Sistema hepático

Beltran Vega Sofia (21212143), Díaz Muruaga Carlos Manuel (21212741),
Maldonado Delgado Lizette (21212168)
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana

December 13, 2024

Palabras clave: Circuito RLC; Cirrosis; Ecuación de tercer grado; Sistema Hepático; Proceso Metabólico
.

Correo: **21212143@tectijuana.edu.mx, 21212741@tectijuana.edu.mx, 21212168@tectijuana.edu.mx**

Carrera: **Ingeniería Biomédica**

Asignatura: **Modelado de Sistemas Fisiológicos**

Profesor: **Dr. Paul Antonio Valle Trujillo** (paul.valle@tectijuana.edu.mx)

1 Función de transferencia

1.1 Ecuaciones principales

La ecuación que define el comportamiento del voltaje de entrada en el sistema, esta definida por el inductor que representa el retardo metabólico por el cual pasa la corriente $I_1(t)$, el flujo sanguíneo que va hacia el hígado es representado por el resistor R_1 por donde nuevamente pasa la corriente $I_1(t)$ y el capacitor C_1 almacena las toxinas temporalmente donde se cruzan las corrientes $I_1(t)$ e $I_2(t)$:

$$V_{in} = L\frac{dI_1(t)}{dt} + R_1 I_1(t) + \frac{1}{C_1}\int \left[I_1(t) - I_2(t)\right] dt$$

Entonces la diferencia de potencial en el sistema esta dada por :

$$\frac{1}{C_1}\int \left[I_1(t) - I_2(t)\right] dt = R_1 I_1(t) + \frac{1}{C_2}\int I_2(t)dt$$

Para la ecuación del voltaje total de salida se tiene que:

$$V_{out} = \frac{1}{C_2}\int I_2(t)dt$$

1.2 Transformada de Laplace

Se transforma la ecuación que define el comportamiento del voltaje de entrada en el sistema al dominio de la frecuencia, de acuerdo a la sustitución de terminos para representar la Transformada de Laplace, queda que:

$$V_{in}(s) = LsI_1(s) + R_1I_1(s) + \frac{1}{C_1s}[I_1(s) - I_2(s)]$$

La diferencia de potencial en terminos de transformada de laplace, esta dada por:

$$\frac{1}{C_1s}[I_1(s) - I_2(s)] = R_2I_2(s) + \frac{I_2(s)}{C_2s}$$

Por lo que la ecuación transformada para calcular el voltaje total de salida es:

$$V_{out}(s) = \frac{I_2(s)}{C_2s}$$

1.3 Procedimiento algebraico

Primeramente, llamaremos a las ecuaciones descritas en la parte "Transformada de Laplace", y así sucesivamente con las ecuaciones que se vayan obteniendo:

$$\begin{aligned} V_{in}(s) &= LsI_1(s) + R_1I_1(s) + \frac{1}{C_1s}[I_1(s) - I_2(s)] : I \\ V_{out}(s) &= \frac{I_2(s)}{C_2s} : II \\ \frac{1}{C_1s}[I_1(s) - I_2(s)] &= R_2I_2(s) + \frac{I_2(s)}{C_2s} : III \end{aligned}$$

Empezamos seleccionando la ecuación I y hacemos la operación del paréntesis:

$$V_{in}(s) = LsI_1(s) + R_1I_1(s) + \frac{1}{C_1s}I_1(s) - \frac{1}{C_1s}I_2(s)]$$

Después factorizamos el término más en común, es decir, $I_1(s)$.Llamando a la ecuación resultante IV:

$$V_{in}(s) = \left(Ls + R_1 + \frac{1}{C_1s}\right)I_1(s) - \frac{I_2(s)}{C_1s} : IV$$

Ahora usamos la ecuación III para hacer la operación del paréntesis:

$$\frac{I_1(s)}{C_1 s} - \frac{I_2(s)}{C_1 s} = R_2 I_2(s) + \frac{I_2(s)}{C_2 s}$$

Ahora, dejamos de un lado del igual todos los términos en función de $I_1(s)$ y del otro lado los términos en función de $I_2(s)$:

$$\frac{I_1(s)}{C_1 s} = R_2 I_2(s) + \frac{I_2(s)}{C_2 s} + \frac{1}{C_1 s} I_2(s)$$

Factorizamos los términos iguales, es decir $I_2(s)$:

$$\frac{I_1(s)}{C_1 s} = \left(R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_1 s}\right) I_2(s)$$

Despejamos , para que se quede una ecuación que exprese su valor:

$$I_1(s) = \left(R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_1 s}\right) I_2(s) C_1 s$$

Metemos el valor despejado dentro del paréntisis. Para finalmente, a la ecuación obtenida, darle el nombre de V:

$$I_1(s) = \left(R_2 C_1 s + \frac{C_1}{C_2} + 1\right) I_2(s) : V$$

Ahora, usamos la ecuación V para introducirla en la ecuación IV donde se pueda sustituir. Para dejar todo en función de $I_2(s)$:

$$V_{in}(s) = \left(Ls + R_1 + \frac{1}{C_1 s}\right) I_1(s) - \frac{I_2(s)}{C_1 s} : IV$$

$$I_1(s) = \left(R_2 C_1 s + \frac{C_1}{C_2} + 1\right) I_2(s) : V$$

$$V_{in}(s) = \left(Ls + R_1 + \frac{1}{C_1 s}\right)\left(R_2 C_1 s + \frac{C_1}{C_2} + 1\right) I_2(s) - \frac{I_2(s)}{C_1 s}$$

:

Hacemos la multiplicación de los paréntesis:

$$V_{in}(s) = \frac{\left(LC_1 s^2 + R_1 C_1 s + 1\right)\left(C_1 + C_2 + R_2 C_1 C_2 s\right)}{C_1 C_2 s} I_2(s) - \frac{I_2(s)}{C_1 s}$$

Factorizamos $I_2(s)$:

$$V_{in}(s) = \left(\frac{\left(LC_1 s^2 + R_1 C_1 s + 1\right)\left(C_1 + C_2 + R_2 C_1 C_2 s\right)}{C_1 C_2 s} - \frac{1}{C_1 s}\right) I_2(s)$$

Realizamos la suma de fracciones. Para darle el nombre de VI:

$$V_{in}(s) = \frac{R_2LC_1C_2s^3 + (LC_1 + LC_2 + R_1R_2C_1C_2)\, s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)\, s + 1}{C_2s} I_2(s) : VI$$

Utilizamos la ecuación II para dividirla entre VI para poder obtener la función de tranferencia:

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{I_2(s)}{C_2s}}{\frac{R_2LC_1C_2s^3 + (LC_1+LC_2+R_1R_2C_1C_2)s^2 + (R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}{1} \frac{I_2(s)}{C_2s}}$$

Realizamos la división de fracciones y se cancelan (se hace 1 la división) los términos posibles:

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{R_2LC_1C_2s^3 + (LC_1+LC_2+R_1R_2C_1C_2)s^2 + (R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}{1} \frac{1}{1}}$$

Al acomodar los términos se obtiene que:

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{R_2LC_1C_2s^3 + (LC_1 + LC_2 + R_1R_2C_1C_2)\, s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)\, s + 1}$$

1.4 Resultado

Al dividir la respuesta de la salida sobre la entrada del voltaje y utilizando sus ecuaciones simplificadas, se obtiene la función de transferencia:

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{R_2LC_1C_2s^3 + (LC_1 + LC_2 + R_1R_2C_1C_2)\, s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)\, s + 1}$$

2 Estabilidad del sistema en lazo abierto

Al ser un sistema de tercer orden, tendrá tres polos. La estabilidad del sistema de lazo abierto puede analizarse a partir de las raíces del denominador de su función de transferencia:

$$R_2LC_1C_2s^3 + (LC_1 + LC_2 + R_1R_2C_1C_2)\, s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)\, s + 1 = 0$$

Se reacomodan los términos de diferente orden de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a^3 &= R_2LC_1C_2 \\ a^2 &= LC_1 + LC_2 + R_1R_2C_1C_2 \\ a^1 &= R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2 \\ a^o &= 1 \end{aligned}$$

Se tiene el primer caso, en donde se utilizan los valores que aparecen en la tabla de control:

$$
\begin{aligned}
L &= 1 \\
R_1 &= 100 \\
C_1 &= 10 \times 10^{-6} \\
R_2 &= 10 \\
C_2 &= 100 \times 10^{-6}
\end{aligned}
$$

El valor de la raíces calculadas para este caso son: $\begin{matrix} -10992 \\ -54.173 - 78.505i \\ -54.173 + 78.505i \end{matrix}$

La ecuación con valores numéricos es:

$$1.0 \times 10^{-8} s^3 + 1.11 \times 10^{-4} s^2 + 0.012\, s + 1.0 = 0.0$$

En el segundo caso se utilizan los valores que aparecen en la tabla de caso:

$$
\begin{aligned}
L &= 2 \\
R_1 &= 1000 \\
C_1 &= 5 \times 10^{-6} \\
R_2 &= 2000 \\
C_2 &= 50 \times 10^{-6}
\end{aligned}
$$

El valor de la raíces calculadas para este caso son: $\begin{matrix} -6.6223 \\ -301.69 - 244.92i \\ -301.69 + 244.92i \end{matrix}$

Por lo que la ecuación con valores numéricos para este caso es:

$$1.0 \times 10^{-6} s^3 + 0.00061 s^2 + 0.155\, s + 1.0 = 0.0$$

3 Modelo de ecuaciones integro-diferenciales

El modelo de ecuaciones integro-diferenciales se forma al despejar las variables dependientes y la salida del sistema, por lo tanto, se obtienen las siguientes ecuaciones para $I_1(t)$, $I_2(t)$ y V_{out}:

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &= \frac{1}{R_1}\left[V_{in} - L\frac{dI_1(t)}{dt} - \frac{1}{C_1}\int \left[I_1(t) - I_2(t)\right] dt\right] \\
I_2(t) &= \frac{1}{R_2}\left[\frac{1}{C_2}\int I_2(t)dt - \frac{1}{C_1}\int \left[I_1(t) - I_2(t)\right] dt\right] \\
V_{out} &= \frac{1}{C_2}\int I_2(t)dt
\end{aligned}
$$

4 Error en estado estacionario

El error en estado estacionario se calcula a partir de evaluar el siguiente limite donde se resta 1 menos la función de transferencia:

$$e(t) = \lim_{s \to 0} sR(s) \left[1 - \frac{V_s(s)}{V_e(s)} \right]$$

Por lo que el error resultante es:

$$e(t) = \lim_{s \to 0} sR(s) \left[1 - \frac{1}{R_2LC_1C_2s^3 + (LC_1 + LC_2 + R_1R_2C_1C_2) s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2) s + 1} \right] = 0$$

5 Cálculo de componentes para el controlador PID

Una vez que se establecieron las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema de tercer orden, se calculan las ganacias kI , kP y kD sobre las cual el controlador PID reacciona atendiendo cualquier error, estos valores se obtienen a partir del simulador en Simulink que funciona sobre el entorno de programación de Matlab, con ello se muestran los siguientes datos:

$$\begin{aligned} k_I &= \frac{1}{R_eC_r} = 242.0391 \\ k_P &= \frac{R_r}{R_e} = 12.082 \\ k_D &= R_rC_e = 0.066498 \end{aligned}$$

Se propone un capacitor comercial, con el valor de:

$$C_r = 1 \times 10^{-6}$$

Una vez obtenidas las ganancias kI , kP y kD en conjunto con el valor del capacitor C_r, se calculan los valores de los componentes Re, Rr y Ce, los cuales son:

$$\begin{aligned} R_e &= \frac{1}{k_IC_r} = 4131.563867 \\ R_r &= k_PR_e = 49917.55464 \\ C_e &= \frac{k_D}{R_r} = 1.3321 \times 10^{-6} \end{aligned}$$