30/5/23 Cognome, Nome: ...., ...

1.1 (2 punti) Quanti sono le possibili combinazioni di 3 cifre di un lucchetto con e senza ripetizioni?

1.2 (3 punti) Se X e Y sono due variabili casuali discrete con

$$
\begin{aligned}
p(X=1,Y=2)=p(X=2,Y=3)=p(X=3,Y=4) &= \frac{1}{27}\\
p(X=1,Y=3)=p(X=2,Y=2)=p(X=3,Y=2) &= \frac{1}{9}\\
p(X=1,Y=4)=p(X=2,Y=4)=p(X=3,Y=3) &= \frac{5}{27}
\end{aligned}
$$

calcola $p_Y(4)$, $p_X(1)$, $p(X=1|Y=4)$ e $p(Y=4|X=1)$. Le due variabili casuali sono indipendenti? Motiva la tua risposta.

1.3 (3 punti) Determina il valore di a per il quale la funzione

$$
f(x)=\begin{cases} \frac{a}{2} & -2\le x\le -1\\ \frac{a}{2} & 1\le x\le 2\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}
$$

è una densità di probabilità. Quindi calcola e produci il grafico della *cdf* della variabile casuale continua X sottostante.

1.4 * (3 punti) Dimostra che per a e b costanti reali, $\mathbb{E}[aX+b]=a\mathbb{E}[X]+b$ e $Var(aX+b)=a^2Var(x)$.

2.1 (3 punti) Se $H(X)=3$ e $H(X,Y)=5$ che cosa si può dire di $H(Y)$ e $H(Y|X)$ in generale? E se X e Y fossero indipendenti?

2.2 (2 punti) Dato un alfabeto di 6 simboli, può esistere una codifica univocamente decifrabile tale per cui le lunghezze sono 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

2.3 (3 punti) Date le equazioni di parità

$$
\begin{aligned}
y_1[n] &= x[n]+x[n-1]+x[n-2]\\
y_2[n] &= x[n]+x[n-1]\\
y_3[n] &= x[n]+x[n-2]
\end{aligned}
$$

se $x[3]=0$ e $x[4]=1$ con quale tripletta di bit è codificato il bit $x[5]=1$?

2.4 * (3 punti) Spiega a parole per quale motivo la codifica di Huffman per simbolo non può essere utilizzata per la compressione di un file binario e come si potrebbe ovviare a questo inconveniente.

1.1

con ripetizioni: $3\times3\times3 = 27$

senza ripetizioni: $3\times2\times1 = 6$

1.2

$P(Y=4) = \frac{1}{27} + \frac{5}{27} + \frac{5}{27} = \frac{11}{27}$

$P(X=1) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{5}{27} = \frac{1+3+5}{27} = \frac{8}{27}$

$P(X=1 | Y=a) = \frac{P(X=1, Y=a)}{P(Y=a)} = \frac{5/27}{11/27} = \frac{5}{27} \cdot \frac{27}{11} = \frac{5}{11}$

$P(Y=a | X=1) = \frac{P(Y=a, X=1)}{P(X=1)} = \frac{5/27}{8/27} = \frac{5}{27} \cdot \frac{27}{8} = \frac{5}{8}$

$P(Y=a | X=1) = P(X=1) \cdot P(Y=a) \Rightarrow \frac{5}{8} \neq \frac{11}{27} \cdot \frac{8}{27}$ NON SONO INDIPENDENTI

1.3

Trovo a

$\int_{-2}^{-1} \frac{a}{2} + \int_{1}^{2} \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow \frac{a}{2}\int_{-2}^{-1} 1 + \frac{a}{2}\int_{1}^{2} 1 = 1 \Rightarrow \frac{a}{2}\int_{-2}^{-1} x + \frac{a}{2}\int_{1}^{2} x = 1 \Rightarrow$

$\frac{a}{2}\left(-1-(-2)\right) + \frac{a}{2}\left(2-1\right) = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow \frac{a+a}{2} = 1 \Rightarrow a = 1$

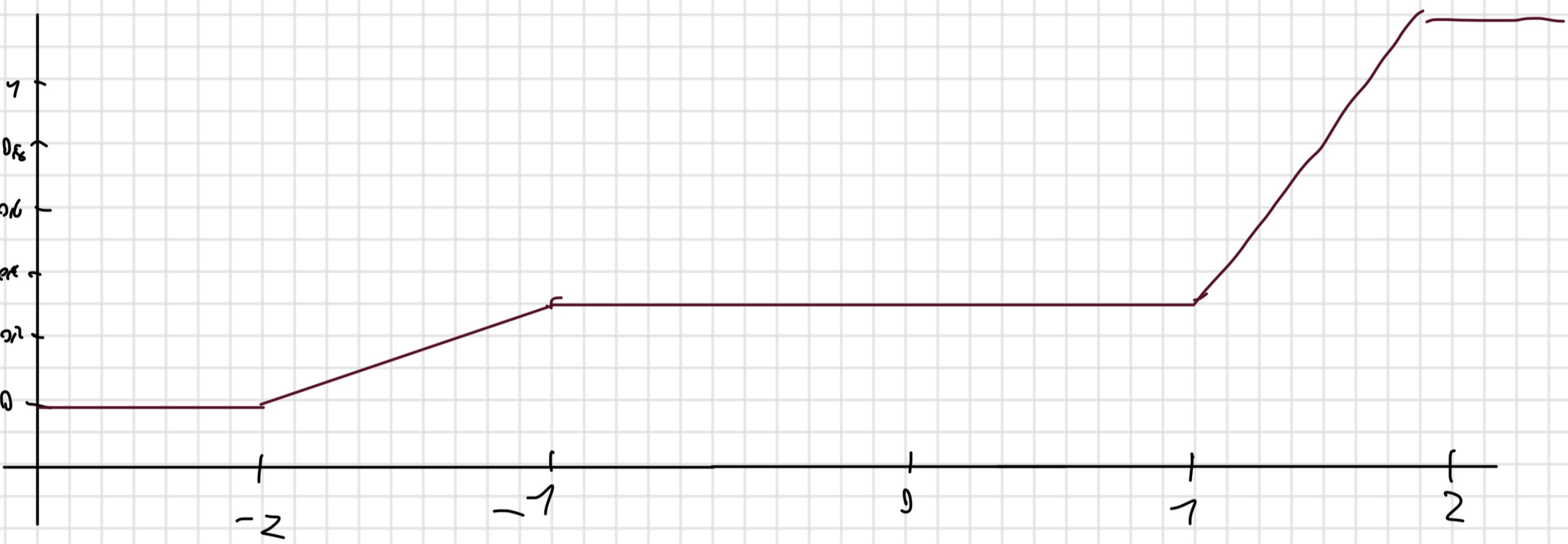
Calcolo CDF

Per $x < -2$: $F(x) = 0$

Per $-2 \leq x \leq -1$: $\int_{-2}^{x} \frac{1}{2}\, dt \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-2}^{x} 1 \, dt \Rightarrow \frac{1}{2}\left(x-(-2)\right) \Rightarrow \frac{1}{2}x + 1$

Per $1 \leq x \leq 2$: $\int_{1}^{x} \frac{1}{2}\, dt \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{1}^{x} x \, dt \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)$ risultato sostituendo -1

Per $x > 2$: $F(x) = 1$



1.4

DOBBIAMO TENERE A MENTE LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1) $\mathbb{E}[2x] = 2\,\mathbb{E}[x]$
2) $\mathbb{E}[A+B] = \mathbb{E}[A] + \mathbb{E}[B]$
3) $\mathbb{E}[k] = k$ DOVE k È COSTANTE

QUINDI: $\mathbb{E}[2x+6] = \mathbb{E}[2x] + \mathbb{E}[6] = 2\,\mathbb{E}[x] + 6$

$VAR(x) = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[x])^2]$

$$VAR(2x+6) = \mathbb{E}[(2x+6 - \mathbb{E}[2x+6])^2] \Rightarrow \mathbb{E}[(2x+6 - 2\,\mathbb{E}[x] - 6)^2] \Rightarrow 2^2\,\mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[x])^2]$$

$\Rightarrow 2^2\, VAR(x)$

2.1

$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) \Rightarrow 5 - 3 = 2$

SAPPIAMO CHE $H(Y) \leq H(X,Y)$ E CHE $H(Y) \geq H(Y|X)$ QUINDI $H(Y)$ PUÒ ASSUMERE VALORI TRA 2 E 5

SE FOSSERO INDIPENDENTI AVREMMO $I(X;Y) = 0$ QUINDI SICCOME LA MUTUA INFORMAZIONE È 0, CONOSCERE UNA VARIABILE NON RIDUCE L'INCERTEZZA SULL'ALTRA.

2.2

USIAMO LA DISUGUAGLIANZA DI KRAFT:

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} = \frac{63}{64} < 1 \quad \text{VERIFICATO}$$

ESISTE QUINDI UN CODICE UNIVOCAMENTE DECODIFICABILE

2.3

$y_1[5] = x[5] + x[4] + x[3] = \underline{1+1}+0 = 0$

$y_2[5] = x[5] + x[4] = \underline{1+1 = 0}$ PROPRIETÀ DELLE SOMME BINARIE

$y_3[5] = x[5] + x[3] = 1+0 = 1$

LA TERNA È 001

2.4

UN FILE BINARIO HA DIMENSIONE 1 BIT (0 OPPURE 1) DI CONSEGUENZA NON SI PUÒ RIDURRE ULTERIORMENTE LA DIMENSIONE.

UNA SOLUZIONE SAREBBE RAGGRUPPARE I BIT IN DIVERSI BLOCCHI, IN QUESTO MODO SI OTTIENE UNA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ NON UNIFORME E LA CODIFICA DI HUFFMAN PUÒ SFRUTTARLA PER ASSEGNARE CODICI BREVI AI BLOCCHI PIÙ FREQUENTI.

3.1 (2 punti) Se p è la probabilità di ottenere *testa* nel lancio di una moneta, calcola la verosimiglianza di $p = 1/3$ e $p = 2/3$ per una moneta che, lanciata 4 volte, produce 1 volte *testa* e 3 *croce*.

√ **3.2** (3 punti) Un cassetto contiene 3 monete che restituiscono *testa* con probabilità $1/8$ e 2 monete che restituiscono *testa* con probabilità $1/2$. Qual è la probabilità di ottenere *testa* pescando una moneta a caso? E quale quella di ottenere testa al secondo lancio dopo aver ottenuto *testa* nel primo?

3.3 (3 punti) Nel caso in cui esistano, determina la distribuzione limite e quella stazionaria per la matrice di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

3.4 * (3 punti) Scrivi le condizioni per cui una matrice di transizione è irriducibile e quelle per cui è regolare. Produci un esempio di matrice irriducibile ma non regolare.

3.1

$p = 1/3$

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{4}{1} \cdot \frac{1}{3}^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{32}{81} \approx 0.39$$

$p = 2/3$

$$\binom{4}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^3 = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{27} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{27} = \frac{8}{81} \approx 0.098$$

3.2

$P(T1|A) = \frac{1}{8}$ $\quad P(A) = \frac{3}{5}$ $\quad P(T1|B) = \frac{1}{2}$ $\quad P(B) = \frac{2}{5}$

$$P(T1) = P(T1|A) \cdot P(A) + P(T1|B) \cdot P(B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{40} + \frac{1}{5} = \frac{3+8}{40} = \frac{11}{40}$$

$$P(T2|T1) = P(T2|A) \cdot P(A|T1) + P(T2|B) \cdot P(B|T1)$$

$$P(A|T1) = \frac{P(T1|A) \cdot P(A)}{P(T1)} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{11}{40}} = \frac{3}{40} \cdot \frac{40}{11} = \frac{3}{11}$$

$$P(B|T1) = \frac{P(T1|B) \cdot P(B)}{P(T1)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{11}{40}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{40}{11} = \frac{8}{11}$$

$$P(T2|T1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{11} = \frac{3}{68}$$

3.3