PRIMITIVE ELEMENTARI E PROPRIETÀ INTEGRALI

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

PRIMITIVA DI
F(x)

SI DICE CHE $F(x)$ E' UNA PRIMITIVA DI $f(x)$
SE E' DERIVABILE: $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

PRIMITIVE ELEMENTARI:

$f(x)$	$F(x)$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$-\cos x$	
e^x	e^x	
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\forall n \neq -1$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	

ESEMPI:

1) $$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos 0\right)$$

$$= 0 + 1 = 1$$

2) $$\int_1^2 x^3 \, dx = \left[\frac{x^{3+1}}{3+1}\right]_1^2 = \left(\frac{2^4}{4}\right) - \left(\frac{1^4}{4}\right) = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

3) $$\int (3x + \cos x)\, dx = \int 3x \, dx + \int \cos x \, dx =$$

$$= 3\int x \, dx + \int \cos x \, dx = 3\,\frac{x^2}{2} + \sin x + c$$

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE:

1) $$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

2) $$\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

3) $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

4) $$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

APPUNTI LEZIONE

DEF: SIA $\varphi : I \to \mathbb{R}$ SU I INTERVALLO APERTO. UNA FUNZIONE $F : I \to \mathbb{R}$ SI DICE PRIMITIVA DI φ SE F E' DERIVABILE E $F' = \varphi$ ($F'(x) = \varphi(x)$ $\forall x \in I$). L'INSIEME DI TUTTE LE PRIMITIVE DI φ (SE NE ESISTONO) E' DETTO INTEGRALE INDEFINITO DI φ, ED E' DENOTATO CON $\int \varphi(x)\,dx$

OSSERVAZIONI:

1. L'INTEGRALE INDEFINITO DI UNA FUNZIONE E' UN INSIEME DI FUNZIONI

$$\int \varphi(x)\,dx = \{ F : I \to \mathbb{R} \mid F' = \varphi \}$$

2. SE φ AMMETTE UNA PRIMITIVA, NE AMMETTE INFINITE.

SE $F' = \varphi$, ALLORA $(F + c)' = F' = \varphi$ $\forall c \in \mathbb{R}$

QUINDI $F + c$ E' UNA PRIMITIVA DI φ $\forall c \in \mathbb{R}$

VICEVERSA SE F E G SONO PRIMITIVE DI φ,

$$(F - G)' = F' - G' = \varphi - \varphi = 0$$

ALLORA $\exists c \in \mathbb{R} : F - G = c$, OVVERO $F = G + c$

PERTANTO: SE F E' UNA PRIMITIVA DI φ,

$$\int \varphi(x)\,dx = \{ F(x) + c : c \in \mathbb{R} \}$$

SCRIVEREMO $\int \varphi(x)\,dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

3) LA NOTAZIONE $\int \varphi(x)\,dx$ PUO' ANCHE ESSERE ESTESA AL CASO IN CUI $DOM(\varphi)$ E' UNIONE DI DUE (O PIU') INTERVALLI DISGIUNTI. SE $\varphi : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}$ CON I_1, I_2 INTERVALLI, SE F E' UNA PRIMITIVA DI φ

$$\int \varphi(x)\,dx = \begin{cases} F(x) + c_1 & x \in I_1 \\ F(x) + c_2 & x \in I_2 \end{cases} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

APPUNTI LIBRO

INTEGRALI IMMEDIATI:

1) $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$

2) $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$

3) $\int e^x\,dx = e^x + c$

4) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

6) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$

7) $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + c$

8) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \arcsin x + c$

9) $\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$

10) $\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$

11) $\int \varphi(x)^a \cdot \varphi'(x) = \frac{\varphi(x)^{a+1}}{a+1} + c$

12) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$

13) $\displaystyle\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$

14) $\displaystyle\int \cos f(x) \cdot f'(x)\,dx = \sin f(x) + c$

15) $\displaystyle\int \sin f(x) \cdot f'(x)\,dx = -\cos f(x) + c$

INTEGRAZIONE PER PARTI

SE $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ SONO FUNZIONI DI CLASSE C

SI HA:

- $\displaystyle\int f(x)\, g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\, g(x)\,dx$

- $\displaystyle\int_a^b f'(x)\, g(x)\,dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$

ESEMPI:

1) $\displaystyle\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\cos x}_{g'}\,dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x\,dx =$

$= \boxed{x \sin x + \cos x}$

2) $\int x e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x$

3) $\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \; e^x dx =$

Lo possiamo portare fuori

$= x^2 \cdot e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot (xe^x - e^x)$

4) $\int \log x \, dx =$

$f(x) = \log x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 \qquad g(x) = x$

$= \log(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \log(x) - \int 1 \, dx$

$= x \log(x) - x$

5) $\int \underbrace{x}_{g'} \underbrace{\ln x}_{f} dx =$

$f(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = x \qquad g(x) = \frac{x^2}{2}$

$$\ln(x)\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{x^{\cancel{2}}}{2}=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1x^2}{4}$$

6) $\int \cos^2 x\,dx=\int \cos x\cdot\cos x\,dx=\sin x\cdot\cos x+\int \sin^2 x\,dx=$

$=\sin\cos x+\int(1-\cos^2 x)\,dx$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

SIA $\varphi: I\to\mathbb{R}$ (I INTERVALLO) UNA FUNZIONE CHE AMMETTE PRIMITIVA F.

SIA $g: J\to I$ DERIVABILE IN J INTERVALLO, ALLORA $(\varphi\circ g)\cdot g'$ AMMETTE PRIMITIVA SU J E UNA SUA PRIMITIVA È $F\circ g$ OVVERO $\int\varphi(g(x))\,g'(x)\,dx=$

$=F(g(x))+c$, $c\in\mathbb{R}$

- $\int\varphi(y)\,dy=\left[\int\varphi(g(x))\,g'(x)\,dx\right]$

$$\int_a^b f(y)\,dy = \int_c^d f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

Esempi:

1) $\int \sin(e^x)\,e^x\,dx = \int \sin y\,dy$ $\qquad y = e^x$

$= -\cos y = -\cos(e^x)$ $\qquad dy = e^x\,dx$

2) $\int \cos x \cdot \sin(\sin x)\,dx =$ $\qquad y = \sin x$

$\qquad dy = \cos x\,dx$

$= \int \sin y\,dy =$

$= -\cos y = -\cos(\sin x) + c$

3) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \frac{e^x}{1+(e^x)^2} =$ $\qquad y = e^x$

$\qquad dy = e^x\,dx$

$= \int \frac{1}{1+(y)^2}\,dy = \arctan(y) = \arctan(e^x)$

4) $\int x \sin(x^2)\, dx =$

$y = x^2$

$dy = 2x \; dx$

$= \frac{1}{2} \int \sin(y)\, dy =$

$= \frac{1}{2} - \cos(y) = -\frac{1}{2} \cos(x^2)$

5) $\int \sin(x)\, e^{-\cos x}\, dx$

$y = -\cos x$

$dy = \sin x \; dx$

$= \int e^{y}\, dy = e^{y} = e^{-\cos x}$

6) $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{x+4}}\, dx = \int_2^3 \frac{t^2-4}{t} \cdot 2t \; dt$

$\sqrt{x+4} = t$

$x+4 = t^2$

$x = t^2 - 4$

$x = g(t)$

$\frac{dx}{dt} = g'(t)$

$dx = g'(t) \cdot dt$

$x = 0 \longrightarrow t = 2$

$x = 5 \longrightarrow t = 3$

$dx = 2t \cdot dt$

$$= \int_2^3 (2t^2 - 8)\, dt = \int_2^3 2t^2\, dt - \int_2^3 8\, dt =$$

$$= 2 \cdot \int_2^3 t^2\, dt - 8 \cdot \int_2^3 dt = 2 \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_2^3 - 8 \cdot \left[t\right]_2^3 =$$

$$= 2 \cdot \left(9 - \frac{8}{3}\right) - 8 \cdot (3 - 2) = 2 \cdot \frac{19}{3} - 8 = \frac{38}{3} - 8 = \frac{14}{3}$$

7) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}}\, dx =$ $\qquad t = \sqrt{x} \qquad x = t^2 \qquad dx = 2t$

$$= \int_1^2 \frac{2t}{t + t^3}\, dt = 2 \int_1^2 \frac{1}{t^2 + 1}\, dt = 2\left[\arctan t\right]_1^2 =$$

$$= 2 \arctan 2 - \frac{\pi}{2}$$