Casos de Estudio. Dinámica de poblaciones

Ejercicios con R

Víctor Granda

CREAF

2020/05/05 (updated: 2020-05-05)

R como herramienta de análisis y modelado

R (https://cran.r-project.org/) es un entorno de programación estadística y graficado, libre y gratuito.

En vez de dialogos como en excel, vamos a tener que programar un *script* para que haga los modelos y cálculos que necesitamos.

Una buena (y gratutita) introducción a R para el análisis de datos la podeís encontrar en:

R for Data Science (https://r4ds.had.co.nz/)

Ejercicio 1

A partir del fichero 'CensoDelta.xls' (colgado en el cv), que contiene el número de parejas de gaviota de Audouin (*Larus audouinii*) censadas en el Delta del Ebro entre los años 1981 y 2010:

a. Representar gráficamente el número de parejas en función del tiempo y ajustar la ecuación del modelo exponencial.

b. Calcular la tasa intrínseca de crecimiento poblacional (r) media para todo el período y su desviación estándar.

Ejercicio 1

Recordar:

Supongamos que no hay movimientos migratorios (población cerrada):

$$N_{t+1} = N_t + B + D \Rightarrow \frac{dN}{dt} = B - D$$

Supongamos que las tasas de natalidad y mortalidad son una función lineal del tamaño poblacional:

$$B = b \cdot N$$

$$D = d \cdot D$$

$$\frac{dN}{dt} = (b - d) \cdot N = \mathbf{r} \cdot N$$

r: tasa instantánea (intrínseca) de crecimiento

Ejercicio 1.

Nos queda una ecuación diferencial de primer orden. Si la resolvemos integrando:

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N \Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int r \cdot dt \Rightarrow ln(N) = r \cdot t + C$$

si definimos que cuando $t = 0 \Rightarrow N = N_0$, tenemos que $C = ln(N_0)$ y:

$$N_t = N_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{rt}}$$

Ejercicio 1.

En muchas especies las generaciones son discretas y el modelo continuo no es aplicable:

$$N_{t+1} = \lambda \cdot N_t \Rightarrow N_t = \lambda^t \cdot N_0$$

Cuando el paso de tiempo se hace muy pequeño el modelo discreto converge al modelo continuo:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{rt}} = \lambda^{\mathrm{t}} \Longleftrightarrow \mathrm{r} = \ln(\lambda)$$

Ejercicio 1.

¿Cómo hacemos esto en R?

Lo primero son las librerías que necesitaremos:

```
library(readxl)
library(dplyr)
```

Ejercicio 1.

Lo segundo es cargar los datos:

```
datos_censo <- read_excel("CensoDelta.xls")
names(datos_censo) <- c('Any', 'Parelles')
datos_censo$Any <- as.numeric(datos_censo$Any)
```

```
## Warning: NAs introducidos por coerción
```

```
datos_censo
```

```
## # A tibble: 33 x 2
##       Any Parelles
##     <dbl>    <dbl>
##  1  1981       36
##  2  1982      200
##  3  1983      546
##  4  1984     1200
##  5  1985     1200
##  6  1986     2200
##  7  1987     1850
##  8  1988     2861
##  9  1989     4266
```

Ejercicio 1.

> a. Representar gráficamente el número de parejas en función del tiempo y ajustar la ecuación del modelo exponencial:

```
# ajustar el modelo:
modelo_exponencial <- lm(log(Parelles) ~ Any, data = datos_censo)
# ver los coeficientes
coef(modelo_exponencial)
```

```
##  (Intercept)          Any
## -248.3285848    0.1286909
```

Ejercicio 1.

> a. Representar gráficamente el número de parejas en función del tiempo y ajustar la ecuación del modelo exponencial

```
coef(modelo_exponencial)
```

```
##  (Intercept)          Any
## -248.3285848    0.1286909
```

Con los coeficientes podemos sacar la ecuación, **pero recordar**, hemos transformado la variable `Parejas` mediante el logaritmo neperiano a la hora de hacer el modelo, asi pues, la ecuación de nuestro modelo exponencial debería ser:

exp(-248.329) · exp(0.129 · t)

que queda como:

$$1.419 \cdot 10^{-108} \cdot exp(0.129 \cdot t)$$

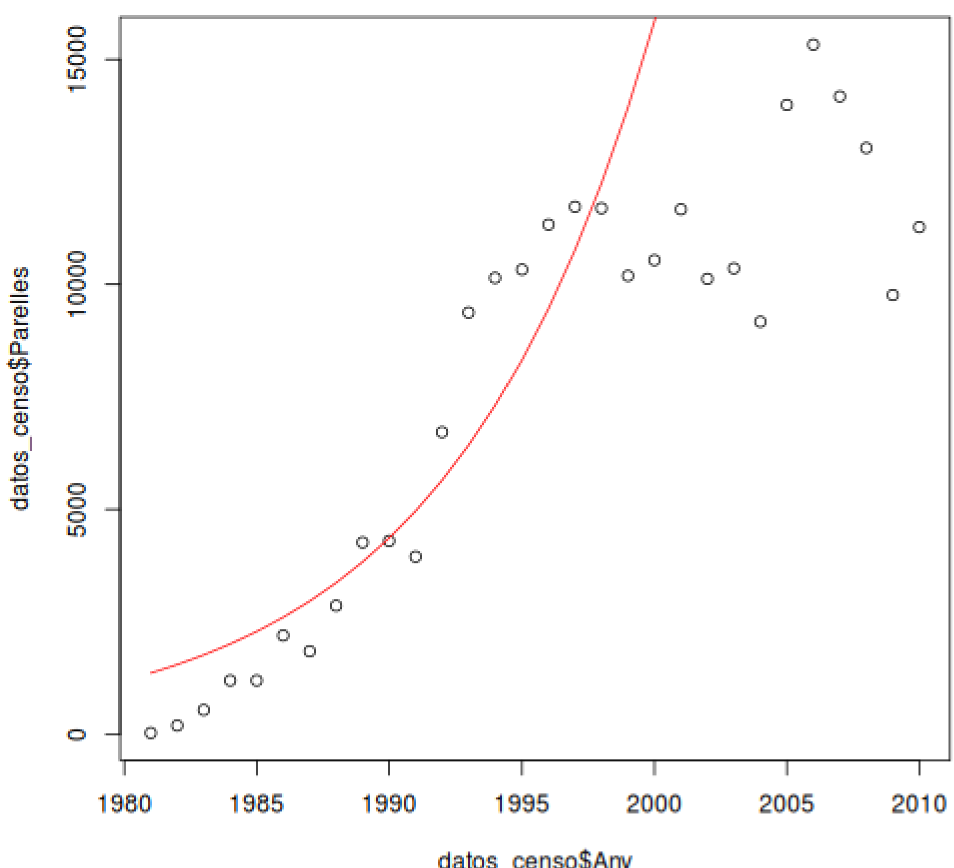
Ejercicio 1.

> a. Representar gráficamente el número de parejas en función del tiempo y ajustar la ecuación del modelo exponencial

Para graficarlo, usamos plot:

```
plot(datos_censo$Any, datos_censo$Parelles)
lines(
  datos_censo$Any, 1.419e-108 * exp(0.129*datos_censo$Any),
  col = 'red'
)
```

```r
plot(datos_censo$Any, datos_censo$Parelles)
lines(
  datos_censo$Any, 1.419e-108 * exp(0.129*datos_censo$Any),
  col = 'red'
)
```



Ejercicio 1.

> b. Calcular la tasa intrínseca de crecimiento poblacional (r) media para todo el período y su desviación estándar.

Recordad,

$$N_{t+1} = \lambda \cdot N_t \Rightarrow \lambda = \frac{N_{t+1}}{N_t}$$

y:

$$r = ln(\lambda)$$

Así que:

```
# calculamos lambda y R
datos_censo_tasa_crecim <- datos_censo %>%
  mutate(
    lambda = Parelles/lag(Parelles),
    r = log(lambda)
  )
```

Ejercicio 1.

> b. Calcular la tasa intrínseca de crecimiento poblacional (r) media para todo el período y su desviación estándar.

```
datos_censo_tasa_crecim
```

```
## # A tibble: 33 x 4
##      Any Parelles lambda        r
##    <dbl>    <dbl>  <dbl>    <dbl>
##  1  1981       36 NA     NA
##  2  1982      200  5.56   1.71
##  3  1983      546  2.73   1.00
##  4  1984     1200  2.20   0.787
##  5  1985     1200  1      0
##  6  1986     2200  1.83   0.606
##  7  1987     1850  0.841 -0.173
##  8  1988     2861  1.55   0.436
##  9  1989     4266  1.49   0.400
## 10  1990     4300  1.01   0.00794
## # … with 23 more rows
```

Ejercicio 1.

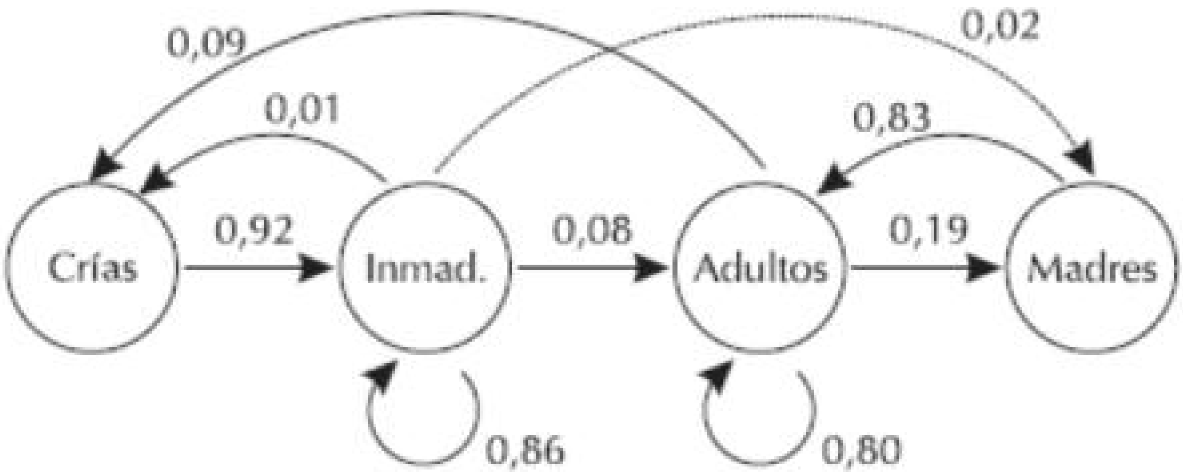
> b. Calcular la tasa intrínseca de crecimiento poblacional (r) media para todo el período y su desviación estándar.

```
# calculamos media y desviación
datos_censo_tasa_crecim %>%
  summarise(
    media = mean(r, na.rm = TRUE),
    desvest = sd(r, na.rm = TRUE)
  )
```

```
## # A tibble: 1 x 2
##   media desvest
##   <dbl>   <dbl>
## 1 0.198   0.421
```

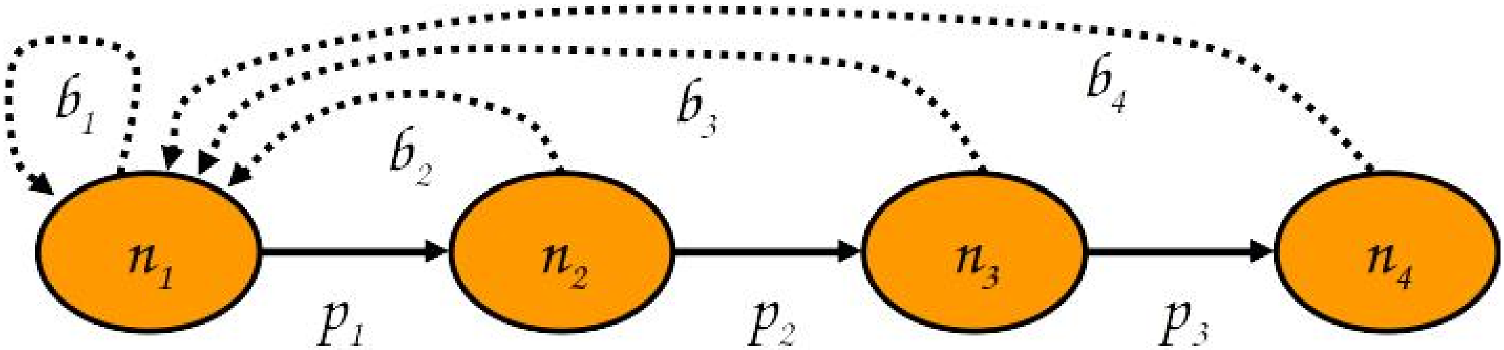
Ejercicio 2.

Realizar proyecciones del tamaño de una población que crece según el diagrama de transiciones siguiente (los números son las probabilidades de transición anuales para las **hembras**):



Para ello, calcula el número de hembras previsto por los años 2010, 2020, … 2050 y representa los resultados gráficamente, tanto en cuanto a la evolución de la población total como para la de los diferentes estadios. Considera que la población inicial (año 2000) es de 300 hembras adultas.

Ejercicio 2.



$$n_{1,t+1} = n_{1,t} \cdot b_1 + n_{2,t} \cdot b_2 + \ldots + n_{m,t} \cdot b_m = \sum_{i=1}^{m} n_{i,t} \cdot b_i$$

$$n_{2,t+1} = n_{1,t} \cdot p_1$$

$$\ldots$$

Ejercicio 2.

Si $n_{t+1} = \lambda \cdot n_t$, entonces:

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= \lambda \cdot n_0 \\ n_2 &= \lambda \cdot n_1 = \lambda \cdot \lambda \cdot n_0 = \lambda^2 \cdot n_0 \\ n_3 &= \lambda \cdot n_2 = \lambda \cdot \lambda^2 \cdot n_0 = \lambda^3 \cdot n_0 \\ n_4 &= \lambda \cdot n_3 = \lambda \cdot \lambda^3 \cdot n_0 = \lambda^4 \cdot n_0 \end{aligned}\right\} n_t = \lambda^t \cdot n_0$$

Así pues, podemos construir una matriz de poblaciones que multiplicado por las poblaciones iniciales para cada nivel de desarrollo nos de los valores para el siguiente punto temporal:

$$\begin{bmatrix} n_{1,t+1} \\ n_{2,t+1} \\ n_{3,t+1} \\ n_{4,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{1,t} \\ n_{2,t} \\ n_{3,t} \\ n_{4,t} \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.

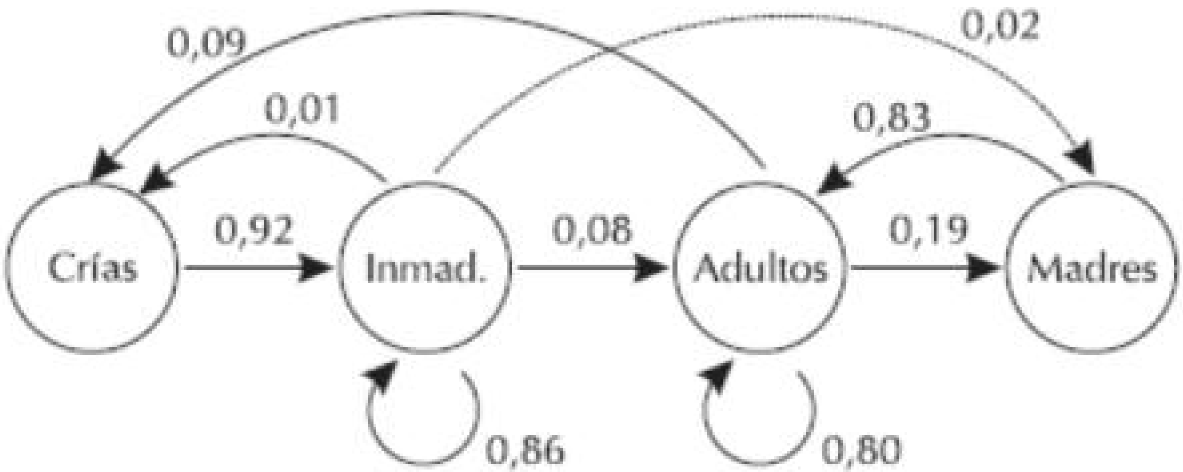
¿Cómo hacemos esto en R?

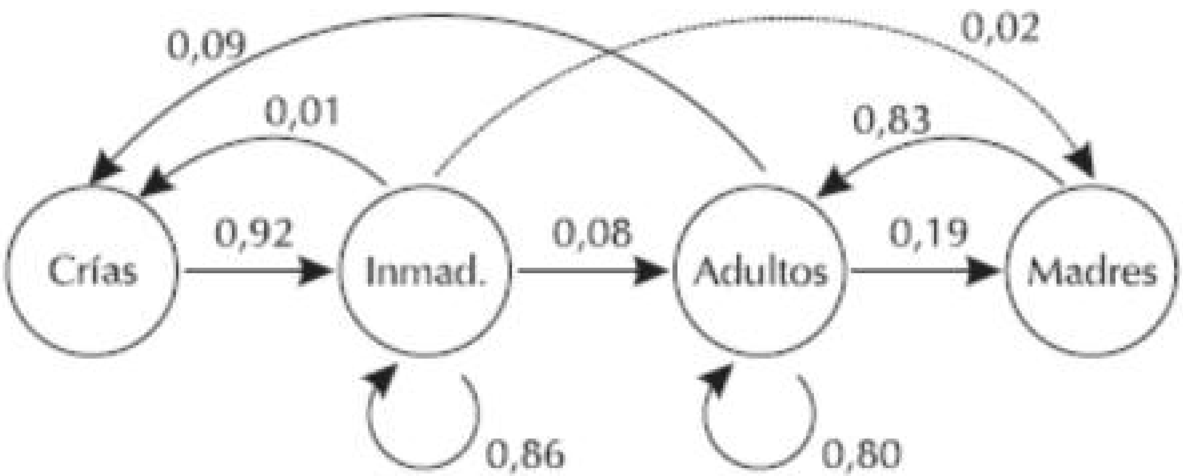
Lo primero son las librerías que necesitaremos:

```r
library(ggplot2)
library(tidyr)
library(dplyr)
```

Ejercicio 2.

Lo siguiente es crear los datos. En este caso no tenemos un excel, así que tenemos que fabricarnos la matriz de poblaciones nosotros mismos a partir del esquema proporcionado:






```r
matriz_pob_struc <- matrix(c(
  0, 0.01, 0.09, 0,
  0.92, 0.86, 0, 0,
  0, 0.08, 0.8, 0.83,
  0, 0.02, 0.19, 0
), nrow = 4, byrow = TRUE)

matriz_pob_struc
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,] 0.00 0.01 0.09 0.00
## [2,] 0.92 0.86 0.00 0.00
## [3,] 0.00 0.08 0.80 0.83
## [4,] 0.00 0.02 0.19 0.00
```

Ejercicio 2.

Lo mismo para la matriz de poblaciones incial (son 300 hembra adultas):

```
matriz_inicial <- matrix(c(
  0,
  0,
  300,
  0
), nrow = 4, byrow = TRUE)

matriz_inicial
```

```
##      [,1]
## [1,]    0
## [2,]    0
## [3,]  300
## [4,]    0
```

Y ya tenemos listo los datos de partida

Ejercicio 2.

> Para ello, calcula el número de hembras previsto por los años 2010, 2020, … 2050 y representa los resultados gráficamente, tanto en cuanto a la evolución de la población total como para la de los diferentes estadios. Considera que la población inicial (año 2000) es de 300 hembras adultas.

Nuestro modelo para el año 2001 seria:

$$\begin{bmatrix} Crías_{2001} \\ Inmad_{2001} \\ Adultos_{2001} \\ Madres_{2001} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & 0.09 & 0 \\ 0.92 & 0.86 & 0 & 0 \\ 0 & 0.08 & 0.8 & 0.83 \\ 0 & 0.02 & 0.19 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 0 \\ 240 \\ 57 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.

> Para ello, calcula el número de hembras previsto por los años 2010, 2020, … 2050 y representa los resultados gráficamente, tanto en cuanto a la evolución de la población total como para la de los diferentes estadios. Considera que la población inicial (año 2000) es de 300 hembras adultas.

Podemos ver que esto es así multiplicando las matrices en R:

```
res_2001 <- matriz_pob_struc %*% matriz_inicial
res_2001
```

```
##      [,1]
## [1,]   27
## [2,]    0
## [3,]  240
## [4,]   57
```

Ejercicio 2.

> Para ello, calcula el número de hembras previsto por los años 2010, 2020, … 2050 y representa los resultados gráficamente, tanto en cuanto a la evolución de la población total como para la de los diferentes estadios. Considera que la población inicial (año 2000) es de 300 hembras adultas.

Y por tanto, para 2002:

$$\begin{bmatrix} Crías_{2002} \\ Inmad_{2002} \\ Adultos_{2002} \\ Madres_{2002} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & 0.09 & 0 \\ 0.92 & 0.86 & 0 & 0 \\ 0 & 0.08 & 0.8 & 0.83 \\ 0 & 0.02 & 0.19 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 27 \\ 0 \\ 240 \\ 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 25 \\ 239 \\ 46 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.

> Para ello, calcula el número de hembras previsto por los años 2010, 2020, … 2050 y representa los resultados gráficamente, tanto en cuanto a la evolución de la población total como para la de los diferentes estadios. Considera que la población inicial (año 2000) es de 300 hembras adultas.

Podemos ver que esto es así multiplicando las matrices en R:

```
res_2002 <- matriz_pob_struc %*% res_2001
res_2002
```

```
##         [,1]
## [1,]  21.60
## [2,]  24.84
## [3,] 239.31
## [4,]  45.60
```

Pero tenemos que hacerlo hasta 2050, así que en R podemos hacer un pequeño bucle (loop) para que nos calcule todo.

Ejercicio 2.

> Para ello, calcula el número de hembras previsto por los años 2010, 2020, … 2050 y representa los resultados gráficamente, tanto en cuanto a la evolución de la población total como para la de los diferentes estadios. Considera que la población inicial (año 2000) es de 300 hembras adultas.

```
matriz_final <- matriz_inicial
for (time_step in 1:50) {
  matriz_final <- cbind(
    matriz_final,
    round(matriz_pob_struc %*% matriz_final[,time_step], 0)
  )
}
matriz_final
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10] [,11] [,12] [,13
## [1,]    0   27   22   22   21   21   21   21   21    21    21    21    2
## [2,]    0    0   25   42   56   67   77   86   93    99   104   109   11
## [3,]  300  240  239  231  226  223  220  219  218   218   218   218   22
## [4,]    0   57   46   46   45   44   44   43   43    43    43    44    4
##      [,14] [,15] [,16] [,17] [,18] [,19] [,20] [,21] [,22] [,23] [,24] [
## [1,]    21    21    21    21    22    22    22    22    22    23    23
```

Ejercicio 2.

> Para ello, calcula el número de hembras previsto por los años 2010, 2020, … 2050 y representa los resultados gráficamente, tanto en cuanto a la evolución de la población total como para la de los diferentes estadios. Considera que la población inicial (año 2000) es de 300 hembras adultas.

Podemos mejorar un poco el output, para verlo mejor

```
datos_finales <- t(matriz_final) %>%
  as.data.frame()
names(datos_finales) <- c('Crias', 'Inmaduros', 'Adultos', 'Madres'
datos_finales <- datos_finales %>%
  mutate(
    Total = Crias + Inmaduros + Adultos + Madres,
    Año = 2000:2050
  ) %>%
  pivot_longer(cols = Crias:Total, names_to = 'Stage')
datos_finales
```

```r
datos_finales <- t(matriz_final) %>%
  as.data.frame()
names(datos_finales) <- c('Crias', 'Inmaduros', 'Adultos', 'Madres'
datos_finales <- datos_finales %>%
  mutate(
    Total = Crias + Inmaduros + Adultos + Madres,
    Año = 2000:2050
  ) %>%
  pivot_longer(cols = Crias:Total, names_to = 'Stage')
datos_finales
```

```
## # A tibble: 255 x 3
##       Año Stage     value
##     <int> <chr>     <dbl>
##  1  2000 Crias         0
##  2  2000 Inmaduros     0
##  3  2000 Adultos     300
##  4  2000 Madres        0
##  5  2000 Total       300
##  6  2001 Crias        27
##  7  2001 Inmaduros     0
##  8  2001 Adultos     240
##  9  2001 Madres       57
## 10  2001 Total       324
## # … with 245 more rows
```

Ejercicio 2.

> Para ello, calcula el número de hembras previsto por los años 2010, 2020, … 2050 y representa los resultados gráficamente, tanto en cuanto a la evolución de la población total como para la de los diferentes estadios. Considera que la población inicial (año 2000) es de 300 hembras adultas.

Ahora podemos graficar:

```
datos_finales %>%
  ggplot(
    aes(x = Año, y = value, color = Stage)
  ) +
  geom_point()
```

```
datos_finales %>%
  ggplot(
    aes(x = Año, y = value, color = Stage)
  ) +
  geom_point()
```