29/11/24

SPLINE

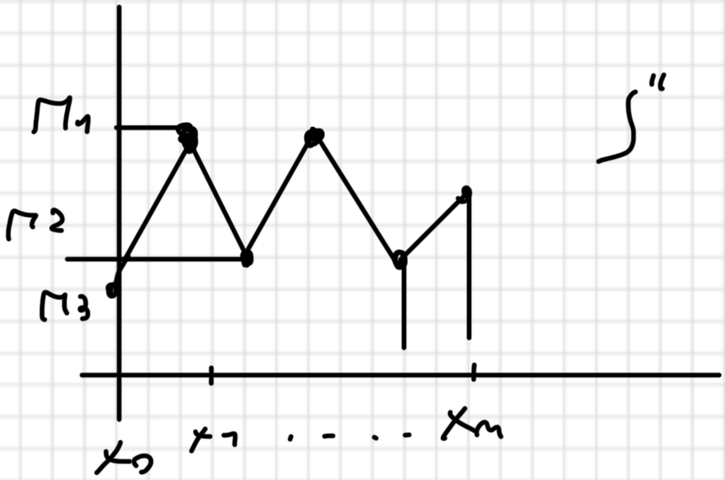
1) DEFINITA "A PEZZI" $a \leq x_0 < x_1 \dots < x_m = b$ $[a, b]$

$S_i = S|_{[x_{i-1}, x_i]}$ E' POLINOMIO DI GRADO DI MAX 3

2) S' E S'' CONTINUA

3) $S(x_i) = y_i$ $\forall i = 0, \dots, m$ $P_i(x_i, y_i)$

LA DERIVATA SECONDA S'' E' LINEARE A TRATTI



S''

S'

S'' E' DEFINITA DA $(M_0, \dots M_1)$

S' E' DEFINITA DALL'INTEGRAZIONE "A TRATTI" DI S''

↳ INTEGRO m TRATTI, HO m COSTANTI ADDITIVE DA

FISSARE (+ C); FISSO $m-1$ DI QUESTE COSTANTI PERCHE'

HO $m-1$ CONDIZIONI LINEARI DI CONTINUITA' DELLE DERIVATA

PRIMA S' NEI PUNTI $x_1 \dots x_{m-1}$ RIMANE 1 PARAMETRO LIBERO

SUPPONIAMO DI FISSARE IL PARAMETRO LIBERO (IN QUALCHE MODO) RIPETO

IL PROCEDIMENTO E DA S' VADO AD S, HO m TRATTI QUINDI m

COSTANTI ADDITIVE DI INTEGRAZIONE (+C)

HO m PARAMETRI / COSTANTI DA FISSARE IN MODO CHE S SIA CONTINUA

QUANTE CONDIZIONI HO CON S CONTINUA? $m-1$

DI m COSTANTI DA FISSARE, NE FISSO $m-1$

NE AVANZA UN ALTRO (DI COSTANTI/PARAMETRI DA FISSARE)

PER OTTENERE S' MANCA UNA COSTANTE/PARAMETRO
PER OTTENERE S // // //
} 2 PARAMETRI DA FISSARE

CHIEDERE CHE S SIA INTERPOLANTE $\Rightarrow S(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \dots, m$

$m+1$ CONDIZIONI $\Rightarrow$ FISSARE $(M_0, \dots, M_m)$

S E' DEFINITA A MENO DI 2 PARAMETRI

1) SPLINE COMPLETA $S'(x_0) = y'_0$ $S'(x_m) = y'_m$

NUMERO DATO

2) SPLINE PERIODICA $S''(x_0) = S''(x_m)$ E $S'(x_0) = S'(x_m)$

$\hookrightarrow (y_0 = y_m)$

3) SPLINE NATURALE $S''(x_0) = S''(x_m) = 0$

L'ALGORITMO HA COMPLESSITA' $O(n)$

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \qquad c_1 M_{i-1} + c_2 M_i + c_3 M_{i+1} \dots = c_1$$

$h(x_0, \dots, x_n)$ VALORI (y)

3 DIAGONALI $\neq 0 \Rightarrow$ TRIDIAGONALE

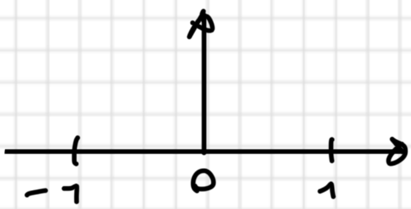
DATA $g \in C^2[a,b]$ DERIVABILE 2 VOLTE

CURVATURA MEDIA E' $\int_a^b |g''(x)|^2 \, dx$

LA SPLINE NATURALE E' QUELLA CHE MINIMIZZA LA CURVATURA MEDIA

ES. ESAME

$$S(x) = \begin{cases} x^3 & -1 \le x \le 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$



$S_1(x) = x^3$ E' CONTINUA IN $[-1, 0]$

$S_2(x) = 0$ " " " $[0, 1]$

$\lim_{x \to 0^-} x^3 \stackrel{?}{=} \lim_{x \to 0^+} = 0$ { SE SI', S E' CONTINUA IN $x_1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} S_1'(x) = 3x^2 \\ S_2'(x) = 0 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0^-} 3x^2 = \lim_{x \to 0^+} = 0 \Big\} \text{SI}$$