LAB 4 MATLAB

Esercizio 1

L'esercizio richiede di costruire la matrice A di dimensioni $m \times 3$ dove m è definito da:

$$m = 10(d_0 + 1) + d_1$$

Una volta generata la matrice dobbiamo calcolare:

- Decomposizione ai valori singolari di A e A^t;
- Confronto tra i valori singolari di A e gli autovalori di AA^t e A^tA ;
- Analisi delle immagini di A tramite la funzione orth;
- Analisi dei nuclei di A tramite la funzione null.

quando si esegue la SVD, la matrice te:

Dove:

- $\boldsymbol{U}$ È una matrice ortogonale di dimensioni $m \times m$
- $\boldsymbol{\Sigma}$ È una matrice diagonale di dimensioni $m \times n$
- $\boldsymbol{V^T}$ È la trasposta della matrice V di dimensioni $n \times n$

Per calcolare la decomposizione SVD utilizziamo la funzione **svd()** presente in matlab che restituisce direttamente le matrici $U, \Sigma,$ e V^T.
Otteniamo che per A e per A^t I valori singolari sono:

```
Valori singolari di A:
    8.6139
    2.5312
    0.3696

Valori singolari di AT:
    8.6139
    2.5312
    0.3696
```

Abbiamo verificato quindi che i **valori singolari** di A coincidono con quelli di A^t , confermando che i valori singolari sono indipendenti dalla trasposizione della matrice.

Inoltre per la **parte a,** per verificare che la decomposizione SVD sia corretta, abbiamo ricostruito la matrice A tramite il prodotto $U \cdot \Sigma \cdot V^T$ e confrontato il risultato con la matrice originale, ottenendo la matrice di partenza. Possiamo quindi concludere che i calcoli svolti nella **parte a** sono corretti.
Gli autovalori di AA^t e A^tA sono: **[0.136, 6.4068, 74.1995].**
Usando la funzione orth possiamo confrontare l'immagine di A rispetto ad A^t :

```
ImA
   -0.0964    0.2153   -0.3237
   -0.0975    0.2111   -0.2883
   -0.0986    0.2067   -0.2543
   -0.0997    0.2021   -0.2216
   -0.1009    0.1973   -0.1903
   -0.1021    0.1923   -0.1604
   -0.1033    0.1872   -0.1318
   -0.1045    0.1818   -0.1046
   -0.1058    0.1763   -0.0788
   -0.1071    0.1706   -0.0543
   -0.1085    0.1647   -0.0312
   -0.1098    0.1585   -0.0095
   -0.1112    0.1522    0.0109
   -0.1126    0.1457    0.0300
   -0.1141    0.1391    0.0476
   -0.1156    0.1322    0.0639
   -0.1171    0.1251    0.0788
   -0.1186    0.1179    0.0924
   -0.1202    0.1104    0.1046
   -0.1218    0.1028    0.1154
   -0.1234    0.0950    0.1249
   -0.1250    0.0869    0.1330
   -0.1267    0.0787    0.1398
   -0.1284    0.0703    0.1452
   -0.1302    0.0617    0.1492
   -0.1319    0.0530    0.1518
   -0.1337    0.0440    0.1531
   -0.1355    0.0348    0.1531
   -0.1374    0.0255    0.1516
   -0.1393    0.0159    0.1488
   -0.1412    0.0062    0.1447
   -0.1431   -0.0037    0.1391
   -0.1451   -0.0138    0.1322
   -0.1470   -0.0242    0.1240
   -0.1491   -0.0347    0.1144
   -0.1511   -0.0453    0.1034
   -0.1532   -0.0562    0.0910
   -0.1553   -0.0673    0.0773
   -0.1574   -0.0786    0.0623
   -0.1596   -0.0900    0.0458
   -0.1618   -0.1016    0.0280
   -0.1640   -0.1135    0.0089
   -0.1662   -0.1255   -0.0117
   -0.1685   -0.1377   -0.0336
   -0.1708   -0.1501   -0.0568
   -0.1731   -0.1627   -0.0814
   -0.1755   -0.1755   -0.1074
   -0.1779   -0.1885   -0.1348
   -0.1803   -0.2017   -0.1635
   -0.1827   -0.2150   -0.1936
   -0.1852   -0.2286   -0.2250
   -0.1877   -0.2423   -0.2578

ImAT
   -0.8211    0.5550   -0.1332
   -0.4653   -0.5156    0.7195
   -0.3307   -0.6528   -0.6816
```

Infine usando la funzione null dobbiamo confrontare il nucleo di A rispetto ad A^t.
Il nucelo di A risulta essere nullo mentre il nucelo di A^t risulta essere una matrice 52×49

Esercizio 2

Abbiamo una matrice triangolare superiore di ordine n i cui elementi sono:

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ -1 & \text{se} \quad i < j \\ 0 & \text{se} \quad i > j \end{cases}$$

Ci viene richiesto di calcolare i valori singolari. Per farlo abbiamo costruito la matrice B tramite un ciclo for che crescerà ad ogni iterazione partendo inizialmente da un n = 1. Per i valori singolari abbiamo usato la stessa logica presente nell'esercizio 1. Per studiarne il condizionamento usiamo la funzione **cond()** di matlab mentre per la pertubazione usiamo la seguente riga di codice:

```
% Perturbazione dell'elemento bn,1
perturbazione = 10^(-2 - n);
B(n, 1) = B(n, 1) + perturbazione;
```

Osserviamo che, man mano che la dimensione di B cresce, il valore singolare più piccolo (σ_n) diventa sempre più vicino a zero. Nel nostro caso possiamo notarlo con n = 5 dove il valore singolare minimo è $\sigma 5=0.0930$. Di conseguenza, il numero di condizionamento della matrice B aumenta, indicando che la matrice diventa sempre più mal condizionata.

Esercizio 3

Ci viene richiesto di usare la matrice A dell'esercizio 1 e di porre:

$$y = \begin{pmatrix} \sin x_1 \\ \vdots \\ \sin x_m \end{pmatrix}$$

Dobbiamo calcolare:

- La decomposizione in valori singolari

- La decomposizione QR
- Equazioni normali $A^t A c = A^t y$
- Il comando matlab c = $A \setminus y$

Otteniamo i seguenti output:

```
Soluzione SVD:
    1.0697
   -2.4701
    0.5513

Soluzione QR:
    1.0697
   -2.4701
    0.5513

Soluzione Equazioni Normali:
    1.0697
   -2.4701
    0.5513

Soluzione Diretta:
    1.0697
   -2.4701
    0.5513
```

I diversi metodi usati portano a risultati uguali perché sono approcci alternativi per risolvere lo stesso problema dei minimi quadrati.