECE SE I 3 PIANI SONO "DIPENDENTI"

$\Downarrow$

$\exists \, x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ PER QUALCHE λ $(\underline{x}, \lambda)$



$\det(A - \lambda I) = 0$ ci assicura di trovare I λ per cui

$A - \lambda I$ non è invertibile

ci calcoliamo il det

polinomio $\overset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} - \overset{\lambda\ \ I}{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$

$$= (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 = 0$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$= \underbrace{(\lambda - 1)}_{\lambda_2 = 1}\underbrace{(\lambda - 3)}_{\lambda_1 = 3} = 0$$

$\lambda_1 = 3 \rightarrow$ annulla det: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è inv

$\lambda_2 = 1 \rightarrow$ " " $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ "

$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} (-1)x_1 + 1x_2 = 0 \\ 1x_1 + (-1)x_2 = 0 \end{cases}$ dove $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

le radici del polinomio caratteristico

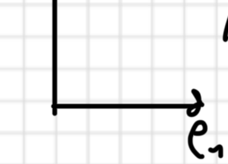
$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ $\boxed{x_1 = x_2}$ un autovettore di autovalore $\lambda_1 = 3$ è $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\forall t \neq 0$

Trovo:

Autospazio $V_{\lambda_1} = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; t \neq 0 \right\} \in$ tutti gli autovettori di autovalore 3

Per $\lambda_2 = 1$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ $V_{\lambda_2} = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \forall t \neq 0 \right\}$

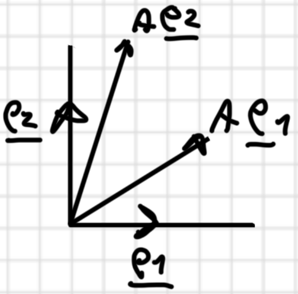


$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\underline{v_1}$ è autovettore $\|v_1\| = 1$ di autovalore $\lambda_1 = 3$

$\underline{v_2}$ " " $\|v_2\| = 1$ " $\lambda_2 = 1$

$A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A\,\underline{e_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A\,\underline{e_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

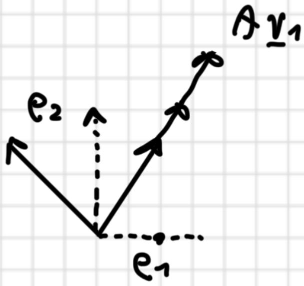


$$A\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = A$$

$$\downarrow$$

$$\underline{e}_1 \quad \underline{e}_2$$

$$A\underline{v}_2 = \underline{v}_2$$



$$A(\underline{v}_1 \vdots \underline{v}_2)$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3&-1\\3&1\end{pmatrix}$$

$$A(\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2) = (3\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2) \overset{?}{=} (\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2)\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix} = (\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2)\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$$

$$A\underline{v}_1 = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1$$

$$A(\underline{e}_1 \mid \underline{e}_2) = (A\underline{e}_1 \mid A\underline{e}_2)$$

$$A(\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2) = (\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2)\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix} \qquad V = (\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2)$$

$$A \quad V = V \quad \Lambda \qquad \Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \longrightarrow \underline{V}_1$$
$$\lambda_2 \longrightarrow \underline{V}_2$$
$$\vdots$$
$$\lambda_m \longrightarrow \underline{V}_m$$

$$\longrightarrow \boxed{AV = V\Lambda}$$

LA MATRICE V DEGLI AUTOVALORI

$$V = (\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid v_m)$$

E' INVERTIBILE

$$AV = V\Lambda \Rightarrow A\underbrace{V V^{-1}}_{I} = V\Lambda V^{-1}$$

$$\boxed{A = V\Lambda V^{-1}}$$

$$V \to (v_1 \mid \dots \mid v_m)$$

$$\boxed{A \sim \Lambda}$$

DUE MATRICI SONO SIMILI SE $\exists$ V INVERTIBILE TALE CHE $A = V\Lambda V^{-1}$

$A \sim B$ SE $\exists\, V$ INV : $A = VBV^{-1}$

A E' SIMILE A B

$$A \to \det(A-\lambda I) = \det(VBV^{-1}-\lambda I) = \det(VBV^{-1} - \lambda VV^{-1})$$
$$= \det(V(B-\lambda I)V^{-1}) = \cancel{\det}(V)\det(B-\lambda I)\cancel{\det}(V^{-1})$$

<u>MATRICI SIMILI HANNO LO STESSO POLINOMIO CARATTERISTICO</u>

DEFINIZIONE DIAGONALIZZABILITA':

A E' DIAGONALIZZABILE SE ESISTE UNA MATRICE D DIAGONALE SIMILE AD A, $A = SDS^{-1}$ CON S INVERTIBILE.

NON TUTTE LE MATRICI (QUALSIASI) SONO DIAGONALIZZABILI.

A E' DIAGONALIZZABILE <u>SE E SOLO SE</u> $A = V\Lambda V^{-1}$ DOVE

1) $\Lambda = \mathrm{DIAG}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ CON λ_i AUTOVALORI DI A $\forall i = 1, \dots, m$

2) $V = (\underline{v_1} \mid \underline{v_2} \mid \dots \mid \underline{v_m})$ CON v_i AUTOVETTORI DI A

3) $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_m}$ SONO INDIPENDENTI

TEOREMA SPETTRALE: SE $A = A^T \Rightarrow$ A DIAGONALIZZABILE

A NON DIAGONALIZZABILE $\Rightarrow A \neq A^T$

JORDAN

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(J-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$$

GLI AUTOVALORI SONO $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 1}$

$$V_{\lambda_1} = V_{\lambda_2} = V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^{*}$$

$$I - 1I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

GLI AUTOVETTORI DI $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ SONO DELLA FORMA

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \; \forall x_1 \neq 0$$

$$^{*} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \neq 0 \right\}$$