Appello di Teoria dell'Informazione e Inferenza (11/7/25)

1.1 Quante sono le combinazioni di un lucchetto a 4 cifre? Quante di queste combinazioni hanno tutte le cifre diverse?

1.2 La v.c. X può assumere i valori 1 e 2 e la v.c. Y i valori 3, 4 e 5. Se $p(X=1, Y=3) = 2/5$, $p(Y=4|X=1) = 1/4$ e $p(X=1) = 4/5$ quanto valgono $P(X=1, Y=4)$ e $P(X=1, Y=5)$? Quanto valgono invece $p(Y=3|X=2)$ e $P(X=2, Y=3)$ se per $X=2$ i possibili valori di Y sono equiprobabili? Senza fare calcoli, spiega per quale motivo puoi affermare che $H(X,Y) < \log_2 6$.

1.3 Determina il valore di C per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < C \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una *pdf*. Trova e produci il grafico della *cdf* $F(\cdot)$. Quanto valgono $F(-1/2)$ ed $F(1/2)$?

1.4 Dimostra che per qualunque v.c. X con valore atteso $\mathbb{E}[X]$ e varianza $Var(X)$

$$\mathbb{E}[aX+b] = a\mathbb{E}[X] + b \quad \text{e} \quad Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

2.1 Quali valori può assumere $H(Y)$ se $H(X,Y) = 5$ e $H(X) = 2$? E quali $H(Y|X)$? Se $H(Y) = 4$, quanto vale $I(X;Y)$? (commenta le tue risposte).

2.2 Produci una codifica di Huffman C_1 per un alfabeto di 5 simboli in cui $p(a) = 3/8$, $p(b) = 2/8$ e $p(d) = p(e) = p(f) = 1/8$. Trova una codifica di Huffman C_2 con lunghezze diverse rispetto a C_1 e mostra che, per entrambe, la lunghezza attesa è $9/4$.

2.3 Se $p(0) = 1/4$ e $p(1) = 3/4$, determina l'intervallo della codifica aritmetica delle sequenze 000 e 101. Quanto vale la somma delle lunghezze degli intervalli di tutte le otto sequenze di 3 bit?

2.4 Fornisci un esempio di codifica univocamente decifrabile ma non istantanea.

3.1 Lanciando una moneta 6 volte ottieni 4 volte *testa*. Sai che potresti aver lanciato una moneta che restituisce *testa* con probabilià $3/4$ oppure una che restituisce *testa* con probabilità $1/4$. Quanto vale la verosimiglianza nei due casi?

3.2 Un cassetto contiene 2 monete di tipo A che restituiscono *testa* con probabilità $1/2$ e 8 monete di tipo B che restituiscono *testa* con probabilità $1/4$. Pesca una moneta a caso. Con quale probabilità è di tipo A o B? Come cambiano le probabilità se lanciandola una prima volta ottieni *testa*? E come se lanciandola una seconda volta ottieni nuovamente *testa*?

3.3 Data la matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

determina le probabilità di passare dallo stato 1 allo stato 2 in un passo e in due passi.

3.4 Determina la distribuzione stazionaria per la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

1.1

CON RIPETIZIONI: $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10'000$

SENZA " : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5'040$

1.2

$P(X=1, Y=4) = P(X) \cdot P(Y|X) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$

$P(X=1, Y=5) = P(X=1) - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$

SICCOME I VALORI DI Y SONO EQUIPROBABILI ABBIAMO $P(Y=3 \mid X=2) = \frac{1}{3}$

$P(X=2) = 1 - P(X=1) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$P(X=2, Y=3) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$

$H(X,Y)$ E' L'ENTROPIA CONGIUNTA, MISURA L'INCERTEZZA DELLA COPPIA (X,Y). IN TOTALE ABBIAMO 6 POSSIBILI ESITI E PER SODDISFARE $H(X,Y) = \log_2 6$ QUESTI 6 POSSIBILI ESITI DOVREBBERO ESSERE EQUIPROBABILI. NON RICADIAMO IN QUESTO CASO E QUINDI POSSIAMO AFFERMARE $H(X,Y) < \log_2 6$

1.3

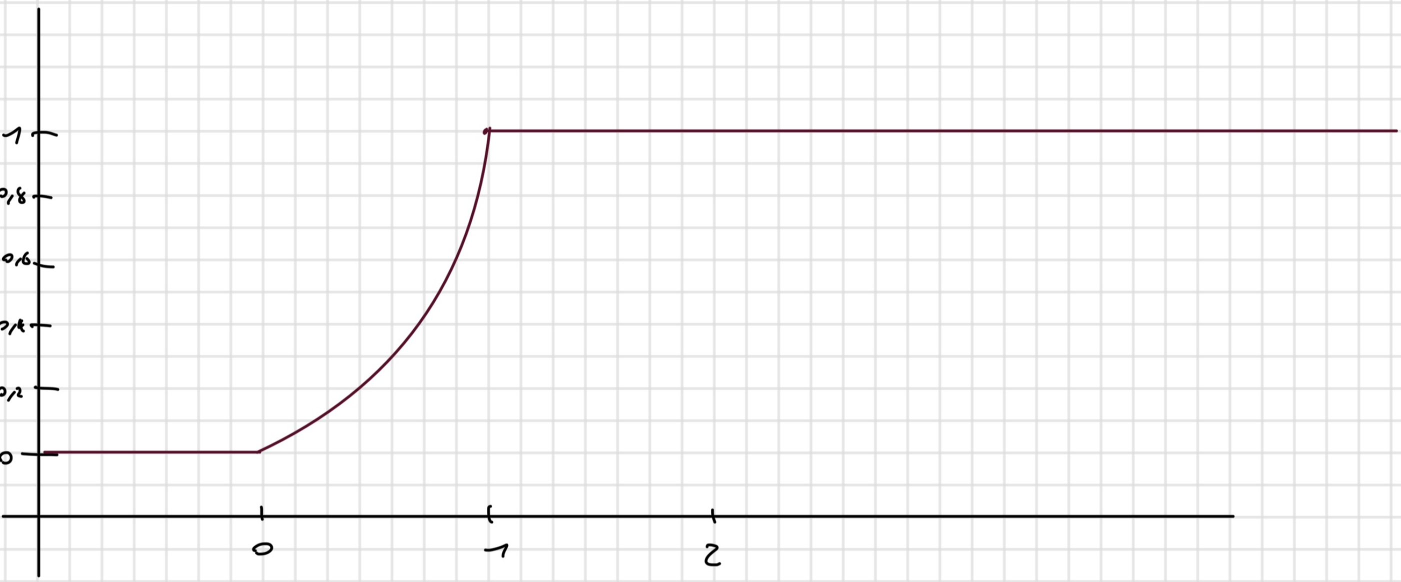
TROVARE C

$$\int_0^c 2x \, dx = 1 \Rightarrow 2\int_0^c x \, dx = 1 \Rightarrow 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^c = 1 \Rightarrow 2\left(\frac{c^2}{2} - 0\right) = 1 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = 1$$

CALCOLO CDF

- PER $x < 0$: $F(x) = 0$
- PER $0 \leq x < 1$: $\int_0^x 2x \, dx \Rightarrow 2\int_0^x x \Rightarrow 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x \Rightarrow 2\left(\frac{x^2}{2}\right) = F(x) = x^2$
- PER $x \geq 1$: 1

$F(-\frac{1}{2}) = 0$, $F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$



1.4

- $\mathbb{E}[2x + b] = 2\mathbb{E}[x] + b$

DOBBIAMO CONSIDERARE QUESTE PROPRIETA':

- $\mathbb{E}[2x] = 2\mathbb{E}[x]$
- $\mathbb{E}[A+B] = \mathbb{E}[A] + \mathbb{E}[B]$

• $E[k] = k$ con k costante

$E[ax+b] \Rightarrow E[ax] + E[b] = aE[x] + b$

• $VAR(ax+b) = a^2\, VAR(x)$

$VAR(x) = E[(x - E[x])^2]$

Quindi: $E[(ax+b - E[ax+b])^2] \Rightarrow E[(ax + \cancel{b} - aE[x] - \cancel{b})^2] \Rightarrow$

$\Rightarrow E[a^2(x - E[x])^2] \Rightarrow a^2 E[(x - E[x])^2] = a^2\, VAR(x)$

2.1

$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) \Rightarrow H(Y|X) = 5 - 2 = 3$

SAPPIAMO CHE $H(Y) \le H(X,Y)$ E CHE $H(Y) \ge H(Y|X)$ QUINDI PUÒ ASSUMERE VALORI TRA 3 E 5

$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = 4 - 3 = 1$

SICCOME OTTENIAMO UN VALORE $\neq 0$ LE DUE VARIABILI SONO DIPENDENTI. CONOSCERE UNA VARIABILE RIDUCE L'INCERTEZZA SULL'ALTRA

2.2

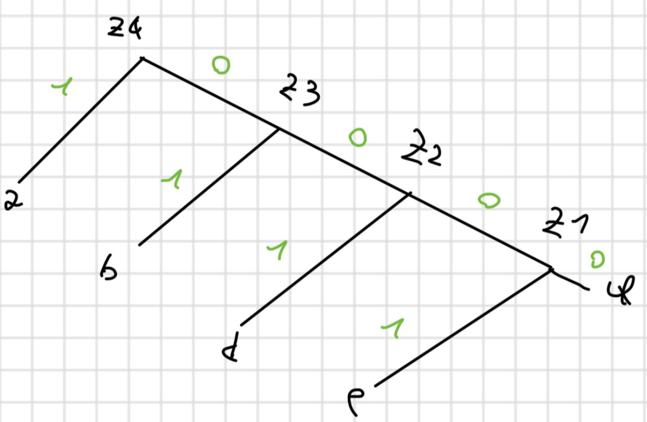
$\Omega = \{ a(\frac{3}{8}),\ b(\frac{2}{8}),\ d(\frac{1}{8}),\ e(\frac{1}{8}),\ f(\frac{1}{8}) \}$

$P(z_1) = P(e) + P(f) = \frac{2}{8}$

$P(z_2) = P(d) + P(z_1) = \frac{3}{8}$

$P(z_3) = P(b) + P(z_2) = \frac{5}{8}$

$P(z_4) = P(a) + P(z_3) = 1$



$C(a) = 1$

$C(b) = 01$

$C(d) = 001$

$C(e) = 0001$

$C(f) = 0000$

$L = (1 \cdot \frac{3}{8}) + (2 \cdot \frac{2}{8}) + (3 \cdot \frac{1}{8}) + (4 \cdot \frac{1}{8}) + (4 \cdot \frac{1}{8}) = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{4}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$

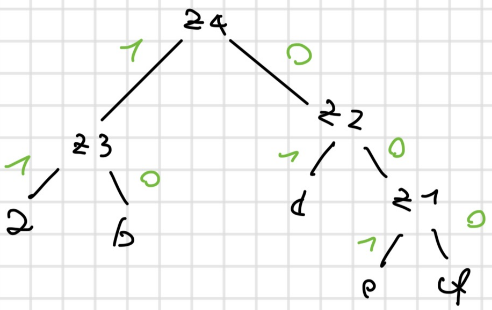
SECONDA CODIFICA

$$P(z_1) = P(e) + P(f) = \frac{2}{8}$$

$$P(z_2) = P(d) + P(z_1) = \frac{3}{8}$$

$$P(z_3) = P(a) + P(b) = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$

$$P(z_4) = P(z_3) + P(z_2) = 1$$



$c(a) = 11$ $\quad$ $c(e) = 001$

$c(b) = 10$ $\quad$ $c(f) = 000$

$c(d) = 01$

$$L = \left(2 \cdot \frac{3}{8}\right) + \left(2 \cdot \frac{2}{8}\right) + \left(2 \cdot \frac{1}{8}\right) + \left(2 \cdot \frac{1}{8}\right) + \left(2 \cdot \frac{1}{8}\right) =$$

$$= \frac{6}{8} + \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

2.3

STRINGA 000

$- x_1 = 0$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + L_0 \cdot CDF(-1) = 0$$

$$\beta_1 = \alpha_0 + L_0 \cdot CDF(0) = \frac{1}{4}$$

$I\left[0, \frac{1}{4}\right)$ $\qquad$ $L_1 = \beta_1 - \alpha_1 = \frac{1}{4}$

$- x_2 = 0$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + L_1 \cdot CDF(-1) = 0$$

$$\beta_2 = \alpha_1 + L_1 \cdot CDF(0) = \frac{1}{16}$$

$I\left[0, \frac{1}{16}\right)$

$x_3 = 0$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + L_2 \cdot CDF(-1) = 0$$

$$\beta_3 = \alpha_2 + L_2 \cdot CDF(0) = \frac{1}{64}$$

$\Phi = [0, \frac{1}{64})$

STRINGA 101

$\alpha_1 = \alpha_0 + L_0 \cdot CDF(0) = \frac{1}{4}$

$\beta_1 = \alpha_0 + L_0 \cdot CDF(1) = 1$

$\Phi = [\frac{1}{4}, 1) \qquad L_1 = \beta_1 - \alpha_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$- x_2 = 0$

$\alpha_2 = \alpha_1 + L_1 \cdot CDF(-1) = \frac{1}{4}$

$\beta_2 = \alpha_1 + L_1 \cdot CDF(0) = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$

$\Phi[\frac{1}{4}, \frac{7}{16}) \qquad L_2 = \frac{7}{16} - \frac{1}{4} = \frac{7-4}{16} = \frac{3}{16}$

$- x_3 = 1$

$\alpha_3 = \alpha_2 + L_2 \cdot CDF(0) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{16+3}{64} = \frac{19}{64}$

$\beta_3 = \alpha_2 + L_2 \cdot CDF(1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{4+3}{16} = \frac{7}{16}$

$\Phi = [\frac{19}{64}, \frac{7}{16})$

LA SOMMA VALE 1 IN QUANTO $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

2.4

UNA CODIFICA È UNIVOCAMENTE DECIFRABILE SE OGNI SEQUENZA DI CODICI CORRISPONDE A UNA E UNA SOLA SEQUENZA DI SIMBOLI SORGENTE.

ESEMPIO:

$a = 1$

$b = 10$

$c = 100$

$d = 1000$

E' UNIVOCAMENTE DECIFRABILE MA NON ISTANTANEA IN QUANTO b INIZIA CON '1'

3.1

$$L(n) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

CASO $p = 3/4$

$$\binom{6}{4} \cdot \frac{3}{4}^4 \cdot \left(1-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{6!}{(6-4)!\,4!} \cdot \frac{81}{256} \cdot \frac{1}{16} = \frac{720}{48} \cdot \frac{81}{4096} = \frac{58\,320}{196\,608} \approx 0.29$$

CASO $1/4$

$$\binom{6}{4} \cdot \frac{1}{4}^4 \cdot \left(1-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{720}{48} \cdot \frac{1}{256} \cdot \frac{9}{16} = \frac{720}{48} \cdot \frac{9}{4096} \approx 0.032$$

3.2

$P(T1|A) = \frac{1}{2}$ $\quad P(T1|B) = \frac{1}{4}$ $\quad P(A) = \frac{2}{10}$ $\quad P(B) = \frac{8}{10}$

$$P(T1) = P(T1|A)\cdot P(A) + P(T1|B)\cdot P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10} + \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{10} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(T2|T1) = P(T2|A)\cdot P(A|T1) + P(T2|B)\cdot P(B|T1)$$

$$P(A|T1) = \frac{P(T1|A)\cdot P(A)}{P(T1)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10}\cdot\frac{10}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(B|T1) = \frac{P(T1|B)\cdot P(B)}{P(T1)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{10}\cdot\frac{10}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(T2|T1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

3.3

p_{12} IN UN PASSO : 0

$$p^2_{12} = (0.6\times 0) + (0\times 0.2) + (0.4\times 0.3) = 0.12$$

3.4

$$\begin{cases} M_1 = 0.2M_1 + 0.6M_2 \\ M_2 = 0.8M_1 + 0.4M_2 \end{cases}$$ con vincolo $M_1 + M_2 = 1$

$M_1 = 0.75\,M_2 = 0.42$

$0.75M_2 + M_2 = 1 \Rightarrow 1.75M_2 = 1 \Rightarrow M_2 = 0.57$