- **1.1** Se dimentichi la combinazione di un lucchetto con 4 cifre ma ricordi che erano tutte diverse, quanti tentativi devi fare?
- **1.2** Calcola $\mathbb{E}[Y^2]$ e $\mathbb{E}[X|Y]$, se

$$p(X=1, \boxed{Y=2}) = p(X=2, \underline{Y=3}) = p(X=3, Y=4) = \frac{1}{27}$$
$$p(X=1, \underline{Y=3}) = p(X=2, \boxed{Y=2}) = p(X=3, \boxed{Y=2}) = \frac{1}{9}$$
$$p(X=1, Y=4) = p(X=2, Y=4) = p(X=3, \underline{Y=3}) = \frac{5}{27}$$

- **1.3** Determina il valore di a per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x \in [0, 1/2] \cup [2, 5/2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una funzione densità di probabilità. Calcola la funzione di distribuzione cumulativa della variabile casuale continua X sottostante.

1.4 Se $X_1, \ldots, X_n$ sono valori ottenuti campionando una variabile casuale X, spiega perché la media empirica $\sum_i X_i/n$ è una variabile casuale mentre il valore atteso $\mathbb{E}[X]$ non lo è.

- **2.1** Devi indovinare la posizione di una cella rossa in un quadrato di 8×8 celle altrimenti bianche. Quanti bit di informazione guadagni se fallisci per 32 volte?
- **2.2** Siano date le equazioni di parità

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x[n] + x[n-1] + x[n-2] \\ y_2[n] &= x[n] + x[n-1] \\ y_3[n] &= x[n] + x[n-2] \end{aligned}$$

5 = 1
4 = 1
3 = 0

per una codifica convoluzionale che associa a ogni bit del messaggio in input 3 bit di output. Se $x[3] = 0$ e $x[4] = 1$ trova la codifica per il bit $x[5] = 1$ e calcolane la distanza di Hamming dalla tripletta 010.

2.3 Quanto vale la lunghezza attesa di C se $p(a) = 1/2$, $p(b) = 1/4$ e $p(c) = p(d) = 1/8$ e $C(a) = 11$, $C(b) = 00$, $C(c) = 110$ e $C(d) = 010$. Trova una codifica di Huffman e dimostra che la sua lunghezza attesa è minore di quella di C. Per quale motivo è ottimale?

- **2.4** Trova gli intervalli associati dalla codifica aritmetica alle triplette 110 e 000 se $p(0) = 1/4$ e $p(1) = 3/4$.

- **3.1** Un cassetto contiene 6 monete che restituiscono *croce* con probabilità 1/8 e 2 monete che restituiscono *croce* con probabilità 1/4. Qual è la probabilità di ottenere *croce* lanciando una moneta pescata a caso? E quale quella di ottenere *croce* lanciandola una seconda volta se nella prima hai ottenuto *croce*?

3.2 Hai due monete identiche per forma e peso. La prima restituisce *testa* con probabilità 1/2, la seconda con probabilità 1/10. Ne scegli una a caso e la lanci 4 volte ottenendo la sequenza $CTCC$. Calcola la verosimiglianza delle due possibili scelte.

3.3 Per quale motivo

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

è una matrice di transizione di un processo di Markov regolare? Qual è la sua distribuzione stazionaria?

- **3.4** Come puoi determinare la distribuzione limite per l'esercizio precedente?

1.1

$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ tentativi

1.2

$\mathbb{E}[Y^2]: \left(2^2 \cdot \frac{1}{27}\right) + \left(3^2 \cdot \frac{1}{27}\right) + \left(4^2 \cdot \frac{1}{27}\right) + \left(3^2 \cdot \frac{1}{9}\right) + \left(2^2 \cdot \frac{1}{9}\right) + \left(2^2 \cdot \frac{1}{9}\right) +$

$\left(4^2 \cdot \frac{5}{27}\right) + \left(4^2 \cdot \frac{5}{27}\right) + \left(3^2 \cdot \frac{5}{27}\right) = \frac{4}{27} + \frac{1}{3} + \frac{16}{27} + 1 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{80}{27} + \frac{80}{27} + \frac{5}{3} =$

$\frac{4+9+16+27+12+12+80+80+45}{27} = \frac{285}{27} \approx 10,55$

E[X|Y] : NON SI TRATTA DI DIVISIONE.

- CASO $Y = 2$

$$\left(1 \cdot \frac{1}{27}\right) + \left(2 \cdot \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{27} + \frac{2}{9} = \frac{1+6}{27} = \frac{7}{27} \approx 0,25$$

- CASO $Y = 3$

$$\left(1 \cdot \frac{1}{9}\right) + \left(3 \cdot \frac{5}{27}\right) + \left(2 \cdot \frac{1}{27}\right) = \frac{1}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{27} = \frac{3+15+2}{27} = \frac{20}{27} \approx 0,74$$

- CASO $Y = 4$

$$\left(1 \cdot \frac{5}{27}\right) + \left(2 \cdot \frac{5}{27}\right) + \left(3 \cdot \frac{1}{27}\right) = \frac{5}{27} + \frac{10}{27} + \frac{1}{9} = \frac{15+3}{27} = \frac{18}{27} \approx 0,66$$

$$E[X|Y] = \begin{cases} 0,25 & \text{SE } Y = 2 \\ 0,74 & \text{SE } Y = 3 \\ 0,66 & \text{SE } Y = 4 \end{cases}$$

1.3

CALCOLIAMO α

$$\int_0^{1/2} \alpha + \int_2^{5/2} \alpha \Rightarrow \alpha \int_0^{1/2} 1 + \alpha \int_2^{5/2} 1 \Rightarrow \alpha \int_0^{1/2} x + \alpha \int_2^{5/2} x \Rightarrow \alpha\left[\frac{1}{2} - 0\right] + \alpha\left[\frac{5}{2} - 2\right] \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

CALCOLO CDF

- PER $x < 0$: $F(x) = 0$
- PER $0 \leq x < 1/2$: $\int_0^x 1 \Rightarrow \int_0^x x \Rightarrow x$
- PER $\frac{1}{2} \leq x < 2$: $\frac{1}{2}$
- PER $2 \leq x < \frac{5}{2}$: $\frac{1}{2} + \int_2^x 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + (x - 2)$
- PER $x \geq \frac{5}{2}$: 1

1.4

LA MEDIA EMPIRICA E' UNA VARIABILE CASUALE PERCHE' E' UNA FUNZIONE DI VARIABILI CASUALI. IL VALORE ATTESO E' UNA MEDIA CHE DIPENDE DALLA DISTRIBUZIONE DI X, NON DALL'ESITO DI UN SINGOLO ESPERIMENTO.

2.1

IN TOTALE ABBIAMO 64 CASELLE.

$$\log_2(64) - \log_2(32) = 6 - 5 = 1 \text{ bit}$$

QUESTO SIGNIFICA CHE DOPO AVER FATTO 32 VOLTE LO SPAZIO DELLE PROBABILITA' SI E' DIMEZZATO ALMENO ALMENO E OGNI DIMEZZAMENTO CORRISPONDE A 1 BIT D'INFORMAZIONE ACQUISITA

2.2

$$y_1[s] = x[s] + x[s-1] + x[s-2]$$
$$y_2[s] = x[s] + x[s-1]$$
$$y_3[s] = x[s] + x[s-2]$$

$$y_1 = 1 + 1 + 0 = 2 \mod 2 = 0$$
$$y_2 = 1 + 1 = 2 \mod 2 = 0$$
$$y_3 = 1 + 0 = 1 \mod 2 = 1$$

DISTANZA HAMMING: $\begin{matrix} 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \Rightarrow 2$ GUARDO LA DIFFERENZA

2.3

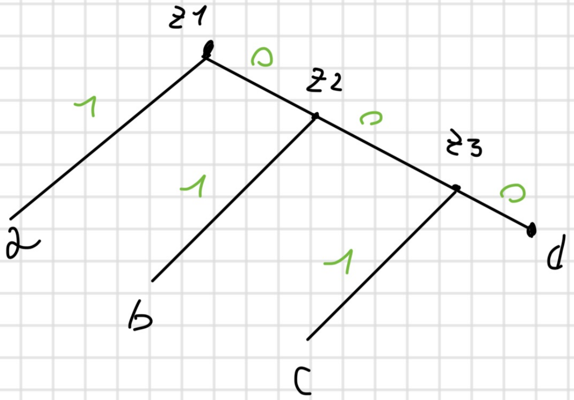
$$L(C) = \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(2 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(3 \cdot \frac{1}{8}\right) + \left(3 \cdot \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8+4+3+3}{8} = \frac{18}{8} \approx 2.25$$

$$Q = \left\{ a\left(\frac{1}{2}\right), b\left(\frac{1}{4}\right), c\left(\frac{1}{8}\right), d\left(\frac{1}{8}\right) \right\}$$

$$P(z_1) = P(c) + P(d) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$$

$$P(z_2) = P(b) + P(z_1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} = \frac{2+2}{8} = \frac{4}{8}$$

$$P(z_3) = P(a) + P(z_2) = \frac{1}{2} + \frac{4}{8} = \frac{4+4}{8} = 1$$



$c(a) = 1$

$c(b) = 01$

$c(c) = 001$

$c(d) = 000$

$$L(c) = \left(1 \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(2 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(3 \cdot \frac{1}{8}\right) + \left(3 \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4+4+3+3}{8}$$

$$= \frac{14}{8} \approx 1.75$$

E' OTTIMALE PERCHE' GENERA UN CODICE ISTANTANEO DOVE NESSUNA PAROLA DI CODICE E' PREFISSO DI UN'ALTRA

2.4

STRINGA 1 1 0

$-x_1 = 1$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + L_0 \cdot \mathrm{cdf}(1-1) = 0 + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\beta_1 = \alpha_0 + L_0 \cdot \mathrm{cdf}(1) = 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$I\left[\frac{1}{4}, 1\right) \qquad L_1 = \beta_1 - \alpha_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$-x_2 = 1$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + L_1 \cdot \mathrm{cdf}(1-1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{4+3}{16} = \frac{7}{16}$$

$$\beta_2 = \alpha_1 + L_1 \cdot \mathrm{cdf}(1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{1+3}{4} = 1$$

$$I\left[\frac{7}{16}, 1\right) \qquad L_2 = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

$-x_3 = 0$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + L_2 \cdot \mathrm{cdf}(-1) = \frac{7}{16}$$

$$\beta_3 = \alpha_2 + L_2 \cdot \mathrm{cdf}(0) = \frac{7}{16} + \left(\frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{16} + \frac{9}{64} = \frac{28+9}{64} = \frac{37}{64}$$

Stringa 000

$-x_1 = 0$

$\alpha_1 = \alpha_0 + l_0 \cdot cdf(-1) = 0$

$\beta_1 = \alpha_0 + l_0 \cdot cdf(0) = 0 + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\Phi \left[0, \frac{1}{4}\right) \qquad L_1 = \frac{1}{4}$

$-x_2 = 0$

$\alpha_2 = \alpha_1 + l_1 \cdot cdf(-1) = 0$

$\beta_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$\Phi \left[0, \frac{1}{16}\right) \qquad L_2 = \frac{1}{16}$

$-x_3 = 0$

$\alpha_3 = 0$

$\beta_3 = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

3.1

$P(C|A) = \frac{1}{8} \qquad P(C|B) = \frac{1}{4} \qquad P(A) = \frac{6}{8} \qquad P(B) = \frac{2}{8}$

$P(c_1) = P(C|A) \cdot P(A) + P(C|B) \cdot P(B) = \frac{5}{32}$

$P(c_1|c_2) = P(c_2|A) \cdot P(A|c_1) + P(c_2|B) \cdot P(B|c_1)$

$P(A|c_1) = \frac{P(c_2|A) \cdot P(A)}{P(c_1)} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{6}{8}}{\frac{5}{32}} = \frac{6}{64} \cdot \frac{32}{5} = \frac{6}{10}$

$P(B|c_1) = \frac{P(c_1|B) \cdot P(B)}{P(c_1)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{8}}{\frac{5}{32}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{32}{5} = \frac{2}{5}$

$P(c_1|c_2) = \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{80} + \frac{1}{10} = \frac{6+8}{80} = \frac{14}{80} \approx 0{,}175$

3.2

Con $p = 1/2$

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \Rightarrow \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{2}^{1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3} \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{16} \approx 0,25$$

Con $p = 1/10$

$$\binom{4}{1} \cdot \frac{1}{10}^{1} \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{3} = 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{10-1}{10}\right)^{3} = \frac{4}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{3} = \frac{4}{10} \cdot \frac{729}{1000} \approx 0,29$$

3.3

TUTTI GLI ELEMENTI DELLA MATRICE SONO > 0, POICHE' $P_{ij} > 0$ PER OGNI i, j E' POSSIBILE PASSARE DA OGNI STATO A OGNI ALTRO STATO IN UN SINGOLO PASSO. LA MATRICE E' REGOLARE.

3.4

$$\begin{cases} M_1 = 0,3\, M_1 + 0.6\, M_2 \\ M_2 = 0.7 M_1 + 0.4 M_2 \end{cases}$$ con vincolo $M_1 + M_2 = 1$

$0.7 M_1 = 0.6 M_2 \Rightarrow M_1 = 0,85\, M_2 \Rightarrow M_1 = 0,459$

Sostituendo: $0,85 M_2 + M_2 = 1 \Rightarrow 1,85 M_2 = 1 \Rightarrow M_2 = 0,54$