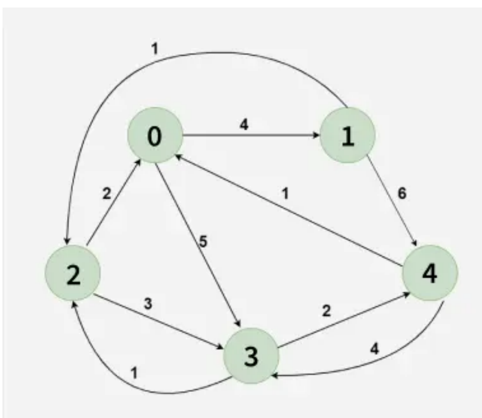
Analisi e progettazione di algoritmi

(III anno Laurea Triennale - a.a. 2024/25)

Prova scritta 3 luglio 2025

Esercizio 1 Si esegua l'algoritmo di Floyd-Warshall sul seguente grafo pesato:



Più precisamente:

1. Si scrivano sei matrici corrispondenti a considerare come nodi intermedi nei cammini: nessun nodo, solo `0`, anche `1`, anche `2`, anche `3`, tutti i nodi. Per semplicità scrivete per ogni iterazione un'unica matrice le cui caselle contengono sia la distanza (matrice $\mathtt{D}^k$ nelle note) sia il predecessore (matrice Π^k nelle note). Per scrivere meno, potete indicare in ogni matrice solo le caselle modificate rispetto alla precedente.
2. Si disegni il sottografo dei cammini minimi determinato dalla matrice.
3. Si disegni l'albero dei cammini minimi a partire dal nodo `0`.

Soluzione

1. Matrici (n sta per "nessun predecessore" e gli elementi cambiati sono evidenziati, nella casella in alto a sinistra è indicato l'insieme di nodi intermedi utilizzato):

$\emptyset$	0	1	2	3	4
0	0 n	4 0	∞ n	5 0	∞ n
1	∞ n	0 n	1 1	∞ n	6 1
2	2 2	∞ n	0 n	3 2	∞ n
3	∞ n	∞ n	1 3	0 n	2 3
4	1 4	∞ n	∞ n	4 4	0 n

$\{0\}$	0	1	2	3	4
0	0 n	4 0	∞ n	5 0	∞ n
1	∞ n	0 n	1 1	∞ n	6 1
2	2 2	**6 0**	0 n	3 2	∞ n
3	∞ n	∞ n	1 3	0 n	2 3
4	1 4	**5 0**	∞ n	4 4	0 n

$\{0,1\}$	0	1	2	3	4
0	0 n	4 0	**5 1**	5 0	**10 1**
1	∞ n	0 n	1 1	∞ n	6 1
2	2 2	6 0	0 n	3 2	**12 1**
3	∞ n	∞ n	1 3	0 n	2 3
4	1 4	5 0	**6 1**	4 4	0 n

$\{0,1,2\}$	0	1	2	3	4
0	0 n	4 0	5 1	5 0	10 1
1	**3 2**	0 n	1 1	**4 2**	6 1
2	2 2	6 0	0 n	3 2	12 1
3	**3 2**	**7 0**	1 3	0 n	2 3
4	1 4	5 0	6 1	4 4	0 n

$\{0,1,2,3\}$	0	1	2	3	4
0	0 n	4 0	5 1	5 0	**7 3**
1	3 2	0 n	1 1	4 2	6 1
2	2 2	6 0	0 n	3 2	**5 3**
3	3 2	7 0	1 3	0 n	2 3
4	1 4	5 0	**5 3**	4 4	0 n

$\{0,1,2,3,4\}$	0	1	2	3	4
0	0 n	4 0	5 1	5 0	7 3
1	3 2	0 n	1 1	4 2	6 1
2	2 2	6 0	0 n	3 2	5 3
3	3 2	7 0	1 3	0 n	2 3
4	1 4	5 0	5 3	4 4	0 n

2. Il sottografo dei cammini minimi coincide con il grafo di partenza.
3. L'albero dei cammini minimi a partire dal nodo `0` è formato dagli archi $(0,1)$, $(0,3)$, $(1,2)$, $(3,4)$.

Esercizio 2 Rispondere alle seguenti domande.

1. Consideriamo la visita in profondità con timestamp di un grafo orientato con nodi A, B, C, D, E, F e archi (A,B), (A,C), (B,D), (B,E).
   (a) Si mostri, se possibile, una visita tale che $\mathit{end}(A) < \mathit{end}(D)$.
   (b) Si mostri, se possibile, una visita tale che $\mathit{end}(F)$ non sia nè il minimo nè il massimo tempo di fine visita.
   (c) Si dia il grafo quoziente.
2. Si consideri un grafo non orientato con nodi s, u, v, w e archi (s,u), (s,v), (v,u), (u,w), (w,v). Si diano, se possible, dei pesi agli archi, in modo che esistano esattamente due minimi alberi ricoprenti.
3. Consideriamo due problemi di decisione $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ tali che $\mathcal{P} \leq_{\mathsf{P}}$ *3SAT* e *3SAT* $\leq_{\mathsf{P}} \mathcal{Q}$. Cosa possiamo dire su $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$? (sono in P, in NP, NP-completi, NP-hard?)

Soluzione

1.
   (a) Non è possibile, perché c'è un cammino $A \to B \to D$, e sappiamo che, se esiste l'arco (u,v), in qualunque visita in profondità si ha $\texttt{end}[v] < \texttt{end}[u]$ (vedi pag.24 delle note).
   (b) Per esempio: B, D, E, F, A, B.
   (c) Essendo aciclico, il grafo di partenza coincide con il grafo quoziente.
2. Per esempio (s,u) con peso 0, (s,v) con peso 1, (v,u) con peso 1, (u,w) con peso 2, (w,v) con peso 3.
3. Possiamo dire che $\mathcal{P}$ è in NP (in quanto riducibile polinomialmente a un problema in NP) e $\mathcal{Q}$ è NP-hard (in quanto qualunque problema in NP si riduce polinomialmente a *3SAT* che a sua volta si riduce a $\mathcal{Q}$).

Esercizio 3 Sia S una sequenza dei primi 10 numeri naturali. Produci due input diversi che richiedano all'algoritmo QuickSort di effettuare il massimo numero N di confronti, nel caso in cui la scelta del pivot sia sempre quella dell'ultimo elemento di ogni sottosequenza. Quanto vale N? Descrivi come puoi modificare la versione Las Vegas di QuickSort in una Monte Carlo in modo da ottenere l'ordinamento di una sequenza di n elementi diversi in $O(n \ln n)$ confronti. A che rinuncia ti costringe la modifica?

Guida alla correzione

1.1 Per ogni errore da -0,5 a -2 a seconda se distrazione, dimenticanza o algoritmo applicato male.

2.1(a) Ho dato punteggio maggiore di zero a chi **non** ha detto cose false.

2.1(c) 5 a chi ha dato la soluzione giusta ma detto che non ci sono compomenti fortemente connesse.

2.2 5 per soluzioni con più di due minimi alberi ricoprenti.