

IL TEOREMA DI BAYES CI PERMETTE DI CALCOLARE LA PROBABILITA' DI UN EVENTO A SAPENDO CHE A' ACCADUTO UN ALTRO EVENTO B.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad \left. \vphantom{P(A|B)} \right\} \text{FORMULA GENERALE}$$

$P(B|A)$  = PROBABILITA' CHE ACCADA B SE A E' VERO

$P(A)$  = PROBABILITA' INIZIALE DI A

$P(B)$  = PROBABILITA' CHE ACCADA B

QUESTO TEOREMA E' MOLTO IMPORTANTE PERCHÉ CI PERMETTE DI FARE PREVISIONI MIGLIORI MAN MANO CHE RACCOLTIAMO PIU' DATI.

ESERCIZIO (TEMA D'ESAME, TIPICAMENTE 3.2)

HAI DUE MONETE UGUALI A E B. LA PROBABILITA' DI TESTA PER A E'  $1/2$ , PER B E'  $1/10$ . QUAL E' LA PROBABILITA' DI OTTENERE TESTA LANCANDO UNA MONETA A CASO?

$$P(T) = \text{PROBABILITA' DI OTTENERE TESTA LANCANDO A CASO} = P(T|A) \cdot P(A) + P(T|B) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{5+1}{20} = \frac{6}{20} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2} \quad \text{OVVERO LA PROBABILITA' DI PEGARE A O B.}$$

ESERCIZIO NOTE PAZIENTE

SE UNA PERSONA HA UNA MALATTIA IL TEST RISULTERA' POSITIVO IL 95% DELLE VOLTE. QUINDI  $P(\text{POSITIVO} | \text{MALATO}) = 0,95$

SE UNA PERSONA NON HA MALATTIA, IL TEST RISULTERA' NEGATIVO IL 99% DELLE VOLTE, QUINDI  $P(\text{NEGATIVO} | \text{SANO}) = 0,99$

SE UNA PERSONA E' SANA, IL TEST RISULTERA' POSITIVO IL 1% DELLE VOLTE. QUINDI  $P(\text{POSITIVO} | \text{SANO}) = 0,01$

SOLTO IL 0,2% DELLA POPOLAZIONE HA QUESTA MALATTIA, QUINDI  $P(\text{MALATO}) = 0,002$

DOBBIAMO CALCOLARE  $P(\text{MALATO} | \text{POSITIVO})$

$$P(\text{MALATO} | \text{POSITIVO}) = \frac{P(\text{POSITIVO} | \text{MALATO}) \cdot P(\text{MALATO})}{P(\text{POSITIVO})} = \frac{0,95 \cdot 0,002}{0,01188} \approx 16\%$$

$$P(\text{POSITIVO}) = P(\text{POSITIVO} | \text{MALATO}) \cdot P(\text{MALATO}) + \underbrace{P(\text{POSITIVO} | \text{SANO}) \cdot P(\text{SANO})}_{\substack{\text{LOCAMENTE} \\ 0,98}} = 0,01188$$

## ESERCIZIO TRE CARTE

CI SONO 3 CARTE A, B E C. LA CARTA A È ROSSA SUL LATO 1 E SUL LATO 2, LA CARTA B ROSSA SUL LATO 1 E BIANCA SUL LATO 2, LA CARTA C È BIANCA SU ENTRAMBI I LATI. PONENDO SU UN TAVOLO UNA ESATTE TRE CARTE, JESHA A CASO, OTTENGO CHE IL LATO VISIBILE È DI COLORE ROSSO, QUALE È LA PROBABILITÀ CHE ANCHE IL LATO NON VISIBILE SIA ROSSO?

Ogni CARTA HA 2 LATI, QUINDI, IN TOTALE ABBIAMO 6 POSSIBILI MODI DI PEGLIARE UNA CARTA E MASSIME UN LATO POSSIAMO RISPONDERE BRIEVIAMENTE AVENDO CHE SICCOME ABBIAMO 3 POSSIBILITÀ DI PEGLIARE UNA CARTA ROSSA MA SOLO 2 DI PEGLIARE ALLA SECONDA VOLTA UNA CARTA ROSSA ALLORA LA PROBABILITÀ È  $\frac{2}{3}$

CON BAYES:

$$P(A | \text{ROSSO}) = \frac{P(\text{ROSSO} | A) \cdot P(A)}{P(\text{ROSSO})} = \frac{2}{3}$$

$P(\text{ROSSO} | A) = 1$  PERCHÉ MI STO DICEENDO "SE HA UNA CARTA A ED È ROSSA, QUALE LA PROBABILITÀ CHE IL NOSTRO SIA ROSSO?"

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{ROSSO}) = \text{SIMILE AL CASO DELLE MONETE} = P(\text{ROSSO} | A) \cdot P(A) + P(\text{ROSSO} | B) \cdot P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A | \text{ROSSO}) = \frac{1}{3}$$

## EVENTI INDIPENDENTI

DUE EVENTI SONO INDIPENDENTI SE LA REALIZZAZIONE DI UNO NON MODIFICA LA PROBABILITÀ DELL'ALTRO.