RIDUZIONE DI GAUSS

(ELIMINAZIONE)

$$\underbrace{Ax = b}$$

$\downarrow$

MATRICE COMPLETA

$$(A \,\vdots\, b)$$

$$R_i \longleftrightarrow R_j$$

$$R_i \longleftarrow R_i + \lambda R_j$$

$$R_i \longleftarrow \lambda R_i \qquad (A' \,\vdots\, b')$$

$\downarrow$

A SCALINI RIDOTTA

$$A'x = b'$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \end{cases} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

PARTIAMO DALLA PRIMA COLONNA, AL POSTO DELLO 0 DOBBIAMO SCAMBIARE CON UN ALTRO NUMERO

SCAMBIAMO LA PRIMA CON LA QUARTA RIGA

$$R_1 \longleftrightarrow R_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ORA PER SEMPLIFICARE I VARI SCAMBI IL PROF HA SALTATO DEI PASSAGGI

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \; \begin{array}{l} R_3 \leftarrow R_3 + R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \; R_3 \to R_4$$

$$A' \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

A $\qquad$ B

$$= \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 1 \longrightarrow x_1 = 1 - x_2 + x_4 = 1/2 - x_2 \\ x_3 - 3x_4 = 3 \longrightarrow x_3 = 3 + 3x_4 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \\ 4x_4 = -2 \longrightarrow x_4 = -1/2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\infty^1 : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - x_2 \\ x_2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

TEOREMA

UN SISTEMA AMMETTE SOLUZIONI SE TUTTI I PIVOT (È COMPATIBILE)

SONO IN A'

TEOREMA

UN SISTEMA COMPATIBILE HA $\nearrow$ 1 SOLA SOLUZIONE SE ρ (= # PIVOT) = n (# COLONNE DI A)

$\searrow \infty^{n-\rho}$

OSSERVAZIONE

SISTEMA OMOGENEO ($\Longleftrightarrow Ax = 0$) SEMPRE COMPATIBILE

INOLTRE $b' = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} r_2 \leftarrow r_2 \leftarrow r_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_2 = 3x_3 + 3x_4$$

$$x_1 = -x_2 + 3x_3 = -3x_3 - 3x_4 + 3x_3 = -3x_4$$

$$x = \begin{pmatrix} -3x_4 \\ 3x_3 + 3x \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1}]{R_1 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_4]{R_4 \leftarrow \frac{1}{2} R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 9 & 1 & -6 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$