SHANNON DICE CHE L'INFORMAZIONE È COLLEGATA A QUANTO UN EVENTO CI SORPRENDE. SE UN EVENTO HA PROBABILITÀ ALTA ALLORA NON CI SORPRENDE QUASI PER NIENTE, QUINDI PORTA POCA INFORMAZIONE. SE INVECE UN EVENTO HA PROBABILITÀ BASSA ALLORA CI SORPRENDE MOLTO, QUINDI PORTA TANTA INFORMAZIONE.

$$\boxed{I(p) = \log_2 \frac{1}{p}}$$

- SE $P = 1$ (EVENTO CERTO) ALLORA $I = 0$

UNITA' DI MISURA DELL'INFORMAZIONE

- SE $P = 1/2$ ALLORA $\log_2 \frac{1}{1/2} = \log_2(2) = 1$ $\boxed{\text{bit}}$ D'INFORMAZIONE
- SE $P = 1/4$ ALLORA $\log_2(4) = 2$ bit

PIU' P È PICCOLO, PIU' I CRESCE. NEL CASO IN CUI DUE EVENTI SONO EQUIPROBABILI, ALLORA L'INFORMAZIONE SARÀ SEMPRE DI 1 bit. SE DEVO SAPERE IL RISULTATO DI DUE EVENTI INDIPENDENTI, L'INFORMAZIONE TOTALE CHE OTTENGO È LA SOMMA DELLE SORPRESE DEI SINGOLI EVENTI.

ESEMPIO: TROVA IL SOTTOMARINO

LO SCOPO DEL GIOCO È DI INDOVINARE IN QUALE DELLE $N = 8 \times 8 = 64$ CASELLE L'AVVERSARIO ABBIA POSIZIONATO UN SOTTOMARINO. ASSUMIAMO CHE OGNI CASELLA POSSA NASCONDERE IL SOTTOMARINO CON P. 1/64.

AL PRIMO TENTATIVO ABBIAMO P. 1/64 DI INDOVINARE E 63/64 DI FALLIRE. SE FALLISCO ALLORA:

$$\boxed{I = \log_2(64) - \log_2(63) \approx 0{,}02 \text{ bit.}}$$

L'IDEA SAREBBE: I = INCERTEZZA INIZIALE - INCERTEZZA RESIDUA.

SE INDOVINIAMO ALLORA: $\log_2(64) = 6$ bit. IN QUESTO CASO IL GIOCO FINIREBBE E ABBIAMO ACQUISITO TUTTA L'INFORMAZIONE DI SHANNON. SE RICADIAMO NEL PRIMO CASO, IL GIOCO CONTINUA.

ORA ABBIAMO 1/63 DI INDOVINARE E 62/63 DI FALLIRE. SE FALLIAMO ANCORA ALLORA:

$$\underbrace{\log_2(64) - \log_2(63)}_{\text{INFORMAZIONE ACQUISITA AL PRIMO TENTATIVO}} + \left(\log_2(63) - \log_2(62)\right) = \log_2 64 - \log_2(62) \approx 0{,}05 \text{ bit}$$

SE INVECE INDOVINASSIMO: $\underbrace{\log_2(64) - \log_2(63)}_{\text{INFORMAZIONE ACQUISITA AL PRIMO TENTATIVO}} + \log_2 63 = 6$ bit

SE FALLISSIMO 32 VOLTE? $\log_2 64 - \log_2 32 = 1$ bit

ENTROPIA DI SHANNON

L'ENTROPIA DI SHANNON E' UNA MISURA DI QUANTO SIA INCERTO O IMPREVEDIBILE UN EVENTO. CI DICE QUANTA INFORMAZIONE E' CONTENUTA IN UN MESSAGGIO. L'ENTROPIA DI SHANNON CALCOLA IL VALORE ATTESO DI QUESTA INFORMAZIONE PER TUTTI I POSSIBILI RISULTATI.

$$\boxed{H(X) = \sum_{i=1}^{m} p(x_i) \cdot \log_2 \frac{1}{p(x_i)}}$$

ESEMPIO

LANCIAMO UNA MONETA:

- SE NON E' TRUCCATA: ABBIAMO 1/2 CHE ESCA TESTA O 1/2 CROCE. NON POSSIAMO PREVEDERE IL RISULTATO QUINDI L'INCERTEZZA E' MASSIMA (= 1)

- SE LA MONETA E' TRUCCATA E HA IL 100% DI P. DI DARE TESTA ALLORA L'ENTROPIA E' MINIMA (= 0)

ENTROPIA CONGIUNTA

SERVE PER MISURARE L'INCERTEZZA TOTALE DI UNA COPPIA DI VARIABILI CASUALI (X E Y). E' SEMPRE MAGGIORE O UGUALE ALL'ENTROPIA DI CIASCUNA SINGOLA VARIABILE.

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$$

ENTROPIA CONDIZIONATA

MISURA L'INCERTEZZA DI UNA VARIABILE DOPO CHE IL VALORE DI UN'ALTRA VARIABILE CASUALE E' NOTO. SI NOTA CON $H(X|Y)$.

MUTUA INFORMAZIONE

E' LA RIDUZIONE DELL'INCERTEZZA DI UNA VARIABILE DOPO CHE CONOSCIAMO IL VALORE DELL'ALTRA.

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

ESERCIZI D'ESAME

2.1 (3 punti) Se $H(X) = 2$, $H(Y) = 3$ e $H(X,Y) = A$ che cosa si può dire di $H(X|Y)$ e $H(Y|X)$ per $A = 4$ e per $A = 5$? Discuti la dipendenza di X e Y nei due casi.

$$H(X,Y) = A < \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$$

PER $A = 4$

- $4 = 2 + H(Y|X) \Rightarrow H(Y|X) = 2$
- $H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y) \Rightarrow H(X|Y) = 1$

$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = 3 - 2 = 1$ bit SICCOME E' UN VALORE DIVERSO DA 0, LE DUE VARIABILI SONO DIPENDENTI. CIO' SIGNIFICA CHE LA CONOSCENZA DI UNA VARIABILE RIDUCE L'INCERTEZZA SULL'ALTRA.

PER $A = S$

- $S = 2 + H(Y|X) = 3$
- $S = 3 + H(X|Y) = 2$

$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = 3 - 3 = 0$ SICCOME E' UGUALE A 0 LE DUE VARIABILI SONO INDIPENDENTI.

$H(X,Y) = H(X) + H(Y) \Rightarrow S = 3+2 \Rightarrow S = 5$ INDIPENDENZA VERIFICATA

2.1 Devi indovinare la posizione di una cella rossa in un quadrato di 8 × 8 celle altrimenti bianche. Quanti bit di informazione guadagni se fallisci per 32 volte?

$$N = 8 \times 8 = 64$$

$$S = \log_2(64) - \log_2(32) = 6 - 5 = 1 \text{ bit}$$

QUESTO SIGNIFICA CHE DOPO AVER FALLITO 32 VOLTE SI E' DIMEZZATO LO SPAZIO DELLE POSSIBILITA' RISPETTO ALL'INIZIO.

... casuale mentre il valore atteso $E[X]$ non lo è.

2.1 Se $H(Y) = 2$ e $H(X,Y) = 5$ che cosa puoi dire di $H(X|Y)$ e di $H(Y|X)$ se $H(X) = 4$?

$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$ OPPURE $H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$

$H(Y|X) = 5 - 4 = 1$

$H(X|Y) = 5 - 2 = 3$

2.1 (3 punti) Sia $H(X) = 3$. Se $H(X|Y) = 3$ che cosa puoi dire delle variabili casuali X e Y? E se invece $H(X|Y) = 0$?

$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 3 - 3 = 0$ IN QUESTO CASO SIGNIFICA CHE X E Y SONO INDIPENDENTI TRA LORO, CONOSCERE Y NON DA ALCUNA INFORMAZIONE SU X.

$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 3 - 0 = 3$ IN QUESTO CASO SONO DIPENDENTI. CONOSCERE Y RIDUCE L'INCERTEZZA SU X.