4) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto se E è limitato inferiormente, allora:

c) l'insieme dei minoranti di E non è vuoto

SPIEGAZIONE: Se E è limitato inferiormente, per definizione esiste almeno un minorante.
Questo implica che l'insieme dei minoranti non è vuoto

5) Quale fra i seguenti enunciati è vero?

b) Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate

SPIEGAZIONE: Una funzione pari soddisfa $f(x)=f(-x)$
Questo significa che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate

3) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione suriettiva. Allora:

c) Ogni retta orizzontale interseca il grafico di f in almeno un punto

SPIEGAZIONE: Una funzione suriettiva significa che per ogni valore y nel codominio, esiste almeno un x tale che $f(x)=y$. Pertanto ogni retta orizzontale interseca il grafico della funzione in almeno un punto

4) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ $l \in \mathbb{R}$ Allora:

a) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che per ogni $x > M$ si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$

SPIEGAZIONE: Questa è la definizione di limite della funzione che tende a un valore finito l quando x tende a $+\infty$

5) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = l \in \mathbb{R}$ Allora:

a) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

SPIEGAZIONE:

Quando diciamo che $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = l$, stiamo affermando che la funzione $\frac{f(x)}{x}$ si avvicina a l man mano che x si avvicina a 0.

Per comprendere cosa accade a $f(x)$ quando x si avvicina a 0, possiamo scrivere:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = l \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = l \cdot \lim_{x \to 0} x$$

Sappiamo che: $\boxed{\lim_{x \to 0} x = 0}$ Quindi:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = l \cdot 0 = 0$$

6) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ Allora:

b) è suriettiva

SPIEGAZIONE: f stando tra $-\infty$ e $+\infty$ attraversa tutti i valori

7) Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora:

b) Se $x_0 \in (a,b)$ è un massimo o un minimo locale di f in (a,b), allora $f'(x_0) = 0$

SPIEGAZIONE: Se x_0 è un massimo o un minimo locale la derivata prima in quel punto deve essere 0 (condizione necessaria per i punti critici)

8) Quali delle seguenti affermazioni è vera?

c) Una funzione derivabile in un intervallo (a,b) è continua in (a,b)

SPIEGAZIONE: Se una funzione è derivabile in un intervallo, deve essere continua in quel intervallo. La derivabilità implica la continuità

9) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. La scrittura $\int f(x)\,dx$ denota:

c) L'insieme di tutte le funzioni la cui derivata è f

SPIEGAZIONE: L'integrale indefinito di $f(x)$ rappresenta tutte le primitive di $f(x)$, cioè tutte le funzioni che differiscono tra loro per una costante

10) Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ Allora:

c) Per ogni primitiva F di f in $[a,b]$, $F(b) \geq F(a)$

SPIEGAZIONE: Se l'integrale definito di $f(x)$ da a a b è positivo, la primitiva F deve aumentare su quell'intervallo, quindi $F(b) \geq F(a)$