

Calculus 1

Esercizi tutorato 7

1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{x} \right)^{x+1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \ln(1 + x^2)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}}$

Soluzioni: (a) $1/3$; (b) 2 ; (c) 1 ; (d) $1/e$; (e) 0 ; (f) $1/2$; (g) 3 .

2. Studiare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in 0:

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+4} - 6 & \text{per } -4 \leq x < 0 \\ \ln(bx+1) + 2b & \text{per } x \geq 0. \end{cases}$$

Soluzioni: $a = b + 3, b \in \mathbb{R}$.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = \frac{e^{\cos x}}{(1+x^2)^3}$

(b) $g(x) = \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$

(c) $h(x) = x^x$

(d) $u(x) = a^x$, per $a > 0$ (sapendo che la derivata di e^x è e^x)

(e) $v(x) = (\ln x)^{x^2+1}$

(f) $z(x) = \sin(\log(x^2+1))$

Soluzioni: (a) $-((1+x^2)\sin x + 6x)e^{\cos x}/(1+x^2)^4$; (b) $2/(x^2-1)$; (c) $x^x(\ln x + 1)$; (d) $a^x \ln a$; (e) $((\ln x)^{x^2}(x^2 + 2x^2 \ln x \ln(\ln x) + 1))/x$; (f) $(2x \cos(\log(x^2+1)))/((x^2+1) \ln 10)$.