1) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme limitato:

b) L'insieme dei maggioranti di E ha un minimo.

Spiegazione: L'insieme dei maggioranti di un insieme limitato superiormente ha un minimo che è il più piccolo dei suoi maggioranti, chiamato estremo superiore.

2) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione invertibile.
Quale enunciato è corretto?

a) Il grafico di f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto alla retta $y=x$

Spiegazione: Il grafico della funzione inversa è ottenuto riflettendo il grafico della funzione originale rispetto alla retta $y=x$

3) Siano f, g due funzioni tali che $Dom(f)=\mathbb{R}$ e $Dom(g)=(0,+\infty)$ allora

a) $Dom(f \circ g)=(0,+\infty)$

Spiegazione:

Per capire quale sia il dominio delle funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$ dobbiamo considerare come vengono definiti i domini di queste composizioni.

1) Composizione $f \circ g$:

- $f \circ g(x) = f(g(x))$

Affinché $f \circ g$ sia definita dobbiamo prima assicurarci che $g(x)$ sia definita e, successivamente, che $f(g(x))$ sia definita.

Dato che $Dom(g)=(0,+\infty)$ possiamo dire che $g(x)$ è definita solo per $x \in (0,+\infty)$

2) Composizione $g \circ f$

- $g \circ f(x) = g(f(x))$

Affinché $g \circ f$ sia definita, dobbiamo prima assicurarci che $f(x)$ sia definita e, successivamente, che $g(f(x))$ sia definita.

Dato che $Dom(f)=\mathbb{R}$ possiamo dire che $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Tuttavia, poiché $Dom(g)=(0,+\infty)$, $g(f(x))$ sarà definita solo se $f(x)$ è positiva. Non possiamo garantire che $f(x)$ sia sempre positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$ senza ulteriori informazioni su f.

$\boxed{\text{Conclusione}}$ Non possiamo concludere che $Dom(g \circ f)=\mathbb{R}$ né $Dom(g \circ f)=(0,+\infty)$ con le informazioni fornite.

4) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva. Allora:

b) $Dom(f^{-1}) = f(A)$

Spiegazione: il dominio della funzione inversa f^{-1} è l'insieme delle immagini della funzione f, cioè $f(A)$

5) Siano $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

d) Per ogni $M>0$ esiste $\delta>0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $0<|x-x_0|<\delta$ si ha $f(x)>M$

6) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ allora:

a) Per ogni $M>0$ esiste $N>0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x>N$ si ha $f(x)<-M$

7) Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a)<f(b)$. Quali affermazioni sono false?

d) $f([a,b]) \subseteq [f(a), f(b)]$

Spiegazione: per il teorema dei valori intermedi, l'immagine di f sull'intervallo $[a,b]$ è l'intervallo $[f(a), f(b)]$ non un sottoinsieme di esso.

8) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}$ allora:

a) $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(l)$

Spiegazione: Questo è il teorema del limite composto. Se $g(x)$ tende a l e f è continua in l, allora $f(g(x))$ tende a $f(l)$.

9)

Soluzione: d

Spiegazione: Questa è una diversa rappresentazione della formula di Taylor di primo ordine.

10) Soluzione: b

Spiegazione: Questo è il teorema fondamentale del calcolo che afferma che se $F(x)$ è definita come l'integrale di $f(t)$ da x_0 a x, allora F è derivabile e la sua derivata è $f(x)$