Esame 12 luglio 2023

ESERCIZIO 1

$$f(x) = x \frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$$

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$ QUESTO PERCHÉ

$\ln(x) \neq 1$ QUINDI $\ln(x) \neq e$ VISTO

CHE $\ln(e) = 1$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{-\infty}$ FORMA INDETERMINATA $= 0$

$\ln(x)$ CON $x \to 0^+ = -\infty$

$\lim_{x \to e^-} f(x)$ E $\lim_{x \to e^+} f(x)$ NON ESISTONO IN

QUANTO $\ln(e) = 1$ E L'ABBIAMO ESCLUSO DAL

DOM IN QUANTO ANNULLA IL DENOMINATORE

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \cdot \frac{1}{1} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} = 1 \Rightarrow +\infty$

ASINTOTI

PER GLI ASINTOTI POSSO PRENDERE IN CONSIDERAZIONE:
e^- ED e^+ QUINDI:

$$\lim_{x \to e^-} f(x) = e^- \cdot \frac{\ln(e^-)+1}{\ln(e^-)-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to e^+} f(x) = e^+ \cdot \frac{\ln(e^+)+1}{\ln(e^+)-1} = +\infty$$

QUINDI $x = e$ ASINTOTO VERTICALE

ORA CALCOLIAMO ASINTOTO ORIZZONTALE:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$$ INDEFINITO PERCHÉ IL DOMINIO SAREBBE A $+\infty$

PERTANTO LA FUNZIONE NON HA ASINTOTI ORIZZONTALI IN QUANTO CONTINUA A CRESCERE SENZA LIMITI.

SEGNO

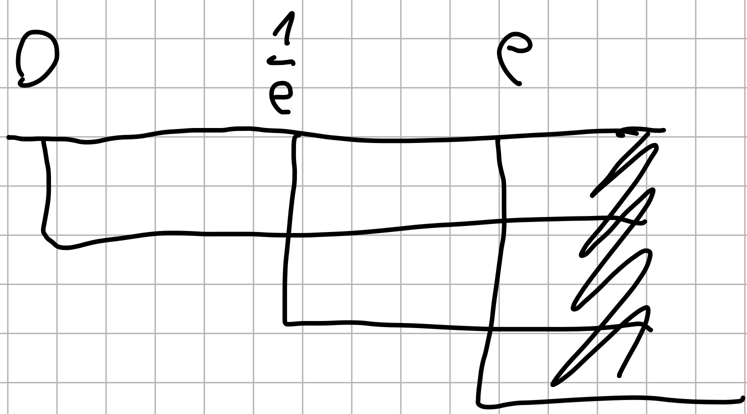
• $x > 0$

• $\ln(x) + 1 > 0 \Rightarrow \ln(x) > -1 \Rightarrow$

$e^{\ln(x)} > e^{-1} \Rightarrow x > \frac{1}{e}$

• $\ln(x) - 1 > 0 \Rightarrow \ln(x) > 1 \Rightarrow e^{\ln(x)} > e^{1}$

$\Rightarrow x > e$



SEGNO: $(e, +\infty)$

b) $\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right)' = \frac{U'(x) \cdot V(x) - U(x) \cdot V'(x)}{V(x)^2}$

$U(x) = x(\ln(x) + 1)$

$V(x) = \ln(x) - 1$

$U'(x) = u'(x) \cdot v(x) + U(x) \cdot v'(x)$

$U_1(x) = x \qquad U_2(x) = \ln(x) + 1$

$U_1'(x) = 1 \qquad U_2(x)' = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{(\ln(x)+2)\cdot(\ln(x)-1) - (x(\ln(x)+1)) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x)-1)^2}$$

$$= (\ln(x)+2)\cdot(\ln(x)-1) = \ln(x)\cdot\ln(x) + 2\ln(x) - \ln(x) - 2 =$$
$$= \ln^2(x) + \ln(x) - 2 = \ln^2(x) + \ln(x) - 2 - (\ln(x)+1)$$
$$= \ln^2(x) + \ln(x) - 2 - \ln(x) - 1 = \ln^2(x) - 3$$

NUMERATORE

$$f'(x) = \frac{\ln^2(x) - 3}{(\ln(x)-1)^2}$$

$$f'(x) \geq 0$$

NUM: $\ln^2(x) - 3 \geq 0 \Rightarrow \ln^2(x) \geq 3 \Rightarrow$

$\ln(x) \geq \sqrt{3}$ oppure $\ln(x) \leq \sqrt{3}$

	$e^{-\sqrt{3}}$		$e^{\sqrt{3}}$	
$-$		$+$		$+$
$-$		$-$		$+$
$+$		$-$		$+$
$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$x = e^{-\sqrt{3}}$ È UN MASSIMO RELATIVO PERCHÉ LA FUNZIONE CAMBIA DA CRESCENTE A DECRESCENTE

$x = e^{\sqrt{3}}$ È UN MINIMO RELATIVO PERCHÉ LA FUNZIONE CAMBIA DA DECRESCENTE A CRESCENTE.

c) $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

$f(x) = 7$

$$\frac{x(\ln(x)+1)}{\ln(x)-1} = 1$$

$x(\ln(x)+1) = \ln(x)-1 \Rightarrow x\ln(x)+x = \ln(x)-1$

$x\ln(x) - \ln(x) = -x-1 \Rightarrow \ln(x) = \frac{-x-1}{x-1}$