1.5 Esempi di progettazione e analisi di algoritmi ricorsivi

Esempio 1.12 [Torri di Hanoi] Problema delle torri di Hanoi: si hanno tre pioli verticali (sinistro, centrale, destro), e n dischi forati, di diametri tutti diversi, che si possono infilare nei pioli. All'inizio tutti i dischi sono su un piolo in ordine decrescente di diametro. Scopo del gioco: spostare tutti i dischi su un altro piolo, eventualmente utilizzando il piolo rimanente, senza violare le seguenti regole:

- si può spostare un solo disco per volta, cioè quello più in alto nel piolo di partenza
- non si può mettere un disco sopra un altro di diametro inferiore.

Problema: il gioco è risolubile per qualunque numero n di dischi? E se lo è, quale è per ogni n la sequenza di mosse che lo risolve?

IL GIOCO E' RISOLVIBILE PER QUALSIASI NUMERO m DI DISCHI. DIMOSTRIAMOLO PER INDUZIONE ARITMETICA SU m:

BASE: IL GIOCO E' RISOLVIBILE PER $m = 1$. OVVIO PERCHE' UN SOLO DISCO PUO' ESSERE SPOSTATO CON UNA SOLA MOSSA DA UN PIOLO A UN ALTRO.

PASSO INDUTTIVO: ASSUMIAMO DI SAPER RISOLVERE IL PROBLEMA PER m (CIOE' SPOSTARE m DISCHI). COME SPOSTIAMO $m+1$ DISCHI DAL PIOLO "FROM" AL PIOLO "TO"?

- SPOSTIAMO m DISCHI DA FROM A AUX
- SPOSTIAMO IL DISCO PIU' GRANDE DA FROM AL PIOLO DI ARRIVO (TO)
- SPOSTIAMO m DISCHI DA AUX A TO

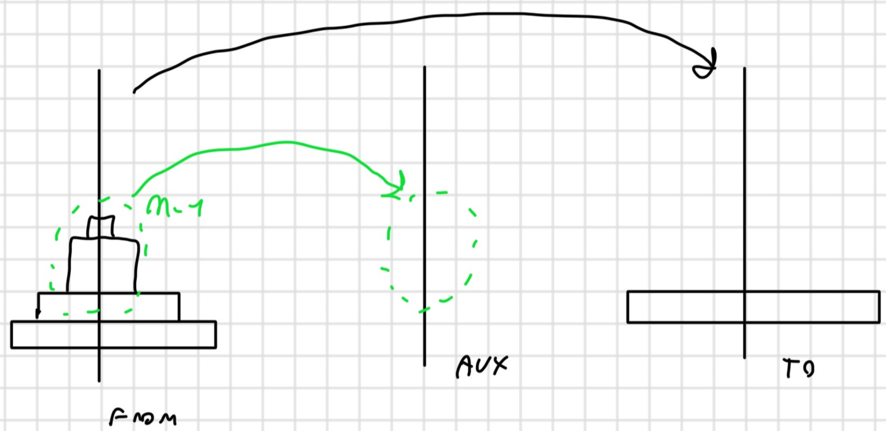
QUESTO RAGIONAMENTO CI FORNISCE DIRETTAMENTE UN ALGORITMO RICORSIVO:

```
HANOI(m, FROM, AUX, TO)
        IF(m=1) MOVE(FROM, TO)
        ELSE
            HANOI(m-1, FROM, TO, AUX)
            MOVE(FROM, TO)
            HANOI(m-1, AUX, FROM, TO)
```

FROM = TORRE DI PARTENZA

AUX = TORRE TEMPORANEA

TO = TORRE DI DESTINAZIONE



COMPLESSITA': IL TEMPO DI CALCOLO E' EVIDENTEMENTE PROPORZIONALE AL NUMERO DI MOSSE.

- PER $m=1$ SI HA UNA MOSSA, QUINDI $T(1)=1$
- PER $m>1$ OCCORRONO:
  - $T(m-1)$ PER MOSSE PER SPOSTARE GLI $m-1$ DISCHI DA FROM AD AUX
  - 1 MOSSA PER SPOSTARE IL DISCO PIU' GRANDE DA FROM A TO
  - $T(m-1)$ MOSSE PER SPOSTARE GLI $m-1$ DISCHI DA AUX A TO

SI HA QUINDI LA SEGUENTE RELAZIONE DI RICORRENZA:

$$\boxed{\begin{array}{l} T(1) = 1 \\ T(n) = 1 + 2T(n-1) \text{ per } n > 1 \end{array}}$$

PER INDIVIDUARE LA SOLUZIONE DI UNA RELAZIONE DI RICORRENZA POSSIAMO ESPANDERE "PER LIVELLI" L'ALBERO DELLE CHIAMATE RICORSIVE:

LIVELLO 0: $1 = 2^0$ MOSSA

LIVELLO 1: $2 = 2^1$ MOSSE

LIVELLO 2: 2^2 MOSSE

$\vdots$

LIVELLO i: 2^i MOSSE

$\vdots$

LIVELLO $n-1$: 2^{n-1} MOSSE

POSSIAMO VERIFICARE LA CORRETTEZZA PER INDUZIONE ARITMETICA:

BASE $T(1) = 2^1 - 1$, VERO PER DEFINIZIONE

PASSO INDUTTIVO $T(n+1) = 2T(n) + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$

QUINDI $T(n) = 2^n - 1$ PER OGNI n. DA QUI $\boxed{T(n) = \Theta(2^n)}$