1.1 (2 punti) Quanti gruppi di quattro amici possono formare Alberto, Beatrice, Carlo, Daniela, Eugenio e Francesca?

1.2 (3 punti) Sia X una variabile casuale con $p(X=0)=1/3$, $p(X=1)=1/3$, $p(X=2)=1/6$ e $p(X=3)=1/6$? Calcola $\mathbb{E}[X^2]$ e $Pr(X<1/4)$.

1.3 (2 punti) Se X e Y sono due variabili casuali discrete con

$$p(X=1,Y=4)=\frac{1}{20},\quad p(X=3,Y=3)=\frac{1}{5},\quad p(X=3,Y=4)=\frac{1}{4}\ \text{ e }\ p(X=1,Y=3)=\frac{1}{2}$$

calcola $\mathbb{E}[XY]$, $\mathbb{E}[X]$ ed $\mathbb{E}[Y]$.

1.4 (4 punti) Calcola e disegna il grafico della *cdf* F della variabile casuale discreta X con

$$p(X=0)=0.2\ \text{ e }\ P(X=1)=0.8$$

Quanto valgono $F(0)$, $F(0.3)$ ed $F(1)$?

2.1 (3 punti) Sia $H(X)=3$. Se $H(X|Y)=3$ che cosa puoi dire delle variabili casuali X e Y? E se invece $H(X|Y)=0$?

2.2 (3 punti) Se $\mathcal{X}=\{1,2,3,4\}$ con $p(1)=1/2$ e $p(2)=p(3)=p(4)=1/6$, può esistere una codifica istantanea per la quale $L_1=1$ e $L_2=L_3=L_4=2$? Giustifica la risposta e, quindi, calcola una codifica di Huffman per $\mathcal{X}$.

2.3 (4 punti) Determina i sotto-intervalli ottenuti dalla codifica aritmetica delle stringhe 000 e 011 se le probabilità di 0 e 1 sono le stesse dell'esercizio **1.4** e commenta i risultati ottenuti.

3.1 (3 punti) Un cassetto contiene 3 monete che, se lanciate, restituiscono *testa* con probabilità 1/4 e 2 monete che, se lanciate, restituiscono *testa* con probabilità 1/2. Con quale probabilità il lancio di una moneta pescata a caso è *testa*?

3.2 (2 punti) Sapendo che nella tua città ognuno degli N taxi è identificato da un numero n con $n=1,\ldots,N$, usa il principio di massima verosimiglianza per stimare N se una mattina hai visto taxi 1100, 1090 e 1110. Giustifica la tua risposta.

3.3 (4 punti) Data la matrice di transizione

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.1 & 0.4\\ 0 & 0.5 & 0.5\\ 0.3 & 0.2 & 0.5\end{pmatrix}$$

qual è la probabilità di passare dallo stato 2 allo stato 1 in un passo e in due passi?

1.1

$$\frac{6!}{(6-4)!\ 4!}=\frac{720}{2\cdot 24}=15$$

1.2

$$E[X^2]=\left(0^2\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(1^2\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(2^2\cdot\frac{1}{6}\right)+\left(3^2\cdot\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}+\frac{4}{6}+\frac{9}{6}=\frac{2+4+9}{6}=\frac{15}{6}$$

$$Pr(X<1/4)=P(X=0)=\frac{1}{3}$$

1.3

$$E[XY]=\left(1\cdot4\cdot\frac{1}{20}\right)+\left(3\cdot3\cdot\frac{1}{5}\right)+\left(3\cdot4\cdot\frac{1}{4}\right)+\left(1\cdot3\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{20}+\frac{9}{5}+\frac{12}{4}+\frac{3}{2}=\frac{4+36+60+30}{20}=\frac{130}{20}=6.5$$

$$E[X]=\left(1\cdot\frac{1}{20}\right)+\left(3\cdot\frac{1}{5}\right)+\left(3\cdot\frac{1}{4}\right)+\left(1\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{20}+\frac{3}{5}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1+12+15+10}{20}=\frac{38}{20}=1.9$$

$$E[Y]=\left(4\cdot\frac{1}{20}\right)+\left(3\cdot\frac{1}{5}\right)+\left(4\cdot\frac{1}{4}\right)+\left(3\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{20}+\frac{3}{5}+1+\frac{3}{2}=\frac{4+12+20+30}{20}=\frac{66}{20}=3.3$$

1.4

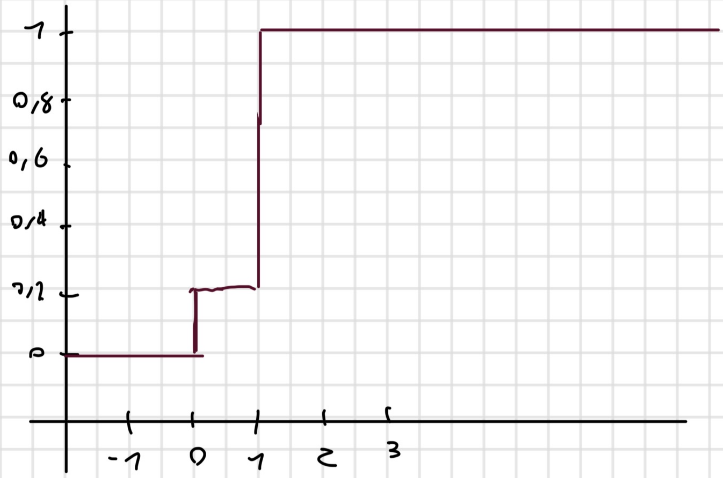
DISCRETA = GRADINI

PER $x < 0$: $F(x) = 0$

PER $0 \leq x < 1$: $F(x=0) = 0.2$

PER $x \geq 1$: $P(x=1) = 1$ IN QUANTO $0.2 + 0.8 = 1$

$F(0) = 0.2$, $F(0.3) = 0.2$, $F(1) = 1$



2.1

$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 3 - 3 = 0$ SICCOME LA MUTUA INFORMAZIONE VALE 0 SIGNIFICA CHE LE DUE VARIABILI SONO INDIPENDENTI, CONOSCERE X NON RIDUCE L'INCERTEZZA SU Y.

NEL CASO DI $H(X|Y) = 0$ OTTENIAMO 3 - 0 QUINDI LE VARIABILI SONO DIPENDENTI. CONOSCERE UNA RIDUCE L'INCERTEZZA SULL'ALTRA.

2.2

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^{Li}} < 1} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1+1+1}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

NON E' ISTANTANEA

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$Q = \{1(\frac{1}{2}), 2(\frac{1}{6}), 3(\frac{1}{6}), 4(\frac{1}{6})\}$

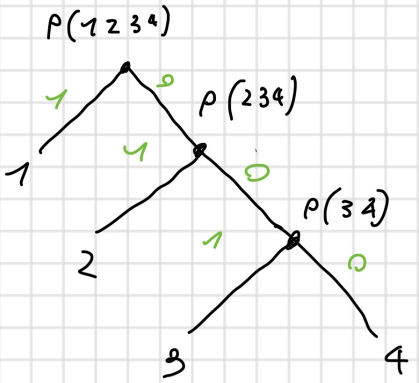
$P(34) = P(3) + P(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

$Q = \{1(\frac{1}{2}), 2(\frac{1}{6}), 34(\frac{2}{6})\}$

$P(234) = P(2) + P(34) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$

$Q = \{1(\frac{1}{2}), 234(\frac{3}{6})\}$

$P(1234) = \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = \frac{3+3}{6} = 1$



$C(1) = 1$

$C(2) = 01$

$C(3) = 001$

$C(4) = 000$

2.3

STRINGA 000

- $x_1 = 0$

$\alpha_1 = \alpha_0 + L_0 \cdot CDF(-1) = 0$

$\beta_1 = \alpha_0 + L_0 \cdot CDF(0) = 0 + 1 \cdot 0.2 = 0.2$

$\Phi[0, 0.2) \quad L_1 = \beta_1 - \alpha_1 = 0.2$

- $x_2 = 0$

$\alpha_2 = \alpha_1 + L_1 \cdot CDF(-1) = 0$

$\beta_2 = \alpha_1 + L_1 \cdot CDF(0) = 0 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$

$\Phi[0, 0.04) \quad L_2 = \beta_2 - \alpha_2 = 0.04$

- $x_3 = 0$

$\alpha_3 = \alpha_2 + L_2 \cdot CDF(-1) = 0$

$\beta_3 = \alpha_2 + L_2 \cdot CDF(0) = 0.04 \cdot 0.2 = 0.008$

STRINGA 011

- $x_1 = 0$

$\alpha_1 = \alpha_0 + L_0 \cdot CDF(-1) = 0$

$\beta_1 = \alpha_0 + L_0 \cdot CDF(0) = 1 \cdot 0.2 = 0.2$

$L_1 = \beta_1 - \alpha_1 = 0.2$

- $x_2 = 1$

$\alpha_2 = \alpha_1 + L_1 \cdot CDF(0) = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$

$\beta_2 = \alpha_1 + L_1 \cdot CDF(1) = 0.2 \cdot 1 = 0.2$

$L_2 = 0.2 - 0.04 = 0.16$

- $x_3 = 1$

$\partial_3 = \partial_2 + L_2 \cdot CDF(0) = 0.04 + 0.16 \cdot 0.2 = 0.072$

$\beta_3 = \partial_2 + L_2 \cdot CDF(1) = 0.04 + 0.16 \cdot 1 = 0.2$

3.1

$P(T1|A) = \frac{1}{4}$, $P(T1|B) = \frac{1}{2}$, $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$

$P(T) = P(T1|A) \cdot P(A) + P(T1|B) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{20} + \frac{1}{5} = \frac{3+4}{20} = \frac{7}{20}$

3.2

SE $N < 1110$ ALLORA LA VEROSIMIGLIANZA VALE 0. IN QUANTO E' IMPOSSIBILE AVER OSSERVATO IL TAXI 1110 IN UN INSIEME PIU' PICCOLO

SE $N = 1110$ E' IL CASO DELLA VEROSIMIGLIANZA MASSIMA QUINDI $\frac{1}{1110^3}$.

3.3

$P_{21} = 0$ IN UN PASSO

$P^2(21) = (0 \cdot 0.5) + (0.5 \cdot 0) + (0.5 \cdot 0.3) = 0.15$