Appello di Teoria dell'Informazione e Inferenza (12/6/25)

1.1 Quanti sono gli anagrammi (contando anche le parole senza senso) di BLABLACAR?

1.2 La v.c. X può assumere i valori 1 e 2 e la v.c. Y i valori 2, 3 e 4. Se $p(X=1, Y=2) = 2/5$, $p(Y=3|X=1) = 1/4$ e $p(X=1) = 4/5$ quanto valgono $P(X=1, Y=3)$ e $P(X=1, Y=4)$? Quanto valgono invece $p(Y=2|X=2)$ e $P(X=2, Y=2)$ se per $X=2$ i possibili valori di Y sono equiprobabili? Senza fare calcoli, spiega per quale motivo puoi affermare che $H(X,Y) < \log_2 6$.

1.3 Determina il valore di C per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} Cx & 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una densità di probabilità. Trova e produci il grafico della *cdf* $F(\cdot)$. Quanto valgono $F(-1)$ ed $F(1)$?

1.4 Spiega i motivi per i quali una distribuzione cumulativa di probabilità ha valori nell'intervallo $[0,1]$. Se è costante a tratti, che cosa puoi dire della sottostante distribuzione di probabilità di massa?

2.1 Quali valori può assumere $H(Y)$ se $H(X,Y) = 3$ e $H(X) = 2$? Quanto vale $H(Y|X)$? Se $H(Y) = 2$, quanto vale $I(X;Y)$? (commenta le tue risposte).

2.2 Produci una codifica di Huffman C_1 per un alfabeto di 5 simboli in cui $p(a) = 3/8$, $p(b) = 2/8$ e $p(d) = p(e) = p(f) = 1/8$. Trova una codifica di Huffman C_2 con lunghezze diverse rispetto a C_1 e mostra che, per entrambe, la lunghezza attesa è $9/4$.

2.3 Se $p(0) = 1/4$ e $p(1) = 3/4$, determina l'intervallo della codifica aritmetica delle sequenze 110 e 111. Quanto vale la somma delle lunghezze degli intervalli di tutte le otto sequenze di 3 bit?

2.4 In una codifica convoluzionale si ha che

$$C(00) = 000\,000, \;\; C(01) = 000\,111, \;\; C(10) = 111\,110 \text{ e } C(11) = 111\,001$$

Se ricevi la stringa 010 101, quale coppia di bit è stata spedita?

3.1 Lanciando una moneta 6 volte ottieni 4 volte *testa*. Sai che potresti aver lanciato una moneta che restituisce *testa* con probabilià $1/2$ oppure una che restituisce *testa* con probabilità $2/3$. Quanto vale la verosimiglianza nei due casi?

3.2 Un cassetto contiene 4 monete che restituiscono *testa* con probabilità $1/4$ e 2 monete che restituiscono *testa* con probabilità $1/2$. Qual è la probabilità di ottenere *testa* pescando una moneta a caso? E quale quella di ottenere *testa* al secondo lancio dopo aver ottenuto *testa* nel primo?

3.3 Data la matrice di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

determina le probabilità di passare dallo stato 2 allo stato 1 in un passo e in due passi.

3.4 Determina la distribuzione limite per la matrice dell'esercizio **3.3**.

1.1

$$\frac{9!}{3!\,2!\,2!} = \frac{362\,880}{24} = 15\,120$$

1.2

$$P(X=1, Y=3) = P(X=1) \cdot P(Y=3|X=1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=1, Y=4) = P(X=1) - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

SICCOME I VALORI SONO EQUIPROBABILI ALLORA $P(Y=2|X=2) = \frac{1}{3}$

$$P(X=2) = 1 - P(X=1) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=2, Y=2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

POSSIAMO AFFERMARE CHE $H(X,Y) < \log_2 6$ IN QUANTO PER SODDISFARE $H(X,Y) = \log_2 6$ LE PROBABILITÀ CONGIUNTE DOVREBBERO ESSERE EQUIPROBABILI. SICCOME NEL NOSTRO NON SONO EQUIPROBABILI ALLORA $H(X,Y) < \log_2 6$

1.3

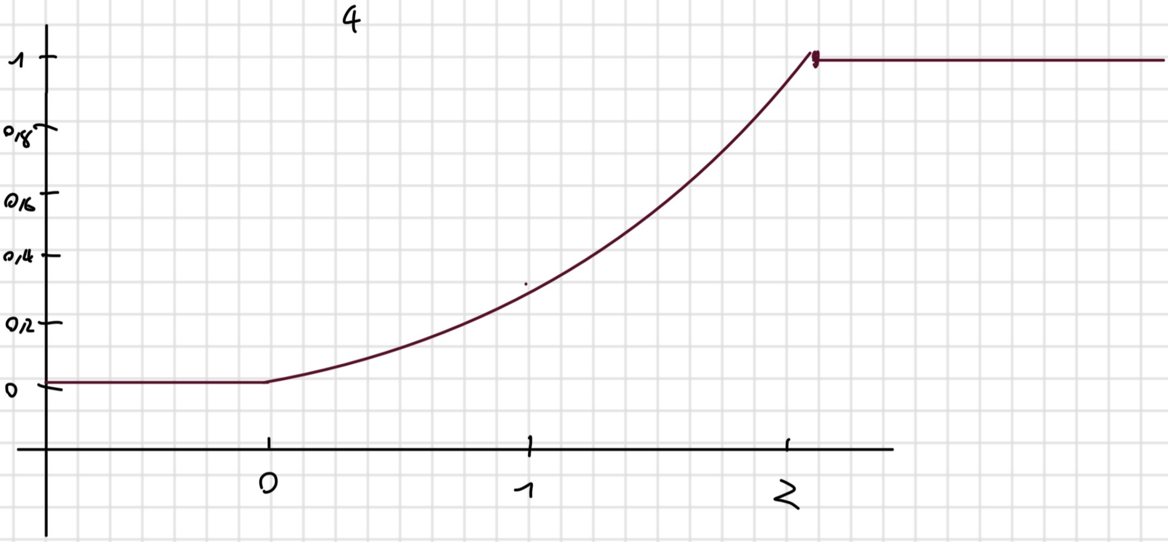
TROVIAMO C

$$\int_0^2 cx\,dx = 1 \Rightarrow c\int_0^2 x\,dx = 1 \Rightarrow c\int_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx = 1 \Rightarrow c\left(\frac{4}{2} - 0\right) = 1 \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

CALCOLIAMO CDF

- PER $x < 0$: $F(x) = 0$
- PER $0 \leq x < 2$: $\int_0^x \frac{1}{2}x\,dt \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^x \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{2} - 0\right) \Rightarrow \frac{x^2}{4}$
- PER $x \geq 2$: $F(x) = 1$

$F(-1) = 0$, $F(1) = \frac{1}{4}$



1.4

LA CDF DI UNA VARIABILE CASUALE X È LA FUNZIONE CHE, PER OGNI VALORE DI x, ASSOCIA LA PROBABILITÀ CHE X SIA MINORE O UGUALE A x:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$\lim_{x \to -\infty} = 0 \quad E \quad \lim_{x \to +\infty} = 1$$

NEL CASO DI UNA VARIABILE CONTINUA: $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

2.1

$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) \Rightarrow H(Y|X) = 3-2 = 1$

SAPPIAMO CHE $H(Y) \leq H(X,Y)$ E CHE $H(Y) \geq H(Y|X)$ QUINDI $H(Y)$ PUO' ASSUMERE VALORI TRA 1 E 3.

$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) \Rightarrow 2 - 1 = 1$

SICCOME E' $\neq 0$ LE DUE VARIABILI SONO DIPENDENTI. CONOSCERNE UNA RIDUCE L'INCERTEZZA SULL'ALTRA.

2.2

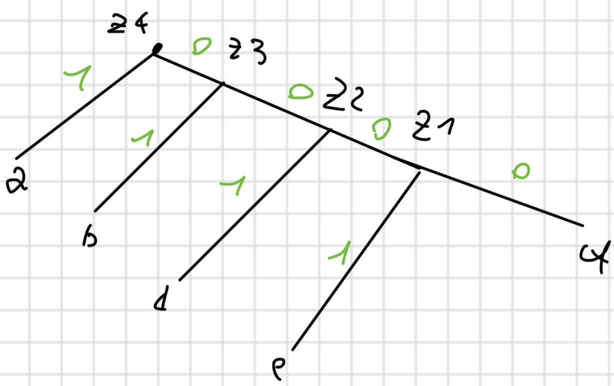
$Q = \{ a(\frac{3}{8}), b(\frac{2}{8}), d(\frac{1}{8}), e(\frac{1}{8}), f(\frac{1}{8}) \}$

$p(z1) = p(e) + p(f) = \frac{2}{8}$

$p(z2) = p(d) + p(z1) = \frac{3}{8}$

$p(z3) = p(b) + p(z2) = \frac{5}{8}$

$p(z4) = p(a) + p(z3) = 1$



$c(a) = 1$

$c(b) = 01$

$c(d) = 001$

$c(e) = 0001$

$c(f) = 0000$

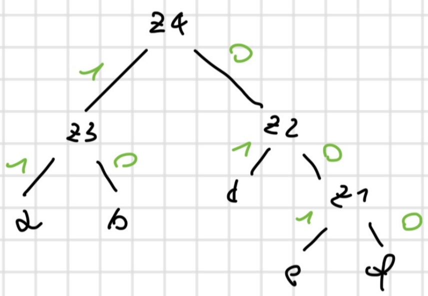
$$L = 1(\frac{3}{8}) + (2 \cdot \frac{2}{8}) + (3 \cdot \frac{1}{8}) + (4 \cdot \frac{1}{8}) + (4 \cdot \frac{1}{8}) = \frac{9}{4}$$

$p(z1) = p(e) + p(f) = \frac{2}{8}$

$p(z2) = p(d) + p(z1) = \frac{3}{8}$

$p(z3) = p(a) + p(b) = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$

$p(z4) = p(z3) + p(z2) = 1$



$c(a) = 11$

$c(b) = 10$

$c(d) = 01$

$c(e) = 001$

$c(f) = 000$

$L = \left(2\cdot\frac{3}{8}\right) + \left(2\cdot\frac{2}{8}\right) + \left(2\cdot\frac{1}{8}\right) + \left(3\cdot\frac{1}{8}\right) + \left(3\cdot\frac{1}{8}\right) = \frac{6}{8}+\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$

2.3

STRINGA 110

- $x_1 = 1$

$\alpha_1 = \alpha_0 + l_0 \cdot cdf(1-1) = 0 + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\beta_1 = \alpha_0 + l_0 \cdot cdf(1) = 1$

$\Phi[\frac{1}{4}, 1)$ $\quad l_1 = \beta_1 - \alpha_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

- $x_2 = 1$

$\alpha_2 = \alpha_1 + l_1 \cdot cdf(1-1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{4+3}{16} = \frac{7}{16}$

$\beta_2 = \alpha_1 + l_1 \cdot cdf(1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

$\Phi = [\frac{7}{16}, 1)$ $\quad l_2 = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$

- $x_3 = 0$

$\alpha_3 = \alpha_2 + l_2 \cdot cdf(-1) = \frac{7}{16}$

$\beta_3 = \alpha_2 + l_2 \cdot cdf(0) = \frac{7}{16} + \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4} = \frac{37}{64}$

STRINGA 111

I PRIMI DUE BIT STESSI VALORI

$\alpha_3 = \alpha_2 + l_2 \cdot cdf(0) = \frac{7}{16} + \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4} = \frac{37}{64}$

$\beta_3 = \alpha_2 + l_2 \cdot cdf(1) = \frac{7}{16} + \frac{9}{16} = 1$

LA SOMMA DEGLI INTERVALLI VALE 1 $\Rightarrow P(0) + P(1)$

2.4

- 000 000

  $0\underline{1}0 \quad \underline{1}0\underline{1}$ — 3 DIFF

- 000 111

  $0\underline{1}0 \quad 1\underline{0}1$ — 2 DIFF

- 111 110

  $\underline{0}1\underline{0} \quad 1\underline{0}\underline{1}$ — 4 DIFF

• 1 1 1   0 0 1

$\underline{0}\ 1\ \underline{0}$ $\underline{1}\ \cdot\ \underline{1}$ 4 DIFF

LA SEQUENZA SPEDITA È 01 IN QUANTO HA DISTANZA HAMMING MINIMA

3.1

CASO 1/2

$$\binom{m}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{m-k} \Rightarrow \binom{6}{4} \cdot \frac{1}{2}^4 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{6!}{(6-4)!\,4!} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{720}{48} \cdot \frac{1}{64} = \frac{720}{3072} \approx 0{,}23$$

CASO 2/3

$$\frac{720}{48} \cdot \frac{16}{81} \cdot \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{11'520}{3888} \cdot \frac{1}{9} \approx 0{,}32$$

3.2

$$P(T1|A) = \frac{1}{4} \qquad P(T1|B) = \frac{1}{2} \qquad P(A) = \frac{4}{6} \qquad P(B) = \frac{2}{6}$$

$$P(T1) = P(T1|A) \cdot P(A) + P(T1|B) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$P(T2|T1) = P(T2|A) \cdot P(A|T1) + P(T2|B) \cdot P(B|T1)$$

$$P(A|T1) = \frac{P(T1|A) \cdot P(A)}{P(T1)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(B|T1) = \frac{P(T1|B) \cdot P(B)}{P(T1)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(T2|T1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1+2}{8} = \frac{3}{8}$$

3.3

IN UN PASSO: 0.2

IN DUE PASSI: p^2_{21} : $(0.2 \times 0.6) + (0.8 \times 0.2) = 0.12 + 0.16 = 0.28$

3.4

$$\begin{cases} M1 = 0.6\,M1 + 0.2\,M2 \\ M2 = 0.4\,M1 + 0.8\,M2 \end{cases}$$ CON VINCOLO $M1 + M2 = 1$

$M1 = 0.5\,M2$

$0.5\,M2 + M2 = 1 \Rightarrow M2 = 0.66 \Rightarrow M1 = 0{,}33$