Teoria dell'Informazione e Inferenza: prova del 14/7/2023

1.1 (2 punti) Quanti sono le possibili combinazioni di 4 cifre di un lucchetto con e senza ripetizioni?

1.2 (3 punti) Se X e Y sono due variabili casuali discrete con

$$\begin{aligned} p(X=1,Y=2)=p(X=2,Y=3)=p(X=3,Y=4) &= \frac{2}{27} \\ p(X=1,Y=3)=p(X=2,Y=2)=p(X=3,Y=2) &= \frac{1}{9} \\ p(X=1,Y=4)=p(X=2,Y=4)=p(X=3,Y=3) &= \frac{4}{27} \end{aligned}$$

calcola $p(X=3|Y=3)$, $p(Y=3|X=3)$ ed $\mathbb{E}[X/Y]$. Le due variabili casuali sono indipendenti? Motiva la tua risposta.

1.3 (3 punti) Determina il valore di a per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una densità di probabilità. Quindi calcola e produci il grafico della *cdf* della variabile casuale continua X sottostante.

1.4 * (3 punti) Dimostra che per a e b costanti reali, $\mathbb{E}[aX+b] = a\mathbb{E}[X]+b$ e $Var(aX+b) = a^2 Var(x)$.

2.1 (3 punti) Se $H(X)=2$, $H(Y)=3$ e $H(X,Y)=A$ che cosa si può dire di $H(X|Y)$ e $H(Y|X)$ per $A=4$ e per $A=5$? Discuti la dipendenza di X e Y nei due casi.

2.2 (2 punti) Determina la codifica di Huffman per i simboli a, b, c, d, e ed f nel caso in cui $p(a)=1/20$, $p(b)=3/20$, $p(c)=1/20$, $p(d)=3/20$, $p(e)=1/20$ e $p(f)=11/20$.

2.3 (3 punti) Se $p(0)=1/4$ e $p(1)=3/4$, quali triplette di bit sono associate al sotto-intervallo più breve e al sotto-intervallo più lungo in codifica aritmetica? Motiva la tua risposta.

2.4 * (3 punti) Spiega a parole per quale motivo la codifica di Huffman per simbolo non può essere utilizzata per la compressione di un file binario e come si potrebbe ovviare a questo inconveniente.

3.1 (2 punti) Se p è la probabilità di ottenere *croce* nel lancio di una moneta, calcola la verosimiglianza di $p=1/4$ e $p=1/3$ per una moneta che, lanciata 4 volte, produce 3 volte *testa* e 1 *croce*.

3.2 (3 punti) Un cassetto contiene 4 monete che restituiscono *testa* con probabilità $1/8$ e 2 monete che restituiscono *testa* con probabilità $1/2$. Peschi una moneta a caso. Qual è la probabilità di ottenere *testa* con un lancio? E quale quella di ottenere sempre *testa* con due lanci?

3.3 (3 punti) Nel caso in cui esistano, determina la distribuzione limite e quella stazionaria per la matrice di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

3.4 * (3 punti) Dimostra che il prodotto di due matrici di transizione è una matrice di transizione.

1.1

CON RIPETIZIONI: $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10'000$

SENZA RIPETIZIONI: $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5'040$

1.2

$$P(X=3 \mid Y=3) = \frac{P(X=3, Y=3)}{P(Y=3)} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{9}{27}} = \frac{4}{27} \cdot \frac{27}{9} = \frac{4}{9}$$

$$P(Y=3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{4}{27} = \frac{3+2+4}{27} = \frac{9}{27}$$

$$E[X/Y] = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{27}\right) + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{27}\right) + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{27}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{2}{2} \cdot \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{27}\right) +$$

$$+\left(\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{27}\right)+\left(\frac{3}{3}\cdot\frac{4}{27}\right)=\frac{1}{27}+\frac{4}{81}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{27}+\frac{2}{27}+\frac{4}{27}=$$

$$=\frac{116}{162}\approx 0.71$$

INDIPENDENTI SE PER OGNI COPPIA (X,Y) VALE $P(X=x, Y=y) = P(X=x)\cdot P(Y=y)$

NEL NOSTRO CASO <u>NON</u> SONO INDIPENDENTI IN QUANTO $P(X=1, Y=2) \neq P(X=1)\cdot P(Y=2)$

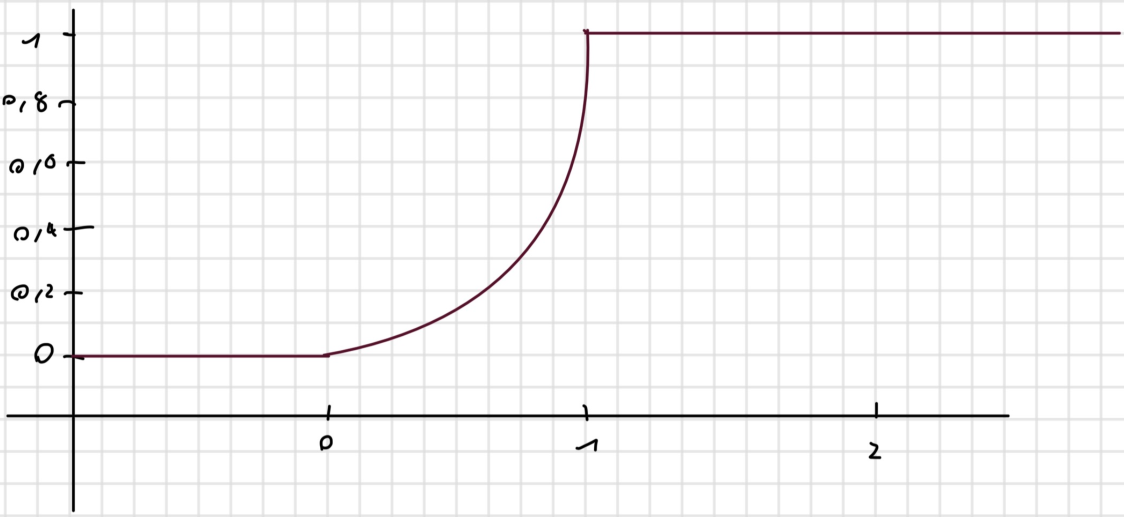
1.3

TROVO a

$$\int_0^1 ax\,dx = 1 \Rightarrow a\int_0^1 x\,dx = 1 \Rightarrow a\int_0^1 \frac{x^2}{2} = 1 \Rightarrow a\cdot\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

CALCOLO CDF

- PER $x < 0$: $F(x) = 0$
- PER $0 \leq x \leq 1$: $\int_0^x 2x\,dt \Rightarrow 2\int_0^x x \Rightarrow 2\int_0^x \frac{x^2}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow x^2$
- PER $x > 1$: $F(x) = 1$



1.4

DOBBIAMO TENERE A MENTE 3 PROPRIETA': 1) $E[aX] = a\,E[X]$

2) $E[A+B] = E[A] + E[B]$

3) $E[k]$ con k costante $= k$

$E[aX+b] = E[aX] + E[b] = aE[X] + b$

$VAR(X) = E[(X-E[X])^2] \Rightarrow VAR(aX+b) = E[(aX+b - E[aX+b])^2] \Rightarrow$ SAPPIAMO PER IL PASSAGGIO DI PRIMA CHE $E[aX+b] = aE[X]+b \Rightarrow E[(aX+b - (aE[X]+b))^2] \Rightarrow E[(aX - aE[X])^2] \Rightarrow a^2 E[(X - E[X])^2]$

$\Rightarrow \boxed{a^2\,VAR(X)}$

2.1

PER A = 4

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) \Rightarrow H(Y|X) = 2$$

$$H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y) \Rightarrow H(X|Y) = 1$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 2 - 1 = 1$$

SICCOME $\neq 0$ SONO DIPENDENTI

PER A = 5

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = 5 - 2 = 3$$

$$H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y) = 5 - 3 = 2$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 2 - 2 = 0$$

SICCOME $= 0$ SONO DIPENDENTI

2.3

SOTTO-INTERVALLO PIU' LUNGO: 111

SOTTO-INTERVALLO PIU' CORTO: 000

QUESTO SUCCEDE PERCHE' 1 HA PROBABILITA' ALTA E RIDUCE DI POCO L'AMPIEZZA DELL'INTERVALLO CORRENTE.

0 HA PROBABILITA' BASSA QUINDI RESTRINGE DRASTICAMENTE L'INTERVALLO.

STRINGA: 000

- $x_1 = 0$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + l_0 \cdot cdf(-1) = 0$$

$$\beta_1 = \alpha_0 + l_0 \cdot cdf(0) = \frac{1}{4}$$

$$\Phi\left[0, \frac{1}{4}\right) \quad l_1 = \frac{1}{4}$$

- $x_2 = 0$

$$\alpha_2 = 0$$

$$\beta_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$\Phi\left[0, \frac{1}{16}\right) \quad l_2 = \frac{1}{16}$$

- $x_3 = 0$

$$\alpha_3 = 0$$

$$\beta_3 = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

$$\Phi\left[0, \frac{1}{64}\right)$$

SEQUENZA 111

$-x_1 = 1$

$$a_1 = a_0 + l_0 \cdot cdf(1-1) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$B_2 = a_0 + l_0 \cdot cdf(1) = 1$$

$$[\frac{1}{4}, 1) \qquad l_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$-x_2 = 1$

$$a_2 = a_1 + l_1 \cdot cdf(0) = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{4+3}{16} = \frac{7}{16}$$

$$\beta_2 = a_1 + l_1 \cdot cdf(1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$[\frac{7}{16}, 1) \qquad l_2 = 1 - \frac{7}{16} = \frac{16-7}{16} = \frac{9}{16}$$

$-x_3 = 1$

$$a_3 = a_2 + l_2 \cdot cdf(0) = \frac{7}{16} + \left(\frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{16} + \frac{9}{64} = \frac{28+9}{64} = \frac{37}{64}$$

$$\beta_3 = a_2 + l_2 \cdot cdf(1) = \frac{7}{16} + \frac{9}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

$$[\frac{37}{64}, 1)$$

2.4

LA CODIFICA DI HUFFMAN OPERANTE SUI SINGOLI BIT DI UN FILE BINARIO E' INEFFICACE PERCHE' LA LUNGHEZZA MINIMA DI UN CODICE E' 1 BIT, RENDENDO IMPOSSIBILE RIDURRE LA DIMENSIONE SE L'INPUT E' GIA' 1 BIT/SIMBOLO.

SI RISOLVE IL PROBLEMA RAGGRUPPANDO I BIT IN BLOCCHI, CREANDO COSI' UNA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITA' NON UNIFORME CHE L'ALGORITMO DI HUFFMAN PUO' SFRUTTARE PER ASSEGNARE CODICI BREVI AI BLOCCHI PIU' FREQUENTI.

3.1

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

CASO $p = 1/4$

$$\binom{4}{1} \cdot \frac{1}{4}^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4-1}{4}\right)^3 = 1 \cdot \frac{27}{64} = \frac{27}{64} \simeq 0.42$$

CASO $p = 1/3$

$$\binom{4}{1} \cdot \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{3-1}{3}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{32}{81} \simeq 0.39$$

3.2

$P(T1|A) = \frac{1}{8} \qquad P(A) = \frac{4}{6} \qquad P(T1|B) = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{2}{6}$

$$P(T1) = P(T1|A)\cdot P(A) + P(T1|B)\cdot P(B) = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1+2}{12} = \frac{3}{12}$$

$$P(T2|T1) = P(T2|A)\cdot P(A|T1) + P(T2|B)\cdot P(B|T1)$$

$$P(A|T1) = \frac{P(T1|A)\cdot P(A)}{P(T1)} = \frac{\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{6}}{\frac{3}{12}} = \frac{1}{12}\cdot\frac{12}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(B|T1) = \frac{P(T1|B)\cdot P(B)}{P(T1)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{3}{12}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{12}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(T2|T1) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{1+8}{24} = \frac{9}{24}$$

3.3

DOBBIAMO VERIFICARE LE PROPRIETÀ DELLA CATENA:

a) CONTROLLARE SE DA OGNI STATO POSSO ARRIVARE A QUALUNQUE ALTRO STATO

$$\left.\begin{array}{lll} 1 \rightarrow 2 & \text{PROBABILITÀ} & 1 \\ 2 \rightarrow 1 & // & 0.5 \end{array}\right\} \text{ENTRAMBE} \neq 0 \quad \text{PROPRIETÀ VERIFICATA}$$

b) PERIODICITÀ

BASTA TROVARE UN SOLO STATO PER CUI $P_{ii} > 0$ NEL NOSTRO CASO $P_{22} > 0$

ORA DOBBIAMO CALCOLARE LA $\boxed{\text{DISTRIBUZIONE STAZIONARIA}}$. SICCOME ABBIAMO DUE STATI (2×2)

ABBIAMO $M = (M_1, M_2)$ CON IL VINCOLO $M_1 + M_2 = 1$

$$\begin{cases} M_1 = 0\cdot M_1 + 0.5\cdot M_2 \\ M_2 = 1\cdot M_1 + 0.5\, M_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1 = 0.5 M_2 \\ M_2 = M_1 + 0.5 M_2 \end{cases}$$

SOSTITUIAMO NEL VINCOLO: $0.5M_2 + M_2 = 1 \Rightarrow 1.5M_2 = 1 \Rightarrow M_2 = \frac{1}{1.5} \Rightarrow \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$

ORA TROVIAMO $M_1 \Rightarrow M_1 = 0.5\cdot M_2 \Rightarrow M_1 = 0.5\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

DISTRIBUZIONE STAZIONARIA: $M = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

SICCOME LA MATRICE E' REGOLARE ALLORA LA DISTRIBUZIONE LIMITE COINCIDE CON QUELLA STAZIONARIA

$$P^2 = P \cdot P \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

POICHE' LA MATRICE HA TUTTI GLI ELEMENTI STRETTAMENTE POSITIVI ALLORA E' REGOLARE.

3.4

UNA MATRICE DI TRANSIZIONE E' UNA MATRICE DOVE:

1) TUTTI ELEMENTI ≥ 0
2) LA SOMMA DEGLI ELEMENTI DI OGNI RIGA E' 1