

Université d'ORAN  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

Mémoire de MAGISTER  
en Mathématiques

*Option:* Asymptotique des équations différentielles et calcul formel

*Présenté par*  
**BENSID YAZID**

**Thème :**

**Etude des courbes de Bézier et des B-splines**

**Soutenu devant la commission d'examen :**

|                        |                   |                          |                          |
|------------------------|-------------------|--------------------------|--------------------------|
| <b>M. M.BELKHELFA</b>  | <b>Professeur</b> | <b>Univ. De Mascara</b>  | <b><u>Président</u></b>  |
| <b>Mlle F. BOUDAUD</b> | <b>M.C.A</b>      | <b>Université d'Oran</b> | <b><u>rapporteur</u></b> |
| <b>M. K BELGHABA</b>   | <b>M.C.A</b>      | <b>Université d'Oran</b> | <b><u>Examineur</u></b>  |
| <b>M. A.HAKEM</b>      | <b>M.C.A</b>      | <b>Université De SBA</b> | <b><u>Examineur</u></b>  |
| <b>M.A. BOUHASSOUN</b> | <b>M.C.A</b>      | <b>Université d'Oran</b> | <b><u>Examineur</u></b>  |

# dédicace

*A ceux qui m'ont tout appris...*

*A mes parents*

*A mon frère*

*je dédie ce travail.*

# REMERCIEMENTS

*Que tous mes professeurs trouvent ici  
l'expression de toute ma gratitude,  
particulièrement ma directrice de thèse  
F.BOUDAOU pour ses conseils précieux et  
tout l'intérêt qu'elle a porté à cette étude.*

*Je tiens à remercier Mr. BELKHALFA pour  
avoir présidé le jury.*

*Mes remerciements vont aussi à Messieurs  
BOUHASSOUN, BELGHABA et HAKEM  
pour avoir bien voulu faire partie du jury.*

# courbes de Bézier et B-splines

Bensid Yazid

24 mai 2011

# Introduction

Qu'est ce que la modélisation géométrique ?

Le terme "modélisation géométrique" est apparu pour la première fois durant la fin des années soixantes et au début des années soixantes-dix, un temps où les graphismes par ordinateur, le dessin assisté par ordinateur et les technologies industrielles connaissaient un développement rapide.

La discipline de modélisation géométrique est une collection de méthodes mathématiques qu'on utilise pour décrire la forme d'un objet ou pour exprimer un quelconque processus physique en terme de métaphore géométrique appropriée.

Ces méthodes comprennent le dessin géométrique assisté par ordinateur (ou CAGD pour : *Computer Aided Geometric Design*), la modélisation des solides, la géométrie algébrique et la géométrie calculatoire.

Le dessin géométrique assisté par ordinateur (CAGD) applique les mathématiques des courbes et surfaces à la modélisation, essentiellement en utilisant les équations paramétriques de la géométrie différentielle. c'est là où se trouve les racines de la modélisation géométrique contemporaine.

La modélisation des solides (souvent appelée "géométrie de construction des solides" ou CSG) nous permet de combiner des formes simples pour créer des modèles de solides complexes. Le CSG puise ses fondements mathématiques dans la topologie, la géométrie algébrique et l'algèbre booléenne.

La géométrie algébrique est l'extension contemporaine de la géométrie analytique classique, elle comprend aussi la géométrie différentielle.

La géométrie calculatoire s'occupe de créer et analyser des algorithmes géométriques, elle a des liens forts avec les méthodes numériques, la théorie calculatoire et l'analyse complexe.

Le dessin géométrique assisté par ordinateur et la géométrie des solides sont des branches de la modélisation géométrique alors que les géométries algébrique et calculatoire touchent aussi à d'autres champs mathématiques.

Quand on construit un modèle d'un objet, on crée un substitut, une représentation. L'objet peut déjà exister ou alors être le dessin d'un objet futur qui n'existe pas encore. L'objet peut être aussi un phénomène physique qu'on aimerait étudier.

Un modèle efficace doit être plus facile à tester et à analyser que l'objet modélisé. Il doit aussi réagir (de manière limitée) de la même façon que l'objet étudié.

Modéliser quelque chose, veut dire, alors, lui donner une forme. En modélisation géométrique, on définit une forme par un ensemble d'énoncés

mathématiques ainsi que par des relations logiques satisfaisants un certain nombre d'axiomes. Ces axiomes sont posés tels que les propriétés générales du modèle étudié soient représentatives de l'objet modélisé. La modélisation géométrique est le processus de création de ces énoncés et relations.

Traditionnellement, les modèles étaient faits en argile ou en bois, ou alors dessinés en forme de plan.

Pour les objets très grands, les modèles étaient bien plus petits et plus faciles à évaluer avant de passer à la construction de l'objet lui-même.

De nos jours, on utilise la modélisation géométrique pour créer une description mathématique précise de la forme d'un objet hypothétique ou réel, ou pour simuler un phénomène physique. Le modèle obtenu est analytique et abstrait, contrastant avec les modèles physiques utilisés dans le passé qui étaient eux bien concrets.

## Pourquoi modéliser un objet ?

On crée un modèle physique ou abstrait, pour disposer d'un substitut économique et maniable à l'objet étudié et parce qu'il est plus facile et plus pratique d'analyser un modèle que de tester, mesurer ou d'expérimenter avec l'objet ou le phénomène réel. Cela peut être dû à la taille (l'objet étant trop grand ou trop petit), à la complexité (le modèle est plus simple relativement aux caractéristiques intéressantes), ou au temps (le phénomène est trop rapide, trop lent ou incontrôlable).

Au delà des avantages d'analyse, le modèle mathématique est un important moyen pour transmettre les informations, c'est le cas dans l'industrie, où des robots peuvent construire des pièces mécaniques complexes en disposant de leur modèle géométrique abstrait.

La modélisation géométrique est devenue réellement incontournable dans beaucoup de secteurs d'activités. La modélisation géométrique, usant de la géométrie analytique et différentielle, des vecteurs et matrices, des tenseurs, de la topologie, de la théorie des ensembles et tout un arsenal de méthodes numériques pour saisir la description potentiellement complexe d'un objet, requiert la puissance d'un ordinateur. Il s'agit d'un processus assisté par ordinateur où le modèle est stocké et analysé dans la machine.

L'utilisation de l'ordinateur est, en effet, centrale dans le processus de modélisation. Sans machine de calcul, il serait impossible de construire et d'analyser des modèles assez sophistiqués et complexes et qui soient d'une importance pratique.

Champs d'application de la modélisation géométrique :

On peut distinguer trois champs d'application :

- 1) la représentation d'un objet existant.
- 2) un dessin initial, ou on doit créer un objet nouveau pour satisfaire certains buts esthétiques ou fonctionnels en définissant et en révisant une forme d'un objet hypothétique en lui appliquant différentes transformations jusqu'à obtenir la forme voulue au départ. Ceci peut être illustré par le processus de création d'une nouvelle voiture ou d'une nouvelle pièce mécanique par exemple.
- 3) le rendu : où on doit générer une image du modèle pour l'interpréter visuellement

Les graphismes, le dessin assisté par ordinateur ainsi que la fabrication assisté par ordinateur ont été ,et continuent d'être, à l'origine du développement de la modélisation géométrique.

Aujourd'hui, la robotique, la réalité virtuelle, la visualisation scientifique et l'intelligence artificielle font de nouvelles demandes à la modélisation géométrique.

Les graphismes d'ordinateurs peuvent maintenant produire des rendus très réalistes des objets tridimensionnels, y compris l'apparence des textures, des ombres ainsi que la luminosité des objets. L'art, l'animation et la réalité virtuelle sont toutes en train de faire progresser cette science tous les jours et l'avenir et prometteur : de nombreux challenges l'attendent de l'art à l'industrie.

## Courbes de Bézier et modélisation géométrique :

En modélisation géométrique, il s'agit de créer des modèles c'est à dire des formes, mais pas n'importe quelle forme. Celles-ci doivent avoir un sens mathématique, il faut donc qu'elles soient définies par certaines équations. Il faut aussi qu'elles soient maléables et faciles à transformer et à manipuler. Seules certaines courbes satisfont à ces conditions dont celles qui feront l'objet de notre étude : Les courbes de Bézier et leurs généralisation, les B-splines.

# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Les Polynômes de Bernstein</b>                               | <b>9</b>  |
| 1.1      | Définition . . . . .  | 9         |
| 1.2      | Propriétés des polynômes de Bernstein . . . . .                 | 10        |
| 1.2.1    | Récurrence : . . . . .  | 10        |
| 1.2.2    | Partition de l'unité . . . . .                                  | 11        |
| 1.2.3    | Positivité . . . . .  | 11        |
| 1.2.4    | Symétrie . . . . .  | 12        |
| 1.3      | Dérivation des polynômes de Bernstein : . . . . .               | 12        |
| <b>2</b> | <b>Les Courbes de Bézier</b>                                    | <b>15</b> |
| 2.1      | Introduction . . . . .  | 15        |
| 2.2      | Paramétrisation d'une courbe . . . . .                          | 15        |
| 2.2.1    | Equations explicites et implicites d'une courbe . . . . .       | 15        |
| 2.2.2    | Représentation paramétrique . . . . .                           | 16        |
| 2.3      | Définition . . . . .  | 17        |
| 2.4      | Construction géométrique des courbes de Bézier . . . . .        | 19        |
| 2.4.1    | Algorithme de De Casteljau . . . . .                            | 20        |
| 2.4.2    | Démonstration de l'algorithme de De Casteljau : . . . . .       | 22        |
| 2.5      | Dérivation des courbes de Bézier . . . . .                      | 23        |
| 2.6      | Dérivation d'une courbe de Bézier et algorithme de De Casteljau | 27        |
| 2.6.1    | Première méthode . . . . .                                      | 27        |
| 2.6.2    | Seconde méthode . . . . .                                       | 27        |
| 2.7      | Propriétés des courbes de Bézier . . . . .                      | 28        |
| 2.7.1    | Interpolation des extrémités . . . . .                          | 29        |
| 2.7.2    | Tangentes aux extrémités . . . . .                              | 29        |
| 2.7.3    | Symétrie . . . . .  | 30        |
| 2.7.4    | Enveloppe convexe . . . . .                                     | 30        |
| 2.7.5    | Invariance sous les transformations affines . . . . .           | 31        |
| 2.8      | Subdivision d'une courbe de Bézier . . . . .                    | 32        |
| 2.9      | Courbes de Bézier par morceaux . . . . .                        | 35        |
| 2.9.1    | Continuité . . . . .  | 36        |



|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>3</b> | <b>Courbe de Bézier Rationnelle</b>   | <b>39</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .  | 39        |
| 3.2      | Définition . . . . .  | 40        |
| 3.3      | Coordonnées homogènes et espace projectif : . . . . .   | 40        |
| 3.4      | Interprétation géométrique des courbes de Bézier rationnelles .   | 42        |
| 3.5      | Propriétés des courbes de Bézier rationnelles . . . . .   | 43        |
| 3.5.1    | Propriété de l'enveloppe convexe . . . . .  | 44        |
| 3.5.2    | Interpolation des extrémités . . . . .  | 44        |
| 3.5.3    | Tangente à l'extrémité . . . . .  | 44        |
| 3.5.4    | Invariance sous les transformations affines . . . . .   | 44        |
| 3.5.5    | Invariance sous les transformations projectives . . . . .   | 45        |
| 3.6      | Algorithme de De Casteljaou pour les courbes de Bézier rationnelles   | 45        |
| 3.7      | Dérivation des courbes de Bézier rationnelles . . . . .   | 47        |
| <b>4</b> | <b>Les Fonctions de Base des B-splines</b>  | <b>51</b> |
| 4.1      | Définition . . . . .  | 51        |
| 4.2      | Dérivation des B-splines . . . . .  | 54        |
| 4.3      | Propriétés des fonctions de base des B-splines . . . . .  | 57        |
| 4.3.1    | Support local . . . . .   | 57        |
| 4.3.2    | Nonnégativité . . . . .   | 58        |
| 4.3.3    | Polynômes par morceaux . . . . .  | 59        |
| 4.3.4    | Partition de l'unité . . . . .  | 59        |
| 4.3.5    | Continuité . . . . .  | 60        |
| <b>5</b> | <b>Courbes B-splines</b>  | <b>63</b> |
| 5.1      | Définition . . . . .  | 63        |
| 5.2      | Relation entre le degré de la courbe "d", le nombre de noeuds<br>"m+1" et le nombre de points de contrôle "n+1" . . . . . | 64        |
| 5.3      | Relation entre les courbes B-splines et celles de Bézier . . . . .  | 65        |
| 5.4      | Propriétés des courbes B-splines . . . . .  | 66        |
| 5.4.1    | Contrôle local . . . . .  | 66        |
| 5.4.2    | Modification locale . . . . .   | 67        |
| 5.4.3    | Enveloppe convexe . . . . .   | 67        |
| 5.4.4    | Continuité . . . . .  | 68        |
| 5.4.5    | Invariance par transformation affine . . . . .  | 68        |
| 5.4.6    | Interpolation des extrémités . . . . .  | 68        |
| 5.5      | L'algorithme de De Boor . . . . .   | 68        |
| 5.5.1    | Présentation de l'algorithme . . . . .  | 69        |
| 5.5.2    | Preuve de l'algorithme . . . . .  | 71        |
| 5.6      | Dérivation des courbes B-splines . . . . .  | 72        |
| 5.7      | Insertion de noeuds . . . . .   | 74        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>6</b> | <b>B-spline Rationnelles Non Uniformes</b>            | <b>79</b> |
| 6.1      | Définition . . . . .                                  | 79        |
| 6.2      | Propriétés des courbes NURBS . . . . .                | 81        |
| 6.2.1    | Contrôle local . . . . .                              | 81        |
| 6.2.2    | Propriété de l'enveloppe convexe . . . . .            | 81        |
| 6.2.3    | Continuité . . . . .                                  | 81        |
| 6.2.4    | Invariance par transformation affine . . . . .        | 81        |
| 6.2.5    | Invariance par transformation projective . . . . .    | 81        |
| 6.3      | Algorithme de De Boor pour le cas rationnel . . . . . | 82        |
| 6.3.1    | Déscription de l'algorithme . . . . .                 | 82        |
| 6.4      | Dérivation d'une courbe NURBS . . . . .               | 84        |



# Chapitre 1

## Les Polynômes de Bernstein

Dans ce chapitre nous allons présenter les polynômes de Bernstein, nommés ainsi en l'honneur du mathématicien ukrainien Sergeï Natanovich Bernstein (1880-1968). Ces polynômes vont nous servir par la suite à définir les courbes de Bézier.

### 1.1 Définition

Les polynômes de Bernstein de degré  $n$  sont définis sur  $[0, 1]$  par [3] :

$$B_{i,n}(t) = \begin{cases} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\text{avec : } \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

#### exemple 1.1

Dans le cas cubique ( $n = 3$ ) les polynômes de Bernstein sont données par :

$$\begin{aligned} B_{0,3}(t) &= (1-t)^3 \\ B_{1,3}(t) &= 3t(1-t)^2 \\ B_{2,3}(t) &= 3t^2(1-t) \\ B_{3,3}(t) &= t^3 \end{aligned}$$

On voit, entre autre qu'ils sont tous positifs pour  $t \in [0, 1]$  et que leur somme est égale à 1.

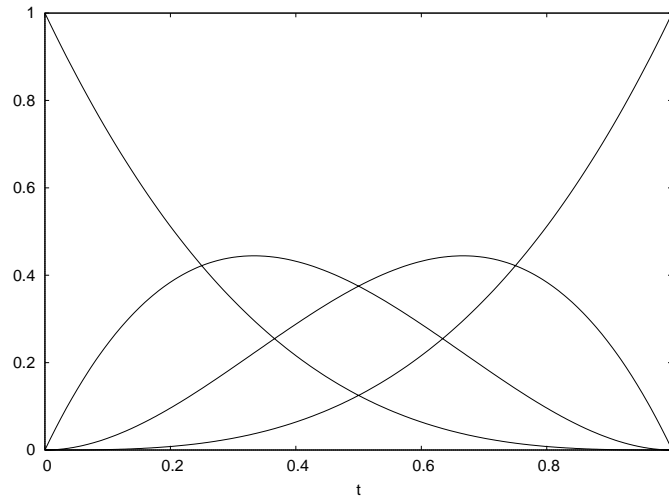


FIGURE 1.1 – Polynômes de Bernstein de degré 3

## 1.2 Propriétés des polynômes de Bernstein

Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, les propriétés des courbes de Bézier découlent de celles des polynômes de Bernstein que nous allons étudier maintenant [1],[3],[5] :

### 1.2.1 Récurrence :

$$B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)$$

avec  $B_{0,0}(t) = 1$  et  $B_{j,n}(t) = 0 \ \forall j \notin \{0, \dots, n\}$

**Preuve :**

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{(n-i+i)(n-1)!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{(n-i)(n-1)! + i(n-1)!}{i!(n-i)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n-i)(n-1)!}{i!(n-i)!} + \frac{i(n-1)!}{i!(n-i)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}
\end{aligned}$$

Pour  $i \in [0, n]$

$$\begin{aligned}
B_{i,n}(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\
&= \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \\
&= (1-t) \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1} + t \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} \\
&= (1-t) B_{i,n-1}(t) + t B_{i-1,n-1}(t)
\end{aligned}$$

### 1.2.2 Partition de l'unité

$$\sum_{j=0}^n B_{j,n}(t) = 1$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned}
1 &= [(1-t) + t]^n \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^n B_{j,n}(t)
\end{aligned}$$

### 1.2.3 Positivité

Les polynômes de Bernstein sont non négatifs sur  $[0, 1]$  :

$$\forall t \in [0, 1], B_{i,n}(t) \geq 0$$

**Preuve :**

$$B_{i,n}(t) = \begin{cases} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$\binom{n}{i} > 0$  et pour  $t \in [0, 1], t \geq 0$  et  $1 - t \geq 0 \Rightarrow t^i \geq 0$  et  $(1 - t)^{n-i} \geq 0$   
 Donc  $\forall t \in [0, 1], B_{i,n}(t) \geq 0$

### 1.2.4 Symétrie

Si  $0 \leq i \leq n$  Alors  $B_{i,n}(1 - t) = B_{n-i,n}(t)$

**Preuve :**

$$\begin{aligned} \forall i \in \{0, \dots, n\}, B_{i,n}(u) &= \binom{n}{i} u^i (1 - u)^{n-i} \\ \Rightarrow B_{i,n}(1 - t) &= \binom{n}{i} (1 - t)^i [1 - (1 - t)]^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} t^{n-i} (1 - t)^i \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{n!}{(n-i)![n - (n-i)]!} \\ &= \binom{n}{n-i} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} B_{i,n}(1 - t) &= \binom{n}{n-i} t^{n-i} (1 - t)^i \\ &= B_{n-i,n}(t) \end{aligned}$$

## 1.3 Dérivation des polynômes de Bernstein :

### Théorème 1.1

Soient  $B_{i,n}(t)$  les polynômes de Bernstein de degré  $n$ .

Alors, on a les résultats suivants :

1.

$$B'_{i,n}(t) = \frac{i - nt}{t(1 - t)} B_{i,n}(t) \quad (1.2)$$

2.

$$B_{i,n}^{(2)}(t) = \frac{i(i-1) - 2i(n-1)t + n(n-1)t^2}{t^2(1-t)^2} B_{i,n}(t) \quad (1.3)$$

3.

$$B'_{i,n}(t) = n[B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)] \quad (1.4)$$

**Preuve :**

On commence par démontrer la relation (1.2)

$$\begin{aligned} B_{i,n}(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ \Rightarrow B'_{i,n}(t) &= \binom{n}{i} \left[ i t^{i-1} (1-t)^{n-i} - t^i (n-i) (1-t)^{n-i-1} \right] \\ &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \left( \frac{i}{t} - \frac{n-i}{1-t} \right) \\ &= \left( \frac{i}{t} - \frac{n-i}{1-t} \right) \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \frac{(1-t)i - t(n-i)}{t(1-t)} B_{i,n}(t) \\ &= \frac{i - nt}{t(1-t)} B_{i,n}(t) \end{aligned}$$

On démontre la relation (1.3) :

$$\begin{aligned} B_{i,n}^2(t) &= [B'_{i,n}(t)]' \\ &= \left[ \frac{i - nt}{t(1-t)} B_{i,n}(t) \right]' \\ &= \frac{-nt(1-t) - (i - nt)(1-2t)}{t^2(1-t)^2} B_{i,n}(t) + \frac{i - nt}{t(1-t)} B'_{i,n}(t) \\ &= \frac{-nt(1-t) - (i - nt)(1-2t)}{t^2(1-t)^2} B_{i,n}(t) + \frac{(i - nt)^2}{t^2(1-t)^2} B_{i,n}(t) \\ &= \frac{-nt(1-t) - (i - nt)(1-2t) + (i - nt)^2}{t^2(1-t)^2} B_{i,n}(t) \\ &= \frac{-nt + nt^2 + 2it - i - 2nt^2 + nt + i^2 - 2int + n^2t^2}{t^2(1-t)^2} B_{i,n}(t) \\ &= \frac{(i^2 - i) + (2it - 2int) + (n^2t^2 - nt^2)}{t^2(1-t)^2} B_{i,n}(t) \\ &= \frac{i(i-1) - 2i(n-1)t + n(n-1)t^2}{t^2(1-t)^2} B_{i,n}(t) \end{aligned}$$



Enfin, on démontre la relation (1.4) :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}B_{i,n}(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \right) \\
&= \frac{in!}{i!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{(n-i)n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \\
&= n \left[ \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \right] \\
&= n [B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)]
\end{aligned}$$

# Chapitre 2

## Les Courbes de Bézier

### 2.1 Introduction

Les courbes de Bézier sont des courbes polynomiales paramétriques décrites pour la première fois en 1962 par l'ingénieur français Pierre Bézier (1910-1999) qui les utilisa chez Renault pour concevoir des pièces d'automobile à l'aide d'ordinateurs.

Dans ce chapitre, nous allons définir ce que sont les courbes de Bézier [2],[1],[5],[8], décrire leurs principales propriétés et présenter un algorithme très efficace pour tracer simplement ces courbes.

### 2.2 Paramétrisation d'une courbe

Il existe trois manières différentes pour décrire une courbe :

- 1) représentation explicite.
- 2) représentation implicite.
- 3) représentation paramétrique.

#### 2.2.1 Equations explicites et implicites d'une courbe

Dans le plan, l'équation explicite d'une courbe prend la forme générale :

$$y = f(x)$$

Sous cette forme, il y a une seule valeur  $y$  pour chaque valeur  $x$ .

En conséquence, cette équation ne peut pas représenter une courbe fermée ou à plusieurs valeurs.

le problème peut être contourné grâce à l'utilisation de l'équation implicite dont la forme générale est donnée par :  $f(x, y) = 0$

Comme les deux formes explicites et implicites sont dépendantes des axes, le système de coordonnées choisi affecte l'allure de la courbe. C'est la raison pour laquelle elles sont peu utilisées en modélisation.

En dépit de ces limitations, ces deux formes peuvent être très utiles pour la détermination de l'intersection de deux courbes, ou pour savoir si un point appartient à une courbe donnée.

### 2.2.2 Représentation paramétrique

Les fonctions explicites à une seule variable ne peuvent représenter la plupart des formes voulues en modélisation géométrique. Cela est dû à plusieurs raisons :

- 1) Les formes de la majorité des objets sont intrinsèquement indépendantes de n'importe quel système de coordonnées. En effet, en modélisation, le choix d'un système de coordonnées ne doit pas affecter la forme de l'objet.
- 2) les courbes et surfaces étudiées sont assez complexes et difficilement représentables par des fonctions non paramétriques ordinaires.

Pour ces raisons et bien d'autres, la forme préférée en modélisation géométrique est celle des équations paramétriques.

Supposons qu'on ait une courbe à deux dimensions. On pourrait la définir non pas par une seule fonction  $y = f(x)$  mais par un système de deux fonctions :

$$\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \end{cases} \quad (2.1)$$

La variable  $u$  est alors appelée "paramètre" et le système 2.1 "paramétrisation de la courbe".

De la même manière, une courbe à trois dimensions est définie par le système :

$$\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \\ z = z(u) \end{cases}$$

Ces courbes ont une représentation vectorielle naturelle :

$$p(u) = [ \ x(u) \ y(u) \ z(u) \ ]$$

#### Remarque 1

Evidemment, il n'est pas possible de tracer la courbe pour toutes les valeurs de  $u \in (-\infty, +\infty)$  mais on doit choisir un certain intervalle qui présente un intérêt comme par exemple celui de faciliter les calculs.

Il est très courant d'utiliser l'intervalle  $[0, 1]$  comme par exemple pour paramétrer un segment  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}^2$

l'équation paramétrique est donnée par :

$$p(u) = [(1-t)x_a + tx_b, (1-t)y_a + ty_b]$$

avec :

$$a = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

La représentation paramétrique présente beaucoup d'avantages :

1. Elle permet une séparation des variables et un calcul direct des coordonnées d'un point.
2. Elle permet une plus grande liberté pour le contrôle de l'allure d'une courbe.
3. les transformations peuvent être faites directement au niveau des équations paramétriques.
4. Les courbes paramétrisées sont naturellement bornées quand le paramètre est dans un intervalle fermé.

## 2.3 Définition

Les courbes de Bézier de degré  $n$  sont définies pour  $t \in [0, 1]$  par :

$$b^n(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t)$$

où les  $b_i$  sont des points de  $\mathbb{R}^p$  appelés *points de contrôle* et  $B_{i,n}(t)$  les polynômes de Bernstein.

### Remarque 2

Si  $p = 2$ , alors  $b^n(t)$  est dite courbe de Bézier plane.

Elle est dite spatiale dans le cas où  $p = 3$ . On se contentera d'étudier les courbes de Bézier planes.

représentation matricielle :

$$\begin{aligned}
b^n(t) &= \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t) \\
&= [b_0, \dots, b_n] \begin{bmatrix} B_{0,n}(t) \\ \vdots \\ B_{n,n}(t) \end{bmatrix} \\
&= [b_0, \dots, b_n] \begin{bmatrix} m_{0,0} & \cdots & m_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,0} & \cdots & m_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} \\
&= PMT
\end{aligned}$$

Avec :

$$m_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i}$$

**exemple 2.1**

1. pour  $n = 1$   
 $b^1(t) = (1-t)b_0 + tb_1$  c'est l'équation paramétrique du segment  $[b_0, b_1]$
2. pour  $n = 2$  (on parle de courbes *quadratiques*) on aura trois points de contrôle :  $b_0, b_1, b_2$

$$\begin{aligned}
B_{0,2}(t) &= (1-t)^2 \\
B_{1,2}(t) &= 2t(1-t) \\
B_{2,2}(t) &= t^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow b^2(t) = (1-t)^2 b_0 + 2t(1-t)b_1 + t^2 b_2$$

3. pour  $n = 3$  les courbes de Bézier sont dites *cubiques*. Ce sont les plus utilisées en modélisation.

$$\begin{aligned}
B_{0,3}(t) &= (1-t)^3 \\
B_{1,3}(t) &= 3t(1-t)^2 \\
B_{2,3}(t) &= 3t^2(1-t) \\
B_{3,3}(t) &= t^3
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow b^3(t) = (1-t)^3 b_0 + 3t(1-t)^2 b_1 + 3t^2(1-t)b_2 + t^3 b_3$$

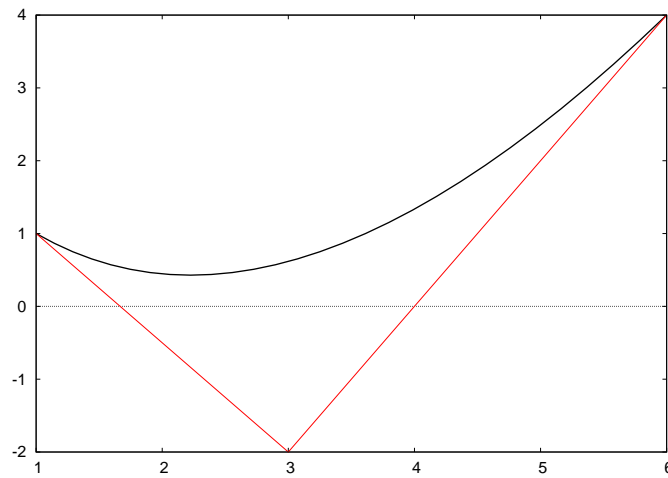


FIGURE 2.1 – Courbe de Bézier quadratique

On peut aussi retrouver la forme matricielle :

$$b^3(t) = [b_0, b_1, b_2, b_3] \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

## 2.4 Construction géométrique des courbes de Bézier

L'algorithme de De Casteljau est un algorithme récursif trouvé par Paul de Casteljau qui permet de construire géométriquement des courbes de Bézier.

Historiquement, c'est avec cet algorithme que les travaux de M. De Casteljau commençaient en 1959 chez Citroën. Ils étaient publiés comme des rapports techniques, tenus très au secret par Citroën.

Ces travaux restèrent inconnus jusqu'en 1975 quand W. Bohm en a pris connaissance et les a rendu public. Cet algorithme a été très utile pour l'informatique qui utilise les courbes de Bézier dans de nombreux cas (logiciels de dessin, de modélisation, ...), et sans lequel le développement de l'utilisation des courbes de Pierre Bézier n'aurait pas pu se faire.

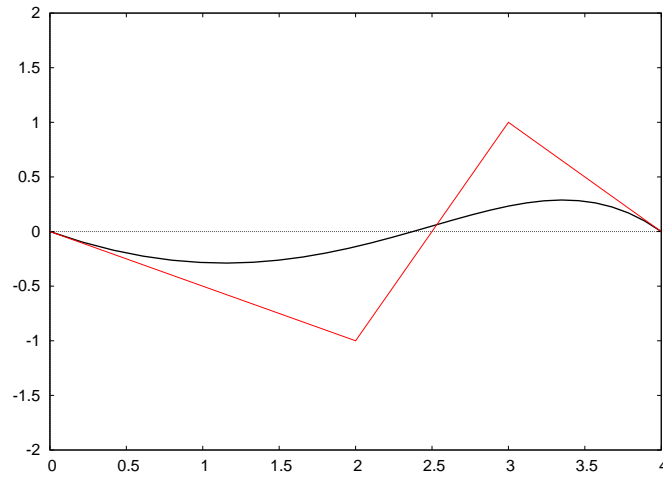


FIGURE 2.2 – Courbe de Bézier cubique

### 2.4.1 Algorithme de De Casteljau

**Entrée :**  $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{E}^2, t \in \mathbb{R}$

**Procédure :**

$$b_i^r(t) = (1-t)b_i^{r-1}(t) + tb_{i+1}^{r-1}(t) \quad \text{avec : } \begin{cases} 1 \leq r \leq n \\ 0 \leq i \leq n-r \end{cases}$$

Notons que :  $b_i^0(t) = b_i$

**Sortie :**  $b_0^n(t)$  le point à paramètre  $t$  dans la courbe de Bézier  $b^n$ .

#### Remarque 3

L'algorithme de De Casteljau peut être visualisé comme un triangle, par exemple pour le cas cubique :

$$b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3$$

$$b_0^1 \quad b_1^1 \quad b_2^1$$

$$b_0^2 \quad b_1^2$$

$$b_0^3$$

## 2.4. CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES COURBES DE BÉZIER 21

Pour la démonstration de l'algorithme de De Casteljau, on aura besoin du lemme suivant :

### lemme 2.1

$\forall 0 \leq r \leq n$  et  $\forall 0 \leq i \leq n - r$  on a :

$$b_i^r(t) = \sum_{j=i}^{i+r} b_j B_{j-i,r}(t)$$

### Preuve :

On démontre le résultat par récurrence.

Pour  $r = 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^i b_j B_{j-i,0}(t) &= b_i B_{0,0}(t) \\ &= b_i \\ &= b_i^0(t) \end{aligned}$$

On suppose que le résultat est vrai jusqu'au rang  $r - 1$  :

$$b_i^{r-1}(t) = \sum_{j=i}^{i+r-1} b_j B_{j-i,r-1}(t)$$

avec :  $0 \leq r \leq n$  et  $0 \leq i \leq n - r$

Ce qui implique :

$$b_{i+1}^{r-1}(t) = \sum_{j=i+1}^{i+r} b_j B_{j-i-1,r-1}(t)$$

l'algorithme de De Casteljau nous donne :

$$\begin{aligned} b_i^r(t) &= (1-t)b_i^{r-1}(t) + tb_{i+1}^{r-1}(t) \\ &= (1-t) \sum_{j=i}^{i+r-1} b_j B_{j-i,r-1}(t) + t \sum_{j=i+1}^{i+r} b_j B_{j-i-1,r-1}(t) \end{aligned}$$



Comme :  $B_{r,r-1}(t) = B_{-1,r-1}(t) = 0$  alors :

$$\begin{aligned}
 b_i^r(t) &= (1-t) \sum_{j=i}^{i+r} b_j B_{j-i,r-1}(t) + t \sum_{j=i}^{i+r} b_j B_{j-i-1,r-1}(t) \\
 &= \sum_{j=i}^{i+r} b_j [(1-t) B_{j-i,r-1}(t) + t B_{j-i-1,r-1}(t)] \\
 &= \sum_{j=i}^{i+r} b_j B_{j-i,r}(t)
 \end{aligned}$$

### 2.4.2 Démonstration de l'algorithme de De Casteljau :

On sait d'après le lemme 2.1 que :

$$b_i^r(t) = \sum_{j=i}^{i+r} b_j B_{j-i,r}(t), \forall 0 \leq r \leq n \text{ et } : \forall 0 \leq i \leq n-r$$

En particulier pour  $r = n$  et  $i = 0$  :

$$\begin{aligned}
 b_0^n(t) &= \sum_{j=0}^n b_j B_{j,n}(t) \\
 &= b^n(t)
 \end{aligned}$$

#### exemple 2.2

Soit  $b^3(t)$  une courbe de Bézier cubique définie par ses points de contrôle  $b_0 = (1, -2)$ ,  $b_1 = (2, 1)$ ,  $b_2 = (3, 1)$  et  $b_3 = (4, -1)$  On cherche à connaître la valeur de  $b^3(0.5)$  représentant le point de la courbe de bézier pour  $t = 0.5$  en utilisant l'algorithme de De Casteljau.

$$\begin{array}{cccc}
 (1, -2) & (2, 1) & (3, 1) & (4, -1) \\
 (1.5, -0.5) & (2.5, 1) & (3.5, 0) & \\
 (2, 0.25) & (3, 0.5) & & \\
 (2.5, 0.375) & & & 
 \end{array}$$

le point de la courbe de Bézier correspondant au paramètre  $t = 0.5$  est donc  $(2.5, 0.375)$  autrement dit  $b^3(0.5) = (2.5, 0.375)$

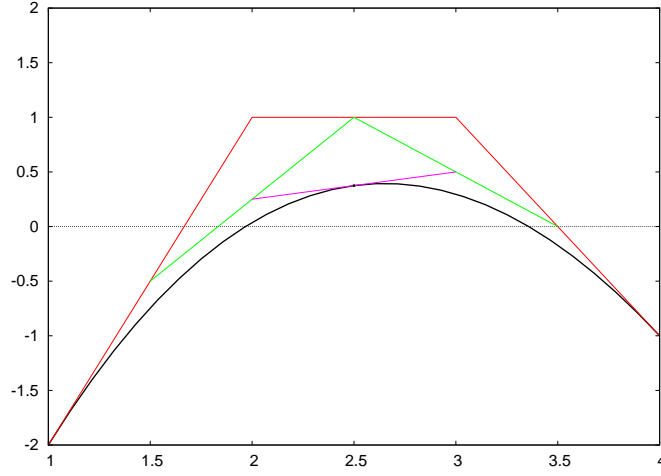


FIGURE 2.3 – Construction d'un point à l'aide de l'algorithme de De Casteljau

## 2.5 Dérivation des courbes de Bézier

### Définition 2.1

Soit  $\{b_i\}_{i=0,\dots,n}$  un ensemble de  $(n + 1)$  points. L'opérateur des différences finies noté  $\Delta$  est défini par :

$$\Delta b_i = b_{i+1} - b_i \quad \text{pour } i = 0, \dots, n$$

L'opérateur des différences finies généralisé noté  $\Delta^r$  est définie par la récurrence :

$$\begin{cases} \Delta^r b_j = \Delta^r b_{j+1} - \Delta^{r-1} b_j & \text{pour } r = 1 \\ \Delta^0 b_j = b_j \end{cases}$$

Pour les calculs, il est préférable d'utiliser le résultat suivant :

$$\Delta^r b_i = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} b_{i+j}$$

### Preuve :

La preuve se fait par récurrence sur  $r$

Le résultat est évident pour  $r = 0$

Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre  $r$  et montrons le pour  $r + 1$  :

$$\begin{aligned}
\Delta^{r+1}b_i &= \Delta^r b_{i+1} - \Delta^r b_i \\
&= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} b_{i+j+1} - \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} b_{i+j} \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} b_{i+j+1} + b_{r+i+1} - \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} b_{i+j} - (-1)^r b_i \\
&= \sum_{j=1}^r \binom{r}{j-1} (-1)^{r-j+1} b_{i+j} + b_{r+i+1} - \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} b_{i+j} - (-1)^r b_i \\
&= \sum_{j=1}^r \left[ \binom{r}{j-1} (-1)^{r-j+1} - \binom{r}{j} (-1)^{r-j} \right] b_{i+j} + b_{r+i+1} - (-1)^r b_i \\
&= \sum_{j=1}^r \left[ \binom{r}{j-1} (-1)^{r-j+1} + \binom{r}{j} (-1)^{r-j+1} \right] b_{i+j} + b_{r+i+1} + (-1)^{r+1} b_i \\
&= \sum_{j=1}^r (-1)^{r-j+1} \left[ \binom{r}{j-1} + \binom{r}{j} \right] b_{i+j} + b_{r+i+1} + (-1)^{r+1} b_i
\end{aligned}$$

$$\text{Comme } \binom{r}{j-1} + \binom{r}{j} = \binom{r+1}{j}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\Delta^{r+1}b_i &= \sum_{j=1}^r (-1)^{r-j+1} \binom{r+1}{j} b_{i+j} + b_{r+i+1} + (-1)^{r+1} b_i \\
&= \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{r-j+1} \binom{r+1}{j} b_{i+j}
\end{aligned}$$

### Théorème 2.1

La dérivée première d'une courbe de Bézier de degré  $n$  est donnée par :

$$[b^n(t)]' = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta b_i \ n \ B_{i,n-1}(t)$$

où  $\Delta$  : opérateur des différences finies.

**Preuve :**

$$\begin{aligned}
 [b^n(t)]' &= \left[ \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t) \right]' \\
 &= \sum_{i=0}^n b_i B'_{i,n}(t) \\
 &= \sum_{i=0}^n b_i n (B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)) \text{ (d'après 1.4 p.15)} \\
 &= \sum_{i=0}^n n b_i B_{i-1,n-1}(t) - \sum_{i=0}^n n b_i B_{i,n-1}(t)
 \end{aligned}$$

Comme  $B_{-1,n-1}(t) = B_{n,n-1}(t) = 0$  alors :

$$\begin{aligned}
 [b^n(t)]' &= \sum_{i=1}^n n b_i B_{i-1,n-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} n b_i B_{i,n-1}(t) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} n b_{i+1} B_{i,n-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} n b_i B_{i,n-1}(t) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} n (b_{i+1} - b_i) B_{i,n-1}(t) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} n \Delta b_i B_{i,n-1}(t)
 \end{aligned}$$

### Corollaire 2.1

La dérivée  $r$ -ième d'une courbe de Bézier est donnée par :

$$\frac{d^r}{dt^r} b^n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r b_i B_{i,n-r}(t) \quad (2.2)$$

avec  $\Delta^r$  : opérateur des différences finies généralisé.

**Preuve :**

La preuve se fait par récurrence sur  $r$

Pour  $r = 1$  :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}b^n(t) &= \frac{n!}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta b_i B_{i,n-1}(t) \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta b_i B_{i,n-1}(t)\end{aligned}$$

Ce qui est exactement le résultat du théorème précédant.

On suppose le résultat vrai jusqu'à l'ordre  $r$  et on le démontre pour  $r + 1$

$$\begin{aligned}\frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}}b^n(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{d^r}{dt^r} b^n(t) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r b_i B_{i,n-r}(t) \right] \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r b_i \frac{d}{dt} B_{i,n-r}(t)\end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{d}{dt} B_{i,n-r}(t) = (n-r) (B_{i-1,n-r-1}(t) - B_{i,n-r-1}(t))$$

Ceci implique que

$$\frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}}b^n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r b_i (n-r) (B_{i-1,n-r-1}(t) - B_{i,n-r-1}(t))$$

Comme  $B_{-1,n-r-1}(t) = B_{n-r,n-r-1}(t) = 0$  alors

$$\frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}}b^n(t) = \frac{n!}{(n-r-1)!} \left( \sum_{i=1}^{n-r} \Delta^r b_i B_{i-1,n-r-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-r-1} \Delta^r b_i B_{i,n-r-1}(t) \right)$$

En réindexant, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}}b^n(t) &= \frac{n!}{(n-r-1)!} \left( \sum_{i=0}^{n-r-1} \Delta^r b_{i+1} B_{i,n-r-1}(t) - \sum_{i=0}^{n-r-1} \Delta^r b_i B_{i,n-r-1}(t) \right) \\ &= \frac{n!}{[n-(r+1)]!} \sum_{i=0}^{n-(r+1)} (\Delta^r b_{i+1} - \Delta^r b_i) B_{i,n-(r+1)}(t) \\ &= \frac{n!}{[n-(r+1)]!} \sum_{i=0}^{n-(r+1)} \Delta^{r+1} b_i B_{i,n-(r+1)}(t)\end{aligned}$$

Donc, le résultat est vrai pour  $(r + 1)$

**Corollaire 2.2**

La dérivée  $r$ -ième d'une courbe de Bézier peut être exprimée en fonction des points intermédiaires générés par l'algorithme de De Casteljau comme suit :

$$\frac{d^r}{dt^r} b^n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r b_0^{n-r}(t) \quad (2.3)$$

En effet, d'après le corollaire, on a :

$$\frac{d^r}{dt^r} b^n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r b_i B_{i,n-r}(t)$$

Comme la sommation et l'opérateur  $\Delta^r$  sont intervertibles, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{dt^r} b^n(t) &= \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \sum_{i=0}^{n-r} b_i B_{i,n-r}(t) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r b_0^{n-r}(t) \end{aligned}$$

## 2.6 Dérivation d'une courbe de Bézier et algorithme de De Casteljau

Les deux derniers résultats nous permettent de proposer deux méthodes différentes pour calculer la dérivée  $r$ -ième d'une courbe de Bézier pour un certain  $t$  à l'aide de l'algorithme de De Casteljau :

### 2.6.1 Première méthode

On commence par calculer les différences finies généralisées  $\Delta^r b_i$ , on les interprète comme étant les points de contrôle d'une nouvelle courbe de Bézier de degré  $n-r$  puis on leur applique l'algorithme de De Casteljau afin de retrouver le résultat souhaité.

### 2.6.2 Seconde méthode

On applique l'algorithme de De Casteljau directement sur les points de contrôle  $b_i$  pour avoir les points  $b_i^{n-r}(t)$ , ensuite il ne nous reste plus qu'à calculer leur différences finies  $\Delta^r b_i^{n-r}(t)$  et de multiplier le résultat par  $\frac{n!}{(n-r)!}$

**exemple 2.3**

Soit  $b^3(t)$  une courbe de Bézier cubique définie par ses points de contrôle :  $b_0 = (1, 1)$ ,  $b_1 = (3, 5)$ ,  $b_2 = (7, 9)$  et  $b_3 = (11, 1)$  Supposons qu'on ait besoin

de calculer la dérivée seconde  $\frac{d^2}{dt^2}b^n(0.5)$

Pour ce faire, on utilisera les deux méthodes :

Première méthode : On commence par calculer les différences finies  $\Delta^2 b_i^1$  :

$$\begin{array}{cccc} (1, 1) & (3, 5) & (7, 9) & (11, 1) \\ (2, 4) & (4, 4) & (4, -8) & \\ (2, 0) & (0, -12) & & \end{array}$$

On applique l'algorithme de De Casteljau aux points  $(2, 0)$ ,  $(0, -12)$  considérés comme étant les points de contrôle d'une nouvelle courbe de Bézier de degré 1

$$\begin{array}{cc} (2, 0) & (0, -12) \\ (1, -6) & \end{array}$$

En multipliant par  $3!$ , on aura :

$$\frac{d^2}{dt^2}b^n(0.5) = (6, -36)$$

Seconde méthode :

A l'aide de l'algorithme de De Casteljau, on calcule les points intermédiaires  $b_i^1$  :

$$\begin{array}{cccc} (1, 1) & (3, 5) & (7, 9) & (11, 1) \\ (2, 3) & (5, 7) & (9, 5) & \end{array}$$

On calcule ensuite les différences finies  $\Delta^2 b_i^1$  :

$$\begin{array}{ccc} (2, 3) & (5, 7) & (9, 5) \\ (3, 4) & (4, -2) & \\ (1, -6) & & \end{array}$$

Il ne nous reste plus qu'à multiplier le résultat par  $3!$  et on aura :

$$\frac{d^2}{dt^2}b^n(0.5) = (6, -36)$$

## 2.7 Propriétés des courbes de Bézier

Les courbes de Bézier possèdent les propriétés suivantes  $[2],[1],[5],[8]$  :

### 2.7.1 Interpolation des extrémités

$$b^n(0) = b_0 \text{ et } b^n(1) = b_n$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned} b^n(0) &= \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(0) \\ &= \sum_{i=0}^n b_i \binom{n}{i} 0^i 1^{n-i} \\ &= b_0 \cdot 1 \text{ (car : } 0^0 = 1 \text{ par convention)} \\ &= b_0 \end{aligned}$$

De la même manière, on a :

$$\begin{aligned} b^n(1) &= \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(1) \\ &= \sum_{i=0}^n b_i \binom{n}{i} 1^i 0^{n-i} \\ &= b_n \cdot 1 \text{ (car : } 0^0 = 1 \text{ par convention)} \\ &= b_n \end{aligned}$$

### 2.7.2 Tangentes aux extrémités

$$[b^n]'(0) = n(b_1 - b_0) \quad (2.4)$$

$$[b^n]'(1) = n(b_n - b_{n-1}) \quad (2.5)$$

**Preuve :**

$$[b^n]'(0) = \sum_{i=0}^{n-1} n \Delta b_i B_{i,n-1}(0)$$

Comme :  $B_{i,n-1}(0) = \begin{cases} 0 & i \neq 0 \\ 1 & i = 0 \end{cases}$  alors :

$$\begin{aligned} [b^n]'(0) &= n \Delta b_0 \\ &= n(b_1 - b_0) \end{aligned}$$



De la même manière :

$$[b^n]'(1) = \sum_{i=0}^{n-1} n \Delta b_i B_{i,n-1}(1)$$

Comme :  $B_{i,n-1}(1) = \begin{cases} 0 & i \neq n-1 \\ 1 & i = n-1 \end{cases}$  alors :

$$\begin{aligned} [b^n]'(1) &= n \Delta b_{n-1} \\ &= n(b_n - b_{n-1}) \end{aligned}$$

### 2.7.3 Symmetrie

La courbe de Bézier ne varie pas en fonction de l'ordre des points de contrôle, qu'ils soient dans l'ordre  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ou dans l'ordre inverse  $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$ . Ceci est vrai grâce à la formule suivante :

$$\sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n b_{n-i} B_{i,n}(1-t)$$

**Preuve :**

On sait d'après la propriété de symmetrie des polynômes de Bernstein que :

$$B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$$

D'où :  $\sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{n-i,n}(1-t)$

En réindexant, on aura :

$$\sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n b_{n-i} B_{i,n}(1-t)$$

### 2.7.4 Enveloppe convexe

#### Définition 2.2

Soit  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  un ensemble de points. L'enveloppe convexe de  $X$  notée  $CH\{X\}$  est définie par :

$$CH\{X\} = \left\{ a_0 x_0 + \dots + a_n x_n / \sum_{i=0}^n a_i = 1, a_i \geq 0 \right\}$$

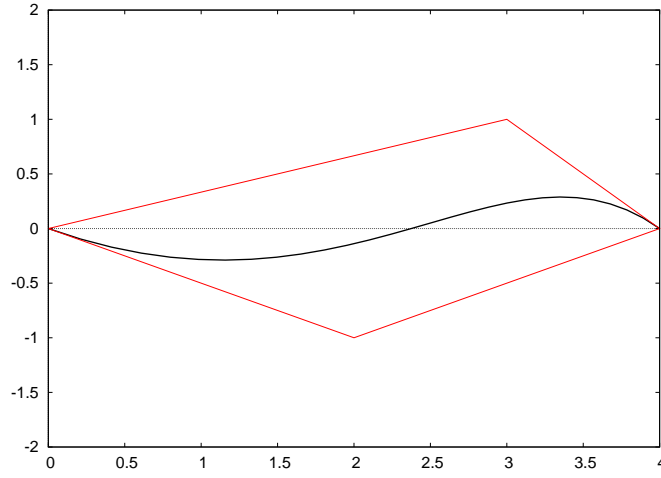


FIGURE 2.4 – Propriété de l'enveloppe convexe

**Théorème 2.2**

Tout les points de la courbe de Bézier se trouvent à l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble des points de contrôle  $\{b_0, \dots, b_n\}$  càd :

$$\forall t \in [0, 1], b^n(t) \in CH\{b_0, \dots, b_n\}$$

**Remarque 4**

$CH\{b_0, \dots, b_n\}$  est souvent appelée *enveloppe convexe de la courbe de Bézier*.

**Preuve :**

Soit  $t \in [0, 1]$

$$b^n(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)b_i$$

Comme les polynômes de Bernstein vérifient les propriétés de positivité et de partition de l'unité, alors d'après la définition de l'enveloppe convexe :

$$b^n(t) \in CH\{b_0, \dots, b_n\}$$

**2.7.5 Invariance sous les transformations affines**

Soit  $T$  une transformation affine (rotation, réflexion, translation). Alors :

$$T\left(\sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t)\right) = \sum_{i=0}^n T(b_i) B_{i,n}(t)$$

**Preuve :**

Une transformation affine  $T$  a toujours la forme :  $T(r) = Ar + v$  où :  $A$  est une matrice et  $v$  un vecteur. On pose  $r = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t)$  et on aura :

$$\begin{aligned}
 T\left(\sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t)\right) &= A\left(\sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t)\right) + v \\
 &= \sum_{i=0}^n A(b_i) B_{i,n}(t) + \sum_{i=0}^n v B_{i,n}(t) \quad \text{car : } \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1 \\
 &= \sum_{i=0}^n [A(b_i) + v] B_{i,n}(t) \\
 &= \sum_{i=0}^n T(b_i) B_{i,n}(t)
 \end{aligned}$$

## 2.8 Subdivision d'une courbe de Bézier

Une courbe de Bézier est généralement définie sur  $[0, 1]$  et donnée par  $b^n(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t)$ . Quelquefois, seule une partie de la courbe nous interesse.

Supposons par exemple, qu'une courbe de Bézier est coupée à hauteur de  $t = \alpha$  pour donner deux segments de courbe notés  $b_g(t)$  et  $b_d(t)$  définis respectivement sur  $[0, \alpha]$  et  $[\alpha, 1]$ .

Comme  $b_g$  et  $b_d$  sont des courbes polynômiales, elles peuvent être représentées dans la forme de Bézier sur  $[0, 1]$

On doit pour cela trouver les points de contrôle pour  $b_g$  et  $b_d$ . Ce qui résulte du théorème suivant :

**Théorème 2.3**

Soit  $b^n(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t)$  une courbe de Bézier de degré  $n$ .

Les points de contrôle des deux segments de courbe obtenus par subdivision de  $b^n(t)$  à hauteur de  $t = \alpha$  avec  $\alpha \in [0, 1]$  sont :

$$b_g : b_0^0, b_0^1, b_0^2, \dots, b_0^{n-1}, b_0^n \quad (2.6)$$

$$b_d : b_0^n, b_1^{n-1}, b_2^{n-2}, \dots, b_{n-1}^1, b_n^0 \quad (2.7)$$

Où :  $b_i^j$  sont les points calculés par l'algorithme de De Casteljau pour  $t = \alpha$ .

**Preuve :**

Commençons par démontrer le résultat 2.6 : Soit  $b_g$  une courbe de Bézier définie par les points de contrôle :  $b_0^0, b_0^1, b_0^2, \dots, b_0^{n-1}, b_0^n$  (obtenus en appliquant l'algorithme de DeCasteljau pour  $t = \alpha$ ) On doit montrer que  $b_g$  est bien la portion de la courbe  $b^n$  obtenue quand le paramètre  $t$  varie dans l'intervalle  $[0, \alpha]$  :

$$\begin{aligned}
 b_g(t) &= \sum_{j=0}^n b_0^j(\alpha) B_{j,n}(t) \text{ sur l'intervalle } [0, 1] \\
 &= \sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^j b_i B_{i,j}(\alpha) \right) B_{j,n}(t) \text{ (d'après lemme 2.1)} \\
 &= \sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^j b_i \binom{j}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{j-i} \right) \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}
 \end{aligned}$$

En développant la somme, on obtient

$$\begin{aligned}
 b_g(t) &= \left[ \begin{aligned} &\binom{n}{0} t^0 (1-t)^n \binom{0}{0} \alpha^0 (1-\alpha)^0 + \\ &\binom{n}{1} t^1 (1-t)^{n-1} \binom{1}{0} \alpha^0 (1-\alpha)^1 + \\ &\binom{n}{2} t^2 (1-t)^{n-2} \binom{2}{0} \alpha^0 (1-\alpha)^2 + \dots + \\ &\binom{n}{n} t^n (1-t)^{n-n} \binom{n}{0} \alpha^0 (1-\alpha)^n \end{aligned} \right] b_0 + \\
 &\quad \left[ \begin{aligned} &\binom{n}{1} t^1 (1-t)^{n-1} \binom{1}{1} \alpha^1 (1-\alpha)^0 + \\ &\binom{n}{2} t^2 (1-t)^{n-2} \binom{2}{1} \alpha^1 (1-\alpha)^1 + \\ &\binom{n}{3} t^3 (1-t)^{n-3} \binom{3}{1} \alpha^1 (1-\alpha)^2 + \dots + \\ &\binom{n}{n} t^n (1-t)^{n-n} \binom{n}{1} \alpha^1 (1-\alpha)^{n-1} \end{aligned} \right] b_1 + \\
 &\quad \left[ \begin{aligned} &\binom{n}{2} t^2 (1-t)^{n-2} \binom{2}{2} \alpha^2 (1-\alpha)^0 + \\ &\binom{n}{3} t^3 (1-t)^{n-3} \binom{3}{2} \alpha^2 (1-\alpha)^1 + \dots + \\ &\binom{n}{n} t^n (1-t)^{n-n} \binom{n}{2} \alpha^2 (1-\alpha)^{n-2} \end{aligned} \right] b_2 + \\
 &\quad \dots + \binom{n}{n} t^n (1-t)^{n-n} \binom{n}{n} \alpha^n (1-\alpha)^{n-n} b_n
 \end{aligned}$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
b_g(t) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k}{0} t^k \alpha^0 (1-t)^{n-k} (1-\alpha)^k b_0 + \\
&\quad \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \binom{k}{1} t^k \alpha^1 (1-t)^{n-k} (1-\alpha)^{k-1} b_1 + \\
&\quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k}{2} t^k \alpha^2 (1-t)^{n-k} (1-\alpha)^{k-2} b_2 + \\
&\quad \cdots + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k}{n} t^k \alpha^k (1-t)^{n-k} (1-\alpha)^{k-n} b_n \\
&= \sum_{i=0}^n \left[ \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} \binom{k}{i} t^k \alpha^i (1-t)^{n-k} (1-\alpha)^{k-i} \right] b_i
\end{aligned}$$

En réindexant, on aura :

$$b_g(t) = \sum_{i=0}^n \left[ \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{i+k} \binom{i+k}{i} t^{i+k} \alpha^i (1-t)^{n-i-k} (1-\alpha)^k \right] b_i \quad (2.8)$$

D'un autre côté, on remarque que :

$$\begin{aligned}
t^{i+k} \alpha^i (1-t)^{n-i-k} (1-\alpha)^k &= (\alpha t)^i [(t - \alpha t)^k (1-t)^{n-i-k}] \\
\binom{n}{i+k} \binom{i+k}{i} &= \binom{n}{i} \binom{n-i}{k}
\end{aligned}$$

L'équation 2.8 devient :

$$\begin{aligned}
b_g(t) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\alpha t)^i \left[ \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (t - \alpha t)^k (1-t)^{n-i-k} \right] b_i \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\alpha t)^i (1 - \alpha t)^{n-i} b_i \\
&= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(\alpha t) b_i \\
&= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) b_i \quad \text{pour } t \in [0, \alpha]
\end{aligned}$$

Donc,  $b_g$  est bien défini par les points de contrôle  $b_0^j$  avec :  $0 \leq j \leq n$

Démontrons le résultat 2.7 :

Considérons  $c^n(t)$  la courbe de Bézier définie par les points de contrôle :

$$c_i = b_{n-i} \quad \text{avec : } i = 0, \dots, n$$

Soit  $c_g(t)$  la partie de la courbe  $c^n(t)$  comprise entre  $c_0 = b_n$  et  $c^n(1 - \alpha)$

La propriété de symétrie (sous-section 2.7.3) nous permet d'affirmer que  $b_d$  (la partie de la courbe  $b^n$  comprise entre  $b^n(\alpha)$  et  $b_n$ ) possède les mêmes points de contrôle que  $c_g(t)$  pris dans l'ordre inverse.

D'après le résultat précédant, les points de contrôle de  $c_g(t)$  sont :  $c_0^j(1 - \alpha)$

D'un autre côté :

$$\begin{aligned} c_0^j(1 - \alpha) &= \sum_{i=0}^j c_i B_{i,j}(1 - \alpha) \quad \text{d'après lemme 2.1} \\ &= \sum_{i=0}^j b_{n-i} B_{j-i,j}(\alpha) \quad (\text{propriété de symétrie des polynômes de Bernstein}) \\ &= \sum_{i=n-j}^n b_i B_{i-n+j,j}(\alpha) \\ &= b_{n-j}^j(\alpha) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Donc, le segment  $b_d$  est bien défini par les points de contrôle :

$$b_j^{n-j}(\alpha) \quad \text{pour : } j = 0, \dots, n$$

## 2.9 Courbes de Bézier par morceaux

Une courbe de Bézier de degré  $n$  a  $n + 1$  points de contrôle.

Les courbes de degré élevé sont rarement utilisées dès lors qu'il existe une relation très faible entre la forme de la courbe et la forme du polygone de contrôle. De plus, ces courbes requièrent un grand nombre d'opérations arithmétiques, d'où le risque important d'erreurs de calcul.

D'un autre côté, les courbes de degré bas ont peu de points de contrôle et donc ne peuvent représenter que très peu de formes.

Pour élargir le nombre de formes pouvant être représentées sans augmenter le degré de la courbe, on peut joindre plusieurs courbes de Bézier bout à bout pour former une seule courbe continue appelée : *courbe de Bézier par morceaux*.

### Définition 2.3

Une courbe de Bézier à intervalle arbitraire  $b^n(t)$  de degré  $n$  avec les points

de contrôle  $b_0, \dots, b_n$  définie sur un intervalle  $[\alpha, \beta]$  est donnée par :

$$b^n(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n} \left( \frac{t - \alpha}{\beta - \alpha} \right)$$

Où les  $B_{i,n}$  sont les polynômes de Bernstein de degré  $n$ .

### Remarque 5

Soit  $b^n(t)$  Une courbe de Bézier à intervalle arbitraire définie sur  $[\alpha, \beta]$ .

Alors,  $\sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t)$  définie sur  $[0, 1]$  notée  $\hat{b}^n(t)$  est dite *normalisation* de  $b^n(t)$ .

### Définition 2.4 (courbe de Bézier par morceaux)

Soit  $I = [\alpha, \beta]$

$P(t)$  est dite courbe de Bézier par morceaux si :

$\exists t_0 < t_1 < \dots < t_{r-1} < t_r$  tels que :  $\alpha = t_0$  et  $\beta = t_r$  et les courbes de Bézier à intervalle arbitraire  $B_j(t)$  définies sur  $[t_j, t_{j+1}]$  avec  $0 \leq j \leq r - 1$  tel que :

- i)  $P(t) = B_j(t)$  pour  $t \in ]t_j, t_{j+1}[$
- ii)  $P(t_j) = B_{j-1}(t_j)$  ou  $P(t_j) = B_j(t_j)$  avec :  $1 \leq j \leq r - 1$
- iii)  $P(t_0) = B_0(t_0)$  et  $P(t_r) = B_{r-1}(t_r)$

### Remarque 6

1. Les valeurs  $t_j$  sont dites points de cassure.
2. Si le plus grand degré des courbes  $B_j(t)$  est  $n$  alors la courbe de Bézier par morceaux est dite de degré  $n$ .

## 2.9.1 Continuité

Soit  $P(t)$  une courbe de Bézier par morceaux définie sur  $I = [\alpha, \beta]$  composée des courbes de Bézier  $B_j(t)$  définies sur  $I_j = [t_j, t_{j+1}]$  avec :  $0 \leq j \leq r - 1$

Comme les fonctions coordonnées de  $P(t)$  sont des fonctions polynômiales par morceaux, alors  $P(t)$  est  $C^\infty$  pour tout paramètre  $t$  sauf aux points de cassure  $t_j$ .

Supposons que  $B_j(t)$  est de degré  $n_j$  et ses points de contrôle sont :  $b_0^{(j)}, \dots, b_{n_j}^{(j)}$ .

$P(t)$  est continue en  $t_j$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_j^+} P(t) &= \lim_{t \rightarrow t_j^-} P(t) \\ &= P(t_j) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow t_j^-} P(t) &= \lim_{t \rightarrow t_j^-} B_{j-1}(t) \\ &= b_{n_{j-1}}^{(j-1)}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow t_j^+} P(t) &= \lim_{t \rightarrow t_j^+} B_j(t) \\ &= b_0^j\end{aligned}$$

D'où  $P(t)$  est continue en  $t = t_j$  seulement si :  $P(t_j) = b_0^j = b_{n_{j-1}}^{(j-1)}$   
Géométriquement, cela veut dire que pour que  $P(t)$  soit continue il faut que le dernier point de contrôle de  $B_{j-1}(t)$  soit le premier point de contrôle de  $B_j(t)$

#### **Théorème 2.4**

Soit  $P(t)$  une courbe de Bézier par morceaux définie sur  $I = [\alpha, \beta]$  composée des courbes de Bézier  $B_j(t)$  définies sur  $I_j = [t_j, t_{j+1}]$  avec :  $0 \leq j \leq r-1$  alors :

$$P \text{ est } C^k \Leftrightarrow B_j^{(r)}(t_j) = B_{j-1}^{(r)}(t_j)$$

#### **Preuve :**

Soit  $P^{(r)}(t)$  la dérivée r-ième de  $P(t)$

$P$  est  $C^k$  veut dire que  $\forall 0 \leq r \leq k$   $P^{(r)}$  est continue pour tout  $t$

$P^{(r)}$  est continue en  $t = t_j$  si et seulement si :

$$\lim_{t \rightarrow t_j^+} P^{(r)}(t) = \lim_{t \rightarrow t_j^-} P^{(r)}(t)$$

D'un autre côté :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow t_j^+} P^{(r)}(t) &= \lim_{t \rightarrow t_j^+} B_j^{(r)}(t) \\ \lim_{t \rightarrow t_j^-} P^{(r)}(t) &= \lim_{t \rightarrow t_j^-} B_{j-1}^{(r)}(t)\end{aligned}$$

D'où :

$$P \text{ est } C^k \Leftrightarrow B_j^{(r)}(t_j) = B_{j-1}^{(r)}(t_j)$$



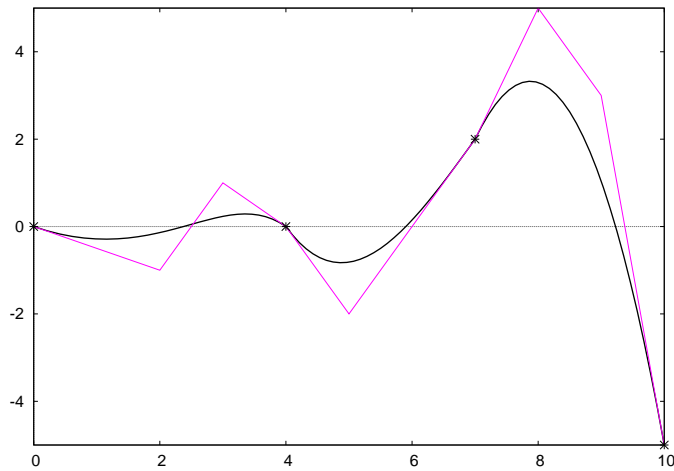


FIGURE 2.5 – Courbe de Bézier par morceaux

**exemple 2.4**

Considérons trois courbes de Bézier cubiques à intervalle arbitraire  $B_0(t)$ ,  $B_1(t)$ ,  $B_2(t)$  définies respectivement sur les intervalles  $[-5, -1]$ ,  $[-1, 2]$ ,  $[2, 5]$  et munies des points de contrôle :

$$B_0(t) : a_0(0, 0), a_1(2, -1), a_2(3, 1), a_3(4, 0)$$

$$B_1(t) : b_0(4, 0), b_1(5, -2), b_2(6, 0), b_3(7, 2)$$

$$B_2(t) : c_0(7, 2), c_1(8, 5), c_2(9, 3), c_3(10, -5)$$

Ces trois courbes se joignent bout à bout pour former une courbe de Bézier par morceaux  $P(t)$  définie sur  $[-5, 5]$  par :

$$P(t) = \begin{cases} B_0(t) & t \in [-5, -1] \\ B_1(t) & t \in [-1, 2] \\ B_2(t) & t \in [2, 5] \end{cases}$$

Comme l'illustre la figure 2.5

**Remarque 7**

Les courbes que nous avons étudié dans ce chapitre seront appelés *courbes de bézier intégrales* pour les distinguer de celles *rationnelles* qu'on étudiera au chapitre suivant.

# Chapitre 3

## Courbe de Bézier Rationnelle

### 3.1 Introduction

Les courbes de Bézier classiques, étant des courbes polynomiales, présentent le désavantage de ne pas pouvoir représenter toutes les formes voulues.

A titre d'exemple, les hyperboles ou encore les arcs de cercle ne peuvent pas être paramétrisés par des polynômes.

En effet, le cercle de rayon 1 centré à l'origine vérifie l'équation implicite :

$$x^2 + y^2 = 1$$

Une paramétrisation du cercle par des polynômes donnerait :

$$\begin{cases} x(t) &= P(t) \\ y(t) &= Q(t) \end{cases}$$

Or ceci aurait comme conséquence que :  $P^2(t) + Q^2(t) = 1$

Ceci implique que  $P, Q$  devraient être des polynômes constants.

On en conclut qu'il est impossible d'avoir une paramétrisation polynomiale du cercle.

En revanche, il est possible de paramétriser de telles formes à l'aide non pas de polynômes mais de fractions de deux polynômes appelés fonctions rationnelles et ayant la forme :

$$\left( \frac{P(t)}{R(t)}, \frac{Q(t)}{R(t)} \right) \text{ avec } P, R, Q \text{ des polynômes réels}$$

A titre d'exemple, le cercle de rayon 1 centré à l'origine peut être paramétrisé par :

$$\left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

Ainsi, pour élargir le champ des formes pouvant être modélisées, on définit les courbes de Bézier rationnelles dont les fonctions de base ne sont plus des polynômes (polynômes de Bernstein) mais des fonctions rationnelles qu'on définira.

### 3.2 Définition

Une courbe de Bézier rationnelle de degré  $n$  munie des points de contrôle  $b_0, \dots, b_n$  est définie par [2],[1],[7] :

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)}$$

avec :  $t \in [0, 1]$  et  $w_i \in \mathbb{R}$ .

Les  $w_i$  sont appelés "poids".

On pose que si  $w_i = 0$  alors  $w_i b_i$  est remplacé par  $b_i$  et on suppose que les  $w_i$  ne sont pas tous nuls.

#### Remarque 8

1. Si les  $w_i$  sont égaux, alors on retrouve les courbes de Bézier intégrales.
2. Une courbe de Bézier rationnelle peut aussi s'écrire sous la forme :

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i R_{i,n}(t)$$

Où

$$R_{i,n}(t) = \begin{cases} \frac{w_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)} & \text{si } w_i \neq 0 \\ \frac{B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)} & \text{si } w_i = 0 \end{cases}$$

### 3.3 Coordonnées homogènes et espace projectif :

Chaque point  $V = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  est représenté dans  $\mathbb{R}^3$  par le vecteur  $(x, y, 1)$  ou par un multiple  $(rx, ry, r)/r \neq 0$  appelé *coordonnées homogènes* ou *projectives*.

Quand  $W \neq 0$ , les coordonnées homogènes  $(X, Y, W)$  représentent le point  $(x, y) = (\frac{X}{W}, \frac{Y}{W})$

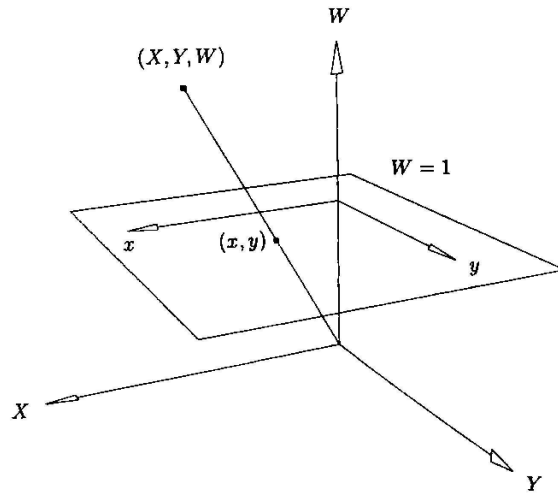


FIGURE 3.1 – projection d'un point sur l'hyperplan  $w=1$

Un point de la forme  $(X, Y, 0)$  ne représente pas un point cartésien mais un point à l'infini dans la direction du vecteur  $(X, Y)$ .

L'ensemble de toutes les coordonnées homogènes  $(X, Y, W)$  est appelé *espace projectif de degré 2* et noté  $\mathbb{P}^2$ .

#### exemple 3.1

Les coordonnées homogènes  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  ;  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$  ;  $\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$  représentent le même point cartésien  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

#### Remarque 9

Soit  $(X, Y, W)$  un point de l'espace projectif  $\mathbb{P}^2$  représentant le point cartésien  $(x, y) = (X/W, Y/W)$ .

Géométriquement, le point cartésien  $(x, y) = (X/W, Y/W)$  est la projection du point  $(X, Y, W)$  sur le plan  $W = 1$  par rapport à l'origine et ceci en confondant le plan  $W = 1$  avec l'espace  $\mathbb{R}^2$ , comme le montre la figure 3.1

#### Définition 3.1

Une *transformation projective* est une application  $L : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  définie par :

$$L(x, y, w) = (x, y, w).M/M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$$

La matrice  $3 \times 3$   $M$  est appelée *matrice de transformation homogène de  $L$*

Si  $M$  est une matrice non singulière, alors  $L$  est dite *transformation non singulière*.

Si  $m_{12} = m_{22} = 0$  et  $m_{33} \neq 0$   $L$  est appelée *transformation affine*.

### 3.4 Interprétation géométrique des courbes de Bézier rationnelles

Géométriquement, une courbe de Bézier rationnelle  $B(t)$  de degré  $n$  muni des points de contrôle  $b_0, \dots, b_n$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  peut être vue comme la projection d'une courbe de Bézier intégrale  $b^n$  de degré  $n$  définie sur  $\mathbb{R}^3$  sur le plan  $w = 1$  par rapport à l'origine et ceci en confondant le plan  $W = 1$  avec l'espace  $\mathbb{R}^2$ .

En effet, soit  $b^n(t)$  une courbe de Bézier intégrale munie des points de contrôle  $[p_i, w_i]^T$  définie sur  $\mathbb{R}^3$  avec  $p_i \in \mathbb{R}^2, w_i \in \mathbb{R}$

et soit  $B(t)$  sa projection sur le plan  $w = 1$ .

$B(t)$  est de la forme  $B(t) = [\alpha(t), \beta(t), 1]^T$

On identifie le plan  $w = 1$  avec  $\mathbb{R}^2$ ,  $B(t)$  devient :

$$B(t) = [\alpha(t), \beta(t)]^T$$

D'un autre côté,  $b^n(t)$  est définie par :

$$b^n(t) = [w(t)\alpha(t), w(t)\beta(t), w(t)]^T \quad (3.1)$$

$w(t)$  doit être elle aussi de degré  $n$ , elle s'écrit dans la base de Bernstein :

$$w(t) = \sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)$$

L'équation (3.1) devient :

$$b^n(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t) \\ \beta(t) \sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t) \\ \sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t) \end{bmatrix}$$

Or,  $b^n(t)$  s'écrit dans la base de Bernstein :

$$b^n(t) = \sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} p_i \\ w_i \end{bmatrix} B_{i,n}(t) \text{ d'où :}$$

$$\sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} p_i \\ w_i \end{bmatrix} B_{i,n}(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ 1 \end{bmatrix} \sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)$$

Par identification, on aura :

$$\sum_{i=0}^n p_i B_{i,n}(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix} \sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)$$

Ceci implique que :

$$\begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=0}^n p_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)}$$

On pose  $p_i = w_i b_i$  et on aura :

$$B(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)}$$

Les courbes de Bézier rationnelles peuvent représenter un arc de cercle comme le montre l'exemple suivant :

### exemple 3.2

Soit  $B(t)$  une courbe de Bézier quadratique rationnelle munie des points de contrôle  $b_0(1, 0)$ ,  $b_1(1, 1)$ ,  $b_2(0, 1)$  et des poids  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = 1$  et  $w_2 = 2$  alors :

$$\begin{aligned} (1-t)^2 w_0 b_0 + 2t(1-t) w_1 b_1 + t^2 w_2 b_2 &= (1-t)^2(1, 0) + 2t(1-t)(1, 1) + 2t^2(0, 1) \\ &= (1-t^2, 2t) , \\ (1-t)^2 w_0 + 2t(1-t) w_1 + t^2 w_2 &= (1-t)^2 + 2t(1-t) + 2t^2 \\ &= 1 + t^2 \end{aligned}$$

Alors,  $B(t) = \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$  représente un quart de cercle unitaire comme le montre la figure 3.2

## 3.5 Propriétés des courbes de Bézier rationnelles

Les courbes de Bézier rationnelles possèdent toutes les propriétés de celles intégrales [2],[1],[7] :

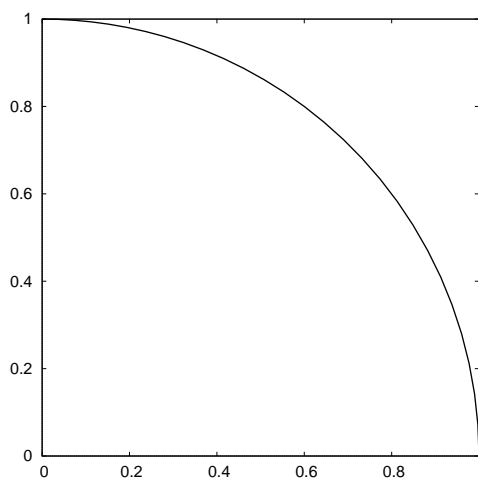


FIGURE 3.2 – Courbe de Bézier rationnelle

### 3.5.1 Propriété de l'enveloppe convexe

Supposons  $w_i > 0$  pour tout  $0 \leq i \leq n$ .

Alors, chaque point de la courbe est contenu dans l'enveloppe convexe du polygône de contrôle.

### 3.5.2 Interpolation des extrémités

$$B(0) = b_0, \quad B(1) = b_n$$

### 3.5.3 Tangente à l'extrémité

$$B'(0) = n \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) \text{ et } B'(1) = n \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1})$$

### 3.5.4 Invariance sous les transformations affines

Soit  $T$  une transformation affine, alors :

$$T \left( \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)} \right) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i T(b_i) B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)}$$

### 3.5.5 Invariance sous les transformations projectives

Les courbes de Bézier rationnelles sont invariantes par transformation projective.

Cela veut dire que pour appliquer une telle transformation à une courbe de Bézier rationnelle, il nous faut l'exprimer en coordonnées homogènes, appliquer la transformation aux points de contrôle homogènes avant de projeter la courbe transformée sur l'hyperplan  $w = 1$ .

La courbe ainsi obtenue après projection sera aussi une courbe de Bézier rationnelle.

En effet : Soit  $M$  une matrice  $4 \times 4$  de transformation projective. En coordonnées homogènes,  $B(t)$  est donnée par :  $B(t) = \sum_{i=0}^n \hat{b}_i B_{i,n}(t)$

Où :  $\hat{b}_i = (x_i w_i, y_i w_i, z_i w_i, w_i)$  sont dits points de contrôle homogènes.

Appliquons la transformation projective à  $B(t)$  :

$$\begin{aligned} B(t)M &= \left( \sum_{i=0}^n \hat{b}_i B_{i,n}(t) \right) \cdot M \\ &= \sum_{i=0}^n (\hat{b}_i M) B_{i,n}(t) \\ &= \sum_{i=0}^n \hat{c}_i B_{i,n}(t) \text{ , avec } \hat{c}_i = \hat{b}_i M \end{aligned}$$

## 3.6 Algorithme de De Casteljau pour les courbes de Bézier rationnelles

L'algorithme de De Casteljau pour les courbes intégrales peut être étendu au cas rationnel. L'algorithme peut être appliqué de deux manières :

1. On applique l'algorithme sur les points de contrôle homogènes  $\hat{b}_i$  en considérant  $w_i$  comme une coordonnée supplémentaire. Une fois l'algorithme fini, on convertit les points obtenus en coordonnées cartésiennes.
2. La 1ère méthode quoique directe et très simple n'est pas numériquement stable particulièrement dans le cas où les  $w_i$  sont très grands. On pourrait convertir les points homogènes  $\hat{b}_i$  non pas à la fin du processus mais à la fin de chaque itération comme le montre la procédure :



$$\begin{aligned}
b_i^r(t) &= (1-t) \frac{w_i^{r-1}}{w_i^r} b_i^{r-1} + t \frac{w_{i+1}^{r-1}}{w_i^r} b_{i+1}^{r-1} \\
w_i^r(t) &= (1-t) w_i^{r-1}(t) + t w_{i+1}^{r-1}(t)
\end{aligned}$$

**Remarque 10**

Comme dans le cas intégral, l'algorithme de De Casteljau peut être utilisé pour subdiviser la courbe. Les points de contrôle des deux segments de courbe  $B_g$  et  $B_d$  obtenues après avoir coupé la courbe  $B(t)$  à hauteur de  $t = \alpha$  sont données par les mêmes relations que dans le cas intégral :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_g^i \\ w_g^i \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} b_o^i(t) \\ w_o^i \end{array} \right. \quad \text{et} : \quad \left\{ \begin{array}{l} B_d^i \\ w_d^i \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} b_{n-1}^i(t) \\ w_{n-1}^i \end{array} \right.$$

**exemple 3.3**

On reprend l'exemple précédant d'une courbe de Bézier quadratique rationnelle  $B(t)$  munie des points de contrôle  $b_0(1,0)$ ,  $b_1(1,1)$ ,  $b_2(0,1)$  et des poids  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = 1$  et  $w_2 = 2$

Supposons qu'on veuille calculer à l'aide de l'algorithme de De Casteljau la valeur  $B(0.5)$  On commence par calculer les poids :

$$\begin{array}{ccc}
1 & 1 & 2 \\
1 & 1.5 & \\
1.25 & & 
\end{array}$$

ensuite les points de contrôle :

$$\begin{array}{ccc}
(1,0) & (1,1) & (0,1) \\
(1,0.5) & (0.333,1) & \\
(0.6,0.8) & & 
\end{array}$$

le point de la courbe correspondant au paramètre  $t = 0.5$  est donc :

$$B(0.5) = (0.6, 0.8)$$

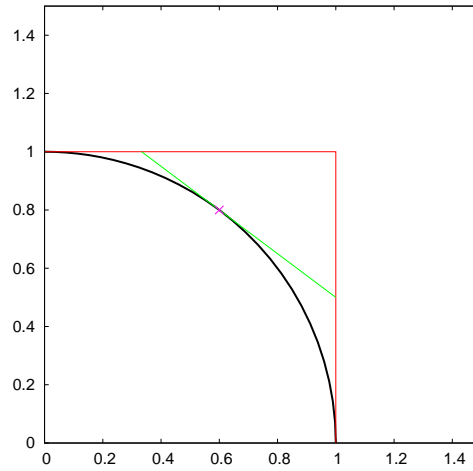


FIGURE 3.3 – Calcul d'un point à l'aide de l'algorithme de De Casteljau pour le cas rationnel

### 3.7 Dérivation des courbes de Bézier rationnelles

#### Théorème 3.1 (Règle de Liebnitz)

Soient  $f, g, h$  trois fonctions telles que  $h(t) = f(t) \cdot g(t)$

Alors, la dérivée  $r$ -ième de  $h$  est donnée par :

$$h^{(r)}(t) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} f^{(j)}(t) g^{(r-j)}(t) \quad \text{où : } \binom{r}{j} = \frac{r!}{j!(r-j)!}$$

**Preuve :**

On démontre la règle de Liebnitz par récurrence sur  $r$

$$\begin{aligned} h'(t) &= \binom{1}{0} f^{(0)}(t) g^{(1)}(t) + \binom{1}{1} f^{(1)}(t) g^{(0)}(t) \\ &= f(t) g'(t) + f'(t) g(t) \end{aligned}$$

La règle est vérifiée pour  $r = 1$

Supposons la règle vraie jusqu'à l'ordre  $r$ .

$$\begin{aligned}
h^{(r+1)}(t) &= [h^{(r)}(t)]' \\
&= \left[ \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} f^{(j)}(t) g^{(r-j)}(t) \right]' \\
&= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} f^{(j+1)}(t) g^{(r-j)}(t) + \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} f^{(j)}(t) g^{(r-j+1)}(t) \\
&= f^{(r+1)}g + \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} f^{(j+1)}g^{(r-j)} + fg^{(r+1)} + \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} f^{(j)}g^{(r-j+1)} \\
&= f^{(r+1)}g + fg^{(r+1)} + \sum_{j=1}^r \binom{r}{j-1} f^{(j)}g^{(r-j+1)} + \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} f^{(j)}g^{(r-j+1)} \\
&= f^{(r+1)}g + fg^{(r+1)} + \sum_{j=1}^r \left[ \binom{r}{j-1} + \binom{r}{j} \right] f^{(j)}g^{(r-j+1)}
\end{aligned}$$

$$\text{Or : } \binom{r}{j-1} + \binom{r}{j} = \binom{r+1}{j} \quad \text{d'où :}$$

$$\begin{aligned}
h^{(r+1)}(t) &= f^{(r+1)}g + fg^{(r+1)} + \sum_{j=1}^r \binom{r+1}{j} f^{(j)}g^{(r-j+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{r+1} \binom{r+1}{j} f^{(j)}g^{(r-j+1)}
\end{aligned}$$

### Théorème 3.2

La dérivée r-ième d'une courbe de Bézier rationnelle est donnée par :

$$B^{(r)}(t) = \frac{p^{(r)}(t) - \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} w^j(t) B^{(r-j)}(t)}{w(t)}$$

$$\begin{aligned}
&\text{avec } p(t) = \sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t) \\
&\text{et } w(t) = \sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)
\end{aligned}$$

**Preuve :**

Soit  $B(t)$  la courbe de Bézier rationnelle définie par :

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)}$$

On pose :  $p(t) = \sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t)$   
 et  $w(t) = \sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)$

Il en résulte que :  $p(t) = B(t) \cdot w(t)$

La règle de Liebnitz nous donne :

$$\begin{aligned} p^{(r)}(t) &= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} w^{(j)}(t) B^{(r-j)}(t) \\ &= w(t) B^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} w^{(j)}(t) B^{(r-j)}(t) \end{aligned}$$

Finalement, on aura :

$$B^{(r)}(t) = \frac{p^{(r)}(t) - \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} w^{(j)}(t) B^{(r-j)}(t)}{w(t)}$$

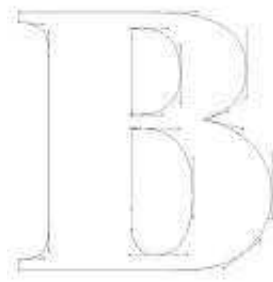


FIGURE 3.4 – La lettre B représentée par des courbes de Bézier

# Chapitre 4

## Les Fonctions de Base des B-splines

On a vu dans les chapitres précédants que pour augmenter le contrôle d'une courbe de Bézier, on ne pouvait qu'augmenter le nombre de points de contrôle de celle-ci.

Une telle opération s'avérant particulièrement coûteuse en termes de calculs, on a introduit les courbes de Bézier par morceaux.

On a vu par la suite que pour que ces courbes soient  $\mathcal{C}^k$ , il nous fallait poser des conditions assez restrictives sur les points de contrôle des segments de courbes.

Dans cette partie, nous allons présenter une nouvelle classe de courbes polynômiales par morceaux, appelée "B-splines" ayant toutes les propriétés des courbes de Bézier mais se distinguant par le fait que ses points de contrôle soient indépendants de son degré.

Ainsi, on pourra choisir librement le nombre de points de contrôle, sans condition aucune, et sans se soucier du degré de la courbe, qui lui, reste inchangé.

### 4.1 Définition

Soient  $U = t_0, t_1, \dots, t_m$  une suite de  $(m + 1)$  nombres réels tels que :  $t_i \leq t_{i+1}$  pour :  $0 \leq i \leq m - 1$

Les  $t_i$  sont appelés *noeuds* et  $U$  est dit *vecteur nodal*.

Soit  $d \in \mathbb{N}$  tel que :  $0 \leq d \leq m$

les points  $t_0, t_1, \dots, t_d$  et  $t_{m-d}, t_{m-d+1}, \dots, t_m$  sont dits *noeuds extrêmes*

les points  $t_{d+1}, \dots, t_{m-d-1}$  sont appelés *noeuds intérieurs*.

**Définition 4.1**

Les fonctions de base de B-spline de degré  $d$  définies par le vecteur nodal  $(t_0, t_1, \dots, t_m)$  et notées  $N_{i,d}(t)$  sont définies par récurrence comme suit [3],[1],[6] :

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{i,d}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t) + \frac{t_{i+d+1} - t}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t)$$

pour :  $d \geq 1$

**exemple 4.1**

On considère le vecteur nodal  $U = (1, 2, 4, 5, 7, 9, 11)$

Les fonctions de base sont données par :

pour  $d = 0$

$$N_{0,0} = \begin{cases} 1 & t \in [1, 2) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{1,0} = \begin{cases} 1 & t \in [2, 4) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{2,0} = \begin{cases} 1 & t \in [4, 5) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{3,0} = \begin{cases} 1 & t \in [5, 7) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{4,0} = \begin{cases} 1 & t \in [7, 9) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{5,0} = \begin{cases} 1 & t \in [9, 11) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

pour  $d = 1$

$$N_{0,1} = \begin{cases} t - 1 & t \in [1, 2) \\ (4 - t)/2 & t \in [2, 4) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{1,1} = \begin{cases} (t - 2)/2 & t \in [2, 4) \\ 5 - t & t \in [4, 5) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

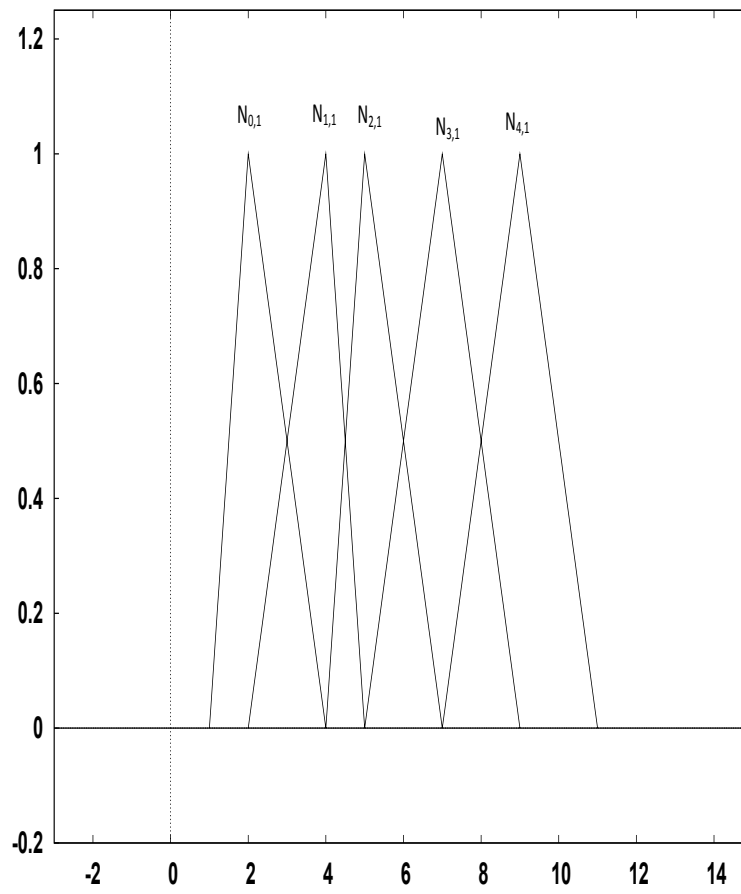


FIGURE 4.1 – Fonctions de base de degré 1



$$N_{2,1} = \begin{cases} t - 4 & t \in [4, 5) \\ (7 - t)/2 & t \in [5, 7) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{3,1} = \begin{cases} (t - 5)/2 & t \in [5, 7) \\ (9 - t)/2 & t \in [7, 9) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{4,1} = \begin{cases} (t - 7)/2 & t \in [7, 9) \\ (11 - t)/2 & t \in [9, 11) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

pour  $d = 2$

$$N_{0,2} = \begin{cases} (t - 1)^2/3 & t \in [1, 2) \\ (4 - t)(t - 1)/6 + (t - 2)(5 - t)/6 & t \in [2, 4) \\ (5 - t)^2/3 & t \in [4, 5) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{1,2} = \begin{cases} (t - 2)^2/6 & t \in [2, 4) \\ (5 - t)(t - 2)/3 + (t - 4)(7 - t)/3 & t \in [4, 5) \\ (7 - t)^2/6 & t \in [5, 7) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{2,2} = \begin{cases} (t - 4)^2/3 & t \in [4, 5) \\ (7 - t)(t - 4)/6 + (t - 5)(9 - t)/8 & t \in [5, 7) \\ (9 - t)^2/8 & t \in [7, 9) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{3,2} = \begin{cases} (t - 5)^2/8 & t \in [5, 7) \\ (9 - t)(t - 5)/8 + (t - 7)(11 - t)/8 & t \in [7, 9) \\ (11 - t)^2/8 & t \in [9, 11) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

## 4.2 Dérivation des B-splines

### lemme 4.1

La dérivée première d'une fonction de base de B-spline est donnée par la relation de récurrence :

$$N'_{i,d}(t) = \frac{d}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t) - \frac{d}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t)$$

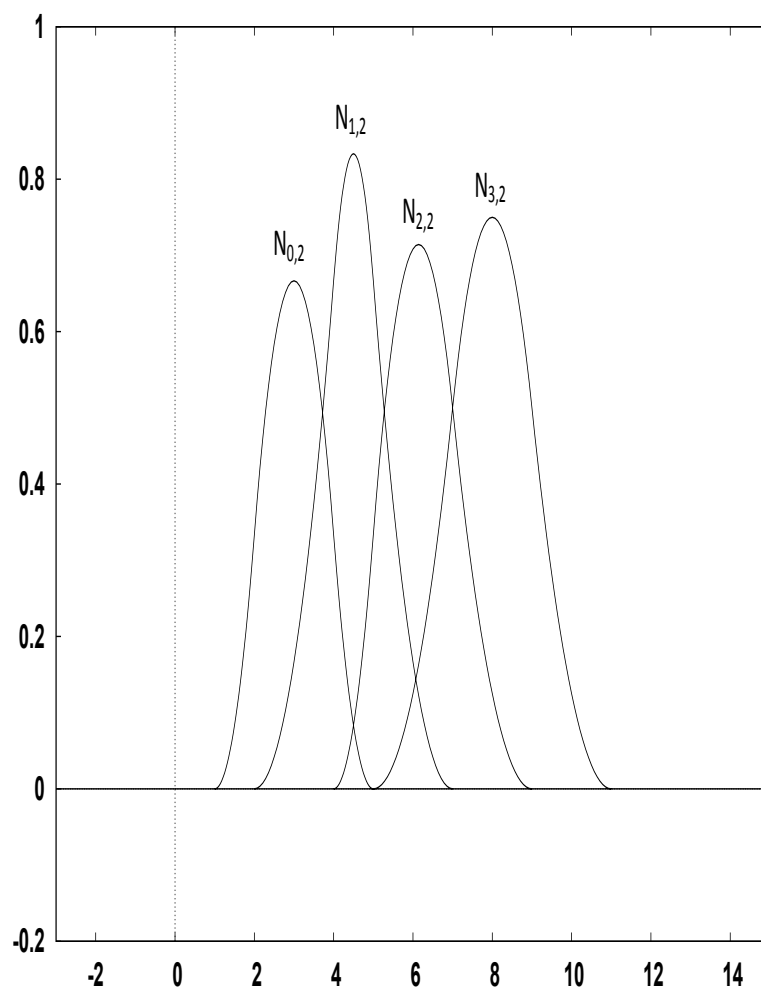


FIGURE 4.2 – Fonctions de base de degré 2

**Preuve :**

La preuve se fait par récurrence sur  $d$

$$\text{Pour } d = 1, \quad N_{i,1}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} N_{i,0}(t) + \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} N_{i+1,0}(t)$$

$$\text{D'où : } N'_{i,1}(t) = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} N_{i,0}(t) - \frac{1}{t_{i+2} - t_{i+1}} N_{i+1,0}(t)$$

Maintenant, supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre  $d$

On a par définition :

$$\begin{aligned} N_{i,d+1}(t) &= \frac{t - t_i}{t_{i+d+1} - t_i} N_{i,d}(t) + \frac{t_{i+d+2} - t}{t_{i+d+2} - t_{i+1}} N_{i+1,d}(t) \\ \Rightarrow N'_{i,d+1}(t) &= \frac{1}{t_{i+d+1} - t_i} N_{i,d}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+d+1} - t_i} N'_{i,d}(t) \\ &\quad - \frac{1}{t_{i+d+2} - t_{i+1}} N_{i+1,d}(t) + \frac{t_{i+d+2} - t}{t_{i+d+2} - t_{i+1}} N'_{i+1,d}(t) \end{aligned}$$

On applique l'hypothèse de récurrence sur  $N'_{i,d}(t)$  et  $N'_{i+1,d}(t)$ , on aura :

$$\begin{aligned} N'_{i,d+1}(t) &= \frac{1}{t_{i+d+1} - t_i} N_{i,d}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+d+1} - t_i} \\ &\quad \left[ \frac{d}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t) - \frac{d}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t) \right] \\ &\quad - \frac{1}{t_{i+d+2} - t_{i+1}} N_{i+1,d}(t) + \frac{t_{i+d+2} - t}{t_{i+d+2} - t_{i+1}} \\ &\quad \left[ \frac{d}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t) - \frac{d}{t_{i+d+2} - t_{i+2}} N_{i+2,d-1}(t) \right] \\ &= \frac{1}{t_{i+d+1} - t_i} N_{i,d}(t) - \frac{1}{t_{i+d+2} - t_{i+1}} N_{i+1,d}(t) \\ &\quad + \frac{d(t - t_i)}{(t_{i+d+1} - t_i)(t_{i+d} - t_i)} N_{i,d-1}(t) \\ &\quad + d \left[ \frac{t_{i+d+2} - t}{(t_{i+d+2} - t_{i+1})(t_{i+d+1} - t_{i+1})} - \frac{t - t_i}{(t_{i+d+1} - t_i)(t_{i+d+1} - t_{i+1})} \right] \\ &\quad N_{i+1,d-1}(t) - d \frac{t_{i+d+2} - t}{(t_{i+d+2} - t_{i+1})(t_{i+d+2} - t_{i+2})} N_{i+2,d-1}(t) \end{aligned}$$

D'un autre côté :

$$\frac{t_{i+d+2} - t}{t_{i+d+2} - t_{i+1}} - \frac{t - t_i}{t_{i+d+1} - t_i} = \frac{t_{i+d+1} - t}{t_{i+d+1} - t_i} - \frac{t - t_{i+1}}{t_{i+d+2} - t_{i+1}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} N'_{i,d+1}(t) &= \frac{1}{t_{i+d+1} - t_i} N_{i,d}(t) - \frac{1}{t_{i+d+2} - t_{i+1}} N_{i+1,d}(t) + \frac{d}{t_{i+d+1} - t_i} \\ &\quad \left[ \frac{t - t_i}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t) + \frac{t_{i+d+1} - t}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t) \right] - \frac{d}{t_{i+d+2} - t_{i+1}} \\ &\quad \left[ \frac{t - t_{i+1}}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t) + \frac{t_{i+d+2} - t}{t_{i+d+2} - t_{i+2}} N_{i+2,d-1}(t) \right] N_{i+2,d-1}(t) \\ &= \frac{1}{t_{i+d+1} - t_i} N_{i,d}(t) - \frac{1}{t_{i+d+2} - t_{i+1}} N_{i+1,d}(t) + \frac{d}{t_{i+d+1} - t_i} N_{i,d}(t) \\ &\quad - \frac{d}{t_{i+d+2} - t_{i+1}} N_{i+1,d}(t) \\ &= \frac{d+1}{t_{i+d+1} - t_i} N_{i,d}(t) - \frac{d+1}{t_{i+d+2} - t_{i+1}} N_{i+1,d}(t) \end{aligned}$$

Donc, on a bien :

$$N'_{i,d}(t) = \frac{d}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t) - \frac{d}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t)$$

## 4.3 Propriétés des fonctions de base des B-splines

Les fonctions de base des B-spline  $N_{i,k}(t)$  satisfont aux propriétés suivantes [3],[1],[6] :

### 4.3.1 Support local

$$N_{i,k}(t) = 0, t \notin [t_i, t_{i+k+1})$$

**Preuve :**

$$\text{pour } k = 0, N_{i,k}(t) = 0, t \notin [t_i, t_{i+1})$$

On suppose le résultat vrai jusqu'au rang  $k$  :

$$N_{i,k}(t) = 0, t \notin [t_i, t_{i+k+1})$$

Et aussi :

$$N_{i+1,k}(t) = 0, t \notin [t_{i+1}, t_{i+k+2})$$

$N_{i,k+1}(t)$  est donnée par la relation :

$$N_{i,k+1}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k+1} - t_i} N_{i,k}(t) + \frac{t_{i+k+2} - t}{t_{i+k+2} - t_{i+1}} N_{i+1,k}(t)$$

On montre que la propriété est vraie pour  $k + 1$  :

$$N_{i,k+1}(t) = 0, t \notin [t_i, t_{i+k+2})$$

Si  $t \notin [t_i, t_{i+k+2})$  alors :  $t \notin [t_i, t_{i+k+1})$  et  $t \notin [t_{i+1}, t_{i+k+2})$

Ceci implique que  $N_{i,k}(t) = N_{i+1,k}(t) = 0, t \notin [t_i, t_{i+k+2})$

Finalement,  $N_{i,k+1}(t) = 0, t \notin [t_i, t_{i+k+2})$

### 4.3.2 Nonnégativité

$$\forall t \in \mathbb{R}, N_{i,k}(t) \geq 0$$

**Preuve :**

La preuve se fait par induction sur  $k$

pour  $k = 0$  la propriété est vraie par définition.

On suppose le résultat vrai jusqu'au rang  $k$  :

$$N_{i,k}(t) \geq 0 \text{ et } N_{i+1,k}(t) \geq 0$$

On montre que la propriété est vraie pour  $k + 1$  :

$$N_{i,k+1}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k+1} - t_i} N_{i,k}(t) + \frac{t_{i+k+2} - t}{t_{i+k+2} - t_{i+1}} N_{i+1,k}(t)$$

On sait d'après la propriété de support local que :

$$N_{i,k+1}(t) = 0, t \notin [t_i, t_{i+k+2})$$

D'un autre côté, si  $t \in [t_i, t_{i+k+2})$  alors :

$$\frac{t - t_i}{t_{i+k+1} - t_i}, \frac{t_{i+k+2} - t}{t_{i+k+2} - t_{i+1}} \geq 0$$

Comme  $N_{i,k}$  et  $N_{i+1,k}$  sont supposées toutes deux non négatives alors  $N_{i,k+1}$  est elle aussi non négative pour n'importe quel  $t$

### 4.3.3 Polynômes par morceaux

$N_{i,k}(t)$  sont des fonctions polynômiales par morceaux de degré  $k$ .

**Preuve :**

On démontre par récurrence que les  $N_{i,k}(t)$  sont des fonctions polynômiales par morceaux. En effet, les  $N_{i,0}(t)$  étant des fonctions polynômiales par morceaux par définition, si on suppose  $N_{i,k}(t)$  et  $N_{i+1,k}(t)$  par morceaux, alors la définition de récurrence nous donne que  $N_{i,k+1}(t)$  est aussi par morceaux car étant construit avec deux fonctions polynômiales par morceaux.

### 4.3.4 Partition de l'unité

$$\forall 0 \leq r \leq m \sum_{j=r-k}^r N_{j,k}(t) = 1 \text{ pour } t \in [t_r, t_{r+1}[$$

**Preuve :**

La preuve se fait par recurrence sur  $k$

Pour  $k = 0$ ,  $N_{r,0}(t) = 1$  si  $t \in [t_r, t_{r+1}[$

On suppose que :  $\forall t \in [t_r, t_{r+1}[$ ,  $\sum_{j=r-k-1}^r N_{j,k-1}(t) = 1$

D'un autre côté :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=r-k}^r N_{j,k}(t) &= N_{r-k,k}(t) + \cdots + N_{r-1,k}(t) + N_{r,k}(t) \\
&= \left[ \frac{t-t_{r-k}}{t_r-t_{r-k}} N_{r-k,k-1}(t) + \frac{t_{r+1}-t}{t_{r+1}-t_{r-k+1}} N_{r-k+1,k-1}(t) \right] \\
&\quad + \cdots + \left[ \frac{t-t_{r-1}}{t_{r+k-1}-t_{r-1}} N_{r-1,k-1}(t) + \frac{t_{r+k}-t}{t_{r+k}-t_r} N_{r,k-1}(t) \right] \\
&\quad + \left[ \frac{t-t_r}{t_{r+k}-t_r} N_{r,k-1}(t) + \frac{t_{r+k+1}-t}{t_{r+k+1}-t_{r+1}} N_{r+1,k-1}(t) \right] \\
&= \frac{t-t_{r-k}}{t_r-t_{r-k}} N_{r-k,k-1}(t) + \left[ \frac{t_{r+1}-t}{t_{r+1}-t_{r-k+1}} + \frac{t-t_{r-k+1}}{t_{r+1}-t_{r-k+1}} \right] \\
&\quad N_{r-k+1,k-1}(t) + \cdots + \left[ \frac{t_{r+k}-t}{t_{r+k}-t_r} + \frac{t-t_r}{t_{r+k}-t_r} \right] N_{r,k-1}(t) \\
&\quad + \frac{t_{r+k+1}-t}{t_{r+k+1}-t_{r+1}} N_{r+1,k-1}(t) \\
&= \frac{t-t_{r-k}}{t_r-t_{r-k}} N_{r-k,k-1}(t) + N_{r-k+1,k-1}(t) + \cdots + N_{r,k-1}(t) + \\
&\quad \frac{t_{r+k+1}-t}{t_{r+k+1}-t_{r+1}} N_{r+1,k-1}(t)
\end{aligned}$$

Comme  $N_{r-k,k-1}(t) = 0$  pour  $t \notin [t_{r-k}, t_r]$  et :  
 $N_{r+1,k-1}(t) = 0$  pour  $t \notin [t_{r+1}, t_{r+k+1}]$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=r-k}^r N_{j,k}(t) &= N_{r-k+1,k-1}(t) + \cdots + N_{r,k-1}(t) \\
&= \sum_{j=r-k+1}^r N_{j,k-1}(t) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc,  $\forall t \in [t_r, t_{r+1}[$ ,  $\sum_{j=r-k}^r N_{j,k}(t) = 1$

### 4.3.5 Continuité

Si le noeud  $t_i$  est de multiplicité  $p_i$  alors  $N_{i,k}(t)$  est  $\mathcal{C}^{k-p_i}$  en  $t = t_i$  et  $\mathcal{C}^\infty$  ailleurs. Donc, on augmente la continuité en augmentant le degré  $k$  et on la diminue en augmentant la multiplicité  $p_i$

**Preuve :**

Comme les fonctions de base  $N_{i,k}(t)$  sont des polynômes par morceaux de degré  $k$ , ils sont  $\mathcal{C}^\infty$  sauf aux noeuds où se joignent les segments de courbes qui les composent.

Supposons que le noeud  $t_i$  est de multiplicité  $p_i$  avec  $1 \leq p_i \leq k$

Pour  $k = 1$ ,  $p_i = 1$  et :

$$\begin{aligned} N_{i,1}(t) &= \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} N_{i,0}(t) + \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} N_{i+1,0}(t) \\ &= \begin{cases} \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} & , t \in [t_i, t_{i+1}[ \\ \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} & , t \in [t_{i+1}, t_{i+2}[ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $t \neq t_i$ ,  $N_{i,1}(t)$  est  $\mathcal{C}^\infty$ . Et comme :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_i^+} N_{i,1}(t) &= \lim_{t \rightarrow t_i^-} N_{i,1}(t) = N_{i,1}(t_i) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow t_{i+1}^+} N_{i,1}(t) &= \lim_{t \rightarrow t_{i+1}^-} N_{i,1}(t) = N_{i,1}(t_{i+1}) = 1 \\ \lim_{t \rightarrow t_{i+2}^+} N_{i,1}(t) &= \lim_{t \rightarrow t_{i+2}^-} N_{i,1}(t) = N_{i,1}(t_{i+2}) = 0 \end{aligned}$$

Donc,  $N_{i,1}(t)$  est  $\mathcal{C}^0$  en  $t = t_i$

On en conclut que la propriété est vraie pour  $k = 1$ .

L'hypothèse de récurrence est que tous les  $N_{i,k-1}(t)$  sont  $\mathcal{C}^{k-1-p_i}$  en  $t = t_i$

D'autre part, on a :

$$N'_{i,k}(t) = \frac{k}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t) - \frac{k}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

$N'_{i,k}(t)$  est  $\mathcal{C}^{k-1-p_i}$  en  $t = t_i$  car elle s'écrit comme combinaison de deux fonctions  $\mathcal{C}^{k-1-p_i}$

De plus, comme  $N_{i,k}(t)$  est continue en  $t = t_i$ , on en déduit que  $N_{i,k}(t)$  est  $\mathcal{C}^{k-p_i}$  en  $t = t_i$





# Chapitre 5

## Courbes B-splines

Dans ce chapitre, nous allons introduire les courbes B-splines, présenter leurs propriétés et proposer un algorithme de calcul pour ces courbes.

### 5.1 Définition

La Courbe B-spline de degré  $d$  munie des points de contrôle  $b_0, \dots, b_n$  est définie sur l'intervalle  $[a, b]$  par [3],[7],[6] :

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t)$$

Où les  $N_{i,d}(t)$  sont les fonctions de base des B-splines de degré  $d$  définies par le vecteur nodal  $(t_0, \dots, t_d = a, \dots, t_{m-d} = b, \dots, t_m)$

#### Remarque 11

Pour les distinguer de celles rationnelles, les courbes B-splines définies plus haut sont dites *intégrales* ou *non rationnelles*.

#### Remarque 12

Alors qu'une courbe de Bézier de degré  $d$  a exactement  $(d + 1)$  points de contrôle, une B-spline de degré  $d$  peut avoir n'importe quel nombre de points de contrôle pourvu qu'on dispose d'assez de noeuds.

Ainsi pour modéliser des formes assez complexes, les B-splines sont bien plus efficaces que les courbes de Bézier car on peut augmenter le nombre de points de contrôle sans augmenter le degré de la courbe.

## 5.2 Relation entre le degré de la courbe "d", le nombre de noeuds "m+1" et le nombre de points de contrôle "n+1"

Soit  $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t)$  une courbe B-spline de degré  $d$  avec  $(n+1)$  points de contrôle  $b_0, \dots, b_n$ .

Chaque fonction de base  $N_{i,d}(t)$  est définie par  $(d+2)$  noeuds :  $t_i, \dots, t_{i+d+1}$ .

Donc pour  $i$  variant dans l'intervalle  $[0, n]$ , on aura besoin des noeuds  $t_0, t_1, \dots, t_{n+d+1}$  soit exactement  $(n+d+2)$  noeuds, d'où la relation :

$$m+1 = n+d+2 \Rightarrow m = n+d+1$$

### exemple 5.1

Soit  $B(t)$  une courbe de B-spline définie sur  $[4, 7]$  munie des points de contrôle :  $b_0 = (-4, -1)$ ,  $b_1 = (-2, 1)$ ,  $b_2 = (1, 3)$  et  $b_3 = (3, 1)$  et du vecteur nodal  $U = (1, 2, 4, 5, 7, 9, 11)$ .

Les fonctions de base de degré 2 sont données dans l'exemple 4.1 par :

$$N_{0,2} = \begin{cases} (t-1)^2/3 & t \in [1, 2) \\ (4-t)(t-1)/6 + (t-2)(5-t)/6 & t \in [2, 4) \\ (5-t)^2/3 & t \in [4, 5) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{1,2} = \begin{cases} (t-2)^2/6 & t \in [2, 4) \\ (5-t)(t-2)/3 + (t-4)(7-t)/3 & t \in [4, 5) \\ (7-t)^2/6 & t \in [5, 7) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{2,2} = \begin{cases} (t-4)^2/3 & t \in [4, 5) \\ (7-t)(t-4)/6 + (t-5)(9-t)/8 & t \in [5, 7) \\ (9-t)^2/8 & t \in [7, 9) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{3,2} = \begin{cases} (t-5)^2/8 & t \in [5, 7) \\ (9-t)(t-5)/8 + (t-7)(11-t)/8 & t \in [7, 9) \\ (11-t)^2/8 & t \in [9, 11) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$B(t) = (-4, -1)N_{0,2} + (-2, 1)N_{1,2} + (1, 3)N_{2,2} + (3, 1)N_{3,2}$$

$B(t)$  s'écrit :

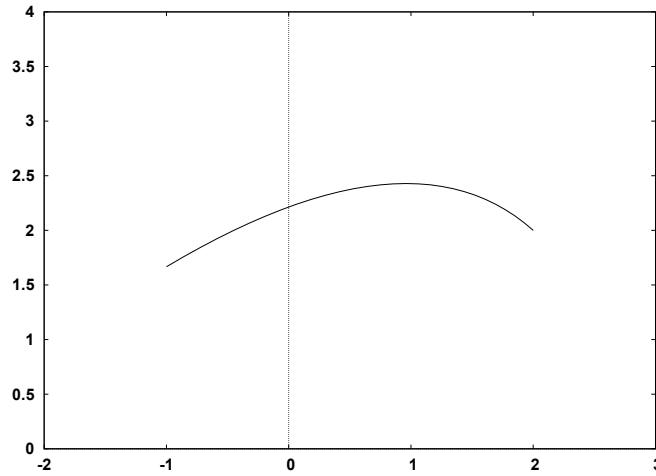


FIGURE 5.1 – Courbe de B-spline calculée dans l'exemple 5.1

$$B(t) = \begin{cases} (-4, -1)\frac{5-t^2}{3} + (-2, 1)\left(\frac{(5-t)(t-2)}{3} + \frac{(t-4)(7-t)}{3}\right) + (1, 3)\frac{(t-4)^2}{3} & t \in [4, 5) \\ (-2, 1)\frac{(7-t)^2}{6} + (1, 3)\left(\frac{(7-t)(t-4)}{6} + \frac{(t-5)(9-t)}{8}\right) + (3, 1)\frac{(t-5)^2}{8} & t \in [5, 7] \end{cases}$$

### 5.3 Relation entre les courbes B-splines et celles de Bézier

Les courbes de Bézier peuvent être vues comme un cas particulier des courbes B-splines.

Il suffit pour cela de considérer le vecteur nodal

$$U = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$$

avec 0 et 1 répétés chacun  $(n+1)$  fois. Ceci est illustré par l'exemple suivant :

#### exemple 5.2

Soit  $b_0, b_1, b_2$  des points de contrôle définissant une courbe B-spline munie du vecteur nodal  $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$ . Le calcul des fonctions de base  $N_{i,n}(t)$  nous donne :

$$N_{0,0} = N_{1,0} = N_{3,0} = N_{4,0} = 0$$

$$N_{0,2} = \begin{cases} (1-t)^2 & t \in [0, 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{1,2} = \begin{cases} 2t(1-t) & t \in [0, 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$N_{2,2} = \begin{cases} t^2 & t \in [0, 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\text{On aura : } B(t) = \begin{cases} b_0(1-t)^2 + b_1 2t(1-t) + b_2 t^2 & t \in [0, 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Ce qui revient à représenter exactement une courbe de Bézier quadratique sur  $[0, 1]$

## 5.4 Propriétés des courbes B-splines

Une courbe B-spline  $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t)$  de degré  $d$  satisfait aux propriétés suivantes [3],[7],[6] :

### 5.4.1 Contrôle local

soit  $r \in \mathbb{N}$  tel que  $r$  varie dans l'intervalle  $[d, m-d-1]$

Si  $t \in [t_r, t_{r+1}[$  alors  $B(t) = \sum_{i=r-d}^r b_i N_{i,d}(t)$

$B(t)$  étant définie sur  $[t_d, t_{m-d}]$ , chaque sègment de courbe sera définie sur  $[t_r, t_{r+1}[$

La propriété de contrôle local consiste à ce que chaque sègment de courbe soit définie par exactement  $(d+1)$  points de contrôle et ainsi, pour évaluer  $B(t)$ , il suffit d'évaluer  $N_{r-d,d}(t), \dots, N_{r,d}(t)$

**Preuve :**

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{r-d-1} b_i N_{i,d}(t) + \sum_{i=r-d}^r b_i N_{i,d}(t) + \sum_{i=r+1}^n b_i N_{i,d}(t) \end{aligned}$$

On suppose que  $t \in (t_r, t_{r+1})$

$$\forall i \in [r+1, n], N_{i,d}(t) = 0 \quad \text{car } t \notin (t_i, t_{i+d+1})$$

D'où :  $\sum_{i=r+1}^n b_i N_{i,d}(t) = 0$

De la même manière,

$$\forall i \in [0, r-d-1], N_{i,d}(t) = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{r-d-1} b_i N_{i,d}(t) = 0$$

Finalement, on aura :

$$B(t) = \sum_{i=r-d}^r b_i N_{i,d}(t) \quad \text{pour } t \in [t_r, t_{r+1}[$$

### 5.4.2 Modification locale

Pour une courbe de Bézier, modifier un point aurait pour conséquence des changements dans toute la courbe. Un des avantages des courbes B-spline est la propriété de *modification locale*. Comme  $N_{p,d}(t)$  est nulle sauf dans  $[t_p, t_{p+d+1})$ , changer le point de contrôle  $b_p$  n'entraînera de modification pour la courbe B-spline que sur l'intervalle  $[t_p, t_{p+d+1})$  et non pas sur la courbe toute entière comme c'est le cas pour les courbes de Bézier.

### 5.4.3 Enveloppe convexe

Soit  $d \leq r \leq m-d-1$

Alors :  $B(t) \subset CH\{b_{r-d}, \dots, b_r\}$  pour :  $t \in [t_r, t_{r+1}[$

**Preuve :**

D'après la définition de l'enveloppe convexe :

$$CH\{x_0, x_1, \dots, x_n\} = \left\{ a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots, a_n x_n / a_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=0}^n a_i = 1 \right\}$$

Or,  $\sum_{i=r-d}^r N_{i,d}(t) = 1$  et  $N_{i,d}(t) \geq 0$  pour  $t \in [t_r, t_{r+1}[$

On sait que :

$$B(t) = \sum_{i=r-d}^r b_i N_{i,d}(t), \quad t \in [t_r, t_{r+1}[$$

Donc, en posant  $a_i = N_{i,d}(t)$ ,  $i = r-d, \dots, r$ , on aura :

$$B(t) \subset CH\{b_{r-d}, \dots, b_r\}$$

### 5.4.4 Continuité

Si  $p_i$  est la multiplicité du noeud  $t_i$ , alors  $B(t)$  est au moins  $\mathcal{C}^{d-p_i}$  en  $t_i$  et  $\mathcal{C}^\infty$  ailleurs.

**Preuve :**

Comme  $B(t)$  est une fonction polynômiale par morceaux elle est  $\mathcal{C}^\infty$  partout sauf aux points  $t_i$

On sait déjà que pour un noeud  $t_i$  de multiplicité  $p_i$ ,  $N_{i,d}(t)$  est  $\mathcal{C}^{d-p_i}$  en  $t_i$  et  $\mathcal{C}^\infty$  ailleurs.

Donc, en  $t_i$ ,  $B(t)$  est une somme de fonctions  $\mathcal{C}^{d-p_i}$  ou  $\mathcal{C}^\infty$ , ceci implique que  $B(t)$  est au moins  $\mathcal{C}^{d-p_i}$  en  $t_i$

### 5.4.5 Invariance par transformation affine

Soit  $T$  une transformation affine, alors :

$$T\left(\sum_{i=r-d}^r b_i N_{i,d}(t)\right) = \sum_{i=r-d}^r T(b_i) N_{i,d}(t) \quad \text{avec : } t \in [t_r, t_{r+1}[$$

### 5.4.6 Interpolation des extrémités

Pour que cette propriété soit vérifiée, on choisit le vecteur nodal tel que :  $t_0 = t_1 = \dots = t_d$  et  $t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$

On parle alors de courbe B-spline "ouverte" et on aura :

$$B(t_d) = b_0 \quad \text{et} \quad B(t_m) = b_n$$

## 5.5 L'algorithme de De Boor

L'algorithme de De Boor [3] est aux courbes B-splines ce que l'algorithme de De Casteljau est aux courbes de Bézier.

De Casteljau se base sur la relation de récurrence des polynômes de Bernstein, alors que De Boor se base sur la récurrence des fonctions de base des B-splines.

### 5.5.1 Présentation de l'algorithme

**Entrée** :  $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$

**Procédure** :

$$\begin{cases} b_i^j(t) &= (1 - \alpha_i^j(t))b_{i-1}^{j-1}(t) + \alpha_i^j(t)b_i^{j-1}(t) \\ \alpha_i^j(t) &= \frac{t-t_i}{t_{i+d-j+1}-t_i} \end{cases}$$

pour :  $j = 1, \dots, d$ ;  
 $i = r - d + j, \dots, r$

et où :  $b_i^0(t) = b_i$  et  $b_{-1} = b_{m-d+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Sortie** :  $b_r^d(t)$  le point à paramètre  $t$  dans la courbe B-spline  $B(t)$

#### Remarque 13

$B(t)$  étant une courbe par morceaux, l'algorithme nous indique les points de la courbe B-spline pour chaque segment de courbe défini sur  $[t_r, t_{r+1}[$  avec  $r \in [d, m - d - 1]$

#### Remarque 14

Comme pour celui de De Casteljau, l'algorithme de De Boor peut être visualisé sous forme d'un triangle :

$$\begin{array}{ccccccc} b_{r-d}^0 & & b_{r-d+1}^0 & \cdots & \cdots & \cdots & b_r^0 \\ & b_{r-d+1}^1 & & & & & b_r^1 \\ & & \cdots & & & \cdots & \\ & & & b_{r-1}^{d-1} & b_r^{d-1} & & \\ & & & & b_r^d & & \end{array}$$

Pour la preuve de cet algorithme, nous avons besoin du lemme suivant :

#### lemme 5.1

Pour  $t \in [t_r, t_{r+1}[$ ,  $B(t)$  est donnée par :

$$B(t) = \sum_{i=r-d+j}^r b_i^j N_{i,d-j}(t) \quad \text{avec}$$

$j = 1, \dots, d$  et  $i = r - d + j, \dots, r$

#### Preuve :

La démonstration se fait par récurrence sur  $j$



$$B(t) = \sum_{i=r-d}^r b_i N_{i,d}(t), \quad t \in [t_r, t_{r+1}[$$

$$\text{Or, } N_{i,d}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t) + \frac{t_{i+d+1} - t}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t)$$

$$\text{D'où : } B(t) = \sum_{i=r-d}^r b_i \frac{t - t_i}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t) + \sum_{i=r-d}^r b_i \frac{t_{i+d+1} - t}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t)$$

En réindexant la deuxième somme, on obtient :

$$B(t) = \sum_{i=r-d}^r b_i \frac{t - t_i}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t) + \sum_{i=r-d+1}^{r+1} b_{i-1} \frac{t_{i+d} - t}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t)$$

Et comme  $N_{r+1,d-1}(t) = N_{r-d,d-1}(t) = 0$  alors

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{i=r-d+1}^r \left( b_i \frac{t - t_i}{t_{i+d} - t_i} + b_{i-1} \frac{t_{i+d} - t}{t_{i+d} - t_i} \right) N_{i,d-1}(t) \\ &= \sum_{i=r-d+1}^r b_i^1 N_{i,d-1}(t) \end{aligned}$$

Donc, la propriété est vraie pour  $j = 1$

On suppose le résultat vrai jusqu'à l'ordre  $j - 1$  :

$$B(t) = \sum_{i=r-d+j-1}^r b_i^{j-1} N_{i,d-j+1}(t)$$

$$\text{Or } N_{i,d-j+1}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+d-j+1} - t_i} N_{i,d-j}(t) + \frac{t_{i+d-j+2} - t}{t_{i+d-j+2} - t_{i+1}} N_{i+1,d-j}(t)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } B(t) &= \sum_{i=r-d+j-1}^r b_i^{j-1} \frac{t - t_i}{t_{i+d-j+1} - t_i} N_{i,d-j}(t) \\ &\quad + \sum_{i=r-d+j-1}^r b_i^{j-1} \frac{t_{i+d-j+2} - t}{t_{i+d-j+2} - t_{i+1}} N_{i+1,d-j}(t) \end{aligned}$$

En réindexant la deuxième somme, on obtient :

$$B(t) = \sum_{i=r-d+j-1}^r b_i^{j-1} \frac{t - t_i}{t_{i+d-j+1} - t_i} N_{i,d-j}(t) + \sum_{i=r-d+j}^{r+1} b_{i-1}^{j-1} \frac{t_{i+d-j+1} - t}{t_{i+d-j+1} - t_{i-1}} N_{i,d-j}(t)$$

Et comme  $N_{r+1,d-j}(t) = N_{r-d+j-1,d-j}(t) = 0$  alors :

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{i=r-d+j}^r \left( b_i^{j-1} \frac{t - t_i}{t_{i+d-j+1} - t_i} + b_{i-1}^{j-1} \frac{t_{i+d-j+1} - t}{t_{i+d-j+1} - t_{i-1}} \right) N_{i,d-j}(t) \\ &= \sum_{i=r-d+j}^r b_i^j N_{i,d-j}(t) \end{aligned}$$

### 5.5.2 Preuve de l'algorithme

Soit  $t \in [t_r, t_{r+1})$

D'après le lemme 5.1 :

$$B(t) = \sum_{i=r-d+j}^r b_i^j N_{i,d-j}(t) \quad \text{avec :}$$

$$j = 1, \dots, d \quad \text{et} \quad i = r - d + j, \dots, r$$

En particulier pour  $j = d$

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{i=r}^r b_i^d N_{i,0}(t) \\ &= b_r^d N_{r,0}(t) \end{aligned}$$

Comme  $N_{r,0}(t) = 1$  sur  $[t_r, t_{r+1}[$  alors :

$$B(t) = b_r^d(t)$$

#### exemple 5.3

On reprend l'exemple 5.1

Supposons qu'on veuille calculer  $B(4.25)$

$$4.25 \in [4, 5) = [t_2, t_3) \Rightarrow r = 2$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1^1 &= \frac{t-t_1}{t_3-t_1} = \frac{4.25-2}{5-2} = 0.75 \\
\alpha_2^1 &= \frac{t-t_2}{t_4-t_2} = \frac{4.25-4}{7-4} = 0.083 \\
\alpha_2^2 &= \frac{t-t_2}{t_3-t_2} = \frac{4.25-4}{5-4} = 0.25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1^1 &= (1 - \alpha_1^1)b_0^0 + \alpha_1^1 b_1^0 \\
&= (1 - 0.75)(-4, -1) + 0.75(-2, 1) \\
&= (-2.5, 0.5) \\
b_2^1 &= (1 - \alpha_2^1)b_1^0 + \alpha_2^1 b_2^0 \\
&= (1 - 0.083)(-2, 1) + 0.083(1, 3) \\
&= (-1.751, 0.667) \\
b_2^2 &= (1 - \alpha_2^2)b_1^1 + \alpha_2^2 b_2^1 \\
&= (1 - 0.25)(-2.5, 0.5) + 0.25(-1.751, 0.667) \\
&= (-2.313, 0.542)
\end{aligned}$$

## 5.6 Dérivation des courbes B-splines

La dérivée de  $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t)$  est donnée par :

$$B'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{(1)} N_{i+1,d-1}(t) \quad \text{avec : } b_i^{(1)} = d \frac{b_{i+1} - b_i}{t_{i+d+1} - t_{i+1}}$$

**Preuve :**

Soit  $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t)$ ,  $t \in [t_d, tm - d]$  Alors :

$$\begin{aligned}
B'(t) &= \left( \sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t) \right)' \\
&= \sum_{i=0}^n b_i N'_{i,d}(t) \\
&= \sum_{i=0}^n b_i \frac{d}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t) - \sum_{i=0}^n b_i \frac{d}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t)
\end{aligned}$$

Et comme  $N_{0,d-1}(t) = N_{n+1,d-1}(t) = 0$  pour  $t \in [t_d, tm - d]$  il s'ensuit que :

$$B'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{t_{i+d} - t_i} (b_i - b_{i-1}) N_{i,d-1}(t)$$

En réindexant, on aura :

$$\begin{aligned} B'(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} (b_{i+1} - b_i) N_{i+1,d-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{(1)} N_{i+1,d-1}(t) \end{aligned}$$

En continuant à dériver en utilisant la relation de récurrence pour la dérivée de  $N_{i,k}(t)$ , on aura la dérivée  $r$ -ième de  $B(t)$  donnée par la relation :

**Corollaire 5.1**

La dérivée  $r$ -ième de  $B(t)$ , notée  $B^{(r)}(t)$  est donnée par :

$$B^{(r)}(t) = \sum_{i=0}^{n-r} b_i^{(r)} N_{i+r,d-r}(t) \quad \text{où } b_i^{(r)} = \frac{d-r+1}{t_{i+d+1} - t_{i+r}} (b_{i+1}^{r-1} - b_i^{r-1})$$

**Preuve :**

La preuve se fait par induction sur  $r$

$$B'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{(1)} N_{i+1,d-1}(t)$$

L'hypothèse est donc vraie pour  $r = 1$

Supposons la proposition vraie jusqu'à l'ordre  $r$

$$\begin{aligned} B^{(r+1)}(t) &= [B^{(r)}(t)]' \\ &= \sum_{i=0}^{n-r} b_i^{(r)} N'_{i+r,d-r}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-r} b_i^{(r)} \frac{d-r}{t_{i+d} - t_{i+r}} N_{i+r,d-r-1}(t) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n-r} b_i^{(r)} \frac{d-r}{t_{i+d+1} - t_{i+r+1}} N_{i+r+1,d-r-1}(t) \end{aligned}$$

En réindexant la deuxième somme, on aura :

$$\begin{aligned}
B^{(r+1)}(t) &= \sum_{i=0}^{n-r} b_i^{(r)} \frac{d-r}{t_{i+d} - t_{i+r}} N_{i+r, d-r-1}(t) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n-r+1} b_{i-1}^{(r)} \frac{d-r}{t_{i+d} - t_{i+r}} N_{i+r, d-r-1}(t)
\end{aligned}$$

Comme :  $N_{r, d-r-1}(t) = N_{n+1, d-r-1}(t) = 0$ ,  $t \in [t_d, t_{m-d}]$ , Alors

$$B^{(r+1)}(t) = \sum_{i=1}^{n-r} \frac{d-r}{t_{i+d} - t_{i+r}} \left( b_i^{(r)} - b_{i-1}^{(r)} \right) N_{i+r, d-r-1}(t)$$

En réindexant, on obtient :

$$B^{(r+1)}(t) = \sum_{i=0}^{n-r-1} \frac{d-r}{t_{i+d+1} - t_{i+r+1}} \left( b_{i+1}^{(r)} - b_i^{(r)} \right) N_{i+r+1, d-r-1}(t)$$

On vient de montrer par récurrence que :

$$B^{(r)}(t) = \sum_{i=0}^{n-r} b_i^{(r)} N_{i+r, d-r}(t)$$

## 5.7 Insertion de noeuds

L'insertion de noeuds permet d'obtenir une nouvelle représentation d'une courbe B-spline en introduisant de nouvelles valeurs de noeuds au vecteur nodal.

La nouvelle courbe aura en plus des points de contrôle originaux de nouveaux points de contrôle correspondant aux nouveaux noeuds.

Augmenter ainsi le nombre de points de contrôle permet d'accroître le contrôle sur la forme de l'objet.

### lemme 5.2

Soit  $N_{i,d}(t)$  les fonctions de base des B-splines de degré  $d$  définies sur le vecteur nodal  $(t_0, \dots, t_m)$

Supposons  $\hat{t} \in [t_s, t_{s+1}[$  et soient  $\hat{N}_{i,d}(t)$  les fonctions de base définies sur  $(\hat{t}_0, \dots, \hat{t}, \dots, \hat{t}_{m+1})$  avec :

$\hat{t}_0 = t_0, \dots, \hat{t}_s = t_s, \hat{t}_{s+1} = \hat{t}, \hat{t}_{s+2} = t_{s+1}, \dots, \hat{t}_{m+1} = t_m$  Alors

$$N_{i,d}(t) = \begin{cases} \hat{N}_{i,d}(t) & \text{pour : } i = 0, \dots, s-d-1 \\ \frac{\hat{t}-\hat{t}_i}{\hat{t}_{i+d+1}-\hat{t}_i} \hat{N}_{i,d}(t) + \frac{\hat{t}_{i+d+2}-\hat{t}}{\hat{t}_{i+d+2}-\hat{t}_{i+1}} \hat{N}_{i+1,d}(t) & \text{pour : } i = s-d, \dots, s \\ \hat{N}_{i+1,d}(t) & \text{pour : } i > s+1 \end{cases}$$

**Théorème 5.1 (Algorithme de Boehm)**

Soit  $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t)$  une courbe B-spline avec les noeuds  $t_0, \dots, t_m$  et soit  $\hat{t} \in [t_s, t_{s+1}[$

Alors, la représentation de  $B(t)$  avec le vecteur nodal  $t_0, \dots, t_s, \hat{t}, t_{s+1}, \dots, t_{m-1}, t_m$  est :

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \hat{b}_i \hat{N}_{i,d}(t) \quad \text{avec}$$

$$\hat{b}_i = \begin{cases} b_i & ; 0 \leq i \leq s-d \\ (1 - \alpha_i)b_{i-1} + \alpha_i b_i & ; s-d+1 \leq i \leq s \\ b_{i-1} & ; s+1 \leq i \leq n+1 \end{cases}$$

$$\alpha_i = \frac{\hat{t} - t_i}{t_{i+d} - t_i} = \frac{\hat{t} - \hat{t}_i}{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}_i}$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{s-d-1} b_i N_{i,d}(t) + \sum_{i=s-d}^s b_i N_{i,d}(t) + \sum_{i=s+1}^n b_i N_{i,d}(t) \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 5.2, on aura :

$$\begin{aligned}
B(t) &= \sum_{i=0}^{s-d-1} b_i \hat{N}_{i,d}(t) + \sum_{i=s-d}^s b_i \frac{\hat{t} - \hat{t}_i}{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}_i} \hat{N}_{i,d}(t) \\
&\quad + \sum_{i=s-d}^s b_i \frac{\hat{t}_{i+d+2} - \hat{t}}{\hat{t}_{i+d+2} - \hat{t}_{i+1}} \hat{N}_{i+1,d}(t) + \sum_{i=s+1}^n b_i \hat{N}_{i+1,d}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{s-d-1} b_i \hat{N}_{i,d}(t) + b_{s-d} \frac{\hat{t} - \hat{t}_{s-d}}{\hat{t}_{s+1} - \hat{t}_{s-d}} \hat{N}_{s-d,d}(t) \\
&\quad + \sum_{i=s-d+1}^s b_i \frac{\hat{t} - \hat{t}_i}{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}_i} \hat{N}_{i,d}(t) + b_s \frac{\hat{t}_{s+d+2} - \hat{t}}{\hat{t}_{s+d+2} - \hat{t}_{s+1}} \hat{N}_{s+1,d}(t) \\
&\quad + \sum_{i=s-d}^{s-1} b_i \frac{\hat{t}_{i+d+2} - \hat{t}}{\hat{t}_{i+d+2} - \hat{t}_{i+1}} \hat{N}_{i+1,d}(t) + \sum_{i=s+1}^n b_i \hat{N}_{i+1,d}(t)
\end{aligned}$$

En réindexant, on obtient :

$$\begin{aligned}
B(t) &= \sum_{i=0}^{s-d-1} b_i \hat{N}_{i,d}(t) + b_{s-d} \frac{\hat{t} - \hat{t}_{s-d}}{\hat{t}_{s+1} - \hat{t}_{s-d}} \hat{N}_{s-d,d}(t) + \sum_{i=s-d+1}^s b_i \frac{\hat{t} - \hat{t}_i}{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}_i} \hat{N}_{i,d}(t) \\
&\quad + b_s \frac{\hat{t}_{s+d+2} - \hat{t}}{\hat{t}_{s+d+2} - \hat{t}_{s+1}} \hat{N}_{s+1,d}(t) + \sum_{i=s-d+1}^s b_{i-1} \frac{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}}{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}_i} \hat{N}_{i,d}(t) + \sum_{i=s+1}^n b_i \hat{N}_{i+1,d}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{s-d-1} b_i \hat{N}_{i,d}(t) + b_{s-d} \frac{\hat{t} - \hat{t}_{s-d}}{\hat{t}_{s+1} - \hat{t}_{s-d}} \hat{N}_{s-d,d}(t) \\
&\quad + \sum_{i=s-d+1}^s \left( b_i \frac{\hat{t} - \hat{t}_i}{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}_i} + b_{i-1} \frac{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}}{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}_i} \right) \hat{N}_{i,d}(t) \\
&\quad + b_s \frac{\hat{t}_{s+d+2} - \hat{t}}{\hat{t}_{s+d+2} - \hat{t}_{s+1}} \hat{N}_{s+1,d}(t) + \sum_{i=s+1}^n b_i \hat{N}_{i+1,d}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{s-d-1} b_i \hat{N}_{i,d}(t) + b_{s-d} \hat{N}_{s-d,d}(t) + b_s \hat{N}_{s+1,d}(t) \\
&\quad + \sum_{i=s-d+1}^s \left( b_i \frac{\hat{t} - \hat{t}_i}{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}_i} + b_{i-1} \frac{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}}{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}_i} \right) \hat{N}_{i,d}(t) + \sum_{i=s+1}^n b_i \hat{N}_{i+1,d}(t) \\
&\quad (\text{car : } \hat{t} = \hat{t}_{s+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{s-d} b_i \hat{N}_{i,d}(t) + \sum_{i=s-d+1}^s \left( b_i \frac{\hat{t} - \hat{t}_i}{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}_i} + b_{i-1} \frac{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}}{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}_i} \right) \hat{N}_{i,d}(t) \\
&\quad + \sum_{i=s}^n b_i \hat{N}_{i+1,d}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{s-d} b_i \hat{N}_{i,d}(t) + \sum_{i=s-d+1}^s \left( b_i \frac{\hat{t} - \hat{t}_i}{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}_i} + b_{i-1} \frac{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}}{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}_i} \right) \hat{N}_{i,d}(t) \\
&\quad + \sum_{i=s+1}^{n+1} b_{i-1} \hat{N}_{i,d}(t)
\end{aligned}$$

$$\text{Donc, } B(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \hat{b}_i \hat{N}_{i,d}(t) \quad \text{avec}$$

$$\hat{b}_i = \begin{cases} b_i & ; 0 \leq i \leq s-d \\ (1 - \alpha_i) b_{i-1} + \alpha_i b_i & ; s-d+1 \leq i \leq s \\ b_{i-1} & ; s+1 \leq i \leq n+1 \end{cases}$$

$$\alpha_i = \frac{\hat{t} - t_i}{t_{i+d} - t_i} = \frac{\hat{t} - \hat{t}_i}{\hat{t}_{i+d+1} - \hat{t}_i}$$

#### exemple 5.4

Considérons  $B(t)$  une B-spline définie sur le vecteur nodal

$(t_0 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = 1, t_4 = 3, t_5 = 3, t_6 = 3)$  munie des points de contrôle  $b_0(0, 0), b_1(6, 12), b_2(12, 12), b_3(16, 4)$ .

On insère un nouveau noeud  $\hat{t} = 2$ .

Comme  $2 \in [t_3, t_4)$  alors  $s = 3$

On applique l'algorithme de Boehm, on aura :

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{\hat{t} - t_2}{t_4 - t_2} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3} \\
\alpha_3 &= \frac{\hat{t} - t_3}{t_4 - t_3} = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$



les nouveaux points de contrôle seront donnés par :

$$\hat{b}_0 = b_0 = (0, 0)$$

$$\hat{b}_1 = b_1 = (6, 12)$$

$$\hat{b}_2 = (1 - \alpha_2)b_1 + \alpha_2 b_2 = \frac{1}{3}(6, 12) + \frac{2}{3}(12, 12) = (10, 12)$$

$$\hat{b}_3 = (1 - \alpha_3)b_2 + \alpha_3 b_3 = \frac{1}{2}(12, 12) + \frac{1}{2}(16, 4) = (14, 8)$$

$$\hat{b}_4 = b_3 = (16, 4)$$

# Chapitre 6

## B-spline Rationnelles Non Uniformes

Les B-splines rationnelles figurent parmi les outils les plus complets et les plus utilisés en modélisation géométrique. Ayant à la fois les avantages des courbes de Bézier rationnelles mais aussi celles des B-splines, elles peuvent représenter un large éventail de formes. Les B-splines rationnelles sont obtenues par la même technique utilisée pour avoir des courbes de Bézier rationnelles à partir de celles intégrales.

Ces courbes sont généralement désignées par l'abréviation (NURBS) pour : *Non Uniform Rational B-Splines*.

### 6.1 Définition

#### Définition 6.1

Un vecteur nodal  $(t_0, t_1, \dots, t_m)$  est dit *uniforme* si  $t_{i+1} = t_i + h$ . Un vecteur nodal qui ne vérifie pas cette propriété est dit : vecteur nodal *non-uniforme*. Une courbe NURBS possède un vecteur nodal non-uniforme.

#### Définition 6.2

Une courbe NURBS de degré  $d$  munie des points de contrôle  $b_0, \dots, b_n$ , des poids  $w_0, \dots, w_n$  et du vecteur nodal  $(t_0, \dots, t_m)$  est la courbe définie sur l'intervalle  $[a, b] = [t_d, t_{m-d}]$  donnée par [3],[5],[6] :

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i N_{i,d}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,d}(t)}$$

où les  $N_{i,d}(t)$  sont les fonctions de base des B-splines et avec  $w_i b_i$  remplacé par  $b_i$  si  $w_i = 0$

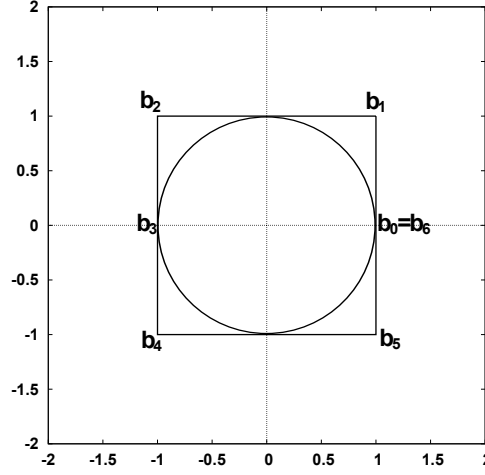


FIGURE 6.1 – Une courbe NURBS représentant un cercle unitaire

**Remarque 15**

La courbe peut être réécrite sous la forme :

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i R_{i,d}(t) \quad , \text{ avec } R_{i,d}(t) = \frac{w_i N_{i,d}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j N_{j,d}(t)}$$

Les  $R_{i,d}(t)$  sont dites *fonctions de base des B-splines rationnelles*.

**Remarque 16**

Soit  $b_i = (x_i, y_i, z_i)$  et  $\hat{b}_i = \begin{cases} (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i) & \text{si } w_i \neq 0 \\ (x_i, y_i, z_i, 0) & \text{si } w_i = 0 \end{cases}$  ses coordonnées homogènes.

Alors, comme dans le cas des courbes de Bézier, la courbe NURBS est exprimée en coordonnées homogènes par :

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \hat{b}_i N_{i,d}(t)$$

**exemple 6.1**

une courbe NURBS définie par le vecteur nodal  $(0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1)$  et munie des points de contrôle  $(1, 1), (-1, 1), (-1, 0), (-1, -1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)$  ainsi que des poids correspondants :  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$  représente le cercle unité centré à l'origine comme le montre la figure 6.1

## 6.2 Propriétés des courbes NURBS

Une courbe NURBS satisfait aux propriétés suivantes [3],[5],[6] :

### 6.2.1 Contrôle local

Si  $t \in [t_r, t_{r+1}[$  ( $d \leq r \leq m - d - 1$ ) alors :

$$B(t) = \frac{\sum_{i=r-d}^r w_i b_i N_{i,d}(t)}{\sum_{i=r-d}^r w_i N_{i,d}(t)} = \sum_{i=r-d}^r b_i R_{i,d}(t)$$

### 6.2.2 Propriété de l'enveloppe convexe

Si  $\forall i, w_i > 0$  et si  $t \in [t_r, t_{r+1}[$  alors :

$$B(t) \subset CH\{b_{r-d}, \dots, b_r\}$$

### 6.2.3 Continuité

Si  $p_i$  est la multiplicité du point de cassure  $t = u_i$ , alors  $B(t)$  est  $\mathcal{C}^{d-p_i}$  (ou plus) en  $t = u_i$  et  $\mathcal{C}^\infty$  ailleurs.

### 6.2.4 Invariance par transformation affine

Soit  $T$  une transformation affine. Alors :

$$T \left( \frac{\sum_{i=r-d}^r w_i b_i N_{i,d}(t)}{\sum_{i=r-d}^r w_i N_{i,d}(t)} \right) = \frac{\sum_{i=r-d}^r w_i T(b_i) N_{i,d}(t)}{\sum_{i=r-d}^r w_i N_{i,d}(t)}$$

### 6.2.5 Invariance par transformation projective

Soit  $P$  une transformation projective, alors :

$$P \left( \sum_{i=0}^n \hat{b}_i N_{i,d}(t) \right) = \sum_{i=0}^n P(\hat{b}_i) N_{i,d}(t)$$

Où les  $\hat{b}_i$  sont les points de contrôle homogènes.

En effet, si  $M$  est la matrice de projection, alors :

$$\begin{aligned} B(t)M &= \left( \sum_{i=0}^n \hat{b}_i N_{i,d}(t) \right) \cdot M \\ &= \sum_{i=0}^n (\hat{b}_i M) N_{i,d}(t) \\ &= \sum_{i=0}^n \hat{c}_i N_{i,d}(t) \end{aligned}$$

On aura ainsi une nouvelle courbe NURBS exprimée en coordonnées homogènes. Les nouveaux points de contrôle  $c_i$  et les poids  $w_i$  peuvent être obtenues à partir des points de contrôle homogènes  $\hat{c}_i = \hat{b}_i M$

### 6.3 Algorithme de De Boor pour le cas rationnel

L'algorithme de De Boor pour le cas rationnel est obtenu à partir de l'algorithme de De Boor de la même manière que l'algorithme de De Casteljau pour le cas rationnel.

#### 6.3.1 Description de l'algorithme

**Entrée** : Les points de contrôle  $b_i \in \mathbb{R}^3$  et  $t \in [t_r, t_{r+1}[$

**Procédure** :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_i^j & = & \frac{t-t_i}{t_{i+d-j+1}-t_i} \\ w_i^j & = & (1 - \alpha_i^j)w_{i-1}^{j-1} + \alpha_i^j w_i^{j-1} \\ w_i^j b_i^j & = & (1 - \alpha_i^j)w_{i-1}^{j-1} b_{i-1}^{j-1} + \alpha_i^j w_i^{j-1} b_i^{j-1} \text{ pour : } j > 0 \end{array} \right.$$

pour :  $i = 0, \dots, d$  ;

$j = r - d + i, \dots, r$

et où :  $b_i^0 = b_i$  et  $w_i^0 = w_i$

**Sortie** : les points de la courbe NURBS  $B(t) = d_r^d(t)$  pour  $t \in [t_r, t_{r+1}[$

**exemple 6.2**

Soit  $B(t)$  une courbe NURBS de degré 3 définie sur le vecteur nodal  $t_0 = 1.2, t_1 = 1.4, t_2 = 1.5, t_3 = 2.0, t_4 = 2.4, t_5 = 3.1, t_6 = 5.0, t_7 = 6.4, t_8 = 7.3$  et munie des points de contrôle  $b_0(2, 1), b_1(4, 8), b_2(5, -1), b_3(3, -2), b_4(2, -4)$  et des poids correspondants :  $w_0 = 1.0, w_1 = 1.5, w_2 = 2.0, w_3 = 1.5, w_4 = 1.0$

Supposons qu'on veuille calculer  $B(2.7)$  le point de la courbe correspondant à  $t = 2.7$ .

Comme  $2.7 \in [t_4, t_5)$  il s'en suit que  $r = 4$ .

$$\alpha_2^1 = \frac{t-t_2}{t_5-t_2} = \frac{2.7-1.5}{3.1-1.5} = 0.75$$

$$\alpha_3^1 = \frac{t-t_3}{t_6-t_3} = \frac{2.7-2.0}{5.0-2.0} = 0.23333$$

$$\alpha_4^1 = \frac{t-t_4}{t_7-t_4} = \frac{2.7-2.4}{6.4-2.4} = 0.075$$

$$w_2^1 = (1 - \alpha_2^1)w_1^0 + \alpha_2^1 w_2^0 = (1 - 0.75)1.5 + (0.75)2.0 = 1.875$$

$$w_3^1 = (1 - \alpha_3^1)w_2^0 + \alpha_3^1 w_3^0 = (1 - 0.23333)2.0 + (0.23333)1.5 = 1.8833$$

$$w_4^1 = (1 - \alpha_4^1)w_3^0 + \alpha_4^1 w_4^0 = (1 - 0.075)1.5 + (0.075)1.0 = 1.4625$$

$$\begin{aligned} b_2^1 &= \frac{(1 - \alpha_2^1)w_1^0 b_1^0 + \alpha_2^1 w_2^0 b_2^0}{w_2^1} \\ &= \frac{(1 - 0.75)1.5(4, 8) + (0.75)2.0(5, -1)}{1.875} = (4.8, 0.8) \\ b_3^1 &= \frac{(1 - \alpha_3^1)w_2^0 b_2^0 + \alpha_3^1 w_3^0 b_3^0}{w_3^1} \\ &= \frac{(1 - 0.23333)2.0(5, -1) + (0.23333)1.5(3, -2)}{1.8833} = (4.6284, -1.1858) \\ b_4^1 &= \frac{(1 - \alpha_4^1)w_3^0 b_3^0 + \alpha_4^1 w_4^0 b_4^0}{w_4^1} \\ &= \frac{(1 - 0.075)1.5(3, -2) + (0.075)1.0(2, -4)}{1.4625} = (2.9487, -2.1026) \end{aligned}$$

$$\alpha_3^2 = \frac{t-t_3}{t_5-t_3} = \frac{2.7-2.0}{3.1-2.0} = 0.63636$$

$$\alpha_4^2 = \frac{t-t_4}{t_6-t_4} = \frac{2.7-2.4}{5.0-2.4} = 0.11538$$

$$\begin{aligned} w_3^2 &= (1 - \alpha_3^2)w_2^1 + \alpha_3^2 w_3^1 = (1 - 0.63636)1.875 + (0.63636)1.8833 \\ &= 1.8803 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_4^2 &= (1 - \alpha_4^2)w_3^1 + \alpha_4^2 w_4^1 = (1 - 0.11538)1.8833 + (0.11538)1.4625 \\ &= 1.8347 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3^2 &= \frac{(1 - \alpha_3^2)w_2^1 b_2^1 + \alpha_3^2 w_3^1 b_3^1}{w_3^2} \\ &= \frac{(1 - 0.63636)1.875(4.8, 0.8) + (0.63636)1.8833(4.6284, -1.1558)}{1.8803} \\ &= (4.6906, -0.46571) \\ b_4^2 &= \frac{(1 - \alpha_4^2)w_3^1 b_3^1 + \alpha_4^2 w_4^1 b_4^1}{w_4^2} \\ &= \frac{(1 - 0.11538)1.8833(4.6284, -1.1858) + (0.11538)1.4625(2.9487, -2.1026)}{1.8347} \\ &= (4.474, -1.2701) \end{aligned}$$

$$\alpha_4^3 = \frac{t - t_4}{t_5 - t_4} = \frac{2.7 - 2.4}{3.1 - 2.4} = 0.42857$$

$$w_4^3 = (1 - \alpha_4^3)w_3^2 + \alpha_4^3 w_4^2 = (1 - 0.42857)1.8803 + (0.42857)1.8347 = 1.8608$$

$$\begin{aligned} b_4^3 &= \frac{(1 - \alpha_4^3)w_3^2 b_3^2 + \alpha_4^3 w_4^2 b_4^2}{w_4^3} \\ &= \frac{(1 - 0.42857)1.8803(4.6906, -0.46571) + (0.42857)1.8347(4.474, -1.2701)}{1.8608} \\ &= (4.599, -0.80562) \end{aligned}$$

D'ou le résultat :

$$B(2.7) = (4.599, -0.80562)$$

## 6.4 Dérivation d'une courbe NURBS

### Théorème 6.1

La dérivée r-ième d'une courbe B-spline rationnelle est donnée par :

$$B^{(r)}(t) = \frac{f^{(r)}(t) - \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} B^j(t) g^{(r-j)}(t)}{g(t)}$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } f(t) &= \sum_{i=0}^n w_i b_i N_{i,d}(t) \\ \text{et : } g(t) &= \sum_{i=0}^n w_i N_{i,d}(t) \end{aligned}$$

**Preuve :**

Soit  $B(t)$  la courbe B-spline rationnelle définie par :

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i N_{i,d}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,d}(t)}$$

$$\begin{aligned} \text{On pose : } f(t) &= \sum_{i=0}^n w_i b_i N_{i,d}(t) \\ \text{et : } g(t) &= \sum_{i=0}^n w_i N_{i,d}(t) \end{aligned}$$

Il en résulte que :  $f(t) = B(t) \cdot g(t)$

La règle de Liebnitz nous donne :

$$\begin{aligned} f^{(r)}(t) &= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} B^{(j)}(t) g^{(r-j)}(t) \\ &= g(t) B^{(r)}(t) + \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} B^{(j)}(t) g^{(r-j)}(t) \end{aligned}$$

Finalement, on aura :

$$B^{(r)}(t) = \frac{f^{(r)}(t) - \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} B^{(j)}(t) g^{(r-j)}(t)}{g(t)}$$





# Conclusion

Les courbes de Bézier ont parcouru bien du chemin depuis leur création dans les années soixantes.

Profitant des formidables avancées technologiques, particulièrement dans le domaine de l'informatique, elles interviennent aujourd'hui dans des domaines divers et variés.

Elles constituent l'outil de base du *dessin vectoriel* qui repose sur la transcription mathématique des objets.

De ce fait, on les retrouve dans presque tous les logiciels de dessin vectoriel comme Paint, JpicEdit, Inkscape...etc

Les courbes de Bézier cubiques, les plus utilisées, se retrouvent en graphisme et dans de multiples systèmes de synthèse d'images tels que Postscript, Metafont et Gimp.

les courbes de Bézier sont également utilisées dans le rendu de fontes, les différentes lettres étant des définies par des courbes de Bézier.

Les courbes de Bézier ainsi que leurs généralisations, les B-splines, définissent les surfaces de Bézier et les surfaces NURBS très utiles pour modéliser des formes en 3D.

Celles-ci trouvent leurs applications aussi bien dans l'industrie pour la création de nouveaux objets que dans la réalité virtuelle dans des domaines aussi variés que la médecine, les jeux vidéos ou encore les effets visuelles au cinéma.

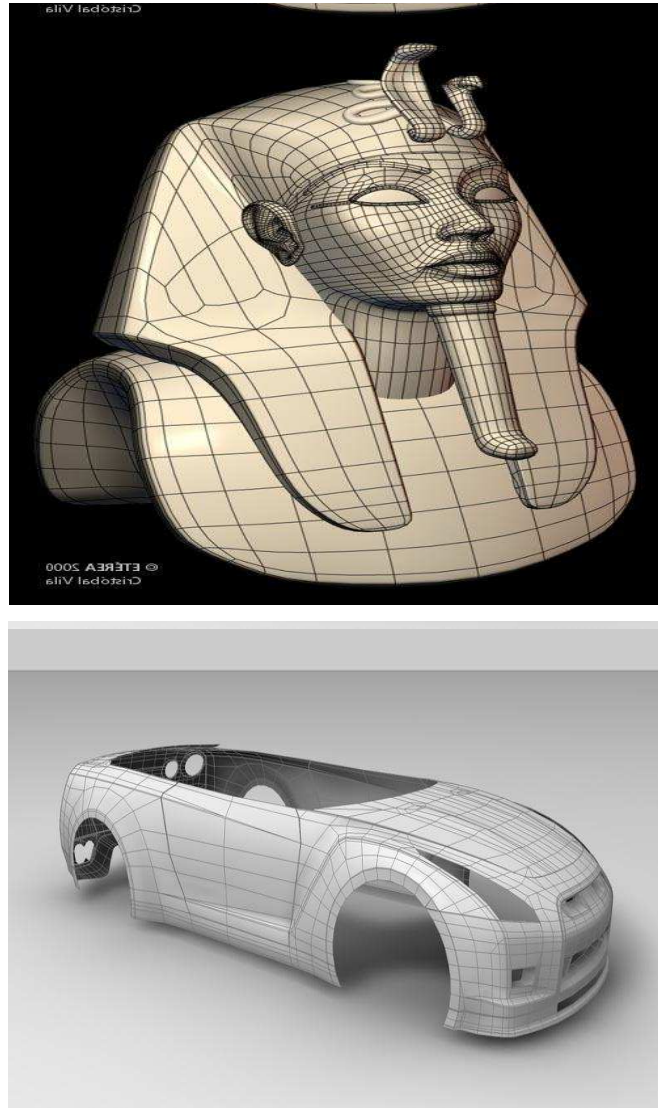


FIGURE 6.2 – Modélisation d'objets en 3D grace aux surfaces de Bézier et NURBS

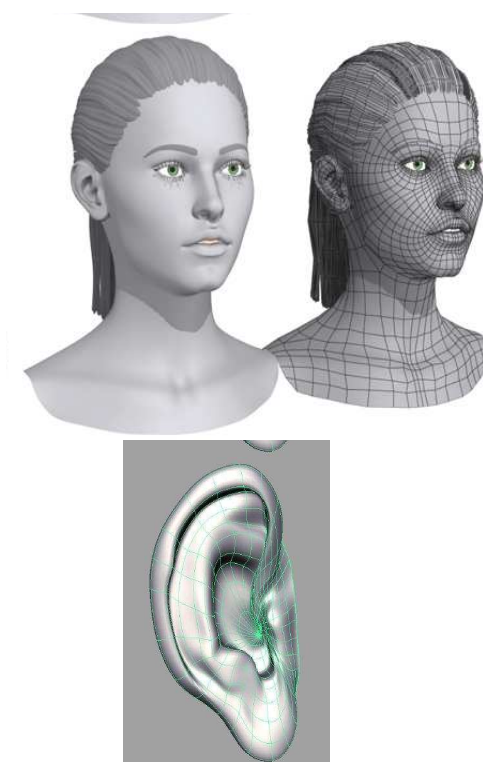


FIGURE 6.3 – Exemples de modélisation du corps humain grace aux surfaces de Bézier et NURBS



# Bibliographie

- [1] Duncan Marsh. *Applied geometry for computer graphics and CAD*. Springer-Verlag, Londres, 2005.
- [2] David Salomon. *Curves and Surfaces for Computer Graphics*. Springer-Verlag, Etats-unies, 2006.
- [3] Les Piegel and Wayne Tiller. *The NURBS book*. Springer-Verlag, Etats-unies, 1996.
- [4] Michael E. Mortenson. *Geometric Modeling*. Wiley Computer Publishing, Etats-unies, 1996.
- [5] Gerald Farin. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design, Fifth edition*. Academic Press, Etats-unies, 2002.
- [6] David F. Rogers. *An Introduction to NURBS*. Academic Press, Etats-unies, 2001.
- [7] Max K. Agoston. *Computer Graphics and Geometric Modeling*. Springer-Verlag, Londres, 2005.
- [8] Hartmut Prautzsch, Wolfgang Boehm, and Marco Paluszny. Bezier and b-spline techniques. Technical report, 2002.
- [9] Boehm and Prautzsch. The insertion algorithm. *Computer-Aided Design*, 17(2) :58–59, 1985.
- [10] Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-hall, 1976.
- [11] Gibson. *Elementary Geometry of Algebraic Curves*. Cambridge University Press, 1998.
- [12] Lasser D Hoschek J. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. A K Peters, 1993.
- [13] Adams J A Rogers D F. *Mathematical Elements for Computer Graphics*. McGraw-hill, 1990.
- [14] Anderson Sederberg and Goldman. Implicit representation of parametric curves and surfaces. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 28 :72–84, 1984.

- [15] Shumaker L. *Spline functions : Basic Theory*. John Wiley, New York, 1981.
- [16] Lee E. Rational bezier representations for conics. *Geometric Modeling*, pages 3–27, 1986.
- [17] Philip J. Davis. *Interpolation and Approximation*. Dover Publications, New York, 1975.
- [18] DeBoor Carl. On calculating with b-splines. *Journal of Approximation Theory*, 6 :50–62, 1972.
- [19] Gerald Farin. *NURBS : From Projective Geometry to Practical Use, Second edition*. AK Peters, Etats-unies, 1999.

**Université d'ORAN**  
**Faculté des Sciences**  
**Département de Mathématiques**

Par : BENSID YAZID

**Résumé**

La modélisation géométrique est une discipline mathématique qui se charge de construire des modèles géométriques à des objets existants ou à créer.

Parmi les outils fondamentaux utilisés en modélisation géométrique figurent les courbes de Bézier.

Il s'agit de courbes paramétriques polynômiales définies à l'aide des polynômes de Bernstein.

Dans cette étude, nous allons décrire les courbes de Bézier, étudier leurs principales propriétés et proposer un algorithme pour pouvoir les dessiner facilement.

Pour cela, nous allons présenter brièvement les polynômes de Bernstein et énoncer quelques unes de leurs principales propriétés dont découlent celles des courbes de Bézier.

Nous allons ensuite étudier des courbes paramétriques polynômiales par morceaux appelées « B-splines » et qui peuvent être considérées comme la généralisation des courbes de Bézier.

Nous allons, dans ce cas aussi, décrire un algorithme pour dessiner ces courbes.

Nous finirons cette étude par l'introduction des courbes NURBS qui englobent les courbes B-splines et qui sont de loin l'outil le plus complet et donc le plus utilisé en modélisation.



## **Mots clés :**

Courbe – polynôme – Bézier – B-spline – Bernstein – rationnelle – NURBS –  
Casteljau – modélisation - géométrie