



# Détermination géométrique de chemins géodésiques sur des surfaces du subdivision

Valérie Pham-Trong

## ► To cite this version:

Valérie Pham-Trong. Détermination géométrique de chemins géodésiques sur des surfaces du subdivision. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2001. Français. NNT : . tel-00004698

**HAL Id: tel-00004698**

**<https://theses.hal.science/tel-00004698v1>**

Submitted on 16 Feb 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée par*

**Valérie Pham-Trong**

*Pour obtenir le titre de*

**Docteur**

**de l'Université Joseph Fourier**

(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)

Spécialité : Mathématiques appliquées

## **Détermination géométrique de chemins géodésiques sur des surfaces de subdivision**

Date de soutenance : 28 septembre 2001

Composition du jury :	M. Jean Della Dora	<i>Président</i>
	M. Alain Le Méhauté	<i>Rapporteur</i>
	M. Marc Neveu	<i>Rapporteur</i>
	M. Bernard Lacolle	<i>Examineur</i>
	M. Luc Biard	<i>Directeur de thèse</i>
	M. Nicolas Szafran	<i>Directeur de thèse</i>

Thèse préparée au sein du Laboratoire de Modélisation et Calcul



# Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe Modélisation Géométrique et Approximation du Laboratoire de Modélisation et Calcul de Grenoble.

Je remercie Monsieur Jean Della-Dora, professeur à l'INPG de l'honneur qu'il me fait de présider mon jury.

Je remercie Monsieur Marc Neveu, professeur à l'université de Dijon et Monsieur Alain Le Méhauté, professeur à l'université de Nantes de leur lecture attentive de mon mémoire et de leurs remarques sur mon travail.

Je remercie Monsieur Bernard Lacolle d'avoir participé à mon jury.

Je remercie Monsieur Luc Biard et Monsieur Nicolas Szafran pour leur encadrement.

Je remercie l'ensemble des personnes qui ont contribué à une excellente atmosphère de travail, mes collègues de bureau avant tout, les thésards, les participants du SIT, ...

Je remercie enfin ma famille et mes amis, présents tout au long de cette thèse.

Ces remerciements sont brefs, mais sincères et chaleureux.



# Détermination géométrique de chemins géodésiques sur des surfaces de subdivision

Un chemin géodésique entre deux points sur une surface de  $\mathbb{R}^3$  est un plus court chemin local. Nous proposons deux méthodes de calcul de géodésiques qui ont l'originalité d'utiliser des outils de modélisation géométrique dans ce contexte de géométrie différentielle.

La méthode de minimisation propose de travailler sur des surfaces paramétrées et d'étudier le problème en se plaçant dans l'espace des paramètres. Les courbes considérées y sont les courbes de Bézier et les courbes splines. Leurs points de contrôle constituent les variables par rapport auxquelles la longueur du chemin image sur la surface est minimisée. L'implémentation de cette méthode d'approximation et sa validation sont développées.

La méthode de subdivision propose de travailler sur des surfaces de subdivision, limites d'une suite de réseaux générés par un schéma de subdivision. Une méthode itérative de calcul exact de chemin géodésique sur une surface polyédrique est développée. Celle-ci permet ainsi de calculer une suite de chemins géodésiques sur les surfaces polyédriques issues des réseaux de contrôle successifs. La convergence de cette suite de chemins géodésiques est traitée et de nombreux exemples sont présentés.

Quelques applications sont enfin proposées : la génération de maillages surfaciques et la modélisation des fibres du myocarde pour l'imagerie médicale.

**Mots-clés :** plus court chemin, géodésique, minimisation de longueur, schéma de subdivision, surface de subdivision, surface polyédrique, formule de commutation, maillage, myocarde

## Geometric computation of geodesic paths on subdivision surfaces

Geodesic paths between two points on a surface of  $\mathbb{R}^3$  are local shortest paths. We propose two methods to compute them ; these ones are innovative because they use Computer Aided Geometric Design tools in this context of differential geometry.

The minimisation method considers parametric surfaces and studies the problem in the parameter domain. Bezier and spline curves represent there the approximation class. Their control points are the variables for the minimization of the length of the image path on the surface. The implementation of this approximation method and its validation are developed.

The subdivision method considers subdivision surfaces, limits of a sequence of control nets generated by a subdivision scheme. An iterative and exact method to compute geodesic paths on polyhedral surfaces is developed. This leads to the computation of a sequence of geodesic paths on the polyhedral surfaces associated to the successive control nets. The convergence of the path sequence is discussed and we present results illustrated by examples.

Some applications are finally given : surface mesh computation and myocardium fibres modelling in a medical context.

**Keywords :** shortest path, geodesic path, length minimization, subdivision scheme, subdivision surface, polyhedral surface, commutation formula, mesh, myocardium



**Détermination géométrique  
de chemins géodésiques  
sur des surfaces de subdivision**





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>I Méthode de minimisation</b>	<b>9</b>
<b>1 Implémentation</b>	<b>13</b>
1.1 Classe d'approximation . . . . .	13
1.1.1 Formalisme Bézier . . . . .	13
1.1.2 Raffinement . . . . .	15
1.2 Longueur . . . . .	16
1.3 Minimisation . . . . .	16
1.3.1 Existence d'une meilleure approximation . . . . .	17
1.3.2 Choix de l'initialisation . . . . .	21
<b>2 Validation et résultats</b>	<b>25</b>
2.1 Validation . . . . .	25
2.1.1 Critère basé sur la courbure géodésique . . . . .	25
2.1.2 Minimisation de la courbure . . . . .	26
2.2 Discussion . . . . .	27
2.2.1 Paramétrisation de la surface . . . . .	27
2.2.2 Etude de la complexité . . . . .	27
2.3 Résultats . . . . .	27
2.3.1 Courbure géodésique et classe d'approximation sur le paraboloïde . . .	27
2.3.2 Locale optimalité des géodésiques . . . . .	28
2.3.3 Longueur, courbure géodésique et classes d'approximation . . . . .	29
2.3.4 Raffinement par subdivision de la classe d'approximation . . . . .	32
<b>II Méthode de subdivision</b>	<b>37</b>
<b>1 Courbes et surfaces de subdivision</b>	<b>41</b>
1.1 Schémas de subdivision . . . . .	41
1.1.1 Définitions . . . . .	42
1.1.2 Etat de l'art . . . . .	45
1.2 Convergence d'un schéma de subdivision . . . . .	46
1.2.1 Paramétrisation et définition de la convergence . . . . .	46

1.2.2	Critères de convergence . . . . .	47
1.2.3	Fonctions de base et équation d'échelle . . . . .	48
1.3	Schémas des différences et formule de commutation . . . . .	50
1.3.1	Généralités . . . . .	50
1.3.2	Cas univariable et produit tensoriel . . . . .	51
1.3.3	Cas de triangulations à topologie quelconque . . . . .	52
1.4	Notre cadre d'étude . . . . .	53
<b>2</b>	<b>Géodésique sur une surface de subdivision</b>	<b>55</b>
2.1	Description de la méthode . . . . .	55
2.2	Géodésique sur une surface polyédrique . . . . .	57
2.2.1	Définitions . . . . .	58
2.2.2	Mise à plat . . . . .	58
2.2.3	Géodésique et plus court chemin . . . . .	62
2.2.4	Algorithme . . . . .	72
2.3	Subdivision et projection . . . . .	73
2.3.1	Projection d'un chemin . . . . .	73
2.3.2	Initialisation . . . . .	73
<b>3</b>	<b>Convergence</b>	<b>75</b>
3.1	Déviations (locale) . . . . .	75
3.1.1	Interprétation géométrique du schéma des différences . . . . .	75
3.1.2	Somme des angles . . . . .	79
3.1.3	Angle de déviation . . . . .	83
3.2	Convergence de la suite de chemins $\{\mathcal{G}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . . . . .	84
3.2.1	Convergence dans l'espace des paramètres . . . . .	85
3.2.2	Observation de l'algorithme . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Résultats</b>	<b>87</b>
4.1	Validation numérique . . . . .	87
4.1.1	Analyse des résultats . . . . .	87
4.1.2	Tests . . . . .	88
4.2	Discussion . . . . .	98
4.2.1	Influence de la triangulation . . . . .	98
4.2.2	Subdivision progressive et subdivision directe . . . . .	100
4.2.3	Evolution de la longueur . . . . .	102
4.3	Etude de la complexité . . . . .	102
4.3.1	Place mémoire . . . . .	102
4.3.2	Temps de calcul . . . . .	104
<b>III</b>	<b>Applications</b>	<b>111</b>
<b>1</b>	<b>Maillages</b>	<b>113</b>
1.1	Maillages surfaciques géodésiques . . . . .	114
1.1.1	Génération de maillages géodésiques . . . . .	114
1.1.2	Exemples de maillages géodésiques . . . . .	115

1.2	Optimisation de maillages . . . . .	116
1.2.1	Outils et techniques . . . . .	116
1.2.2	Critères et qualité . . . . .	116
1.3	Tests et résultats . . . . .	117
1.3.1	Maillage géodésique par raffinement de l'approximation des arêtes . .	117
1.3.2	Maillage équilibré par bougé de points . . . . .	118
<b>2</b>	<b>Modélisation du myocarde</b>	<b>123</b>
2.1	Surfaces fermées . . . . .	123
2.1.1	Construction de surfaces de genre 1 . . . . .	123
2.1.2	Duplication du domaine de paramétrisation $\mathfrak{D}_{00}$ . . . . .	124
2.2	Boucles géodésiques . . . . .	126
	<b>Annexes</b>	<b>129</b>
<b>A</b>	<b>Quelques notions de CAGD</b>	<b>129</b>
A.1	Courbes de Bézier polynomiales . . . . .	129
A.2	Courbes splines uniformes . . . . .	131
A.3	Surfaces produit tensoriel . . . . .	132
<b>B</b>	<b>Quelques notions de géométrie différentielle</b>	<b>135</b>
B.1	Première forme fondamentale . . . . .	135
B.2	Géodésiques . . . . .	136
	<b>Bibliographie</b>	<b>138</b>



# Notations

## Espace

$\mathfrak{D}$	espace des paramètres avec pour paramètres $(u, v)$
$\mathcal{B}_n(a, b)$	ensemble des courbes de Bézier de degré $n$ définis entre $a$ et $b$ dans $\mathfrak{D}$
$\mathcal{H}(a, b)$	ensemble des chemins continus entre $a$ et $b$ dans $\mathfrak{D}$

## Réseaux, grilles, maillages, matrices

$\mathbf{P}, \mathbf{P}^k$	réseaux de points de contrôle
$\mathbf{X}, \mathbf{X}^k$	grilles de noeuds pour les schémas de subdivision
$\mathbf{A}, \mathbf{A}^k$	matrices associées à un schéma de subdivision
$\mathbf{E}, \mathbf{E}^k$	réseaux <i>canoniques</i> de points de contrôle
$\mathbf{D}, \mathbf{D}^k$	réseaux des différences divisées
$\mathbf{T}, \mathbf{t}$	maillages dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathfrak{D}$
$\mathbf{I}$	première forme fondamentale liée à la surface $\mathcal{S}$

## Objets géométriques et fonctions les paramétrant le cas échéant

Les objets géométriques sont notés avec des caractères calligraphiques dans  $\mathbb{R}^3$ . Les fonctions les paramétrant sont notées avec la même lettre majuscule en caractères droits. Les objets géométriques dans  $\mathfrak{D}$  sont notés avec des caractères minuscules italiques. Les fonctions les paramétrant sont notées avec la même lettre minuscule en caractères droits.

$\mathcal{S}$	$\mathbf{S}$	surface paramétrée de $\mathfrak{D}$ dans $\mathbb{R}^3$ dans la première méthode
$\mathcal{S}$	$\mathbf{S}$	surface de subdivision dans $\mathbb{R}^3$ dans la deuxième méthode
	$\mathbf{P}^\infty$	fonction limite d'un schéma de subdivision
$\mathcal{P}^0, \mathcal{P}^k$	$\mathbf{P}^0, \mathbf{P}^k$	polygônes ou surfaces polyédriques qui interpolent $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}^k$
$\mathcal{C}, \mathcal{C}^k$	$\mathbf{C}, \mathbf{C}^k$	chemins sur $\mathcal{S}, \mathcal{P}^k$
$\mathcal{G}, \mathcal{G}_k$	$\mathbf{G}, \mathbf{G}^k$	chemins géodésiques sur $\mathcal{S}, \mathcal{P}^k$
$c, g$	$\mathbf{c}, \mathbf{g}$	chemin quelconque et projection de $\mathcal{G}$ dans $\mathfrak{D}$
$\mathfrak{C}, \mathfrak{G}$		chemin quelconque et géodésique dans la séquence mise à plat
$\mathcal{E}, e, \mathfrak{E}$		séquences d'arêtes dans $\mathbb{R}^3, \mathfrak{D}$ et mise à plat
$\mathcal{F}, f, \mathfrak{F}$		séquences de faces dans $\mathbb{R}^3, \mathfrak{D}$ et mise à plat
$\mathcal{L}$		liste des sommets pivots
$\mathcal{T}, \mathcal{N},$	$\mathbf{T}, \mathbf{N}$	tangente, normale
$\mathcal{K}$	$\mathfrak{K}$	compact de $\mathbb{R}^3$ , compact de $\mathfrak{D}$
$\mathcal{O}$		ouvert, voisinage d'un point
	$\mathbf{k}, \mathbf{k}_g, \mathbf{k}_n$	courbure, courbure géodésique et courbure normale

## Points

$P_i$	points de contrôle dans le cas courbe ou à topologie quelconque
$P_{ij}$	points de contrôle dans le cas d'une surface produit tensoriel
$P_i^k, P_{ij}^k$	points de contrôle à la k-ième subdivision
$A, A^k, a, \mathfrak{a}$	points source sur $\mathcal{S}$ , $\mathcal{P}^k$ , dans $\mathfrak{D}$ et dans la séquence mise à plat
$B, B^k, a, \mathfrak{a}$	points destination sur $\mathcal{S}$ , $\mathcal{P}^k$ , dans $\mathfrak{D}$ et dans la séquence mise à plat
$M, \dots, M^k, \dots$	points de $\mathbb{R}^3$ , points sur $\mathcal{P}^k$
$m, \dots, \mathfrak{m}, \dots$	points dans $\mathfrak{D}$ et dans la séquence mise à plat

## Fonctions de base, opérateurs

$\mathcal{A}, \mathcal{A}^k$	opérateurs linéaires définissant un schéma de subdivision
$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1^k$	opérateurs linéaires associés au schéma des différences divisées
$\mathcal{D}, \mathcal{D}^k$	opérateurs des différences divisées
$\Delta, \Delta_i, \Delta_j$	opérateurs des différences finies
$B_{n,i}$	polynômes de Bernstein
$N_{n,i}$	courbes B-splines
$\varphi_i^k$	fonctions d'échelle

## Angles, poids, coefficients

$\alpha$	masque d'un schéma de subdivision
$\lambda_i$	poids barycentriques d'un point dans un triangle
$\mathfrak{S}$	sommet des angles autour d'un sommet

## Constantes

$K$	nombre de subdivisions pour la méthode de subdivision
$M, N$	nombre de points de contrôle

# Introduction

Les géodésiques correspondent, dans leur définition la plus générale à des lignes suivant lesquelles une énergie est localement minimisée. Elles sont de ce fait présentes dans de nombreux phénomènes naturels : disposition de fibres, trajectoires de particules libres soumises à un champ de force, cadre dans lequel se place notamment la théorie de la relativité avec le calcul de géodésiques dans des espaces courbes, . . .

Nous nous intéressons dans ce qui suit aux géodésiques dans le contexte suivant : nous considérons des surfaces de  $\mathbb{R}^3$ , deux fois dérivables, sur lesquelles nous allons calculer des lignes géodésiques au sens où elles sont localement de longueur minimale. Les notions de plus court chemin et de chemin géodésique entre deux points sur une surface de  $\mathbb{R}^3$  sont donc étroitement liées par le fait que les géodésiques sont des plus courts chemins locaux et que les plus courts chemins globaux sont portés par des géodésiques.

Dans la littérature et dans un contexte appliqué, la définition différentielle d'une géodésique mène à la caractériser par le biais d'équations différentielles (cf [Do Carmo, 1976]). La résolution de ces équations avec des méthodes numériques constitue l'approche classique pour déterminer les géodésiques. Parmi les méthodes numériques déployées, il y a les méthodes de tirs (cf [Duflos *et al.*, 1988]), des méthodes itératives (cf [Maekawa, 1996]). Une approche différente consiste à formuler le problème de recherche de plus court chemin sur une surface en termes de propagation de contours : elles conduisent également à la résolution d'équations différentielles. [Kimmel *et al.*, 1994, Kimmel and Sapiro, 1995] développent ces travaux en se plaçant dans l'espace des paramètres. [Huot *et al.*, 1999, Cohen and Herlin, 1997] reprennent cette idée dans le cadre d'une application des géodésiques en météorologie.

Nous introduisons une approche différente pour la détermination d'un plus court chemin ou de chemin géodésique entre deux points sur une surface de  $\mathbb{R}^3$ , en proposant deux méthodes. Nos méthodes ont la spécificité d'utiliser des outils géométriques, démarche innovante dans un tel contexte de géométrie différentielle. Elles présentent l'originalité et l'avantage d'approcher ces plus courts chemins sans passer par les méthodes classiques, qui requièrent de résoudre des équations. Elles sont robustes dans le sens où les points source et destination sont fixés. Elles sont itératives car partent d'un chemin initial entre ces deux points. Elles sont performantes en temps de calcul et permettent de générer des maillages géodésiques.

Dans la première partie, nous exposons la méthode de minimisation. L'idée consiste à calculer un plus court chemin entre deux points donnés en minimisant la longueur à partir d'un chemin initial. Les outils géométriques utilisés sont des courbes de Bézier et des courbes



splines qui constituent une classe de courbes, considérée dans l'espace des paramètres, pour l'approximation du plus court chemin. Nous exposons l'implémentation de la méthode en présentant la classe d'approximation, le calcul de la longueur et ce qui a trait à la minimisation comme l'existence d'une meilleure approximation. Nous proposons ensuite un critère de validation des chemins calculés et présentons enfin des résultats numériques.

Dans la deuxième partie, nous exposons la méthode de subdivision. Nous nous penchons sur une description des schémas de subdivision et de leurs propriétés pour caractériser les surfaces auxquelles notre méthode s'applique. Utilisant les propriétés de subdivision des surfaces, l'idée est basée sur la recherche de chemins géodésiques sur les différents réseaux de contrôle à des étapes successives de subdivision. Ceci ramène donc le problème au calcul de chemin géodésique sur une surface polyédrique. La propriété de convergence des réseaux vers la surface donne alors une approximation d'un chemin géodésique sur la surface limite. Nous traitons ensuite la convergence de l'algorithme proposé ; nous présentons et discutons enfin les résultats autour d'exemples détaillés et analysons le coût de la méthode.

Dans la troisième partie, nous présentons des applications qui utilisent nos outils. Nous construisons des maillages géodésiques dans un cadre d'optimisation de maillages. Nous présentons enfin une application en imagerie médicale, plus précisément dans la modélisation des fibres du myocarde par des géodésiques.

Première partie

Méthode de minimisation



# Méthode de minimisation

## Introduction

Soit  $\mathcal{S}$  une surface régulière de  $\mathbb{R}^3$ , complète<sup>1</sup> et sans auto-intersection, définie paramétriquement sur un ouvert<sup>2</sup>  $\mathfrak{D}$  de  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \quad \mathfrak{D} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \mathbf{S}(u, v) \end{aligned}$$

La méthode de minimisation que nous présentons dans cette première partie consiste à approcher le plus court chemin entre deux points  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{S}$  en se plaçant dans l'espace des paramètres  $\mathfrak{D}$ . Aux points  $A$  et  $B$  correspondent deux points  $a$  et  $b$  de  $\mathfrak{D}$ , c'est-à-dire  $A = \mathbf{S}(a)$  et  $B = \mathbf{S}(b)$ . Nous considérons une courbe  $c$  de  $\mathfrak{D}$  définie par :

$$c : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{D}, \quad t \mapsto c(t), \quad c(0) = a, \quad c(1) = b.$$

Son image sur  $\mathcal{S}$  est donnée par  $\mathbf{S} \circ c$ , de sorte que

$$\mathbf{S} \circ c(0) = A \quad \text{et} \quad \mathbf{S} \circ c(1) = B,$$

et l'objectif est de minimiser la longueur de la courbe tracée sur  $\mathcal{S}$  :

$$\int_0^1 \|(\mathbf{S} \circ c)'\| dt.$$

Cette minimisation se fait par rapport aux variables décrivant la courbe  $c$  dans  $\mathfrak{D}$ . Nous y considérons des courbes polynomiales, décrites dans le formalisme Bézier ; leurs images forment un sous-ensemble de l'ensemble des courbes sur  $\mathcal{S}$  dans lequel nous allons chercher le plus court chemin entre  $A$  et  $B$ . Nous appellerons cet ensemble de courbes sur la surface **classe d'approximation**.

L'intérêt de se placer dans  $\mathfrak{D}$  est de pouvoir étudier le problème en considérant directement la contrainte liée à la surface. Cette considération par l'intermédiaire de  $\mathfrak{D}$  est relativement naturelle : muni de la métrique associée à la première forme fondamentale  $\mathbf{I}$  en tout point de la surface  $\mathcal{S}$ ,  $\mathfrak{D}$  constitue alors un espace riemannien dans lequel la longueur d'un chemin  $c$  est :

$$\int_0^1 \sqrt{c'(t)^\top \mathbf{I} c'(t)} dt$$

Nous rejoignons là précisément notre problème puisque les deux intégrales correspondent au même calcul.

---

1. La surface est complète au sens géodésique, c'est-à-dire que toute géodésique peut être de longueur infiniment grande.

2. Si  $\mathfrak{D}$  est un domaine fermé, nous supposons que  $\mathbf{S}$  est prolongée par continuité sur un ouvert le contenant (cf [Gallier, 2000], page 469).

Le principe de cette méthode est simple mais une étude plus approfondie soulève des questions en ce qui concerne l'implémentation et la validation. Le chapitre 1 présente les différents points liés à l'implémentation : le choix de la classe d'approximation qui va déterminer les variables de minimisation, le calcul de la longueur et la mise en place de la minimisation. Le chapitre 2 propose un critère de validation des courbes calculées par la minimisation, basé sur la courbure géodésique ; le choix de la paramétrisation et du coût de la méthode sont abordés et des exemples sont présentés.

# Chapitre 1

## Implémentation

Ce chapitre présente d'abord la classe d'approximation considérée. Nous parlons ensuite du choix des routines de calcul de la longueur et de minimisation. Nous établissons l'existence d'une meilleure approximation dans la classe d'approximation choisie et discutons le choix de l'initialisation en l'illustrant par des exemples.

### 1.1 Classe d'approximation

Notre choix d'une classe de courbes d'approximation dans  $\mathfrak{D}$  s'est porté sur les courbes de Bézier et les courbes splines écrites dans le formalisme Bézier. Comme notre objectif est de construire des maillages géodésiques<sup>1</sup> par le biais de cette méthode, nous sommes amenés à :

1. calculer de nombreux chemins géodésiques. C'est pourquoi nous allons choisir une minimisation avec peu de variables pour des raisons de coût, autrement dit des courbes de Bézier de degré peu élevé.
2. considérer des chemins *relativement*<sup>2</sup> courts. Ceci justifie le choix Bézier et le degré peu élevé.

Si toutefois les chemins à calculer sont *relativement* longs, il peut en découler une certaine rigidité de ces courbes face à laquelle un raffinement est proposé par subdivision des courbes de la classe d'approximation ou par élévation de leur degré.

#### 1.1.1 Formalisme Bézier

Nous nous plaçons dans  $\mathfrak{D}$  où nous considérons la classe d'approximation constituée des courbes de Bézier polynomiales de degré  $n$ , définies par leurs points de contrôle.

$$\mathcal{B}_n(a, b) = \left\{ c : t \mapsto \sum_{i=0}^n p_i B_{n,i}(t), p_0 = a, p_n = b \right\}$$

Les deux points de contrôle extrémaux coïncident avec  $a$  et  $b$  et les points de contrôle internes jouent le rôle de paramètres libres qui permettent l'optimisation. Ce formalisme présente ici

---

1. Les maillages géodésiques sont développés dans la partie III sur les applications, chapitre 1, page 113.  
 2. Les chemins sont relativement courts au sens où leur extrémités sont d'autant plus rapprochées que la courbure de la surface est forte.

un premier intérêt qui réside dans l'inclusion des contraintes de position aux extrémités dans l'écriture des courbes. La correspondance entre les courbes de Bézier de  $\mathcal{B}_n(a, b)$  et le polygone des points de contrôle internes  $\mathbf{P}$  sera notée par la suite :

$$c_{\mathbf{P}}(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_{n,i}(t)$$

**Remarque 1.1** *Par abus de langage, nous allons parler de la classe d'approximation des courbes de l'espace des paramètres, ou des polygones de contrôle correspondants, avec à l'esprit naturellement qu'il s'agit de déterminer une meilleure approximation du plus court chemin sur la surface donc avec une association implicite des images des courbes sur la surface  $\mathcal{S}$ . Il est à noter que cet abus de langage est justifié si nous considérons l'espace riemannien  $\mathfrak{D}$  muni de  $\mathbf{I}$ , la métrique liée à la première forme fondamentale de la surface  $\mathcal{S}$ .*

### Première approximation avec des courbes de degré faible

En première approximation, la classe d'approximation est restreinte à des courbes de degré faible. Dans le cas des courbes quadratiques, nous pouvons visualiser la fonction longueur en fonction de la position du point de contrôle interne de la courbe de Bézier et ainsi observer la sensibilité de la solution, c'est-à-dire le plateau éventuel où la longueur est minimale.

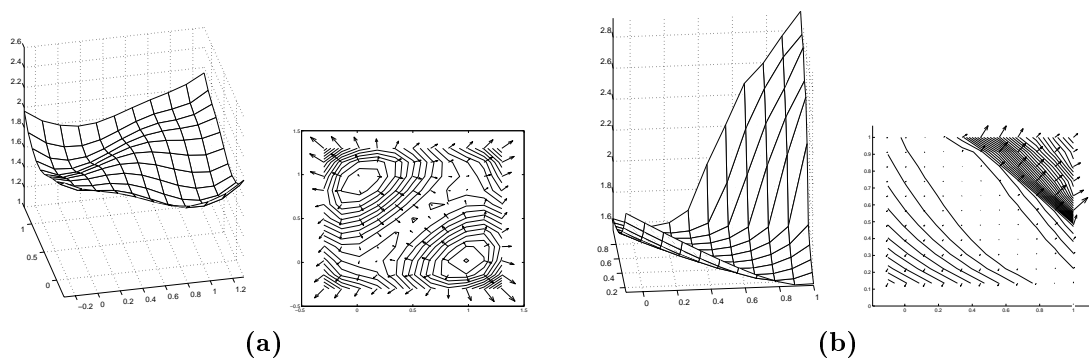
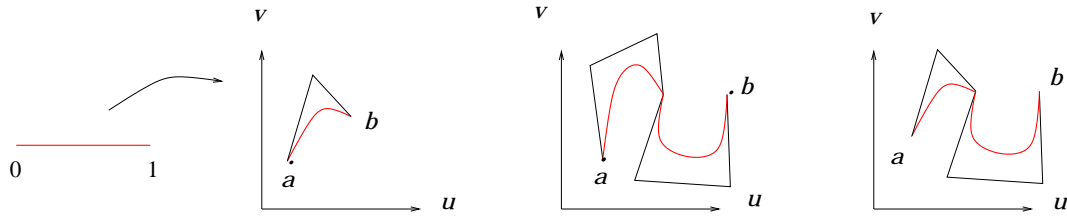


FIG. 1.1 – Visualisation de la fonction longueur, de ses lignes de niveau et de son champ de gradient en fonction du point de minimisation - (a) Exemple sur une surface de Bézier. (b) Exemple sur une surface avec inflexion définie par la paramétrisation  $(u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{| -\log(v) - u^2 |})$  avec comme points extrémités  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$ .

Les courbes quadratiques se sont cependant avérées rigides dans de nombreux cas de figure ; dans nos travaux ultérieurs, nous souhaitons effectuer une étude concernant le coût et la qualité d'approximation en fonction du nombre de variables de minimisation.

### Courbes splines

La flexibilité des courbes splines de degré  $n$  peut être requise. Ces courbes polynomiales par morceaux ne sont néanmoins pas écrites dans la base des fonctions B-splines, mais décrites

FIG. 1.2 – Classe d'approximation dans l'espace des paramètres  $\mathcal{D}$ .

avec le formalisme Bézier. Ce dernier présente l'inconvénient de manipuler plus de points de contrôle que le formalisme B-spline qui tient compte des conditions de raccordement, mais a l'avantage d'inclure les conditions de positions aux extrémités. Il s'inscrit également directement dans le contexte considéré de par le fait que cette classe d'approximation apparaît au sein d'un processus de raffinement par subdivision.

### 1.1.2 Raffinement

Si la première approximation calculée est trop rigide<sup>3</sup>, nous proposons de la raffiner. Ici se présente à nouveau l'intérêt du formalisme Bézier puisque nous avons à disposition deux outils permettant d'augmenter la flexibilité de la courbe : la subdivision et l'élévation de degré. Les figures 1.3 et 1.4 illustrent le processus : la première phase consiste à considérer une courbe de degré faible, à partir de laquelle nous calculons par minimisation une approximation *grossière* du chemin recherché. Nous appliquons ensuite l'un des deux outils suivants.

**La subdivision :** la courbe obtenue est subdivisée, ceci dédouble son nombre de points de contrôle intérieurs et engendre une courbe spline (cf figure 1.3). Il y a dans ce cas de figure perte de la continuité  $C^1$  au niveau du point de jonction, que nous espérons néanmoins retrouver après minimisation par des *phénomènes de tension*.

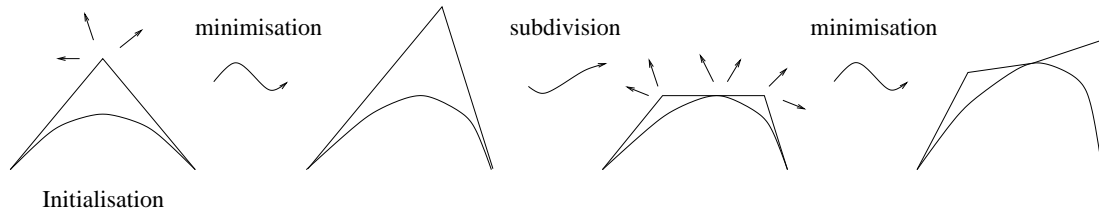


FIG. 1.3 – Raffinement par subdivision à partir d'une courbe quadratique.

**L'élévation de degré :** le degré de la courbe obtenue est élevé et son nombre de points de contrôle intérieurs augmente (cf figure 1.4). Ici, la continuité  $C^1$  — voire  $C^\infty$  — en tout point de la courbe est conservée.

3. La rigidité est évaluée selon le critère de validation exposé dans le chapitre 2, page 25.



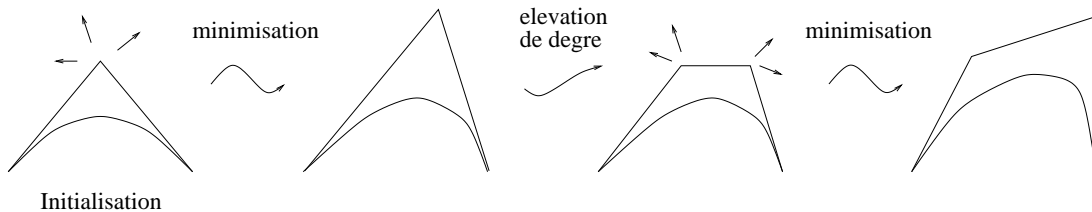


FIG. 1.4 – *Raffinement par élévation de degré à partir d'une courbe quadratique.*

Une nouvelle phase de minimisation est alors effectuée, avec comme initialisation la solution de la minimisation à l'étape précédente. Les étapes de subdivision ou d'élévation de degré sont ensuite répétées si nécessaire, éventuellement en combinant l'une et l'autre, avec ainsi la possibilité de raffiner la courbe d'approximation localement. Pas à pas, elle devient de plus en plus flexible et ceci permet d'atteindre la précision d'approximation désirée.

## 1.2 Longueur

La courbe  $\mathcal{C}$  entre  $A$  et  $B$  sur la surface  $\mathcal{S}$ , image d'une courbe  $c$  de  $\mathcal{B}_n(a, b)$  a pour longueur une expression fonction des points de contrôle internes de  $c$  :

$$\begin{aligned} L_n : (\mathbb{R}^2)^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \mathbf{P} &\mapsto L_n(\mathbf{P}) = \int_0^1 \|(\mathcal{S} \circ c_{\mathbf{P}})'\| dt \end{aligned}$$

Le calcul numérique de l'intégrale est basé sur la formule de Simpson, très utilisée dans la pratique car l'approximation converge très rapidement vers l'intégrale quand le paramètre de discrétisation  $r$ , pair, tend vers  $\infty$ .

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3r} \left[ f(0) + 4f\left(\frac{1}{r}\right) + 2f\left(\frac{2}{r}\right) + \dots + 2f\left(\frac{r-2}{r}\right) + 4f\left(\frac{r-1}{r}\right) + f(1) \right]$$

L'erreur induite par cette approximation du calcul d'intégrale est en  $O\left(\frac{1}{r^4}\right)$  et le résultat est exact pour les polynômes de degré 3.

L'application qui associe à un polygone  $\mathbf{P}$  de  $(\mathbb{R}^2)^{n-1}$  une courbe de  $\mathcal{B}_n(a, b)$  est continue. Comme l'application définissant la surface est régulière,  $L_n$  est continue.

## 1.3 Minimisation

Notre problème d'optimisation consiste à déterminer un minimum  $\mathbf{P}^*$  de  $(\mathbb{R}^2)^{n-1}$  pour la fonctionnelle longueur  $L_n$  :

$$\forall \mathbf{P} \in (\mathbb{R}^2)^{n-1}, \quad L_n(\mathbf{P}^*) \leq L_n(\mathbf{P})$$

Ici, l'avantage de l'écriture dans le formalisme Bézier apparaît clairement, puisqu'il permet d'exprimer une optimisation sans contrainte.

Notre choix arbitraire de la procédure de minimisation s'est porté sur la méthode classique de gradient conjugué. Il s'avérerait cependant intéressant d'y consacrer une étude plus

approfondie, en prenant en considération les exigences requises pour que la routine de minimisation soit adaptée aux besoins spécifiques de notre problème. D'un point de vue plus théorique, nous établissons l'existence d'une meilleure approximation et voyons ensuite la sensibilité de la solution liée à l'initialisation.

### 1.3.1 Existence d'une meilleure approximation

Notons  $\mathcal{H}(a, b)$  l'espace des chemins continus qui relient  $a$  et  $b$  dans  $\mathfrak{D}$ . Le théorème de Hopf-Rinow (cf [Gallot *et al.*, 1990, Do Carmo, 1976]) établit l'existence d'un plus court chemin entre deux points sur une surface complète. Il y a donc existence d'une meilleure approximation dans  $\mathcal{H}(a, b)$  correspondant sur  $\mathcal{S}$  à un plus court chemin porté par une géodésique. Cependant, dans la classe restreinte que nous considérons, la classe d'approximation des courbes de  $\mathcal{B}_n(a, b)$ , il nous faut établir l'existence d'une meilleure approximation. Si nous supposons qu'il existe une meilleure approximation  $\mathbf{P}^*$  dans  $(\mathbb{R}^2)^{n-1}$ , autrement dit  $c_{\mathbf{P}^*}$  dans  $\mathcal{B}_n(a, b)$ , elle correspond alors à un chemin  $\mathcal{C}^*$  sur  $\mathcal{S}$  de longueur minimale entre  $A$  et  $B$  dans la classe d'approximation. Nous adoptons la démarche suivante qui consiste à restreindre :

1. la surface  $\mathcal{S}$  à un domaine compact  $\mathcal{K}$  où se trouve, si elle existe, la courbe de longueur minimale  $\mathcal{C}^*$  dans la classe d'approximation.
2. l'espace des paramètres  $\mathfrak{D}$  à un domaine compact  $\mathfrak{K}$  où se trouve, si elle existe, la courbe de Bézier  $c_{\mathbf{P}^*}$  dont l'image sur  $\mathcal{S}$  est  $\mathcal{C}^*$ .
3. le domaine de  $(\mathbb{R}^2)^{n-1}$  à un domaine compact  $\mathbf{K}$  où se trouvent, s'ils existent, les points de contrôle  $\mathbf{P}^*$  correspondant à  $c_{\mathbf{P}^*}$ .

Ceci nous permettra de conclure.

#### Restriction de $\mathcal{S}$ à un domaine compact $\mathcal{K}$

Considérons  $c_0$  une initialisation de la classe d'approximation  $\mathcal{B}_n(a, b)$ . Son image  $\mathcal{C}_0$  sur  $\mathcal{S}$  a pour longueur  $L_0$ . Nous construisons maintenant sur  $\mathcal{S}$  le disque géodésique de centre  $A$  et de rayon  $L_0$  : il s'agit des points à distance géodésique de  $A$  sur la surface  $\mathcal{S}$  inférieure ou égale à  $L_0$ . Ce disque contient donc  $B$ . Il est borné car inclus dans la boule euclidienne de centre  $A$  et de rayon  $L_0$  de  $\mathbb{R}^3$ . Nous construisons de la même manière le disque géodésique fermé borné de centre  $B$  et de rayon  $L_0$ . L'intersection de ces disques géodésiques est le domaine  $\mathcal{K}$ , fermé borné pour la métrique de  $\mathcal{S}$ . En considérant  $\mathcal{S}$  comme une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ , munie de la métrique liée à la première forme fondamentale, les ouverts de  $\mathcal{S}$  correspondent à la trace d'ouverts de  $\mathbb{R}^3$  et la trace des compacts de  $\mathbb{R}^3$  sont les compacts de  $\mathcal{S}$ .

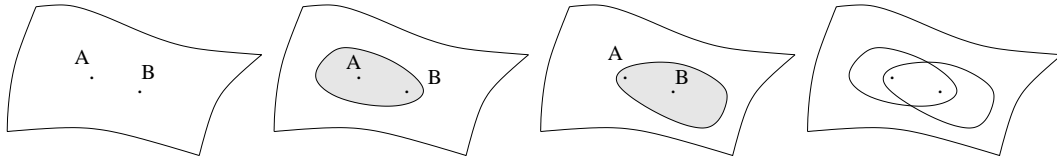


FIG. 1.5 – Disques géodésiques.

**Lemme 1.1** *Le chemin initial  $\mathcal{C}_0$  appartient au domaine compact  $\mathcal{K}$ .*

Démonstration :

$\mathcal{C}_0$  est un chemin continu de longueur  $L_0$  reliant  $A$  et  $B$ . Soit  $P$  un point de  $\mathcal{C}_0$ . La distance entre  $A$  et  $P$  (resp. entre  $P$  et  $B$ ) le long de  $\mathcal{C}_0$ , chemin sur la surface  $\mathcal{S}$ , est inférieure ou égale à  $L_0$ . La distance géodésique entre  $A$  et  $P$  (resp. entre  $P$  et  $B$ ) sur  $\mathcal{S}$  est donc inférieure ou égale à  $L_0$ , car la distance géodésique est la plus courte distance entre les points sur la surface.  $P$  appartient donc au disque géodésique de centre  $A$  et de rayon  $L_0$  (resp. de centre  $B$  et de rayon  $L_0$ ).  $P$  appartient donc à l'intersection de ces deux disques, c'est-à-dire  $\mathcal{K}$ .

Comme  $\mathcal{C}_0$  est un chemin continu, que tout point de  $\mathcal{C}_0$  appartient à  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{C}_0$  appartient donc à  $\mathcal{K}$ . □

Par la suite, nous parlerons de plus court chemin ou de meilleure approximation, au singulier, c'est-à-dire en utilisant le plus court chemin ou la meilleure approximation, en sachant qu'il n'y a pas forcément unicité.

**Lemme 1.2** *Le plus court chemin entre  $A$  et  $B$  sur  $\mathcal{S}$ , parmi l'ensemble des chemins continus, se trouve dans  $\mathcal{K}$ . Le plus court chemin entre  $A$  et  $B$  sur  $\mathcal{S}$ , image d'une courbe de  $\mathcal{B}_n(a, b)$ , s'il existe, se trouve dans  $\mathcal{K}$ .*

Démonstration :

Considérons  $\mathcal{C}_{ext}$  un chemin continu entre  $A$  et  $B$  qui ne se situe pas entièrement dans  $\mathcal{K}$ . Il existe alors  $M$  un point de  $\mathcal{C}_{ext}$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{K}$ . Par construction de  $\mathcal{K}$ , la longueur de la portion de chemin de  $\mathcal{C}_{ext}$  entre  $A$  et  $M$  ou entre  $M$  et  $B$  est strictement supérieure à  $L_0$  et  $\mathcal{C}_{ext}$  ne peut donc être plus court chemin.

Comme  $\mathcal{C}_0$  est un chemin continu de longueur  $L_0$ , le plus court chemin parmi l'ensemble des chemins continus entre  $A$  et  $B$  est de longueur inférieure ou égale à  $L_0$ . De plus, comme  $\mathcal{C}_0$  appartient à la classe d'approximation, le plus court chemin entre  $A$  et  $B$  dans la classe d'approximation, s'il existe, est de longueur inférieure ou égale à  $L_0$ .

Comme tout chemin continu entre  $A$  et  $B$  qui ne se situe pas entièrement dans  $\mathcal{K}$  est de longueur strictement supérieure à  $L_0$ , le plus court chemin parmi l'ensemble des chemins continus entre  $A$  et  $B$  se situe donc dans  $\mathcal{K}$ . De même, si nous considérons un chemin dans la classe d'approximation qui n'est pas inclus dans  $\mathcal{K}$ , sa longueur est strictement supérieure à  $L_0$ . Ainsi le plus court chemin entre  $A$  et  $B$  dans la classe d'approximation, s'il existe, se situe donc dans  $\mathcal{K}$ . □

La délimitation de la surface par ce domaine compact  $\mathcal{K}$  permet de borner la zone dans laquelle se trouve le plus court chemin.

**Projection de  $\mathcal{K}$  dans l'espace des paramètres**

**Proposition 1.1** *Soit  $\mathcal{K}$  un compact de  $\mathcal{S}$ . Il existe un compact  $\mathfrak{K}$  de l'espace des paramètres dont l'image sur  $\mathcal{S}$  contient  $\mathcal{K}$ .*

Démonstration :

Comme la surface est régulière,  $S$  est localement bijective et  $C^1$ . D'après le théorème d'inversion locale, l'application  $S$  est donc localement difféomorphe.

Soit  $\mathcal{K}$  un compact de  $\mathcal{S}$ . En tout point  $P$  de  $\mathcal{K}$ , il existe un ouvert  $\mathcal{O}(P)$  de  $\mathcal{S}$  inclus dans la boule fermée  $\mathcal{B}_1(P)$  de centre  $P$  et de rayon 1 (au sens de la métrique sur  $\mathcal{S}$ ) tel que l'application  $S$  admette une application inverse  $S_P^{-1}$  définie sur  $\mathcal{O}(P)$ . Par construction :

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{P \in \mathcal{K}} \mathcal{O}(P)$$

Nous pouvons donc en extraire un sous-recouvrement fini  $\bigcup_{finie} \mathcal{O}(P_i)$  qui contient  $\mathcal{K}$ . Nous considérons les compacts  $\overline{\mathcal{O}(P_i)}$ . Prolongée par continuité sur la frontière de  $\mathcal{O}(P_i)$ ,  $S_{P_i}^{-1}$  est une application continue sur  $\overline{\mathcal{O}(P_i)}$ . L'image du compact  $\overline{\mathcal{O}(P_i)}$  par  $S_{P_i}^{-1}$ , notée  $\mathfrak{K}_i$  est donc un compact de  $\mathfrak{D}$ .

$$\mathfrak{K} = \bigcup_{finie} \mathfrak{K}_i \quad S(\mathfrak{K}) \supset \mathcal{K}$$

$\mathfrak{K}$  est une union finie de compacts, donc un compact de  $\mathfrak{D}$ . □

Il suffit maintenant de considérer le compact  $\mathcal{K}$  construit précédemment comme intersection des disques géodésiques centrés en  $A$  et  $B$  et de rayons  $L_0$  ; nous lui associons, avec la proposition 1.1, un compact  $\mathfrak{K}$  de  $\mathfrak{D}$  dont l'image contient  $\mathcal{K}$ .

Nous supposons ici que  $S$  est injective. Notons que nous avons alors :

$$\begin{aligned} S(a) = A \in \mathcal{K} \subset S(\mathfrak{K}) &\Rightarrow a \in \mathfrak{K} \\ S(b) = B \in \mathcal{K} \subset S(\mathfrak{K}) &\Rightarrow b \in \mathfrak{K} \end{aligned}$$

**Lemme 1.3** *La meilleure approximation dans  $\mathcal{H}(a, b)$ , l'espace des chemins continus entre  $a$  et  $b$  dans  $\mathfrak{D}$ , correspondant à un plus court chemin entre  $A$  et  $B$  sur  $\mathcal{S}$  se trouve dans  $\mathfrak{K}$ . La meilleure approximation  $c_{\mathbf{P}^*}$  dans  $\mathcal{B}_n(a, b)$ , si elle existe, se trouve dans  $\mathfrak{K}$ .*

Démonstration :

Considérons  $c_{ext}$  un chemin continu entre  $a$  et  $b$  qui ne se situe pas entièrement dans  $\mathfrak{K}$ . Il existe alors  $m$  un point de  $c_{ext}$  qui n'appartient pas à  $\mathfrak{K}$ . Comme  $S$  est injective,  $S(m)$  n'appartient donc pas à  $S(\mathfrak{K})$ . Or  $\mathcal{K}$  est inclus dans  $S(\mathfrak{K})$ ,  $S(m)$  n'appartient donc pas à  $\mathcal{K}$ .

Soit  $\mathcal{C}_{ext}$  l'image du chemin  $c_{ext}$  sur la surface  $\mathcal{S}$ .  $S(m)$  est un point de  $\mathcal{C}_{ext}$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{K}$ . D'après la démonstration du lemme 1.2, la longueur de  $\mathcal{C}_{ext}$  est donc strictement supérieure à  $L_0$  et  $\mathcal{C}_{ext}$  n'est donc pas un plus court chemin.  $c_{ext}$  n'est donc pas une meilleure approximation dans  $\mathcal{H}(a, b)$ .

Comme tout chemin continu entre  $a$  et  $b$  qui ne se situe pas entièrement dans  $\mathfrak{K}$  correspond à un chemin de longueur strictement supérieure à  $L_0$ , la meilleure approximation dans  $\mathcal{H}(a, b)$  se situe donc dans  $\mathfrak{K}$ . De même, si nous considérons un chemin dans  $\mathcal{B}_n(a, b)$  qui n'est pas inclus dans  $\mathfrak{K}$ , la longueur de son image sur la surface  $\mathcal{S}$  est strictement supérieure à  $L_0$ . Ainsi la meilleure approximation  $c_{\mathbf{P}^*}$  entre  $a$  et  $b$  dans  $\mathcal{B}_n(a, b)$ , si elle existe, se situe donc dans  $\mathfrak{K}$ . □

**Remarque 1.2** *Sous un autre point de vue, les disques géodésiques de centre  $A$  correspondent aux domaines délimités par les fronts générés par la propagation de contour à vitesse unité depuis la source  $A$ . Dans  $\mathfrak{D}$ , la vitesse de propagation est rattachée en tout point à la métrique  $\mathbf{I}$ , c'est-à-dire qu'il s'agit de propagation de contour dans l'espace riemannien  $\mathfrak{D}$  muni de  $\mathbf{I}$ .*

Dans cette remarque, la phase de projection est effectuée avant la phase de construction d'un domaine compact, qui correspond alors à l'intersection du disque issu de  $a$  et de celui issu de  $b$ .

A partir de cette remarque, nous espérons construire directement le domaine  $\mathfrak{K}$  et ceci devrait lever la restriction liée à l'injectivité de  $S$  : nous pensons ainsi apporter sous peu une démonstration de l'existence pour un ensemble plus vaste de surfaces paramétrées.

### Interprétation en termes de variables de minimisation

Dans la classe d'approximation considérée, la longueur d'une courbe dépend cependant des points de contrôle internes qui jouent le rôle de variables de minimisation et nous allons maintenant borner le domaine de ces variables.

Soit  $\tilde{\mathbf{P}} \in (\mathbb{R}^2)^{n+1}$ ,  $\tilde{\mathbf{P}} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ . La correspondance entre les courbes de Bézier de degré  $n$  et le polygone des points de contrôle  $\tilde{\mathbf{P}}$  est notée :

$$\tilde{c}_{\tilde{\mathbf{P}}}(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_{n,i}(t)$$

Nous avons noté  $\mathbf{P}$  le polygone qui contient les points de contrôle internes avec pour points extrémités les points  $a$  et  $b$ . Ici,  $\tilde{\mathbf{P}}$  est le polygone de tous les points de contrôle, les points extrémités n'étant pas nécessairement égaux à  $a$  et  $b$ .

### Proposition 1.2

$$\forall n, \quad \forall \tilde{\mathbf{P}} \in (\mathbb{R}^2)^{n+1}, \quad \forall d > 0, \quad \exists D > 0, \quad \left[ \|\tilde{c}_{\tilde{\mathbf{P}}}\|_{\infty} \leq d \Rightarrow \|\tilde{\mathbf{P}}\|_{\infty} \leq D \right]$$

#### Démonstration :

Sans perte de généralité, nous pouvons nous ramener à l'étude pour chaque composante et ainsi considérer que les points de contrôle appartiennent à  $\mathbb{R}$ .

$$\|\tilde{c}_{\tilde{\mathbf{P}}}\|_{\infty} \leq d \iff |\tilde{c}_{\tilde{\mathbf{P}}}(t)| \leq d, \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$\implies |\tilde{c}_{\tilde{\mathbf{P}}}(t)| \leq d, \quad t = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$$

Considérons le vecteur  $\mathbf{C}$  des  $n+1$  valeurs de  $\tilde{c}_{\tilde{\mathbf{P}}}$  en  $t = 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$  :

$$\mathbf{C} = \left( \tilde{c}_{\tilde{\mathbf{P}}}(0), \tilde{c}_{\tilde{\mathbf{P}}}\left(\frac{1}{n}\right), \dots, \tilde{c}_{\tilde{\mathbf{P}}}\left(\frac{n-1}{n}\right), \tilde{c}_{\tilde{\mathbf{P}}}(1) \right) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Comme les espaces vectoriels  $\mathbb{R}^{n+1}$  et  $\mathbb{R}_n[t]$  sont isomorphes, en connaissant  $n+1$  valeurs d'un polynôme de  $\mathbb{R}_n[t]$  en  $n+1$  abscisses distinctes, il est possible de déterminer ses coefficients. Le vecteur  $\mathbf{C}$  permet donc de déterminer  $\tilde{c}_{\tilde{\mathbf{P}}}$ .

En considérant les valeurs des fonctions de la base de Bernstein en  $t = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$ , nous obtenons la matrice de passage, donc inversible  $\mathbf{M}_n$  de dimension  $(n+1) \times (n+1)$  :

$$\mathbf{M}_n(i, j) = B_{n,j}\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}_n \tilde{\mathbf{P}} \iff \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{M}_n^{-1} \mathbf{C}$$

$$\|\tilde{\mathbf{P}}\|_\infty = \|\mathbf{M}_n^{-1} \mathbf{C}\|_\infty \leq c \|\mathbf{M}_n^{-1}\|_\infty \|\mathbf{C}\|_\infty \implies \|\tilde{\mathbf{P}}\|_\infty \leq \|\mathbf{M}_n^{-1}\|_\infty d$$

avec  $c > 0$  et  $\|\mathbf{M}_n^{-1}\|_\infty$  étant la plus grande valeur propre de la matrice  $\mathbf{M}_n^{-1}$ .

□

Le domaine  $\mathfrak{K}$ , restriction de l'espace des paramètres  $\mathfrak{D}$  est un compact borné. Il est donc inclus dans un disque<sup>4</sup> de rayon borné  $d$ . D'après la proposition 1.2, nous pouvons donc construire un disque  $\mathbf{K}$  de rayon  $c \|\mathbf{M}_n^{-1}\|_\infty d$  fermé borné de  $(\mathbb{R}^2)^{n+1}$ . Comme nous considérons la norme infinie :

$$\mathbf{K} = ([-c \|\mathbf{M}_n^{-1}\|_\infty d, c \|\mathbf{M}_n^{-1}\|_\infty d]^2)^{n+1}$$

Par construction, l'ensemble des courbes de Bézier de degré  $n$  correspondant aux points de contrôle de  $\mathbf{K}$  contient l'ensemble des courbes de Bézier de degré  $n$  incluses dans  $\mathfrak{K}$ , donc en particulier celles d'extrémités  $a$  et  $b$ . Nous considérons le rôle particulier des points  $a$  et  $b$  fixes. Il est possible de considérer le domaine  $\mathbf{K}^*$  de  $(\mathbb{R}^2)^{n-1}$ , sous-espace de  $\mathbf{K}$  des points de contrôle internes. Comme  $\mathbf{K}$  est compact,  $\mathbf{K}^*$  est compact.

Si la meilleure approximation  $c_{\mathbf{P}^*}$  dans  $\mathcal{B}_n(a, b)$  existe, elle est dans  $\mathfrak{K}$ . Alors le polygone des points de contrôle internes  $\mathbf{P}^*$  correspondant est nécessairement dans  $\mathbf{K}^*$ .

La fonction longueur  $L_n$  est continue sur le domaine compact  $\mathbf{K}^*$ , donc elle atteint ses bornes. Il existe ainsi  $\mathbf{P}^*$  qui correspond à un minimum de  $L_n$  dans  $\mathbf{K}^*$ , donc à un minimum dans  $(\mathbb{R}^2)^{n-1}$ , d'après ce qui précède. Soit  $c_{\mathbf{P}^*}$  la courbe de  $\mathcal{B}_n(a, b)$  associée. Son image  $\mathcal{C}^*$  sur la surface  $\mathcal{S}$  est un plus court chemin entre  $A$  et  $B$  dans la classe d'approximation.

### 1.3.2 Choix de l'initialisation

**Théorème 1.1** *En tout point  $P$ , il existe un voisinage  $\mathcal{O}(P)$  tel qu'il y a unicité du plus court chemin entre  $P$  et tout point de  $\mathcal{O}(P)$ .*

Ce théorème se trouve dans [Do Carmo, 1976]. Il établit donc pour des points rapprochés l'unicité d'un minimum. Il n'est cependant pas valable pour des paires de points *éloignés*. L'exemple qui suit illustre la sensibilité de la solution en fonction de l'initialisation à classe d'approximation fixée avec les deux cas de figures qui peuvent se présenter : l'existence de plusieurs minima globaux et l'existence de optima locaux (cf figures 1.6 et 1.7).

---

4. Nous considérons le disque dans l'espace métrique muni de la norme infinie.

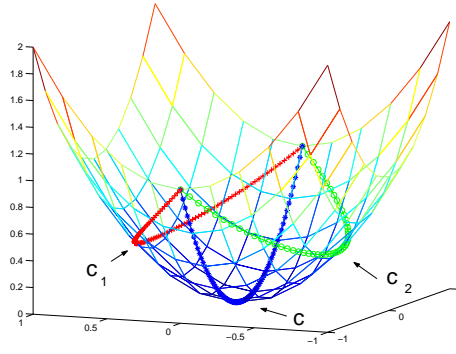


FIG. 1.6 – *Sensibilité de la solution suivant l'initialisation. Exemple sur le paraboloïde paramétré par  $(u, v) \mapsto (u, v, u^2 + v^2)$  avec comme points extrémités  $(-1, 0)$  et  $(1, 0)$ . Les trois courbes visualisées sont solutions de la minimisation dans  $\mathcal{B}_3(a, b)$  à partir de trois initialisations différentes. La courbe  $c$  correspond à un optimum local. Les courbes  $c_1$  et  $c_2$  correspondent à deux minima globaux ; il s'agit d'un cas symétrique avec non unicité du minimum global.*

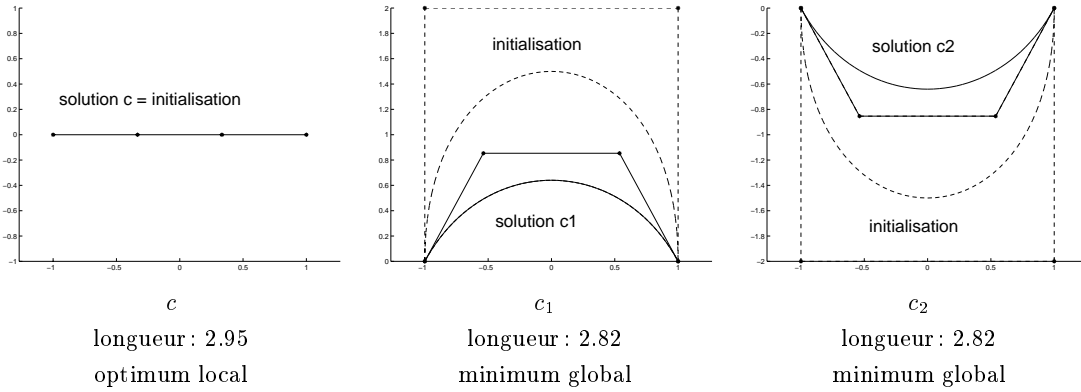


FIG. 1.7 – *Initialisations et solutions visualisées dans  $\mathcal{D}$ .*

Ce phénomène d'optimum local constitue un problème intrinsèque au problème d'optimisation, ici de recherche de plus court chemin. De manière générale, l'initialisation se fait en prenant une répartition régulière des points de contrôle sur le segment  $[a, b]$  dans l'espace des paramètres.

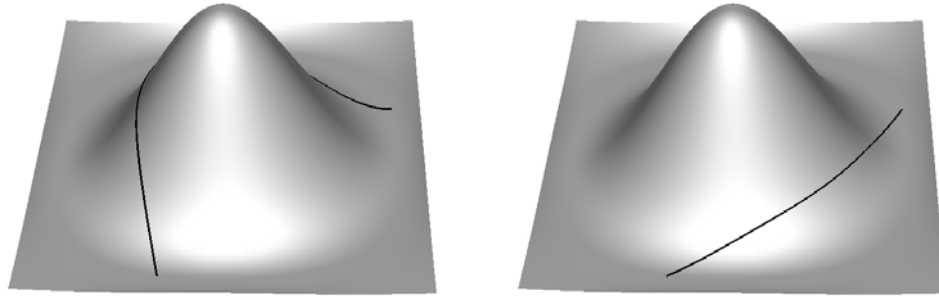


FIG. 1.8 – *Sensibilité de la solution suivant l'initialisation. Exemple sur une surface de Bézier de degré  $5 \times 5$  avec comme points extrémités  $(0.3, 0.05)$  et  $(0.95, 0.7)$ . Les deux courbes visualisées sont solutions de la minimisation dans  $\mathcal{B}_4(a, b)$  à partir de deux initialisations différentes. La courbe de gauche correspond à un minimum local et celle de droite à un minimum global.*

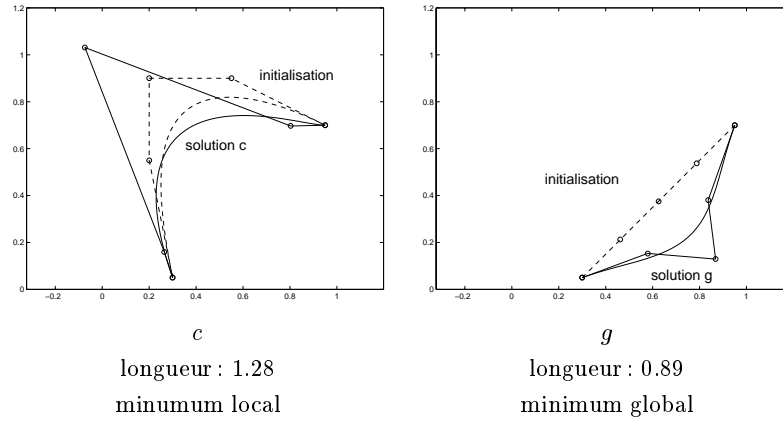


FIG. 1.9 – *Initialisations et solutions visualisées dans  $\mathfrak{D}$ .*





## Chapitre 2

# Validation et résultats

Après cette présentation des outils nécessaires à l'implémentation, nous proposons un critère permettant de valider la meilleure approximation calculée. Nous discutons également l'influence de la paramétrisation de la surface, la complexité de la méthode et nous présentons enfin un ensemble d'exemples.

### 2.1 Validation

Nous nous penchons sur la question d'évaluer la qualité de l'approximation calculée. Sachant qu'un plus court chemin<sup>1</sup> est porté par une géodésique, nous proposons un critère basé sur sa définition différentielle. Si l'approximation obtenue ne satisfait pas la qualité exigée, nous proposons alors de raffiner la solution par subdivision ou par élévation de degré.

#### 2.1.1 Critère basé sur la courbure géodésique

Dans l'annexe B, des notions de base de la théorie des courbes et surfaces sont rappelées. Une géodésique se caractérise par le fait que sa courbure géodésique est nulle en tout point. Observer la courbure géodésique en tout point de la meilleure approximation nous permet ainsi d'établir un critère de validation.

- Si la courbure géodésique est forte en un point, le chemin  $\gamma$  est localement non optimal au sens de la longueur. Ceci signifie donc que la classe d'approximation est trop rigide et qu'un raffinement s'impose afin d'en augmenter la flexibilité.
- Si la courbure géodésique est faible, le chemin est alors localement peu dévié, donc proche d'un plus court chemin local.

Pour calculer la courbure géodésique en un point d'une courbe  $\mathcal{C}$ , paramétrée par  $C$ , nous considérons le vecteur courbure en ce point, dirigé et orienté suivant la normale principale  $\vec{N}_p$  et dont la norme est la valeur de la courbure  $k$  :

$$\vec{N}_p = (\vec{C}' \wedge \vec{C}'') \wedge \vec{C}', \quad k = \frac{\|\vec{C}' \wedge \vec{C}''\|}{\|\vec{C}'\|^3}$$

La courbure géodésique  $k_g$  correspond à la composante tangentielle de ce vecteur courbure. En notant  $\vec{N}_S$  un vecteur normal à la surface  $S$  et  $\theta$  l'angle entre  $\vec{N}_S$  et  $\vec{N}_p$ , nous obtenons

---

1. Il s'agit ici d'un plus court chemin parmi l'ensemble des chemins continus reliant deux points.

donc :

$$k_g = k \sin(\theta) = k \frac{\|\vec{N}_S \wedge \vec{N}_p\|}{\|\vec{N}_S\| \|\vec{N}_p\|}$$

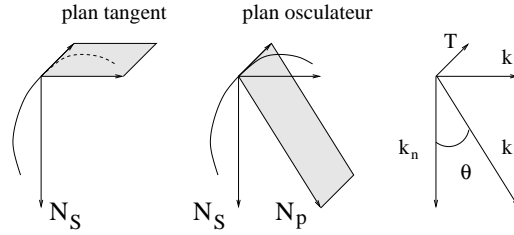


FIG. 2.1 – Courbure d'une courbe  $\mathcal{C}$  en un point et composantes tangentielle  $k_g$  et normale  $k_n$  à la surface.

D'un point de vue numérique, la courbure géodésique est évaluée en un nombre discret de points de  $\mathcal{C}$ , que nous représentons sous forme de :

- **moyenne**  $\tilde{k}_g$  de la courbure géodésique le long de  $\mathcal{C}$

$$\tilde{k}_g = \sum_i \lambda_i k_{g_i}$$

où  $\lambda_i$  pondère la valeur de la courbure au  $i$ -ème point de discrétisation. Ce coefficient  $\lambda_i$  est la longueur de l'arc de  $\mathcal{C}$  compris entre les images des points  $i$  et  $i + 1$ .

- **courbe** paramétrée par la longueur d'arc, avec les  $\lambda_i$ , ramenée à l'intervalle  $[0, 1]$ .

### 2.1.2 Minimisation de la courbure

Nous nous intéressons à exploiter directement le critère de validation par une minimisation de la courbure géodésique. La première difficulté, et restriction, consiste à construire un scalaire représentatif de la courbure géodésique le long de  $\mathcal{C}$ . Quel qu'en soit le choix, le fait qu'il soit calculé à partir d'un nombre discret de points présente une incohérence avec l'aspect purement local de la notion de géodésique. [Sethian, 1987, Osher and Sethian, 1988] soulèvent, dans un cadre plus général, le problème d'instabilité des méthodes d'évolution de front qui se basent sur des points discrets, appelés **marqueurs**. Ils proposent une alternative qui consiste à reformuler les équations du mouvement comme une loi de conservation avec viscosité.

Un résultat important qui fait le lien entre les deux approches vient de [Grayson, 1989] : l'évolution d'une courbe suivant le champ de courbure géodésique fait tendre la courbe vers un point ou vers une géodésique. Cette évolution tend également à minimiser localement la longueur de la courbe. L'évolution de la courbe dans le sens de la courbure géodésique se comprend intuitivement bien comme une direction de minimisation de la courbure géodésique et comme une évolution suivant le gradient de la longueur. Ceci confirme donc la cohérence de minimiser la longueur et de contrôler la courbure géodésique puisque ces deux caractéristiques de la courbe sont directement corrélées. Nous verrons cependant que la contrainte liée à la classe d'approximation impose une forte contrainte qui limite l'interprétation de la courbure géodésique (cf paragraphe 2.3, page 27).

Cette idée de minimisation sur la courbure géodésique rejoint directement de nombreux travaux de Kimmel (cf [Kimmel *et al.*, 1994, Kimmel and Sapiro, 1995]) qui utilise les outils proposés par Sethian par propagation de contour (cf [Kimmel and Sethian, 1998]).

Il parle d'évolution dans le sens de la courbure, ce qui est équivalent à l'évolution suivant la courbure géodésique puisque seule la composante tangentielle, donc correspondant à la courbure géodésique intervient dans le déplacement sur la surface. Il projette le problème surfacique en un problème bi-dimensionnel et se trouve face à des équations différentielles qui régissent l'évolution de la courbe, mais sans contrainte quant à la classe d'approximation. La résolution ici est donc une fois de plus une résolution d'équations différentielles. Ces articles répondent aux différents constats faits lors de l'ébauche de notre étude et développent cet aspect de la minimisation de la courbure, c'est pourquoi nous n'avons pas poursuivi nos travaux dans ce sens.

## 2.2 Discussion

### 2.2.1 Paramétrisation de la surface

Dans l'analyse de la méthode se pose la question de la paramétrisation qui intervient bien que le problème de plus court chemin soit purement géométrique. Les zones de fortes courbures sur la surface, paramétrées sur de petits domaines souffrent naturellement d'autant plus du manque de flexibilité. Le choix de la paramétrisation a donc son importance. L'article de [Speer *et al.*, 1998] s'attarde sur le changement de paramétrisation au niveau global dans le cas courbe. Dans le cas spécifique des surfaces développables, il existe une paramétrisation telle que les géodésiques correspondent aux lignes droites de l'espace des paramètres. Mais dans le cas de surfaces quelconques, établir les critères d'une paramétrisation *idéale* et trouver une paramétrisation globalement optimale constituent des problèmes difficiles, voire insolubles.

Nous revenons donc à l'idée d'adaptation locale des courbes d'approximation qui traite localement les problèmes de flexibilité.

### 2.2.2 Etude de la complexité

L'algorithme de cette méthode se base sur la routine de calcul de la longueur et la routine de minimisation. Sa complexité  $y$  est donc directement liée. L'évolution des longueurs, des courbures et du temps de calcul en fonction du degré des surfaces font partie de nos travaux immédiats.

## 2.3 Résultats

### 2.3.1 Courbure géodésique et classe d'approximation sur le paraboloïde

Nous traitons deux exemples sur le paraboloïde. Nous observons l'évolution de la courbe des courbures géodésiques en fonction de la classe d'approximation. Plus le degré est élevé, plus courte est la longueur et donc meilleure est l'approximation. La courbure géodésique vérifie dans ces deux exemples la même évolution ; la courbure géodésique moyenne des plus courts chemins diminue en effet lorsque le degré des classes d'approximation augmente.

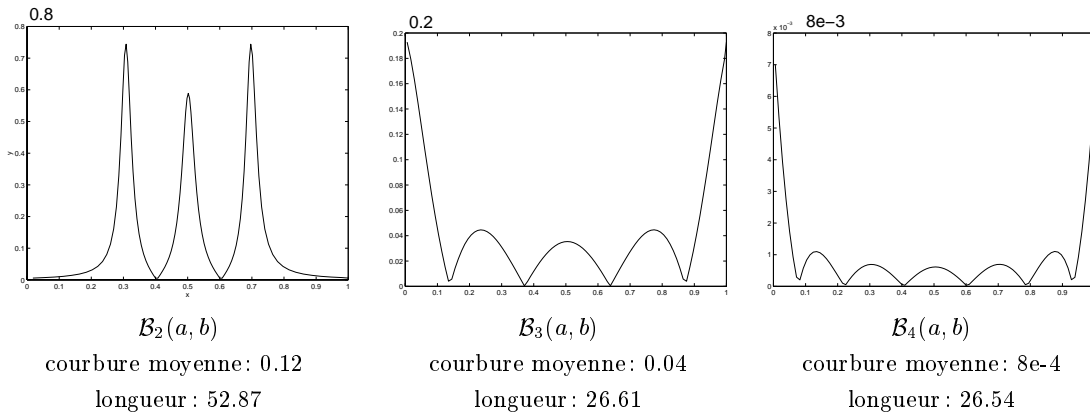


FIG. 2.2 – Exemple entre les points  $a = (4, -11)$  et  $b = (-11, 4)$ . Tracé de la courbe des courbures géodésiques le long des chemins solutions dans différentes classes d'approximation.

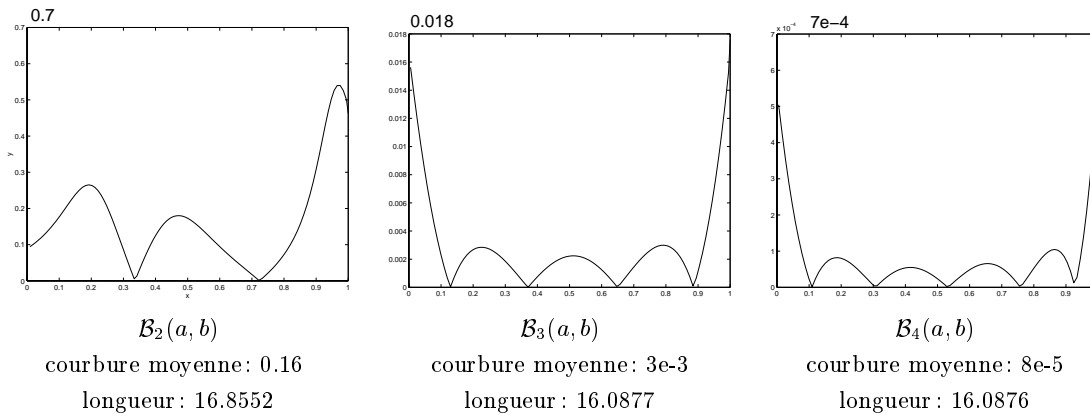


FIG. 2.3 – Exemple entre les points  $a = (0, 12)$  et  $b = (-11, 4)$ . Tracé de la courbe des courbures géodésiques le long des chemins solutions dans différentes classes d'approximation.

### 2.3.2 Locale optimalité des géodésiques

Nous reprenons ici l'exemple du paraboloïde illustré dans la figure 1.6, page 22. Considérons  $c$ , qui correspond à un optimum local et  $c_1$ , qui correspond à un minimum global dans  $B_3(a, b)$ . L'observation de la courbure géodésique le long des chemins montre que  $c$  est un chemin géodésique alors que  $c_1$  est un minimum global qui manque de flexibilité (cf figure 2.4).

Ceci vient du fait que les géodésiques sont des chemins localement optimaux. Le plus court chemin sur la surface, sans contrainte de classe d'approximation est effectivement géodésique mais dans une classe d'approximation restreignant l'ensemble des courbes considérées, le plus court chemin n'est pas nécessairement géodésique. Dans l'exemple présenté, la courbe  $c$  coïncide avec un minimum local sans restriction sur les courbes, ce qui n'est pas le cas pour le minimum global.

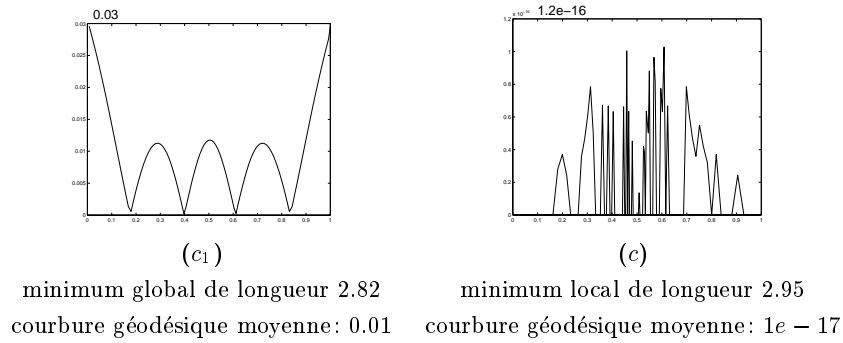


FIG. 2.4 – Courbes des courbures géodésiques sur l'exemple du paraboloïde avec des solutions générées par différentes initialisations. La courbe correspondant à  $c$  est irrégulière en raison des erreurs numériques, mais elle correspond à une courbe nulle en tout point. Par contre, la courbe correspondant à  $c_1$ , minimum global n'est pas géodésique.

### 2.3.3 Longueur, courbure géodésique et classes d'approximation

Nous traitons deux exemples qui permettent à nouveau de comparer les résultats dans différentes classes d'approximation. Pour chacune d'elles, nous donnons :

- la visualisation du plus court chemin sur la surface,
- le tracé de la courbe de Bézier correspondante dans l'espace des paramètres et son polygone de contrôle,
- la longueur du plus court chemin,
- le tracé de la courbe des courbures géodésiques le long du chemin solution,
- la courbure géodésique moyenne.

La surface considérée est une surface de Bézier de degré  $5 \times 9$  avec pour extrémités

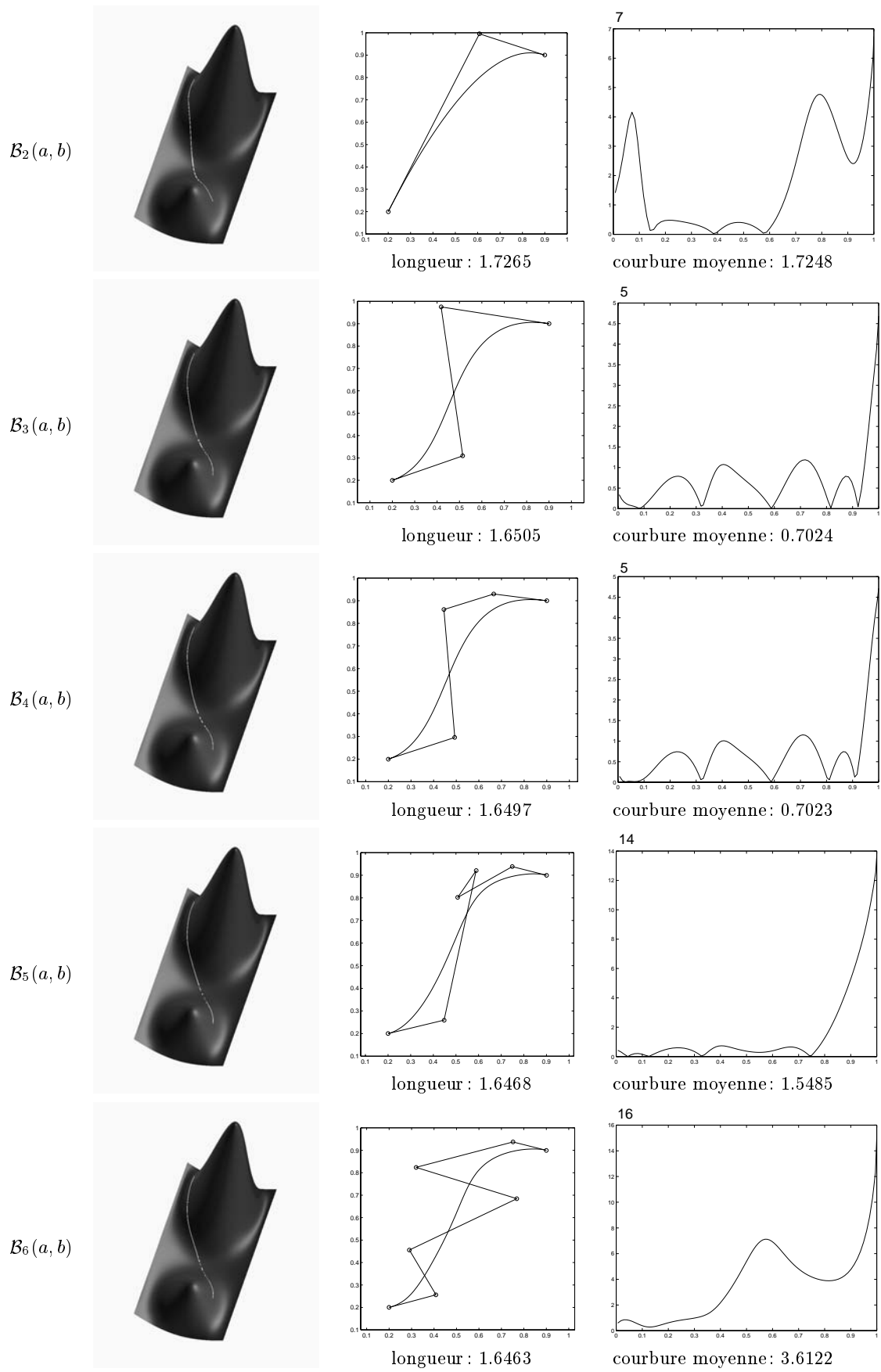
- $a = (0.2, 0.2)$  et  $b = (0.9, 0.9)$  dans l'exemple 1.
- $a = (0.5, 0.1)$  et  $b = (0.5, 0.9)$  dans l'exemple 2.

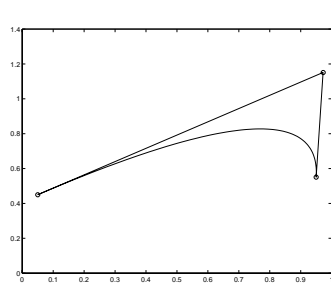
Dans chaque exemple, il est intéressant d'observer :

- **l'évolution de la longueur** en fonction de la classe d'approximation dans la troisième colonne des tableaux. Celle-ci décroît naturellement puisque l'algorithme consiste à minimiser la longueur et que toute classe d'approximation  $\mathcal{B}_n(a, b)$  est incluse dans la classe d'approximation  $\mathcal{B}_{n+1}(a, b)$ .

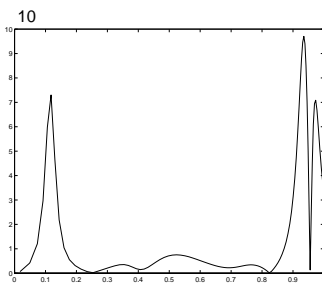
- **l'évolution des courbes** en fonction de la classe d'approximation dans les deuxième et troisième colonnes des tableaux. Visuellement, nous observons une convergence des chemins, traduite également dans la convergence des longueurs.

- **l'évolution de la courbure géodésique moyenne** en fonction de la classe d'approximation dans la quatrième colonne des tableaux. Celle-ci ne décroît pas malgré la décroissance des longueurs. Le critère de courbure ne permet pas d'établir une relation d'ordre ou bien une norme pour la qualité des plus courts chemins mais pour leur qualité au sens géodésique.

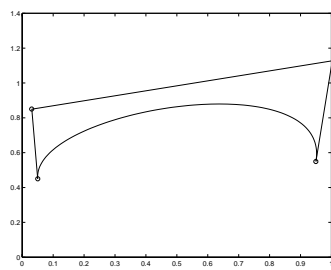
FIG. 2.5 – *Exemple 1*

$\mathcal{B}_2(a, b)$ 

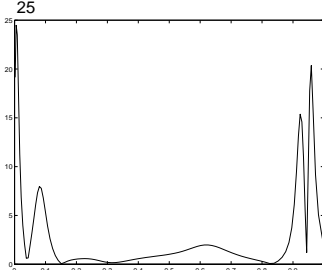
longueur : 2.6058



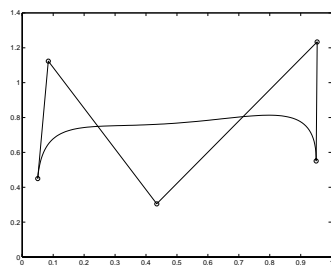
courbure moyenne : 1.2611

 $\mathcal{B}_3(a, b)$ 

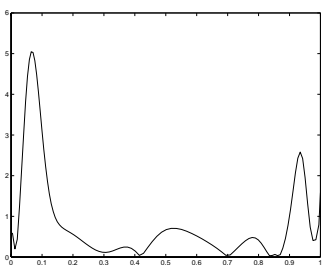
longueur : 2.5742



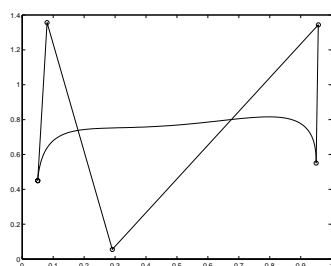
courbure moyenne : 2.3813

 $\mathcal{B}_4(a, b)$ 

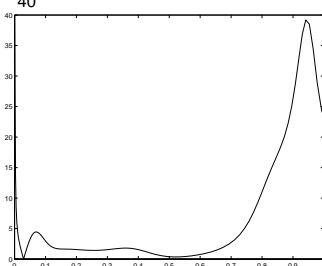
longueur : 2.4419



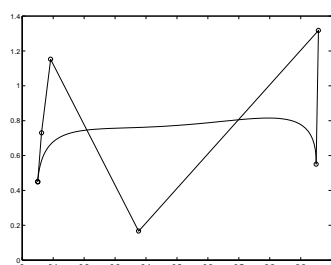
courbure moyenne : 0.7946

 $\mathcal{B}_5(a, b)$ 

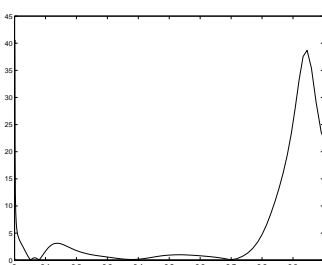
longueur : 2.4382



courbure moyenne : 6.8887

 $\mathcal{B}_6(a, b)$ 

longueur : 2.4369



courbure moyenne : 5.5786

FIG. 2.6 – Exemple 2



Ainsi, en terme de position, les plus courts chemins locaux et globaux sans restriction sur la classe d'approximation sont géodésiques. Mais dans notre contexte, le critère de validation reposant sur la courbure géodésique est strict au sens où il ne permet que d'affirmer ce qui suit :

- si le critère est bon, le chemin est peu dévié donc proche d'un optimum local, car la minimisation assure un contrôle au sens de la longueur du chemin
- si le critère n'est pas vérifié, il n'est pas possible de conclure, le chemin pouvant être proche d'un plus court chemin de par sa position et sa longueur. La courbure géodésique est en effet très sensible aux faibles variations locales. Les approximations calculées sont relativement proches et leurs courbes de courbure géodésiques diffèrent.

#### 2.3.4 Raffinement par subdivision de la classe d'approximation

Sur la même surface nous proposons un raffinement de la classe d'approximation par subdivision. Dans cet exemple, la démarche consiste à partir d'une courbe de  $\mathcal{B}_2(a, b)$  ayant comme extrémités les points  $a = (0.5, 0.01)$  et  $b = (0.5, 0.99)$ . Ce processus de raffinement est utile pour des chemins longs où une certaine souplesse est requise.

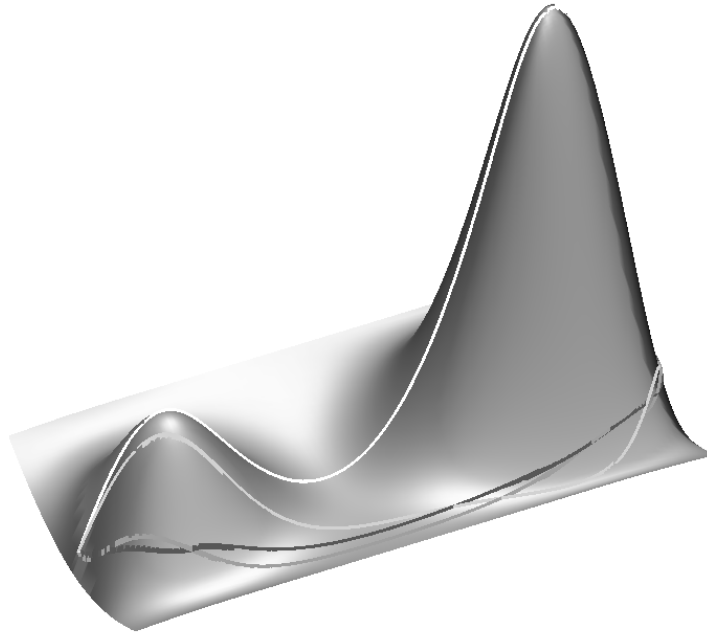
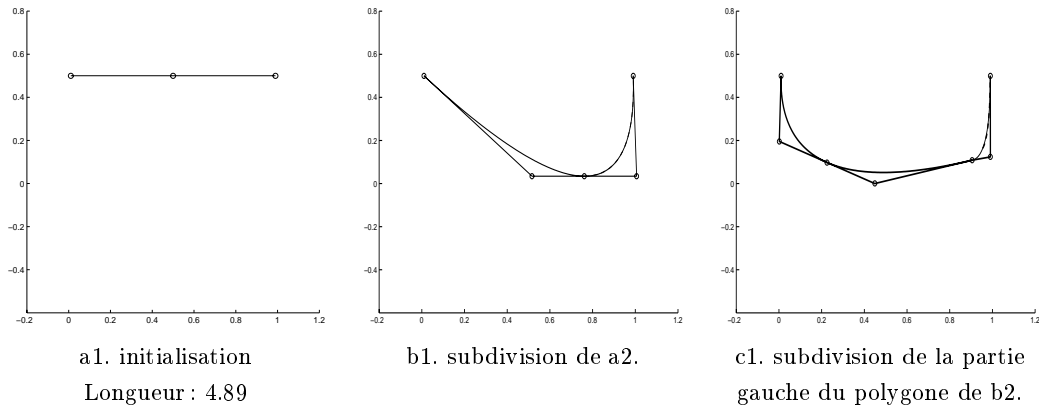


FIG. 2.7 – *Raffinement par subdivision. Visualisation de la surface et des plus courts chemins calculés. Les étapes décrites dans la figure 2.8 correspondent à une évolution de la courbe la plus claire à la plus foncée.*



par minimisation de a1, b1, c1, nous obtenons a2, b2, c2.

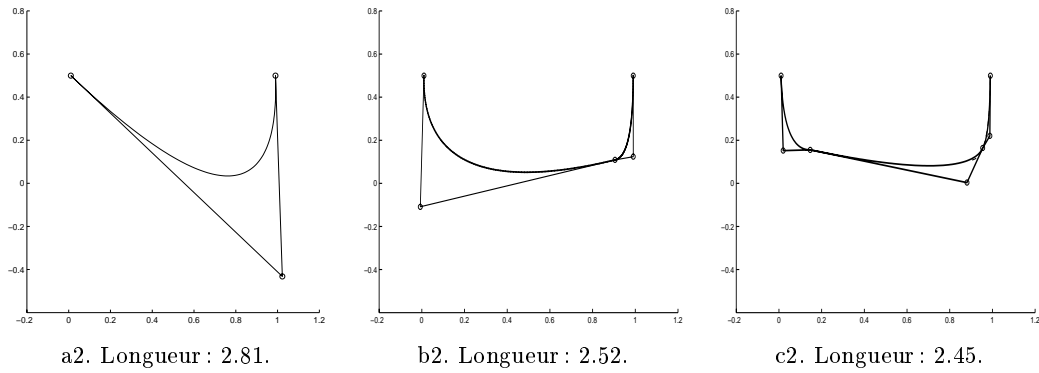


FIG. 2.8 – *Raffinement par subdivision. Différentes étapes de minimisation et subdivision vues dans l'espace des paramètres. Décroissance des longueurs.*

Nous pouvons observer dans la figure 2.8 que les minimisations avec les courbes splines, illustrées par les graphes b2. et c2., ne conduisent pas à des courbes  $C^1$  aux points de jonction. Ceci est encore une fois fortement lié au fait de se placer dans une classe d'approximation. Nous constatons néanmoins que les longueurs des chemins décroissent : le procédé de raffinement par subdivision permet donc bien d'améliorer l'approximation du plus court chemin.



## Méthode de minimisation

### Conclusions

Cette méthode a chronologiquement constitué une première approche de l'approximation qui dans l'analyse a mené à toute une étude autour de la validation par mesure de la courbure géodésique. Par la suite, nous nous sommes plus intéressés à des travaux traitant des méthodes de propagation de contour qui soulèvent les mêmes difficultés liées au caractère local des géodésiques. Nous avons établi le lien entre notre approche par minimisation de la longueur et celle proposée par ces travaux, liée à la minimisation de la courbure géodésique. Nous n'avons pas approfondi certains points *secondaires*, notamment le choix arbitraire des routines de minimisation et d'intégration pour le calcul de la longueur.

Il faut néanmoins relever les points forts de notre méthode de minimisation; comme nous l'avons souligné, le formalisme utilisé présente les avantages de considérer un problème de minimisation sans contrainte et la possibilité de raffiner les courbes, même localement. L'intérêt de la phase de minimisation *grossière* peut se présenter dans deux cadres:

- pour des chemins entre des points *relativement* éloignés sur la surface au sens où il peut exister des minima locaux. Cette première approximation peut permettre de localiser globalement le chemin et servir d'initialisation pour la courbe ensuite raffinée. Ce point reste encore à étudier.
- pour générer des maillages à faible coût. Ce point nous semble être un développement intéressant de notre méthode puisque les noeuds d'un maillage sont généralement rapprochés. Nous proposons donc une première approximation *grossière* sur l'ensemble des arêtes du maillage et une amélioration des arêtes ne vérifiant pas le critère de validation. Nous développerons ces idées dans la partie III, chapitre 1, qui traite de l'optimisation des maillages.



Deuxième partie

Méthode de subdivision



# Méthode de subdivision

## Introduction

Dans cette partie, nous présentons une méthode géométrique d'approximation de chemin géodésique entre deux points sur une surface de subdivision. Ce type de surface est limite d'une suite de réseaux de points de plus en plus denses obtenus par subdivisions successives d'un réseau de points initial appelé réseau de contrôle de la surface.

Ces réseaux sont triangulés et nous considérons alors les surfaces polyédriques associées. La méthode est basée sur une recherche de chemins géodésiques sur les différentes surfaces polyédriques. La propriété de convergence vers la surface nous donne une approximation du chemin recherché.

Dans le chapitre 1, nous nous attardons à définir les schémas de subdivision qui génèrent, lorsqu'il y a convergence, des surfaces de subdivision. Nous énonçons les propriétés requises pour notre méthode, formulées en termes de paramétrage de la surface limite et en termes de propriétés sur le schéma de subdivision la générant.

Dans le chapitre 2, nous décrivons la méthode proposée dans le détail. Le problème se ramène entre autres à un calcul de chemins géodésiques sur des surfaces polyédriques. Il utilise la convergence de la suite de réseaux engendrés par subdivision en projetant itérativement les chemins géodésiques calculés sur les surfaces polyédriques associées aux réseaux.

Dans le chapitre 3, nous étudions la convergence de la suite de chemins engendrés vers un chemin géodésique de la surface; nous proposons de valider notre méthode avec un critère local.

Dans le chapitre 4, nous présentons les résultats au travers d'exemples sur des surfaces de Bézier; nous discutons divers points et donnons la complexité de la méthode.





# Chapitre 1

## Courbes et surfaces de subdivision

Les courbes et surfaces de subdivision font l'objet d'un grand nombre de travaux récents. Bien que toutes les fonctions ne puissent pas être décrites de cette manière, la subdivision peut être utilisée pour créer un large éventail de fonctions, à l'aide d'un processus simple. Le "corner cutting" en est à l'origine (cf [Gregory and Qu, 1996, De Boor, 1987, Boehm *et al.*, 1984]). Ces fonctions sont introduites par le biais des schémas de subdivision, dans le cadre de l'analyse multirésolution et également dans celui des ondelettes, domaines qui présentent et utilisent des outils similaires abordés sous un autre angle.

Malgré l'abondance de la littérature dans ce domaine, il n'existe pas de notations ni de formalisme englobant les schémas de subdivision. Les articles considèrent en effet généralement un schéma de subdivision spécifique et en étudient au cas par cas le comportement; nous les citerons au cours de ce chapitre. Les travaux de [Dyn, 1992, Zorin and Schröder, 1999, Guskov, 1998] ont plus particulièrement retenu notre attention, car ils s'avèrent plus généraux. [Stollnitz *et al.*, 1996, Lounsbery *et al.*, 1997] abordent ce domaine d'une manière plus géométrique.

Définir les notions propres aux schémas de subdivision constitue l'un des objectifs de ce chapitre. Ceci étant établi, nous pouvons ensuite préciser les propriétés requises des surfaces sur lesquelles la méthode de calcul de géodésiques présentée dans cette partie s'applique.

**Définition 1.1** *Une surface de subdivision est une surface obtenue par un procédé récursif en partant d'un ensemble dénombrable de points isolés.*

Nous présentons d'abord des définitions sur les schémas de subdivision, la notion de convergence en leur associant une paramétrisation et le lien avec l'existence de fonctions d'échelle. Nous proposons ensuite de considérer le schéma des différences associé au schéma de subdivision qui vérifie la formule de commutation. Celle-ci caractérise les propriétés requises pour les surfaces que nous utilisons, résumées en fin de chapitre.

### 1.1 Schémas de subdivision

Nous définissons les différents types de schémas de subdivision avec une approche géométrique et intuitive puis présentons l'état des travaux.

### 1.1.1 Définitions

**Définition 1.2** Une grille  $\mathbf{X}$  est un maillage sur un domaine de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^2$ . Ses sommets sont appelés **noeuds**. La grille est dite **régulière** si la répartition des noeuds est régulière et si la topologie<sup>1</sup> du maillage l'est également, sinon elle est **irrégulière**.

**Définition 1.3** Une suite de grilles  $\{\mathbf{X}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est un **raffinement** si

- le nombre de noeuds de  $\mathbf{X}^{k+1}$  est supérieur au nombre de noeuds de  $\mathbf{X}^k$ .
- la distance entre les noeuds de  $\mathbf{X}^k$  est inférieure à celle entre les noeuds de  $\mathbf{X}^{k+1}$ .
- l'ensemble des noeuds devient dense sur le domaine considéré.

Nous dirons qu'il est **emboîté**<sup>2</sup> si  $\mathbf{X}^{k+1}$  correspond à l'insertion de noeuds et d'arêtes dans  $\mathbf{X}^k$ .

**Définition 1.4** Une suite de grilles de raffinement de type **moyenne** pour des topologies générales dans  $\mathbb{R}^2$  se construit récursivement à l'aide de :

1. l'opérateur de **dédoublément** qui agit sur  $\mathbf{X}^k$  :

- toute maille génère la même maille
- toute arête  $(pq)$  génère une maille  $(ppqq)$
- tout sommet interne  $p$  de valence  $r$  génère une maille à  $r$  sommets égaux à  $p$  :  $(\underbrace{pp \dots pp}_{r \text{ fois}})$
- tout sommet de bord<sup>3</sup>  $p$  de valence  $r$  génère une maille à  $r + 1$  sommets égaux à  $p$
- tout sommet de coin<sup>4</sup>  $p$  génère une maille à 4 sommets égaux à  $p$  :  $(pppp)$

2. l'opérateur de **moyennage** (éventuellement répété une fois) qui génère  $\mathbf{X}^{k+1}$  :

- les sommets de  $\mathbf{X}^{k+1}$  sont égaux aux barycentres des sommets de chaque maille
- les arêtes de  $\mathbf{X}^{k+1}$  relient 2 nouveaux sommets correspondant à 2 anciennes faces adjacentes

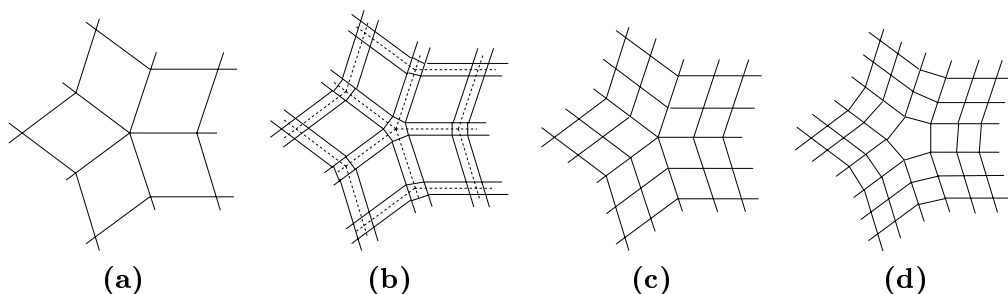


FIG. 1.1 – Un exemple de raffinement de type moyenne sur une grille de topologie quelconque. (a) Réseau initial. — (b) Réseau après dédoublement des noeuds. — (c) Réseau après dédoublement et une phase de moyennage. — (d) Réseau après dédoublement et deux phases de moyennage. —

1. La topologie du maillage correspond aux connections entre les noeuds, arêtes et faces.

2. Par analogie avec les espaces d'approximation en analyse multirésolution.

3. Un sommet de bord est un sommet qui n'est pas interne et dont la valence est différente de 2.

4. Un sommet de coin est un sommet qui n'est pas interne et dont la valence est 2.

Si nous considérons la relation de dualité topologique, l'opérateur de moyennage répété correspond à considérer la grille duale. Les grilles (b) et (d) sont donc topologiquement équivalentes.

**Remarque 1.1** *Cette définition permet de construire des raffinements de grilles pour une grille initiale présentant une topologie quelconque. Ce qui nous intéresse ici est uniquement la topologie de ces grilles. Les raffinements de grilles généralement considérés dans les schémas de subdivision suivent ce type d'évolution topologiquement parlant.*

**Proposition 1.1** *Avec le raffinement de type moyenne, les grilles deviennent de plus en plus régulières<sup>5</sup>, la densité des noeuds double à chaque étape, mais le nombre de noeuds irréguliers et le nombre de mailles irrégulières restent constants.*

Ainsi les mailles générées par un tel raffinement sont toutes du même type, les noeuds de même valence, d'où la quantification de la régularité des grilles. Les noeuds irréguliers correspondent aux noeuds de valence<sup>6</sup> différente autour desquels la topologie est irrégulière par rapport à l'ensemble de la grille.

**Définition 1.5** *Soit  $\mathbf{P}^0$  un ensemble initial de points de  $\mathbb{R}^d$  sur une grille  $\mathbf{X}^0$ . Un schéma de subdivision  $\mathcal{A}$  est une suite d'opérateurs linéaires  $\{\mathcal{A}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  qui calculent récursivement une suite  $\{\mathbf{P}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  d'ensembles de points sur un raffinement de grilles  $\{\mathbf{X}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .*

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathcal{A}^k \mathbf{P}^k$$

**Définition 1.6** *L'ensemble de points  $\mathbf{P}$  muni de la topologie induite par la grille  $\mathbf{X}$  à laquelle il est associé est appelé **réseau de contrôle** et nous le noterons par abus également  $\mathbf{P}$ . Les points du réseau sont appelés **points de contrôle** ou **sommets du réseau**.*

En supposant que l'ensemble des points de contrôle est *naturellement ordonné*, nous pouvons considérer des matrices  $\mathbf{A}^k$  et la subdivision s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{A}^k \mathbf{P}^k$$

Une étape de subdivision qui passe de  $\mathbf{P}^k$  à  $\mathbf{P}^{k+1}$  par l'action de l'opérateur  $\mathcal{A}^k$  est constituée de deux phases :

- une phase d'insertion qui permet d'introduire de nouveaux noeuds c'est-à-dire de raffiner la grille  $\mathbf{X}^k$  en la grille  $\mathbf{X}^{k+1}$ .
- une phase d'ajustement qui calcule les points de  $\mathbf{P}^{k+1}$  en fonction des points de  $\mathbf{P}^k$ .

**Définition 1.7** *Le **masque** en un sommet  $P$  de  $\mathbf{P}^{k+1}$  est l'ensemble des coefficients qui permet de calculer  $P$  à partir des points de  $\mathbf{P}^k$ , c'est-à-dire l'ensemble des coefficients nécessaires à la phase d'ajustement. Le **masque** d'un schéma de subdivision est l'ensemble des masques appliqués en tout point. Il s'agit matriciellement parlant de  $\mathbf{A}^k$ .*

Dans le cas des surfaces produit tensoriel, les réseaux de points de contrôle peuvent être ordonnés dans des matrices et nous leur associons alors des **masques matriciels** (cf [Cohen et al., 1996a]).

**Définition 1.8** *Un schéma de subdivision est **affine** si en tout point, la somme des coefficients du masque est égale à 1, autrement dit, si l'opération d'ajustement est barycentrique.*

---

5. La régularité ici porte sur la topologie de la grille.

6. La valence d'un noeud d'un maillage est le nombre de voisins de ce noeud dans le maillage.

D'un point de vue matriciel, la somme des coefficients de chaque ligne de chaque matrice  $\mathbf{A}^k$  est égale à 1.

Ceci caractérise la stabilité du schéma de subdivision, nous y reviendrons dans les critères de convergence d'un schéma de subdivision (cf paragraphe 1.2.2, page 47).

**Définition 1.9** Un schéma de subdivision est **local** ou le masque associé est à **support compact** s'il existe un entier  $L$  tel que le masque appliqué en tout point  $P$  possède au plus  $L$  coefficients non nuls dans un voisinage restreint et borné pour l'ensemble des points, d'un point de vue matriciel, sur chaque ligne des matrices  $\mathbf{A}^k$  il y a au plus  $L$  coefficients non nuls sur chaque ligne des matrices  $\mathbf{A}^k$ .

**Définition 1.10** Un schéma de subdivision est **stationnaire** si l'opérateur de subdivision utilisé à chaque étape est le même, c'est-à-dire si les opérateurs  $\mathcal{A}^k$  sont indépendants de  $k$ .

**Définition 1.11** Un schéma est **uniforme** si le même masque est appliqué en tout point de la grille.

**Définition 1.12** Un schéma de subdivision est **interpolant** si les points calculés à toute étape de subdivision  $k_0$  sont des points fixes, c'est-à-dire qu'ils appartiennent à tous les réseaux  $\mathbf{P}^k$  suivants, c'est-à-dire tels que  $k \geq k_0$ . Ceci s'écrit :

$$\forall k_0, \quad \forall k > k_0, \quad \mathbf{P}^{k_0} \subset \mathbf{P}^k \quad \text{ou de manière équivalente} \quad \forall k \quad \mathbf{P}^k \subset \mathbf{P}^{k+1}$$

### Exemple du cas stationnaire uniforme

Pour illustrer cet ensemble de définitions, nous proposons de regarder le cas des schémas de subdivision stationnaires uniformes à une variable ( $r = 1$ ) ou produit tensoriel ( $r = 2$ ). Les grilles  $\mathbf{X}^k$  correspondent à une répartition régulière des noeuds sur  $\mathbb{R}^r$  et chaque subdivision correspond à une répartition régulière deux fois plus dense (cf figure 1.2).

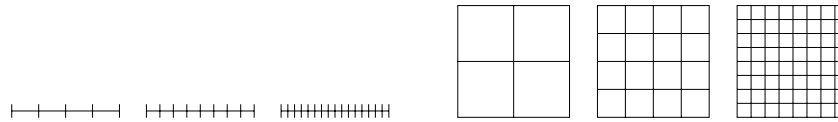


FIG. 1.2 – Raffinements uniformes d'un intervalle et d'une grille de type produit tensoriel.

Un schéma de subdivision uniforme fait donc correspondre aux noeuds pairs, c'est-à-dire existant à l'étape  $k$ , une certaine combinaison linéaire des points de l'étape  $k$  et aux noeuds impairs (noeuds insérés lors de l'étape de subdivision de  $k$  à  $k + 1$ ), une autre combinaison linéaire des points de l'étape  $k$ . Ceci s'écrit :

$$P_i^{k+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^r} \alpha_{2j-i} P_j^k$$

qui correspond à deux masques pour  $r = 1$

$$P_{2i}^{k+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{2j} P_{i+j}^k \quad P_{2i+1}^{k+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{2j+1} P_{i+j}^k$$

et à quatre masques pour  $r = 2$ , qui déterminent le calcul de  $P_{2i,2j}$ ,  $P_{2i+1,2j}$ ,  $P_{2i,2j+1}$  et  $P_{2i+1,2j+1}$ .

**Remarque 1.2** Dans le cas d'un schéma de subdivision interpolant,  $P_{2\mathbf{i}}^{k+1} = P_{\mathbf{i}}^k$ ,  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^r$ .

Le masque correspondant à l'opérateur  $\mathcal{A}$  est noté  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}^r}$  et la matrice  $\mathbf{A}$  dans le cas univariable s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dots & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \dots & \dots \\ \dots & \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_4 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \dots \\ \dots & \dots & \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_4 & \dots \end{pmatrix}$$

### 1.1.2 Etat de l'art

De manière générale, les schémas de subdivision peuvent être quelconques, c'est-à-dire non uniformes, non stationnaires, voire définis sur des grilles de raffinement non emboîtées. Il est cependant difficile dans les cas généraux d'établir des critères de convergence. L'essentiel des travaux dans ce domaine traite de schémas stationnaires. Bien que les schémas de subdivision stationnaires uniformes aient déjà été beaucoup étudiés ([Dyn, 1992, Cavaretta *et al.*, 1991]), ils restent à l'ordre du jour dans le cadre de travaux sur des grilles à mailles hexagonales ([Dyn, 2001]).

L'irrégularité de la répartition des noeuds constitue un premier type de cas non uniforme et fait l'objet de travaux récents proposés par [Daubechies *et al.*, 1997a, Daubechies *et al.*, 1998] dans le cas univariable et [Guskov, 1998, Rabut, 1999] dans le cas multivariable. Des résultats sont énoncés avec des conditions sur l'irrégularité dans la répartition des noeuds, entre autres celle de considérer des noeuds simples. L'irrégularité de la topologie de la grille constitue un deuxième type de cas non uniforme. Le raffinement des grilles se formule en général comme un raffinement de type moyenne au sens de la classe d'équivalence associée à la topologie du maillage. Le choix du masque détermine ensuite la particularité du schéma de subdivision, il est généralement identique pour les sommets de même valence. Les images des noeuds qui confèrent à la topologie son irrégularité sont appelées **sommets extraordinaires**. De nombreux travaux proposent des masques en ces noeuds et étudient la régularité qui en découle à la limite (cf [Cavaretta *et al.*, 1991, Dyn, 1992, Zorin and Schröder, 1999, Warren, 1995]).

Le cas des raffinements de grilles à topologie quelconque et non emboîtées est un cadre d'étude très neuf.

Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction, l'essentiel des travaux considèrent un schéma de subdivision spécifique et en étudie les propriétés. Dans [Zorin and Schröder, 1999, Dyn and Levin, 1994], une classification des différents types de schémas de subdivision classiques pour les surfaces est donnée.

Face à ces résultats et au cadre général que nous souhaitons proposer pour notre méthode, nous présenterons une étude globale, illustrée par le cas univariable et le produit tensoriel qui en découle et proposerons des extensions à tout type de surface limite d'un schéma de subdivision, sachant qu'elles méritent toutes une attention particulière et constituent à part entière des sujets de recherche conséquents.

## 1.2 Convergence d'un schéma de subdivision

Nous associons une paramétrisation aux réseaux, définissons la convergence d'un schéma de subdivision et construisons les fonctions d'échelle.

### 1.2.1 Paramétrisation et définition de la convergence

Nous développons ce qui a trait à la paramétrisation des réseaux pour définir la convergence. Cet aspect a été étudié en détail par [Lounsbery *et al.*, 1997] pour le cas courbe et produit tensoriel, par [Floater, 1997, Lee *et al.*, 1998] pour les triangulations à topologie quelconque, cas auquel peuvent se ramener les grilles à topologie quelconque. Sans perte de généralité, nous considérerons désormais que le problème est ramené à l'étude d'une composante, c'est-à-dire que les points sont dans  $\mathbb{R}$ .

Le domaine recouvert par les grilles  $\mathbf{X}^k$  à la limite s'apparente à un domaine de paramétrisation (ou espace des paramètres). Notons  $x_i^k$  le noeud correspondant à  $P_i^k$  sur la grille  $\mathbf{X}^k$  — les noeuds seront supposés simples — et considérons les fonctions  $P^k$  qui interpolent  $\mathbf{P}^k$  aux points  $x_i^k$  des grilles  $\mathbf{X}^k$ . L'interpolation s'écrit

$$P^k(\cdot) = \sum_i P_i^k \psi_i^k(\cdot).$$

Les fonctions  $\psi_i^k$  dépendent des grilles que nous considérons et nous proposons les fonctions continues suivantes :

**pour des grilles sur  $\mathbb{R}$  :** les fonctions  $\tilde{N}_i^k$  définies par

$$\tilde{N}_i^k(t) = \begin{cases} (t - x_{i-1}^k)/(x_i^k - x_{i-1}^k) & \text{pour } t \in [x_{i-1}^k, x_i^k[ \\ (x_{i+1}^k - t)/(x_{i+1}^k - x_i^k) & \text{pour } t \in [x_i^k, x_{i+1}^k[ \\ 0 & \text{pour } t \notin [x_{i-1}^k, x_{i+1}^k[ \end{cases}$$

La courbe  $\mathcal{P}^k$  correspondante est le polygone qui interpole les points linéairement par morceaux.

**pour des grilles de type produit tensoriel :** le produit tensoriel de ces mêmes fonctions.

La surface  $\mathcal{P}^k$  correspondante interpole les mailles du réseau par des surfaces bi-réglées et est paramétrée par :

$$P^k(u, v) = \sum_{ij} P_{ij}^k \tilde{N}_i^k(u) \tilde{N}_j^k(v)$$

**pour des triangulations quelconques :** les fonctions linéaires par morceaux qui valent 1 en  $x_i^k$  et 0 aux autres noeuds et qui sont affines sur chaque triangle. La surface  $\mathcal{P}^k$  correspondante est la surface polyédrique qui interpole les points.

**Définition 1.13** *Un schéma de subdivision est uniformément convergent si pour tout ensemble initial de points  $\mathbf{P}^0$ , il existe une fonction continue  $P^\infty$  telle que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_i |P_i^k - P^\infty(x_i^k)| = 0,$$

Par la suite,  $\mathcal{S}$  ou  $\mathcal{P}^\infty$  paramétrée par  $\mathbf{P}^\infty$  désignera implicitement la limite de la suite de réseaux de points  $\{\mathbf{P}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  générée par le schéma de subdivision  $\mathcal{A}$ .

**Proposition 1.2** *Si un schéma de subdivision converge uniformément sur une grille alors il y a aussi convergence sur une autre grille de même topologie, donc indépendance de la convergence vis-à-vis de la paramétrisation.*

Démonstration :

La convergence uniforme des réseaux  $\mathbf{P}^k$  sur les grilles  $\mathbf{X}^k$  vers la fonction limite  $\mathbf{P}^\infty$  s'écrit :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_i |\mathbf{P}^k(x_i^k) - \mathbf{P}^\infty(x_i^k)| = 0,$$

Le changement de grilles correspond à une reparamétrisation des grilles, donc à une application bijective  $\psi^k$  telle que  $\psi^k(x_i^k) = \tilde{x}_i^k$ . Les nouvelles grilles sont notées  $\tilde{\mathbf{X}}^k$ . Il existe donc une application inverse  $\tilde{\psi}^k$  telle que  $\tilde{\psi}^k(\tilde{x}_i^k) = x_i^k$ . Nous avons donc la convergence sur les grilles  $\tilde{\mathbf{X}}^k$  :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_i |\mathbf{P}^k(\tilde{\psi}^k(\tilde{x}_i^k)) - \mathbf{P}^\infty(\tilde{\psi}^k(\tilde{x}_i^k))| = 0,$$

avec  $\mathbf{P}^k \circ \tilde{\psi}^k$  qui correspond à la nouvelle paramétrisation des réseaux sur les grilles  $\tilde{\mathbf{X}}^k$  et  $\mathbf{P}^\infty \circ \tilde{\psi}^k$  à la nouvelle paramétrisation de la surface limite  $\mathcal{P}^\infty$ .

□

Nous avons tenu à établir cette propriété pour affranchir la définition de la convergence de la paramétrisation à laquelle elle semble liée : les réseaux de points sont en effet générés indépendamment des positions des noeuds des grilles dans l'espace des paramètres. Si l'ensemble de points n'est pas associé à des grilles de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^2$  explicitement mais suit un schéma de subdivision de type moyenne au sens de la topologie de ses réseaux, il est possible de définir un espace des paramètres, et d'y construire une suite de grilles : il correspond éventuellement au domaine construit sur le réseau de points le plus grossier  $\mathbf{P}^0$  (cf [Zorin and Schröder, 1999]). D'un point de vue fonctionnel, la disposition des noeuds des grilles dans l'espace des paramètres joue néanmoins un rôle important puisque la régularité de la paramétrisation de la fonction limite en dépend. Pour en *neutraliser* l'influence, nous proposons de considérer les continuités géométriques  $G^r$ . Ce point est un sujet sur lequel nous n'avons pas trouvé d'autre référence que [Guskov, 1998] : il s'attarde à définir de manière plus précise les différents types de grilles et les positions de leurs noeuds dans l'espace des paramètres afin de pouvoir paramétrer correctement des ensembles de points. Ceci constitue donc un domaine de recherche à explorer et qui fera l'objet de travaux ultérieurs.

Pour clore cette définition de convergence, nous notons enfin qu'il existe des travaux relatifs à d'autres types de convergence comme la convergence faible, les convergences au sens des normes  $L^p$ , la convergence intégrale, ... (cf [Cavaretta *et al.*, 1991, Dyn and Levin, 1994]).

### 1.2.2 Critères de convergence

Nous nous intéressons maintenant aux critères de convergence d'un schéma de subdivision. Dans les travaux, il existe de nombreuses approches pour les déterminer : par exemple par l'étude spectrale en termes de conditions sur les valeurs propres, par le biais des propriétés stochastiques des matrices, par l'intermédiaire des polynômes de Laurent, ... Nous donnons



ici deux conditions communes à l'ensemble des articles, pour plus de détails, s'y référer (cf [Dyn, 1992, Cavaretta *et al.*, 1991, Zorin and Schröder, 1999, Bonneau, 1997]).

Nous posons d'abord des conditions sur le masque du schéma de subdivision, en supposant qu'il ne soit pas identiquement nul, c'est-à-dire qu'il existe un réseau de contrôle initial  $\mathbf{P}^0$  qui génère une suite convergeant vers une fonction non identiquement nulle.

- Le schéma de subdivision  $\mathcal{A}$  est affine : ceci caractérise sa stabilité. En effet, à partir du jeu de données  $\mathbf{P}^0$  qui vaut 1 en tout point, la limite est la fonction identiquement égale à 1.
- Le masque est à support compact : ceci attribue au schéma de subdivision un caractère local. Ainsi la perturbation d'un point de contrôle ne modifie que localement la fonction limite. Cette condition est également utile pour déterminer des fonctions de base.

Le lemme qui suit est issu de [Dyn, 1992], valable dans le cas des courbes et surfaces produit tensoriel limites de schémas de subdivision stationnaires uniformes.

**Lemme 1.1** *Soit  $\psi \in C(\mathbb{R}^r)$ ,  $r = 1$  ou  $2$ , une fonction à support compact satisfaisant*

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^r} \psi(x - i) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^r$$

*Soit  $\mathcal{A}$  un schéma de subdivision affine uniformément convergent, alors*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}^r} P_i^k \psi(2^k \cdot - i) = P^\infty \quad (1.1)$$

*De plus, si  $\psi$  satisfait la condition de stabilité*

$$\exists C_1 > 0 \quad \text{tel que} \quad C_1 \|\mathbf{P}\|_\infty \leq \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}^r} P_i \psi(\cdot - i) \right\|_\infty, \quad \text{pour tout réseau } \mathbf{P} \text{ borné sur } \mathbb{Z}^r$$

*alors la convergence uniforme de la suite*

$$\left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}^r} P_i^k \psi(2^k \cdot - i); \quad k \in \mathbb{Z}^r \right\},$$

*pour toute donnée initiale  $\mathbf{P}^0$  implique la convergence uniforme du schéma de subdivision.*

Ceci exprime donc l'idée que si nous considérons la suite  $\{\mathbf{P}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  des polygones ou surfaces interpolants, elle converge de la même manière que les réseaux de points correspondant, sachant que la suite des grilles  $\{\mathbf{X}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est dense sur le domaine considéré. Le choix des fonctions interpolantes est arbitraire modulo le fait qu'elles soient à support compact et de somme 1 sur le domaine. Notons que le choix de fonctions interpolantes continues et la convergence uniforme impliquent la continuité de la limite. Nous n'avons pas trouvé de généralisation de ce résultat et là encore, nous faisons face à des travaux qu'il nous semblerait intéressant de prolonger.

### 1.2.3 Fonctions de base et équation d'échelle

Nous abordons le lien entre la convergence du schéma de subdivision  $\mathcal{A}$  et l'existence d'une base de fonctions pour l'espace vectoriel des fonctions limites de  $\mathcal{A}$ . Dans le cas des courbes splines par exemple, il s'agit de la base des fonctions B-splines.

### Construction des fonctions

- Soit  $\mathbf{E}_{(i)}^{(0)}$  le réseau de points de contrôle initial défini sur la grille  $\mathbf{X}^0$  tel que

$$E_{(i)j}^{(0)} = 0 \quad \forall j \neq i \quad \text{et} \quad E_{(i)i}^{(0)} = 1$$

Les réseaux  $\{\mathbf{E}_{(i)}^{(0)}\}_i$  forment une base *canonique* des réseaux de points sur la grille  $\mathbf{X}^0$ . L'indice  $^{(0)}$  en exposant signifie que les réseaux initiaux sont considérés sur la grille  $\mathbf{X}^0$ , l'indice  $_i$  signifie qu'il s'agit du réseau initial valant 1 au point  $P_i$ .

- Le schéma de subdivision  $\mathcal{A}$  est appliqué à partir des données initiales  $\mathbf{E}_{(i)}^{(0)}$  et génère les réseaux  $\mathbf{E}_{(i)}^{(0)k}$  :

$$\varphi_i^{(0)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{(i)}^{(0)k}$$

- Comme le schéma de subdivision est local, les fonctions  $\varphi_i^{(0)}$  sont à support compact.

### Base des fonctions limites

Tout jeu de données initial  $\mathbf{P}^0$  se décompose dans la base des  $\{\mathbf{E}_{(i)}^{(0)}\}_i$ . Comme les fonctions  $\{\varphi_i^{(0)}\}_i$  sont à support compact, en se plaçant en un point donné de l'espace des paramètres, celles qui ne s'annulent pas sont en nombre fini et nous en déduisons :

$$\sum_i P_i^0 \varphi_i^{(0)}(\cdot) = \mathbf{P}^\infty(\cdot)$$

De la même manière, si nous partons de la subdivision  $k_0$ , les fonctions limites sont les  $\varphi_i^{(k_0)}$ , limites du schéma de subdivision initialisé à l'étape  $k_0$  sur la grille  $\mathbf{X}^{k_0}$  par  $\mathbf{E}_{(i)}^{(k_0)}$ .

$$\varphi_i^{(k_0)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{(i)}^{(k_0)k} \quad \text{et} \quad \sum_i P_i^{k_0} \varphi_i^{(k_0)}(\cdot) = \mathbf{P}^\infty(\cdot)$$

Les familles  $\{\varphi_i^{(k_0)}\}_i$  sont des familles génératrices de l'espace vectoriel des fonctions limites du schéma de subdivision. Si les fonctions de base sont  $C^n$ , alors les fonctions limites sont également  $C^n$ .

### Equation d'échelle

Les fonctions de base associées au niveau de résolution  $k$  peuvent s'exprimer comme combinaison linéaire des fonctions de base associées au niveau de résolution  $k+1$  par l'intermédiaire de l'équation d'échelle, qui est directement liée à la matrice de subdivision  $\mathbf{A}^k$  :

$$\varphi_i^k(\cdot) = \sum_j \mathbf{A}_{j,i}^k \varphi_j^{k+1}(\cdot)$$

**Remarque 1.3** Dans le cas stationnaire uniforme à une variable, les fonctions de base sont les translatées d'une fonction  $\varphi$ , unique solution de

$$\varphi(\cdot) = \sum_j \mathbf{A}_j \varphi(2 \cdot - j)$$

Ici se situe le lien avec la théorie des ondelettes qui détermine les solutions de l'équation d'échelle et en étudie la régularité (cf [Jia *et al.*, 1999]). Les fonctions de base sont aussi appelées fonctions d'échelle.

### 1.3 Schémas des différences et formule de commutation

Si les fonctions de base ne sont pas précisément connues, l'étude de la régularité des fonctions limites se fait à l'aide du schéma des différences que nous définirons dans un premier temps. Il est relié aux dérivées par le biais de la formule de commutation. Introduite par [Lemarié-Rieusset, 1992] dans le cadre des ondelettes, elle retiendra notre attention notamment pour l'interprétation géométrique que nous en tirerons dans le chapitre 3, page 75.

#### 1.3.1 Généralités

Nous présentons maintenant le concept des différences divisées et donnons la formule de commutation. Nous allons utiliser ce qui en découle dans le chapitre 3, sachant que les conditions nécessaires à ces résultats se trouvent dans les articles que nous citerons. Pour les cas dans lesquels les résultats ne sont pas encore établis, nous sommes conscients du travail qu'il reste à faire dans ce sens et nous supposerons qu'ils le sont pour la suite de notre démarche.

Dans les cas univariable et produit tensoriel, les différences divisées sont clairement définies (cf paragraphe 1.3.2). Dans les autres cas à plusieurs variables, il existe de nombreux articles qui donnent une définition des différences divisées ([Neamtu, 1992, De Boor, 1995, Guskov, 1998, Rabut, 1999]), mais il n'existe pas de définition universelle englobant ce concept. Les différences divisées doivent néanmoins vérifier les propriétés suivantes :

1. quand la grille se raffine, la différence divisée d'ordre  $r$  converge vers la dérivée  $r$ -ième de la fonction limite,
2. les différences divisées sont calculées à partir d'une combinaison linéaire d'un nombre fini de points, pondérés par des poids qui dépendent de leur position,
3. il existe une manière récursive de calculer les différences divisées, autrement dit, il est possible de calculer les différences divisées d'ordre  $r + 1$  à partir des différences divisées d'ordre  $r$ .

Nous noterons  $\mathcal{D}^k$  l'opérateur des différences divisées d'ordre 1 qui transforme  $\mathbf{P}^k$  et  $\mathbf{D}^k$  son image soit  $\mathcal{D}^k \mathbf{P}^k = \mathbf{D}^k$ . La propriété 3. s'exprime aussi de la manière suivante :

**Proposition 1.3** *Si le schéma de subdivision  $\mathcal{A}$  converge, alors il existe un schéma  $\mathcal{A}_1$ , appelé schéma des différences (divisées), tel que*

$$\mathbf{D}^{k+1} = \mathcal{A}_1^k \mathbf{D}^k$$

A partir de l'existence du schéma des différences, nous établissons la formule de commutation. Nous avons

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathcal{A}^k \mathbf{P}^k \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^{k+1} \mathbf{P}^{k+1} = \mathcal{A}_1^k \mathcal{D}^k \mathbf{P}^k$$

donc

$$\mathcal{D}^{k+1} \mathcal{A}^k \mathbf{P}^k = \mathcal{A}_1^k \mathcal{D}^k \mathbf{P}^k$$

Ce qui nous donne la formule de commutation :

$$\mathcal{D}^{k+1}\mathcal{A}^k = \mathcal{A}_1^k \mathcal{D}^k$$

Ainsi effectuer une étape de subdivision et considérer les différences divisées équivaut à prendre le réseau des différences divisées et à lui appliquer une étape de subdivision.

**Théorème 1.1** *Si les fonctions de base du schéma de subdivision  $\mathcal{A}$  sont  $C^1$ , alors les fonctions limites générées par  $\mathcal{A}$  sont  $C^1$  et le schéma des différences associé converge uniformément.*

Nous ne développerons pas les ordres supérieurs qui vérifient le même type de propriétés, ce qui nous intéresse étant l'interprétation géométrique liée aux différences divisées d'ordre 1 que nous allons évoquer dans les différents cas de figure.

### 1.3.2 Cas univariable et produit tensoriel

#### Cas univariable

Soit  $\mathbf{P}$  un polygone de contrôle.

**Définition 1.14** *Le polygone des différences finies  $\Delta\mathbf{P}$  est défini par les points des contrôle :*

$$\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$$

*Le polygone des différences divisées  $\mathbf{D}$  est défini par :*

$$D_i = \mathcal{D}P_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta P_i}{x_{i+1} - x_i}$$

**Proposition 1.4** *Si un schéma de subdivision local est affine, alors il existe un schéma de subdivision pour les différences finies. Plus précisément, sous forme matricielle :*

$$(\mathbf{A}_\Delta^k)_{ij} = \sum_l (\mathbf{A}_{i+1,l}^k - \mathbf{A}_{i,l}^k)$$

Le schéma des différences finies donne un critère de convergence du schéma  $\mathcal{A}$  auquel il est associé.

**Proposition 1.5** *Le schéma de subdivision  $\mathcal{A}$  converge uniformément si et seulement si le schéma de subdivision  $\mathcal{A}_\Delta$  converge uniformément vers 0 pour tout  $\Delta\mathbf{P}^0$ .*

**Théorème 1.2** *Soit  $\mathcal{A}$  un schéma de subdivision uniformément convergent. Soit  $\{\mathbf{P}^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  une suite de réseaux engendrée par  $\mathcal{A}$ , initialisée en  $\mathbf{P}^0$ , de limite  $\mathbf{P}^\infty$ . Si le schéma des différences divisées associé  $\mathcal{A}_1$  est uniformément convergent, alors il converge pour tout  $\mathbf{D}^0 = \mathcal{D}\mathbf{P}^0$  vers la dérivée de  $\mathbf{P}^\infty$ .*

**Remarque 1.4** *Géométriquement, ceci signifie que les côtés des polygones tendent vers la tangente en tout point ; nous le développerons dans le chapitre 3, page 75.*

Le calcul de la matrice  $\mathbf{A}_1$  associée au schéma des différences est le suivant :

$$\mathbf{A}_{1ij}^k = \frac{x_{j+1}^k - x_j^k}{x_{i+1}^{k+1} - x_i^{k+1}} \sum_l (\mathbf{A}_{i+1,l}^k - \mathbf{A}_{i,l}^k)$$

sachant que la somme est finie car le schéma de subdivision  $\mathcal{A}$  est local.

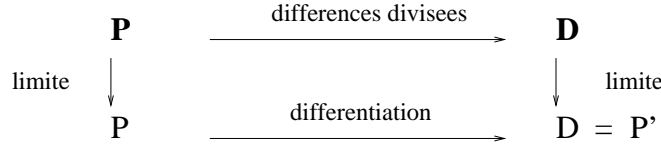


FIG. 1.3 – Ce schéma illustre la formule de commutation pour le cas univariable.

La formule de commutation est établie dans les cas réguliers et irréguliers, stationnaires et non stationnaires, ; les conditions et une étude détaillée figurent dans [Warren, 1995, Daubechies *et al.*, 1997a, Daubechies *et al.*, 1998].

### Cas produit tensoriel

Le cas produit tensoriel est une extension du cas courbe.

$$\mathcal{D}_i P = \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{x_{i+1,j} - x_{i,j}} \quad \mathcal{D}_j P = \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{x_{i,j+1} - x_{i,j}}$$

L'indépendance des paramètres  $u$  et  $v$  entraîne la convergence du schéma des différences vers la différentielle.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{D}_i^k \mathbf{P}^k = S_u \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{D}_j^k \mathbf{P}^k = S_v$$

**Remarque 1.5** *Géométriquement, ceci signifie que les mailles des réseaux tendent vers le plan tangent en tout point ; nous le développerons dans le chapitre 3, page 75.*

**Remarque 1.6** *La proposition 1.5 est généralisée au cas produit tensoriel dans [Dyn, 1992].*

La formule de commutation est établie dans le cas de grilles régulières dans les articles de [Cavaretta *et al.*, 1991, Dyn and Levin, 1990] ; ce dernier traite également le cas interpolant et les cas irréguliers sont traités dans [Daubechies *et al.*, 1999].

### 1.3.3 Cas de triangulations à topologie quelconque

Plusieurs définitions pour les différences divisées ont été proposées et chacun des articles cités pose ses conditions puis énonce la formule de commutation.

[Warren, 1995] établit la formule de commutation dans le cas de subdivision sur des triangulations à topologie quelconque. Il définit les différences divisées, relativement aux éléments spectraux de la matrice de subdivision, donne des conditions pour que le schéma des différences existe et la convergence uniforme des dérivées.

Dans [Guskov, 1998] et [Rabut, 1999], les différences divisées multivariées sont obtenues en définissant une surface lisse par interpolation des voisins et du sommet, et ce, pour des

grilles de topologie quelconque. La différence divisée d'ordre 1 correspond aux coefficients d'ordre 1 dans le développement de Taylor de la fonction interpolante, modulo un coefficient de normalisation. Géométriquement, elle définit donc le plan tangent de la représentation de la fonction interpolante. Dans le cas de mailles triangulaires, le calcul des différences divisées d'ordre 1 sur un triangle  $M_0M_1M_2$  proposée par [Guskov, 1998] est le suivant :

$$\mathcal{D}_u(M_0M_1M_2) = \frac{(M_1 - M_0)(v_2 - v_0) - (M_2 - M_0)(v_1 - v_0)}{(u_1 - u_0)(v_2 - v_0) - (u_2 - u_0)(v_1 - v_0)}$$

$$\mathcal{D}_v(M_0M_1M_2) = \frac{(M_2 - M_0)(u_1 - u_0) - (M_1 - M_0)(u_2 - u_0)}{(v_2 - v_0)(u_1 - u_0) - (v_1 - v_0)(u_2 - u_0)}$$

**Remarque 1.7** Ici, nous n'avons pas trouvé de généralisation explicite de la proposition 1.5. Elle signifie que les distances entre deux points voisins converge uniformément vers 0. Moyennant ce résultat, la validité de notre méthode pourra être également établit pour ce type de réseaux. C'est pourquoi nous ferons l'hypothèse qu'il est vérifié. Ceci est un point sur lequel il serait intéressant de s'attarder. Il n'en reste pas moins qu'il est encore possible, lorsque le choix du schéma de subdivision est fixé, de vérifier directement ce point sur le schéma spécifique considéré.

## 1.4 Notre cadre d'étude

Nous considérons dans notre méthode une surface de subdivision  $\mathcal{S}$  avec les propriétés suivantes :

1. elle est limite uniforme d'une suite de réseaux :  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|P^k - S\|_\infty = 0$  (ici  $S = P^\infty$ )
2. les fonctions  $S$  et  $P^k$  sont paramétrées sur un domaine commun.
3. le schéma de subdivision associé converge vers des surfaces  $C^2$ . Cette continuité permet d'avoir l'existence de géodésiques sur la surface limite (les géodésiques étant *différentiellement* définies sur des surfaces de continuité au moins  $C^2$ ).
4. le schéma des différences converge uniformément vers la différentielle.
5. le rapport des longueurs entre les côtés et les diagonales est minoré (cf équation 3.4, page 81). Ce point n'a pas été vérifié. Il semble néanmoins découler d'une certaine stabilité — à caractériser — du schéma de subdivision. Ceci fait partie de nos recherches ultérieures et nous supposerons donc que ce point est vérifié.

L'ensemble de ces conditions nous permet une validation de la méthode que nous présentons dans le chapitre suivant. Dans cette phase de validation (cf chapitre 3), nous aurons besoin de certains résultats, démontrés actuellement seulement dans le cas produit tensoriel, mais nous supposerons qu'ils sont vrais dans d'autres cas. Les étapes à venir qui mènent à la validation permettent en effet de considérer un cadre plus large que le produit tensoriel.

Nous tenons à souligner que d'une part ces points *théoriquement* manquants peuvent être étudiés une fois le schéma de subdivision choisi ; d'autre part, si seules les propriétés 1 et 2 sont vérifiées, nous ne pouvons établir de validation de la méthode à priori, mais nous avons néanmoins de nombreux outils de validation numérique pour les chemins générés par la méthode (cf chapitre 4).

## Cas produits tensoriels traités dans nos exemples

Nous présentons maintenant les surfaces de subdivision  $\mathcal{S}$  sur lesquelles nous avons construit nos exemples et qui vérifient les propriétés 1 à 4.

### Surfaces de Bézier polynomiales

Les surfaces de Bézier polynomiales suivent le schéma de subdivision non uniforme décrit par l'algorithme de De Casteljau (cf Annexe A.1) . La dérivée d'une courbe de Bézier s'exprime comme une courbe de Bézier de degré inférieur dont les points de contrôle sont les différences finies et le produit tensoriel nous donne :

$$S_u(u, v) = n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \Delta_i P_{ij} B_{n-1,i}(u) B_{m,j}(v) \quad S_v(u, v) = m \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_j P_{ij} B_{n,i}(u) B_{m-1,j}(v)$$

### Surfaces B-splines uniformes

Les surfaces B-splines uniformes sont régies par un schéma de subdivision stationnaire et uniforme donné par l'algorithme de De Boor-Cox, généralisation de l'algorithme de De Casteljau. Dans [Daubechies *et al.*, 1998, Bonneau, 1997, Warren, 1995], la formule est validée pour le cas des courbes splines uniformes. Elle est étendue au cas produit tensoriel et donne le résultat suivant :

$$S_u(u, v) = c_1 \sum_i \sum_j \Delta_i P_{ij} N_{n-1,i}(u) N_{m,j}(v) \quad S_v(u, v) = c_2 \sum_i \sum_j \Delta_j P_{ij} N_{n,i}(u) N_{m-1,j}(v)$$

## Chapitre 2

# Géodésique sur une surface de subdivision

### 2.1 Description de la méthode

La méthode présentée s'applique aux surfaces de subdivision qui vérifient les propriétés exposées dans le chapitre précédent. Nous considérons une surface de subdivision sous forme paramétrée. Dans le cas produit tensoriel des surfaces de Bézier, par exemple, la paramétrisation de la surface s'écrit avec les polynômes de Bernstein :

$$\begin{aligned} S : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto S(u, v) = \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^M P_{ij} B_{N,j}(u) B_{M,i}(v) \end{aligned}$$

Les points de contrôle de la surface de subdivision  $\mathcal{S}$  forment le réseau de contrôle  $\mathbf{P}$ . Les réseaux  $\mathbf{P}^k$  engendrés par des subdivisions répétées de  $\mathbf{P}$  convergent vers  $\mathcal{S}$ . Aux réseaux  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}^k$ , nous associons par triangulation des surfaces polyédriques  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^k$ . Celles-ci convergent également vers  $\mathcal{S}$ ; la recherche d'un chemin géodésique entre deux points  $A$  et  $B$  sur  $\mathcal{S}$  se ramène à travailler sur ces surfaces  $\mathcal{P}^k$ .

Les points source  $A$  et destination  $B$  sur  $\mathcal{S}$  correspondent à  $a$  et  $b$  de l'espace des paramètres  $\mathfrak{D}$ . Les images de  $a$  et  $b$  sur  $\mathcal{P}^k$ , notées  $A^k$  et  $B^k$ , convergent vers  $A$  et  $B$  par subdivision. La méthode consiste ainsi à calculer des chemins géodésiques entre  $A^k$  et  $B^k$  sur  $\mathcal{P}^k$ , avec  $k$  croissant, pour converger vers une géodésique entre  $A$  et  $B$  sur  $\mathcal{S}$ . Ceci nous conduit donc à partager notre recherche de chemin géodésique entre  $A$  et  $B$  sur  $\mathcal{S}$  comme suit :

(1)

le calcul d'un chemin géodésique entre deux points sur une surface polyédrique

(2)

la phase de subdivision au cours de laquelle la géodésique  $\mathcal{G}^k$  calculée sur la surface polyédrique courante  $\mathcal{P}^k$  est projetée sur la surface polyédrique subdivisée suivante  $\mathcal{P}^{k+1}$ .

Ce qui donne l'algorithme principal suivant :



## GÉODÉSIQUE

## Données

$\mathcal{S}$  : une surface de subdivision de  $\mathbb{R}^3$

$a$  et  $b$  : deux points de l'espace des paramètres (correspondant à  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{S}$ )

$K$  : le nombre de subdivisions

## Résultat

$\mathcal{G}^K$  : géodésique entre  $A^K$  et  $B^K$  sur  $\mathcal{P}^K$

$\mathcal{G}$  : approximation d'une géodésique entre  $A$  et  $B$  sur  $\mathcal{S}$

## Algorithme

$\mathcal{C} \leftarrow$  image de  $[ab]$  sur  $\mathcal{P}$

$k \leftarrow 1$

**tant\_que**  $k \leq K$  **faire**

trouver à partir de  $\mathcal{C}^k$  un chemin géodésique  $\mathcal{G}^k$  entre  $A^k$  et  $B^k$  sur  $\mathcal{P}^k$  (1)

projeter  $\mathcal{G}^k$  sur  $\mathcal{P}^{k+1} \rightarrow \mathcal{C}^{k+1}$  chemin entre  $A^{k+1}$  et  $B^{k+1}$  (2)

$k \leftarrow k + 1$

$\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}^{k+1}$

**fin\_tant\_que**

$\mathcal{G} \leftarrow$  projection de  $\mathcal{G}^K$  sur  $\mathcal{S}$

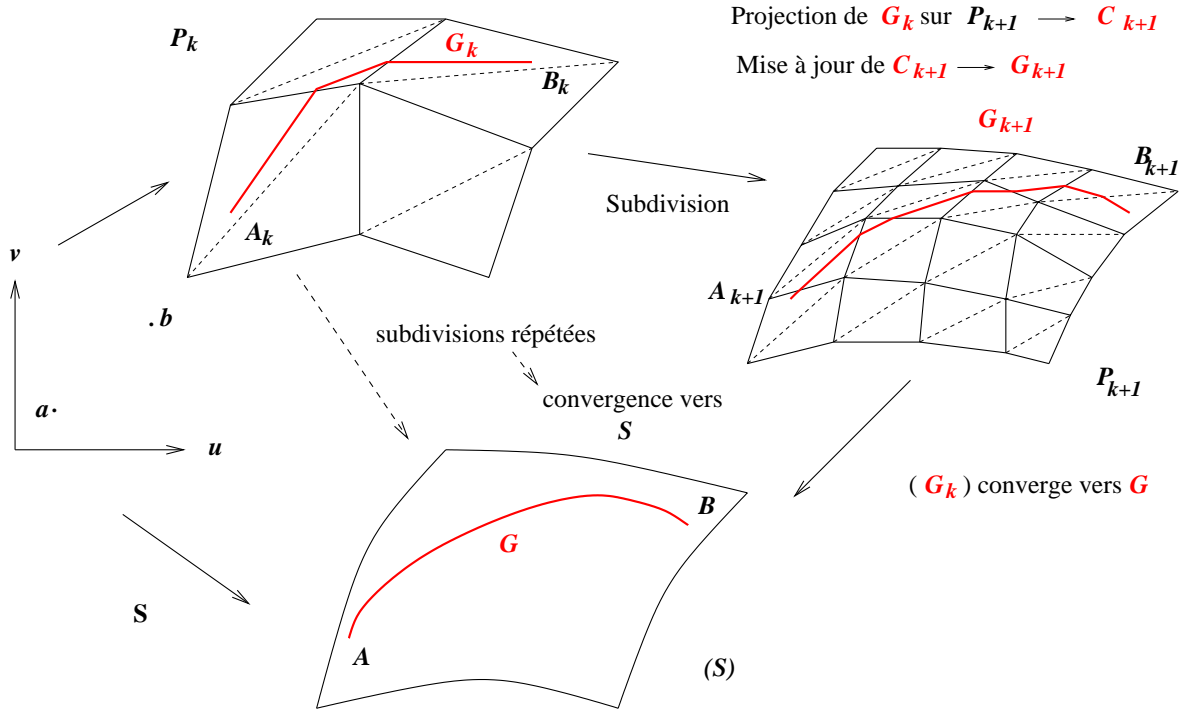


FIG. 2.1 – Calcul de géodésique sur une surface de subdivision.

## 2.2 Géodésique sur une surface polyédrique

La recherche d'un chemin géodésique sur une surface de subdivision est ramenée à étudier le problème sur une surface polyédrique. Il existe de nombreuses alternatives de résolution dans la littérature pour le calcul ou l'approximation de plus court chemin sur ce type de surface et nous citons quelques articles regroupés suivant les méthodes qu'ils proposent.

Au premier abord, la recherche de plus court chemin sur une surface polyédrique peut être vue comme un problème continu où le plus court chemin recherché appartient à un ensemble infini de courbes. Après avoir posé le problème en termes de séquences et de plus court chemin au sein d'une séquence, nous verrons que ce problème peut se ramener à un problème discret. Ce dernier constitue le cadre auquel se ramènent la plupart des articles.

Résoudre un problème de plus court chemin dans une scène polyédrique fait appel à des outils similaires car il peut s'identifier à notre problème en considérant une scène polyédrique contenant un seul objet, ou un objet et son complémentaire. [Papadimitriou, 1985] propose de subdiviser chaque obstacle ou arête des objets de la scène en segments et de traiter chaque segment comme noeud d'un graphe muni de poids pour ramener le problème à un problème de plus court chemin dans un graphe. L'algorithme de [Dijkstra, 1959] intervient alors pour résoudre la recherche de plus court chemin dans un graphe. Cette idée est reprise et améliorée par [Choi *et al.*, 1994] par un découpage différent des obstacles, puis par [Varadarajan and Agarwal, 1997].

[Chen and Han, 1996, Sharir and Schorr, 1986] proposent une méthode exhaustive de recherche de toutes les séquences possibles contenant une géodésique à partir de la source. Dans leurs articles, ils développent de nombreux outils et énoncent des propriétés qui vont nous intéresser par la suite. [Wolfson and Schwartz, 1989] effectuent également une recherche exhaustive, où la complexité de l'algorithme est ainsi évaluée à un coût exponentiel.

Dans les travaux effectués plus récemment concernant l'approximation de plus courts chemins sur une surface polyédrique, Har Peled entre autres a écrit de nombreux articles ([Agarwal *et al.*, 1997, Har Peled, 1997b, Har Peled, 1997a], ... ) améliorant l'idée de base suivante: construire une boîte englobante simple (qui est optimisée au cours des différents articles) de l'objet polyédrique sur laquelle le calcul de plus court chemin est relativement peu coûteux. Projeter ensuite ce chemin sur la surface polyédrique. Cette approche se retrouve également dans [Hershberger and Suri, 1994].

Parmi ces solutions, aucune ne nous convient cependant, du fait qu'elles ne calculent qu'une approximation ou qu'elles proposent des algorithmes trop coûteux. Nous proposons donc notre propre méthode qui permet le calcul d'un chemin géodésique entre deux points sur une surface polyédrique.

Nous introduisons dans un premier temps des définitions puis nous détaillons l'outil de mise à plat qui nous permet de faciliter les calculs en nous plaçant dans une séquence plane. Nous caractérisons ensuite un chemin géodésique et nous développons enfin notre méthode itérative: elle se base sur une mise à jour du chemin courant au niveau des sommets autour desquels il n'est pas localement optimal. Ceci nous permet de générer un chemin géodésique sur une surface polyédrique.

### 2.2.1 Définitions

**Définition 2.1** Une surface polyédrique  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^3$  est définie par un ensemble connexe de faces planaires polygonales  $F_i$  (polygones fermés), avec leurs arêtes  $E_i$  (segments fermés) et leurs sommets  $P_i$ , tels que chaque arête est incidente à deux faces au plus et deux faces s'intersectent soit en une arête commune, soit en un sommet commun, soit pas du tout.

Nous supposons que  $\mathcal{P}$  est sans auto-intersection. Sans perte de généralité, nous allons considérer que toutes les faces sont triangulaires, éventuellement après triangulation. Nous supposons également que  $\mathcal{P}$  est orientée et que ses faces respectent cette orientation : pour toute paire  $(F, F')$  de faces adjacentes, les orientations de  $F$  et  $F'$  sont cohérentes si elles induisent sur l'arête commune des orientations opposées. Considérons  $F$  une face orientée de  $\mathcal{P}$  de sommets  $P_0, P_1$  et  $P_2$  et notons  $u_i$  et  $v_i$  les deux vecteurs supports normalisés des arêtes incidentes au sommet  $P_i$  de  $F$  :

$$\vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{P_i P_{i+1}}}{\|\overrightarrow{P_i P_{i+1}}\|} \quad \text{et} \quad \vec{v}_i = \frac{\overrightarrow{P_i P_{i+2}}}{\|\overrightarrow{P_i P_{i+2}}\|}, \quad i = 0, 1, 2 \pmod 3$$

Avec ces notations (dont nous aurons besoin dans la suite de ce chapitre), l'angle  $\langle \vec{u}_i, \vec{v}_i \rangle$  est positif, c'est-à-dire de même orientation que la face  $F$ .

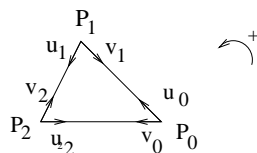


FIG. 2.2 – Orientation d'une face

**Définition 2.2** Soit  $P$  un sommet de  $\mathcal{P}$ . La somme des angles autour de  $P$  sera notée  $\mathfrak{S}(P)$  et définie comme suit : sur chacune des faces  $F_i$  de  $\mathcal{P}$ , concourantes en  $P$ , nous considérons la valeur de l'angle  $\langle \vec{u}_i, \vec{v}_i \rangle$  en  $P$  (cf figure 2.4 (a)) :

$$\mathfrak{S}(P) = \sum_i \langle \vec{u}_i, \vec{v}_i \rangle$$

### 2.2.2 Mise à plat

Un concept géométrique clé dans l'étude de ce problème est celui de mise à plat d'une séquence tri-dimensionnelle. Pour l'introduire, nous rappelons d'abord quelques définitions.

**Définition 2.3** Une séquence de faces adjacentes est une liste d'une ou plusieurs faces  $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \dots, F_{r+1})$  telle que la face  $F_i$  est adjacente à la face  $F_{i+1}$ . Par extension, nous dirons que deux arêtes sont adjacentes si elles sont incidentes à une face commune. De façon similaire, il est possible de définir une séquence d'arêtes adjacentes  $\mathcal{E}$ . Il est ainsi équivalent de considérer  $\mathcal{F}$  ou  $\mathcal{E} = (E_1, E_2, \dots, E_r)$ , avec  $E_i = F_i \cap F_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

**Définition 2.4** Si toute face apparaît au plus une fois dans  $\mathcal{F}$ , la séquence est dite simple.

Nous considérons désormais  $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \dots, F_{r+1})$  une séquence de faces adjacentes et  $\mathcal{E}$  la séquence d'arêtes correspondante. La mise à plat de  $\mathcal{F}$  (autour de  $\mathcal{E}$ ) consiste à effectuer une transformation de  $\mathcal{F}$  en séquence plane  $\mathfrak{F}$  de la manière suivante: considérons d'abord  $F_1$  et  $F_2$  les faces adjacentes d'arête commune  $E_1$ . La mise à plat de  $F_1$  autour de  $E_1$  est la face  $\mathfrak{f}_1^1$  qui vérifie :

- $\mathfrak{f}_1^1$  est image de  $F_1$  par rotation autour de (la droite portant)  $E_1$
- $\mathfrak{f}_1^1$  et  $F_2$  sont co-planaires
- $\mathfrak{f}_1^1$  et  $F_2$  se situent de part et d'autre de  $E_1$

Nous considérons maintenant  $\mathfrak{f}_1^1 \cup F_2$  - assimilée à une face plane - et  $F_3$ , faces adjacentes d'arête commune  $E_2$ . La mise à plat de  $\mathfrak{f}_1^1 \cup F_2$  autour de  $E_2$  est composée de deux faces :  $\mathfrak{f}_1^2$ , image de  $F_1$  par la composée de deux rotations axiales suivant  $E_1$  puis suivant  $E_2$ , et  $\mathfrak{f}_2^2$ , image de  $F_2$  par une rotation axiale suivant  $E_2$ . Le processus est réitéré jusqu'à la mise à plat de  $\mathfrak{f}_1^{r-1} \cup \mathfrak{f}_2^{r-1} \cup \dots \cup \mathfrak{f}_{r-1}^{r-1} \cup F_r$  autour de  $E_r$ . A la fin du processus, la séquence  $\mathcal{F}$  est transformée en  $\mathfrak{F} = \mathfrak{f}_1^r \cup \mathfrak{f}_2^r \cup \dots \cup \mathfrak{f}_{r-1}^r \cup \mathfrak{f}_r^r \cup F_{r+1}$ . Comme cette transformation de mise à plat conserve les propriétés d'adjacence entre les faces, l'image de  $\mathcal{F}$  est une séquence de faces adjacentes. Nous l'appellerons **séquence mise à plat** ou **espace de mise à plat** et la noterons  $\mathfrak{F} = (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_{r-1}, \mathfrak{f}_r, \mathfrak{f}_{r+1})$  en identifiant  $\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_i, \dots, \mathfrak{f}_{r+1}$  aux images des faces  $F_1, \dots, F_i, \dots, F_{r+1}$ . Nous avons de plus que  $\mathfrak{f}_i$  est superposable à  $F_i$ . D'un point de vue *pratique*, ce processus de mise à plat peut être assimilé à un dépliage local itératif. Ainsi, nous considérerons  $\mathfrak{F}$  comme un objet géométrique, c'est-à-dire indépendamment de sa position dans l'espace, relativement à la classe d'équivalence des séquences de faces adjacentes planes modulo les déplacements.

### MISE\_À\_PLAT

Algorithme

```

 $\mathfrak{F} \leftarrow \{F_1\}$ 
pour  $i$  allant de 1 à  $r$  faire
     $\mathfrak{F}' \leftarrow$  rotation de  $\mathfrak{F}$  autour de  $E_i$  telle que  $\mathfrak{F}'$  et  $F_{i+1}$ 
    soient co-planaires et de part et d'autre de  $E_i$ 
     $\mathfrak{F} \leftarrow \mathfrak{F}' \cup \{F_{i+1}\}$ 
fin-pour

```

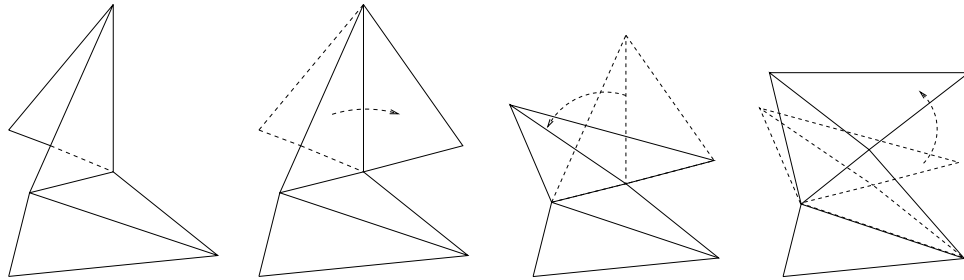


FIG. 2.3 – *procédure de mise à plat*

Ces propriétés de mise à plat permettent une correspondance rapide entre la séquence tri-dimensionnelle  $\mathcal{F}$  et sa mise à plat bi-dimensionnelle  $\mathfrak{F}$ .

**Proposition 2.1** *Soit  $F$  une face de  $\mathcal{F}$  de sommets  $P_0, P_1, P_2$ . Soient  $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1$  et  $\mathfrak{p}_2$  leurs images dans la mise à plat autour de  $\mathcal{E}$ . Soit  $P$  un point de  $F$ ,  $P = \sum \lambda_i P_i$ ,  $\sum \lambda_i = 1$ . La mise à plat de  $P$  autour de  $\mathcal{E}$  est le point  $\mathfrak{p} = \sum \lambda_i \mathfrak{p}_i$ .*

Nous noterons et considérerons dorénavant  $\mathfrak{F}, \mathfrak{C}, \mathfrak{p}, \dots$  les mises à plat de  $\mathcal{F}, \mathcal{C}, p, \dots$  autour de  $\mathcal{E}$ .

Sur les surfaces polyédriques triangulées que nous considérons, les faces sont planes et toute séquence qui en est issue peut de ce fait être mise à plat.

**Remarque 2.1** *Nous pouvons illustrer le calcul de  $\mathfrak{S}(P)$ , somme des angles autour de  $P$ , également par l'intermédiaire de la mise à plat. Nous considérons l'ensemble  $\mathcal{F}_P$ , de cardinal  $r$ , des faces contenant  $P$ . Soit  $F_1$  une face de  $\mathcal{F}_P$ . Nous construisons la séquence simple  $\mathcal{F}$  en partant de  $F_1$  et en parcourant  $\mathcal{F}_P$ , sans perte de généralité positivement, jusqu'à la  $r$ -ième face. Soit  $\mathfrak{F}$  la mise à plat de cette séquence. Considérons  $\mathfrak{u}_1$  l'arête de  $\mathfrak{f}_1$  non incidente à  $\mathfrak{f}_2$  et  $\mathfrak{v}_r$  l'arête de  $\mathfrak{f}_r$  non incidente à  $\mathfrak{f}_{r-1}$ . Ces deux arêtes correspondent à la même arête incidente à  $P$  sur  $\mathcal{P}$ .  $\mathfrak{S}(P)$  correspond à l'angle entre  $\mathfrak{u}_1$  de  $\mathfrak{f}_1$  et  $\mathfrak{v}_r$  de  $\mathfrak{f}_r$  en parcourant la séquence  $\mathfrak{F}$ . Celle-ci peut se recouvrir (cf fig. 2.4) et dans ce cas  $\mathfrak{S}(P) > 2\pi$ .*

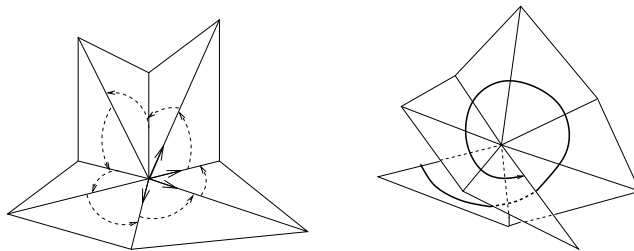


FIG. 2.4 – Somme des angles autour d'un sommet  $P$  et mise à plat.

Nous établissons à présent le lien entre chemin sur une surface polyédrique  $\mathcal{P}$  et séquence de faces de  $\mathcal{P}$ .

**Définition 2.5** *Soit  $\mathcal{C}$  un chemin sur  $\mathcal{P}$ . Ce chemin  $\mathcal{C}$  traverse la séquence  $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_{r+1})$  s'il existe une partition de  $\mathcal{C}$  en  $r + 1$  arcs de courbe fermés  $\mathcal{C}_i$ , éventuellement restreints à un point, telle que :*

- la concaténation ordonnée des  $\mathcal{C}_i$  soit  $\mathcal{C}$
- $\mathcal{C}_i \subset F_i$ ,  $i = 1, \dots, r + 1$

**Définition 2.6** *Soit  $\mathcal{C}$  un chemin qui traverse une séquence  $\mathcal{F}$ . Le découpage de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{F}$  est la suite ordonnée des intersections de  $\mathcal{C}$  avec la séquence d'arêtes associée à  $\mathcal{F}$ .*

**Proposition 2.2** *Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathcal{P}$ . Soit  $\mathcal{C}$  un chemin reliant  $A$  et  $B$  sur  $\mathcal{P}$ . Il existe une séquence de faces adjacentes  $\mathcal{F}$  traversée par  $\mathcal{C}$ .*

Construction :

En parcourant  $\mathcal{C}$  depuis  $A$ , notons  $M_i$  les intersections ordonnées de  $\mathcal{C}$  avec les arêtes de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{C}(A, M_1), \dots, \mathcal{C}(M_i, M_{i+1}), \dots, \mathcal{C}(M_r, B)$  les portions de chemin de  $\mathcal{C}$  entre deux points. Si l'intersection de  $\mathcal{C}$  avec une arête  $E$  est un segment de longueur non nulle, nous ne considérons que les extrémités de  $\mathcal{C} \cap E$ . Par construction,  $\mathcal{C}(A, M_1), \dots, \mathcal{C}(M_i, M_{i+1}), \dots, \mathcal{C}(M_r, B)$  sont des segments de courbes fermés, chacun inclus dans une face qui lui est associée : notons  $F_1, \dots, F_i, \dots, F_{r+1}$  ces faces. Supposons que dans cette suite de faces, il existe deux faces successives  $F_i$  et  $F_{i+1}$  qui ne soient ni adjacentes ni égales, alors nous allons insérer entre elles une séquence de faces adjacentes :  $F_i$  et  $F_{i+1}$  possèdent en commun  $M_i$ , point d'une arête de  $\mathcal{P}$ .  $M_i$  est donc un sommet de  $\mathcal{P}$ . A partir de  $F_i$ , nous parcourrons \* les faces incidentes à  $M_i$  positivement jusqu'à  $F_{i+1}$ . Les faces intermédiaires de cette sous-séquence sont insérées dans la suite des faces et associées à  $M_i$  inséré dans la liste des intersections autant de fois que le nombre de faces insérées. Nous considérons maintenant cette suite de faces complétée. Deux faces successives sont donc soit adjacentes, soit égales. Si  $F_i$  et  $F_{i+1}$  sont égales,  $\mathcal{C}(M_{i-1}, M_{i+1})$  est inclus dans  $F_i$  et nous supprimons la redondance de la face  $F_{i+1}$  et du point d'intersection  $M_i$ . La suite finale  $\mathcal{F}$  est donc une séquence de faces adjacentes à laquelle est associée le découpage induit par les points  $A, \dots, M_i, \dots, B$ , qui est donc traversée par  $\mathcal{C}(A, B)$ .  $\square$

**Remarque 2.2** *Il n'y a pas nécessairement unicité de la séquence  $\mathcal{F}$ .*

Démonstration :

En effet, ceci est lié au fait que si nous considérons un chemin qui passe par  $P$  un sommet intérieur de  $\mathcal{P}$ , la construction au niveau de l'étape \* autorise à définir deux séquences distinctes issues du parcours des faces incidentes positivement ou négativement.  $\square$

Dans ce cas de figure, les deux séquences construites sont équivalentes au sens où elles sont traversées par un même chemin. Nous exploiterons cette propriété dans notre algorithme de calcul (cf figure 2.13, page 71).

**Définition 2.7** Soient  $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \dots, F_{r+1})$  une séquence de faces adjacentes et  $\mathcal{E} = (E_1, E_2, \dots, E_r)$  la séquence d'arêtes associée. Soient  $M_i$ , avec  $1 \leq i \leq r$  des points intérieurs aux arêtes  $E_i$  de  $\mathcal{E}$ . Soient  $A$  un point de  $F_1$  et  $B$  un point de  $F_{r+1}$  tels que  $A \in (F_1 \setminus E_1) \cup M_1$  et  $B \in (F_{r+1} \setminus E_r) \cup M_r$ . Alors le chemin obtenu par la concaténation des segments  $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{r-1}M_r, M_rB$  connecte la séquence  $\mathcal{F}$ .

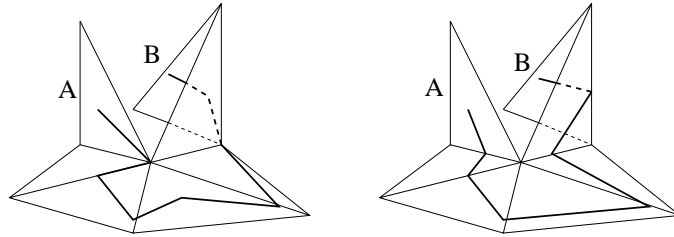


FIG. 2.5 – (a) chemin traversant une séquence (b) chemin connectant une séquence

Si les segments  $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{r-1}M_r, M_rB$  sont remplacés par des arcs de courbe dont les intérieurs sont intérieurs aux faces  $F_i$  de  $\mathcal{F}$ , le chemin connecte également  $\mathcal{F}$ . Nous nous restreindrons un peu plus loin à ne considérer que des lignes polygonales. La propriété de connecter est plus forte que celle de traverser car les intersections avec les arêtes de la séquence sont intérieures aux arêtes (cf figure 2.5).

**Proposition 2.3** *Soit  $\mathcal{C}$  un chemin sur  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{F}$  une séquence de faces traversée par  $\mathcal{C}$ . Soit  $\mathfrak{C}$  la mise à plat de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathfrak{F}$ . La longueur de  $\mathfrak{C}$  est égale à la longueur de  $\mathcal{C}$ .*

Démonstration :

Ceci découle des propriétés de conservation de la transformation de mise à plat. Il suffit de considérer le découpage de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{F}$  en  $r + 1$  arcs de courbe  $\mathcal{C}_i$ . Lors de la mise à plat, chaque face  $F_i$  subit des rotations axiales, de même pour les chemins  $\mathcal{C}_i$  qui y sont inclus. Les rotations conservent les longueurs des chemins au sein de chaque face et donc la concaténation finale des  $\mathcal{C}_i$  donne le chemin  $\mathfrak{C}$ , d'après la prop. 2.1, avec conservation de la longueur totale.  $\square$

### 2.2.3 Géodésique sur une surface polyédrique

**Définition 2.8** *Un plus court chemin global entre deux points  $A$  et  $B$  sur une surface quelconque  $\mathcal{S}$  est un chemin de longueur minimale parmi l'ensemble des chemins sur  $\mathcal{S}$  reliant  $A$  et  $B$ .*

**Définition 2.9** *Un plus court chemin local  $\mathcal{C}$  entre deux points  $A$  et  $B$  vérifie la propriété locale suivante : en tout point  $P$  de  $\mathcal{C}$ , il existe un voisinage<sup>1</sup>  $\mathcal{O}$  de  $P$  tel que  $\mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{O}}$ , d'extrémités  $A_{\mathcal{O}}$  et  $B_{\mathcal{O}}$  est un plus court chemin global entre  $A_{\mathcal{O}}$  et  $B_{\mathcal{O}}$ .*

**Proposition 2.4** *Un plus court chemin global est un plus court chemin local.*

Nous nous plaçons maintenant sur une surface polyédrique  $\mathcal{P}$ . Sur ce type de surface, nous ne pouvons définir les lignes géodésiques à partir des courbures mais nous allons les définir en considérant les propriétés de minimisation d'énergie qu'elles possèdent sur les surfaces deux fois différentiables (cf annexe B).

**Définition 2.10** *Une géodésique entre  $A$  et  $B$  sur une surface polyédrique  $\mathcal{P}$  est un plus court chemin local entre ces deux points.*

**Proposition 2.5** *Etant donnés deux points  $A$  et  $B$ , il existe un plus court chemin, donc une géodésique, reliant  $A$  et  $B$ .*

Les surfaces polyédriques que nous considérons sont supposées complètes et l'existence vient du théorème de Hopf-Rinow (cf [Gallot *et al.*, 1990]). Nous allons maintenant établir quelques propriétés significatives des géodésiques et des plus courts chemins. [Mitchell *et al.*, 1987, Varadarajan and Agarwal, 1997] exposent des propriétés et résultats similaires.

**Lemme 2.1** *L'intersection d'un plus court chemin avec une face est un segment de droite, éventuellement vide ou réduit à un point.*

---

1. La topologie sur la surface est celle induite par la topologie de  $\mathbb{R}^3$ .

Démonstration :

Supposons que l'intersection d'un plus court chemin  $\mathcal{C}$  avec une face  $F$  ne soit pas un segment de droite. Prenons les premier et dernier points  $P_i$  et  $P_f$  de  $\mathcal{C} \cap F$ . Le plus court chemin entre  $P_i$  et  $P_f$  est le segment de droite reliant ces deux points. Il est donc strictement plus court que  $\mathcal{C} \cap F$ , non rectiligne, considéré comme plus court chemin, ce qui contredit l'hypothèse.

□

**Corollaire 2.1** *Un plus court chemin passe par une face au plus une fois.*

**Corollaire 2.2** *L'ensemble des séquences simples contient les plus courts chemins.*

Nous pouvons noter que contrairement aux plus courts chemins, l'intersection d'un chemin géodésique avec une face peut être l'union de plusieurs segments de droite, puisque la définition n'implique au chemin que d'être localement optimal (cf figure 2.6).

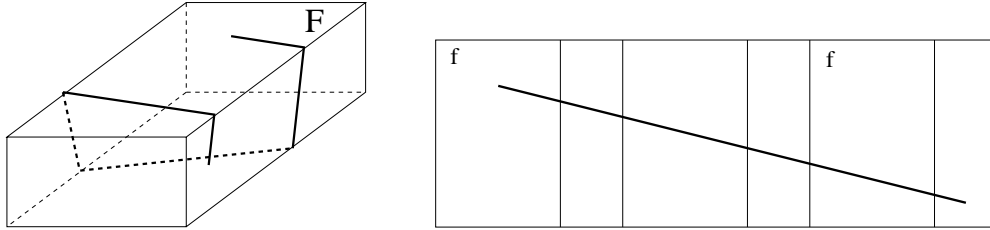


FIG. 2.6 – Chemin géodésique sur un parallélépipède rectangle.

**Proposition 2.6** *Sur une surface polyédrique  $\mathcal{P}$ , les chemins géodésiques sont des lignes polygonales, dont les sommets se situent sur les arêtes de  $\mathcal{P}$ .*

Par la suite, nous ne considérerons ainsi que des chemins polygonaux et dans la mesure du possible des séquences simples. D'après la proposition 2.6, pour décrire un chemin géodésique, il suffit donc de considérer une séquence  $\mathcal{F}$  qu'il traverse et le découpage correspondant.

**Remarque 2.3** *Ainsi, pour passer d'un chemin dans  $\mathcal{F}$  au chemin correspondant dans  $\mathfrak{F}$ , il suffit de repérer les intersections du chemin polygonal avec les arêtes de la séquence, c'est-à-dire le découpage de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{F}$ . Par ce biais, le lien avec la séquence plane  $\mathfrak{F}$  et le chemin  $\mathfrak{C}$  est alors immédiat.*

C'est ainsi que nous travaillerons dans  $\mathfrak{F}$ . Cette idée représente une étape dans l'algorithme que nous avons mis en place.

**Proposition 2.7** *Si  $\mathcal{C}$  est un chemin géodésique qui connecte une séquence  $\mathcal{F}$ , alors sa mise à plat  $\mathfrak{C}$  est rectiligne dans  $\mathfrak{F}$ .*

Démonstration :

Supposons que  $\mathfrak{C}$  n'est pas rectiligne. D'après la proposition 2.6 et la remarque 2.3,  $\mathfrak{C}$  est une ligne polygonale dont les sommets se situent sur les arêtes de  $\mathfrak{F}$ . Comme  $\mathcal{C}$  connecte  $\mathcal{F}$ , les sommets de la ligne polygonale se situent à l'intérieur des arêtes. Soit  $\mathfrak{m}_i$  le sommet sur l'arête  $\epsilon_i$  autour duquel  $\mathfrak{C}$  n'est pas rectiligne. L'angle  $\langle \mathfrak{m}_{i-1}\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i\mathfrak{m}_{i+1} \rangle$  n'est donc pas nul. Comme



$m_i$  est intérieur à  $e_i$ , il existe alors  $p \in [m_{i-1}m_i]$  et  $p' \in [m_i m_{i+1}]$  tels que  $[pp'] \in f_i \cup f_{i+1}$  (cf figure 2.7).  $[pp']$  est donc plus court que  $[pm_i] \cup [m_i p']$  et le chemin  $[m_{i-1}p] \cup [pp'] \cup [p'm_{i+1}]$  est donc plus court que  $[m_{i-1}m_i] \cup [m_i m_{i+1}]$ . Il est également localement plus court puisque nous pouvons choisir  $p$  et  $p'$  arbitrairement proches de  $m$ . Le chemin  $\mathcal{C}$  n'est donc pas géodésique.  $\square$

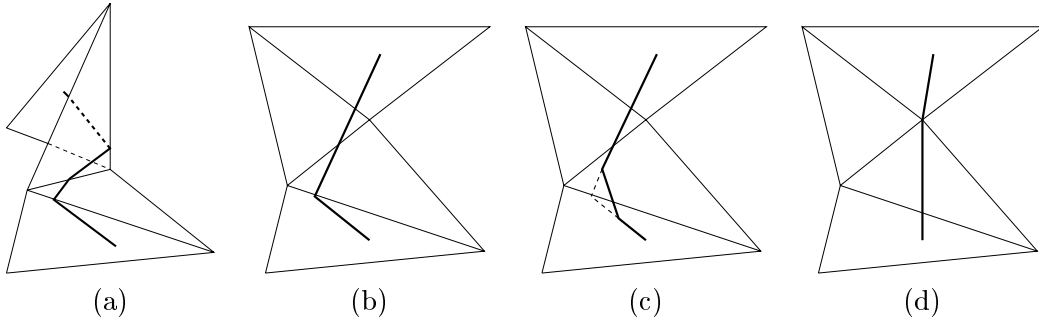


FIG. 2.7 – Plus court chemin connectant une séquence. (a) séquence  $\mathcal{F}$  et chemin  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^3$  (b) séquence  $\mathfrak{F}$  et chemin  $\mathfrak{C}$  mis à plat (c) séquence  $\mathfrak{F}$  et chemin raccourci (d) séquence  $\mathfrak{F}$  et plus court chemin dans  $\mathfrak{F}$ , mais ne connectant pas  $\mathfrak{F}$ .

**Proposition 2.8** *Réciproquement, soit  $\mathcal{C}$  un chemin connectant une séquence  $\mathcal{F}$ . Si  $\mathfrak{C}$  la mise à plat de  $\mathcal{C}$  autour de  $\mathcal{E}$  est un chemin rectiligne dans  $\mathfrak{F}$  alors  $\mathcal{C}$  est un chemin géodésique.*

Démonstration :

Puisque  $\mathfrak{C}$  connecte  $\mathfrak{F}$ , une faible perturbation de  $\mathfrak{C}$  reste dans la séquence  $\mathfrak{F}$  et en augmente la longueur car  $\mathfrak{C}$  est un chemin rectiligne. Il en découle donc, d'après la proposition 2.3 et la correspondance entre  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{C}$ , qu'une faible perturbation de  $\mathcal{C}$  voit sa longueur augmenter et que  $\mathcal{C}$  est donc un chemin géodésique.  $\square$

Cette propriété dans la mise à plat peut aussi se traduire sous la forme suivante, qui est donnée dans de nombreux articles, mais moins directement utilisable dans notre méthode :

**Corollaire 2.3** *Le plus court chemin forme, au niveau de chaque arête traversée, des angles entrant et sortant égaux (cf figure 2.8).*

Démonstration :

Dans la séquence plane,  $\mathfrak{C}$  est rectiligne et cette propriété est vérifiée. Le passage à la séquence  $\mathcal{F}$  et au chemin  $\mathcal{C}$  ne modifie pas les angles à l'intérieur des faces et l'égalité est donc préservée (cf figure 2.8).  $\square$

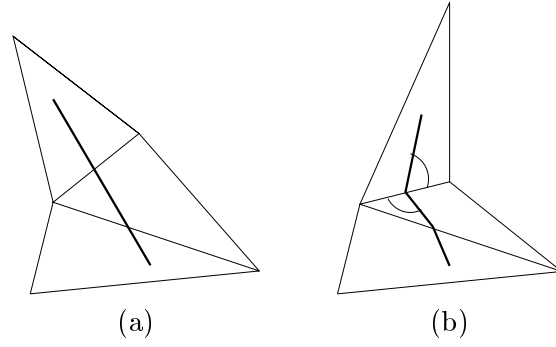


FIG. 2.8 – (a) chemin géodésique  $\mathcal{C}$  dans  $\mathfrak{F}$  (b) angles entrant et sortant du chemin géodésique  $\mathcal{C}$  au niveau d'une arête de  $\mathcal{F}$

Il existe néanmoins des chemins géodésiques qui ne connectent pas une séquence, qui passent donc par des sommets de  $\mathcal{P}$ . Soit  $\mathcal{C}$  un chemin polygonal sur  $\mathcal{P}$  dont les sommets se situent sur les arêtes de  $\mathcal{P}$ . Soit  $P$  un sommet de  $\mathcal{P}$  par lequel  $\mathcal{C}$  passe. Soient  $M_1P$  et  $PM_2$  les segments de  $\mathcal{C}$  entrant et sortant autour de  $P$  et  $F_1$  et  $F_2$  les faces adjacentes à  $P$  correspondantes. Nous considérons  $\mathcal{F}_P$ , l'ensemble des faces incidentes à  $P$ . Nous construisons deux séquences  $\mathcal{F}_+$  et  $\mathcal{F}_-$  en parcourant  $\mathcal{F}_P$  entre  $F_1$  et  $F_2$  dans le sens positif et dans le sens contraire (cf figure 2.9).

**Définition 2.11** Soient

$$\langle \overrightarrow{pm_1}, \overrightarrow{pm_2} \rangle_+ \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{pm_1}, \overrightarrow{pm_2} \rangle_-$$

les angles dans les séquences  $\mathfrak{F}_+$  et  $\mathfrak{F}_-$ . L'angle de  $\mathcal{C}$  autour de  $P$  est défini comme le minimum des valeurs absolues de ces deux angles.

Nous pouvons relier ces angles dans  $\mathfrak{F}_+$  et  $\mathfrak{F}_-$  à la somme des angles autour de  $P$  par :

$$\mathfrak{S}(P) = | \langle \overrightarrow{pm_1}, \overrightarrow{pm_2} \rangle_+ | + | \langle \overrightarrow{pm_1}, \overrightarrow{pm_2} \rangle_- |$$

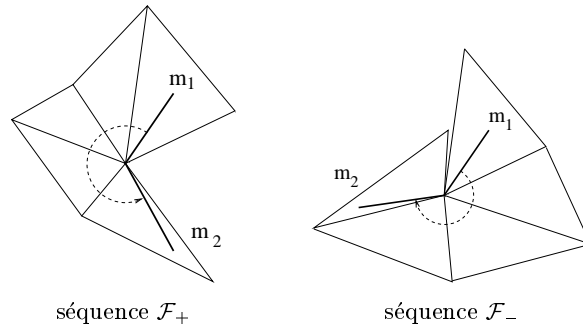


FIG. 2.9 – Séquences autour de  $P$ , angle de  $\mathcal{C}$  autour de  $P$ .

**Proposition 2.9** Soit  $\mathcal{C}$  un chemin géodésique qui passe par un sommet  $P$  de  $\mathcal{P}$ . Alors l'angle de  $\mathcal{C}$  autour de  $P$  est supérieur ou égal à  $\pi$ .

Démonstration :

Supposons que cet angle soit strictement inférieur à  $\pi$ . Plaçons-nous dans la séquence correspondant à ce minimum de l'angle. Le raisonnement est similaire à celui de la proposition 2.7 (cf figure 2.7). Il existe alors  $\mathbf{p}_1 \in [\mathbf{m}_1\mathbf{p}]$  et  $\mathbf{p}_2 \in [\mathbf{p}\mathbf{m}_2]$  tels que  $[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2] \in \mathfrak{F}$ .  $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$  est donc plus court que  $[\mathbf{p}_1\mathbf{p}] \cup [\mathbf{p}\mathbf{p}_2]$  et le chemin  $[\mathbf{m}_1\mathbf{p}_1] \cup [\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2] \cup [\mathbf{p}_2\mathbf{m}_2]$  est donc plus court que  $[\mathbf{m}_1\mathbf{p}] \cup [\mathbf{p}\mathbf{m}_2]$ . Il est également localement plus court puisque nous pouvons choisir  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  arbitrairement proches de  $\mathbf{p}$ .  $\mathcal{C}$  n'est donc pas localement optimal.  $\square$

**Corollaire 2.4** *Soit  $P$  un sommet tel que  $\mathfrak{S}(P) < 2\pi$ . Il n'existe pas de chemin géodésique d'extrémités différentes de  $P$  qui passe par  $P$ .*

**Définition 2.12** *Soit  $\mathcal{C}$  un chemin géodésique.*

*Un sommet  $P$  de  $\mathcal{P}$  par lequel  $\mathcal{C}$  passe et autour duquel l'angle de  $\mathcal{C}$  est strictement supérieur à  $\pi$  est appelé **sommet de déviation** de  $\mathcal{C}$ .*

*Un sommet  $P$  de  $\mathcal{P}$  par lequel  $\mathcal{C}$  passe et autour duquel l'angle de  $\mathcal{C}$  est égal à  $\pi$  est appelé **sommet plat** de  $\mathcal{C}$ .*

*L'angle de déviation de  $\mathcal{C}$  en  $P$ , sommet de déviation ou sommet plat, est égal à la différence de l'angle de  $\mathcal{C}$  autour de  $P$  et  $\pi$ .*

Nous pouvons noter que l'angle de déviation est positif. Cette notion de déviation est issue de ce qui se passe dans les séquences mises à plat (cf figure 2.10). Avec les notations introduites plus haut, nous pouvons considérer deux séquences  $\mathcal{F}_+$  et  $\mathcal{F}_-$  au voisinage de  $P$ . L'angle de déviation correspond au minimum de :

$$|(\overrightarrow{\mathbf{m}_1\mathbf{p}}, \overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{m}_2})_+| \quad \text{et} \quad |(\overrightarrow{\mathbf{m}_1\mathbf{p}}, \overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{m}_2})_-|$$

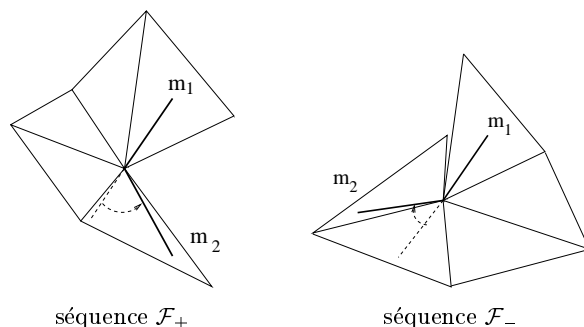


FIG. 2.10 – Séquences autour de  $P$ , angle de déviation de  $\mathcal{C}$  en  $P$ .

Nous pouvons maintenant caractériser un chemin géodésique sur une surface polyédrique  $\mathcal{P}$  comme vérifiant des propriétés de connection ou d'angle dans la ou les séquences qu'il traverse :

**Lemme 2.2** *Un chemin géodésique  $\mathcal{C}$  peut s'écrire :*

$$(A = M_0, \mathcal{F}_0, M_1, \mathcal{F}_1, M_2, \mathcal{F}_2, \dots, M_r, \mathcal{F}_r, M_{r+1} = B)$$

$A, M_1, \dots, M_r, B$  sont les sommets ordonnés par lesquels le chemin  $\mathcal{C}$  passe et les  $M_i$  avec  $1 \leq i \leq r$  sont des sommets de déviation ou des sommets plats ; chaque  $\mathcal{F}_i$  est une séquence que  $\mathcal{C}(M_i, M_{i+1})$  connecte. La mise à plat de  $\mathcal{C}(M_i, M_{i+1})$  dans  $\mathcal{F}_i$  est donc un segment de droite,  $[\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_{i+1}]$ .

Nous avons caractérisé un chemin géodésique comme vérifiant des propriétés de connection ou d'angle dans la ou les séquences qu'il traverse. Ce lien entre chemin et séquence nous permet de décomposer le problème de calcul de géodésique sur  $\mathcal{P}$  en deux sous-problèmes :

- calculer le plus court chemin dans une séquence de faces. Ceci permet de restreindre la recherche d'un chemin géodésique parmi l'ensemble des plus courts chemins dans une séquence.
- trouver une séquence qui contienne un chemin géodésique de  $\mathcal{P}$ . Tant que la séquence courante ne contiendra pas un chemin géodésique, nous aurons donc des mises à jour à effectuer.

Ces deux étapes méritent chacune une attention particulière où l'espace de mise à plat permettra de déterminer aisément les solutions à ces problèmes.

### Propagation de faisceaux

Nous nous concentrons ici sur le calcul de plus court chemin au sein d'une séquence. Après avoir énoncé l'existence et l'unicité d'un tel chemin, nous proposerons notre algorithme de construction basé sur la propagation de faisceaux.

**Proposition 2.10** *Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathcal{P}$ . Soit  $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \dots, F_{r+1})$  une séquence de faces adjacentes telle que  $A \in F_1$  et  $B \in F_{r+1}$ . Parmi les chemins entre  $A$  et  $B$  traversant  $\mathcal{F}$ , il existe un unique plus court chemin  $\mathcal{C}$ .*

Pour démontrer cette proposition, [Sharir and Schorr, 1986] considèrent d'abord la séquence de droites qui portent les arêtes  $E_i$  et montrent l'existence et l'unicité d'un plus court chemin contraint à passer par cette séquence de droites. Ils établissent ce résultat à l'aide du lemme 2.8 sur l'égalité des angles entrant et sortant au niveau d'une arête. Ils proposent une méthode itérative et une méthode formelle pour résoudre ce problème. L'étape suivante consiste à ramener les points de contact avec les droites sur les segments et montrer que cette modification engendre bien le plus court chemin dans la séquence  $\mathcal{F}$ .

Ce résultat étant établi, nous proposons une méthode plus directe pour calculer le plus court chemin dans une séquence en partant d'une idée de [Chen and Han, 1996]. Dans leur article, ils considèrent le point  $A$  comme une source et découpent une surface polyédrique convexe en différentes cellules elles-mêmes convexes au travers desquelles tout point est visible par  $A$ . Cette approche via un découpage en cellules se retrouve également dans [Sharir and Schorr, 1986]. Ceci ne s'adapte pas directement à notre problème car la surface polyédrique que nous considérons n'est pas nécessairement convexe et que le problème cherchant le plus court chemin d'une source à tout point de la surface est plus complexe que le nôtre. Nous allons ainsi calculer le plus court chemin au sein d'une séquence en utilisant ces outils de propagation de faisceau, issus du domaine de l'optique qui montrent par essence

l'existence et l'unicité du plus court chemin, assimilé alors à un rayon lumineux (traversant un milieu homogène).

**Définition 2.13** *Un faisceau est caractérisé par un couple  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{e})$  où  $\mathfrak{s}$  est un point source de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathfrak{e}$  est un segment de droite.*

Le faisceau optique décrit par  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{e})$  peut être vu comme le secteur angulaire issu de  $\mathfrak{s}$  et délimité par  $\mathfrak{e}$ , c'est-à-dire balayé par les demi-droites issues de  $\mathfrak{s}$  qui intersectent  $\mathfrak{e}$ . Dans le contexte géométrique que nous proposons, le faisceau décrit par  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{e})$  existe au sein d'une séquence  $\mathfrak{F}$  et correspondra à la face triangulaire dont  $\mathfrak{s}$  est un sommet et  $\mathfrak{e}$  est l'arête opposée (sauf cas dégénéré où  $\mathfrak{s} \in \mathfrak{e}$ ). Le faisceau optique apparaîtra alors dans la propagation de faisceaux.

Pour calculer le plus court chemin entre  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{F}$ , nous nous plaçons dans l'espace de mise à plat. Nous considérons donc maintenant la séquence plane  $\mathfrak{F}$  et le point  $\mathfrak{a}$ , point source pour la propagation de faisceaux que nous décrivons dans les schémas et l'algorithme qui suivent. Pour expliquer cette phase de propagation de faisceaux, nous considérons la première itération : les schémas de la figure 2.11 illustrent les différents cas possibles lors de cette première phase.

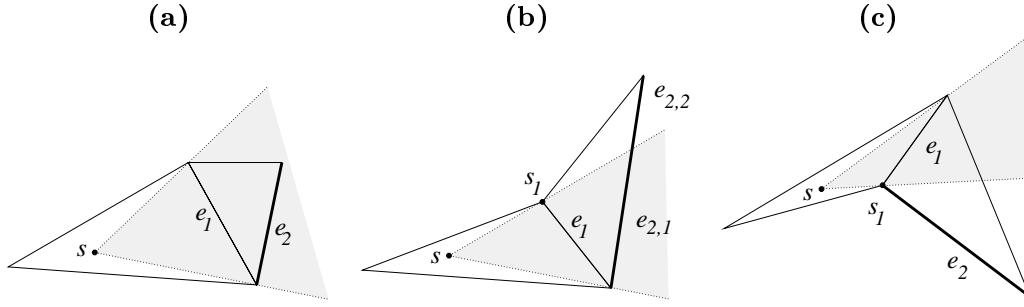


FIG. 2.11 – Propagation du premier faisceau

Les trois cas de figure sont les suivants :

- (a) La propagation du faisceau  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{e}_1)$  couvre entièrement  $\mathfrak{e}_2$ . Le jeu de faisceaux de  $\mathfrak{e}_2$  est donc composé de  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{e}_2)$ .
- (b) La propagation du faisceau  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{e}_1)$  ne voit que partiellement  $\mathfrak{e}_2$  : il y a donc découpage de  $\mathfrak{e}_2$  et création d'une source  $\mathfrak{s}_1$  au sommet de  $\mathfrak{e}_1$  non commun avec  $\mathfrak{e}_2$ . Le jeu de faisceaux de  $\mathfrak{e}_2$  est donc composé de  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{e}_{2,1})$  et  $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{e}_{2,2})$ .
- (c) La propagation du faisceau  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{e}_1)$  ne voit pas  $\mathfrak{e}_2$  : il y a donc création d'une source  $\mathfrak{s}_1$  au sommet commun à  $\mathfrak{e}_1$  et  $\mathfrak{e}_2$ . Le jeu de faisceaux de  $\mathfrak{e}_2$  est donc composé de  $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{e}_2)^2$ .

**Définition 2.14** *Le jeu de faisceaux d'une arête  $\mathfrak{e}_i$  dans une séquence  $\mathfrak{F}$  issu d'un point source  $\mathfrak{a}$  est une liste non vide de faisceaux  $((\mathfrak{s}_{i,1}, \mathfrak{e}_{i,1}), \dots, (\mathfrak{s}_{i,j}, \mathfrak{e}_{i,j}))$  générée par la propagation de faisceaux issue de  $\mathfrak{a}$  au travers de  $\mathfrak{F}$ . Ce jeu de faisceaux correspond à la visibilité de  $\mathfrak{e}$  dans  $\mathfrak{F}$  et  $(\mathfrak{e}_{i,1}, \dots, \mathfrak{e}_{i,j})$  est une partition de  $\mathfrak{e}_i$  dont chaque élément est couplé à une source qui le voit à travers  $\mathfrak{F}$ .*

2. Ici, comme  $\mathfrak{s}_1 \in \mathfrak{e}_2$ ,  $\mathfrak{s}_1 \in \mathfrak{f}_3$  et donc  $\mathfrak{s}_1$  voit entièrement  $\mathfrak{e}_3$  pour la suite de la propagation.

La propagation de faisceaux sur les arêtes suivantes est effectuée de la même manière en remplaçant le faisceau  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{e}_1)$  par le jeu de faisceaux associé à la dernière arête traitée. Le point destination  $\mathfrak{b}$  est considéré comme une arête de longueur nulle.

### PROPAGATION\_DE\_FAISCEAUX

Algorithme

```

 $\mathfrak{e}_1$  est complètement vue par la source  $\mathfrak{a}$  (car  $\mathfrak{a} \in \mathfrak{f}_1$ )
donc  $\mathfrak{e}_1$  est associée à  $(\mathfrak{s}_{1,1}, \mathfrak{e}_{1,1}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{e}_1)$ 
pour  $i$  variant de 1 à  $r$  faire
     $\mathfrak{e}_i$  est associée au jeu de faisceaux :  $(\mathfrak{s}_{i,1}, \mathfrak{e}_{i,1}), \dots, (\mathfrak{s}_{i,j(i)}, \mathfrak{e}_{i,j(i)})$ 
    propagation du jeu de faisceaux de  $\mathfrak{e}_i$  sur l'arête  $\mathfrak{e}_{i+1}$  (cf figure 2.11)
fin_pour
propagation du jeu de faisceaux de  $\mathfrak{e}_r$  sur l'arête dégénérée  $[\mathfrak{b}\mathfrak{b}]$ 

```

**Proposition 2.11** *Les jeux de faisceaux permettent de déterminer le plus court chemin entre la source  $\mathfrak{a}$  et le point destination  $\mathfrak{b}$  mais également entre  $\mathfrak{a}$  et tout point d'une arête de la séquence.*

#### Construction :

Soit  $\mathfrak{p}$  un point sur une arête  $\mathfrak{e}_i$  de  $\mathfrak{F}$  ou bien  $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ . Nous allons traiter ces deux cas car ce qui permet de construire le plus court chemin entre  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{p}$  est l'ensemble des jeux de faisceaux des arêtes  $\mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_i$ . Dans la partition liée au jeu de faisceaux de  $\mathfrak{e}_i$ ,  $\mathfrak{p}$  appartient à un sous-segment vu par une source que nous notons  $\mathfrak{s}_1^{\mathfrak{p}}$ .

– Soit cette source est  $\mathfrak{a}$  : le segment de droite  $[\mathfrak{a}\mathfrak{p}]$  est alors contenu dans  $\mathfrak{F}$  qui correspond donc au plus court chemin dans la séquence.

– Soit  $\mathfrak{s}_1^{\mathfrak{p}}$  est différente de  $\mathfrak{a}$  :  $\mathfrak{s}_1^{\mathfrak{p}}$  est alors le sommet d'une arête  $\mathfrak{e}_j$  (par construction des sources), avec  $j < i$ . Dans le jeu de faisceaux de  $\mathfrak{e}_j$ ,  $\mathfrak{s}_1^{\mathfrak{p}}$  est vue par une autre source que nous notons  $\mathfrak{s}_2^{\mathfrak{p}}$ . Nous ré-itérons le processus jusqu'à revenir à la source  $\mathfrak{a}$ . Ceci se produira nécessairement car les sources  $\mathfrak{s}_l^{\mathfrak{p}}$  avec  $l$  croissant appartiennent à des arêtes dont l'indice décroît et qu'elles sont toutes issues de la propagation d'un faisceau initialisé en  $\mathfrak{a}$ .

Le chemin polygonal partant de  $\mathfrak{p}$ , passant par les sources  $\mathfrak{s}_l^{\mathfrak{p}}$  et arrivant en  $\mathfrak{a}$  correspond au plus court chemin dans  $\mathfrak{F}$  entre  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{p}$ .

En effet, le chemin traverse la séquence, il est polygonal, rectiligne entre deux sources successives du chemin. Il nous reste donc à montrer qu'il est aussi optimal au niveau des sources. Au niveau de toute source, l'angle du chemin dans la séquence est supérieur ou égal à  $\pi$ , par construction des sources. Le chemin nhe peut donc être raccourci au niveau d'une source. En tout point, le chemin est donc localement optimal dans la séquence.

En interprétant ce chemin dans le contexte de l'optique, il correspond en effet au rayon lumineux issu de  $\mathfrak{a}$  qui arrive en  $\mathfrak{p}$ . La séquence de ces sources permet donc d'avoir dans  $\mathfrak{F}$  le plus court chemin entre  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{p}$  mais pour transcrire ce chemin dans la séquence  $\mathcal{F}$ , nous considérons le découpage de ce chemin dans  $\mathfrak{F}$ . Nous savons donc en particulier calculer le plus court chemin  $\mathcal{C}$  entre  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$ . Si  $\mathfrak{a}$  correspond à la source qui voit  $\mathfrak{b}$  et que  $\mathcal{C} = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$  connecte  $\mathfrak{F}$  alors  $\mathcal{C}$  est un chemin géodésique.

Nous venons d'associer à toute séquence le plus court chemin entre  $A$  et  $B$  qui la traverse.

## Mise à jour autour de sommets pivots

Nous nous tournons maintenant vers la seconde étape concernant la détermination d'une séquence de faces contenant un chemin géodésique. Là encore, [Sharir and Schorr, 1986] se sont penchés sur le problème et proposent une étude combinatoire de parcours de toutes les séquences possibles. Nous proposons une méthode itérative. Nous continuons à travailler dans l'espace des paramètres pour caractériser les mises à jour nécessaires, locales, à effectuer sur le plus court chemin  $\mathcal{C}$  dans la séquence  $\mathfrak{F}$  (et leurs équivalents  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{F}$ ) calculé dans le paragraphe précédent.

**Définition 2.15** *Un point ou sommet pivot  $p$  de  $\mathcal{C}$  est un sommet de la séquence  $\mathfrak{F}$  par lequel  $\mathcal{C}$  passe de sorte que  $\mathcal{C}$  ne connecte pas  $\mathfrak{F}$ . Un point ou sommet pivot de  $\mathcal{C}$  est le point correspondant à  $p$ , pivot de  $\mathcal{C}$ , dans  $\mathcal{C}$ .*

Si le plus court chemin à l'intérieur de la séquence courante mis à plat est une ligne droite connectant la séquence, nous avons trouvé un chemin géodésique. Si tel n'est pas le cas, les points pivots jouent un rôle prépondérant dans la recherche d'une séquence contenant un chemin géodésique. En dehors de ces points,  $\mathcal{C}$  est rectiligne et contenu dans l'intérieur de  $\mathfrak{F}$ , donc localement optimal. Par contre, au niveau de ces points pivots, une faible perturbation de  $\mathcal{C}$  peut sortir de la séquence  $\mathfrak{F}$ .

Soit  $P$  un point pivot de  $\mathcal{C}$ . Nous proposons de vérifier que  $\mathcal{C}$  est optimal au voisinage de  $P$ . Il l'est dans  $\mathcal{F}$ . Une mise à jour de  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $P$  en une séquence  $\mathcal{F}'$ , dans lequel le plus court chemin est  $\mathcal{C}'$  va nous permettre de voir si  $P$  est toujours pivot dans  $\mathcal{C}'$ .

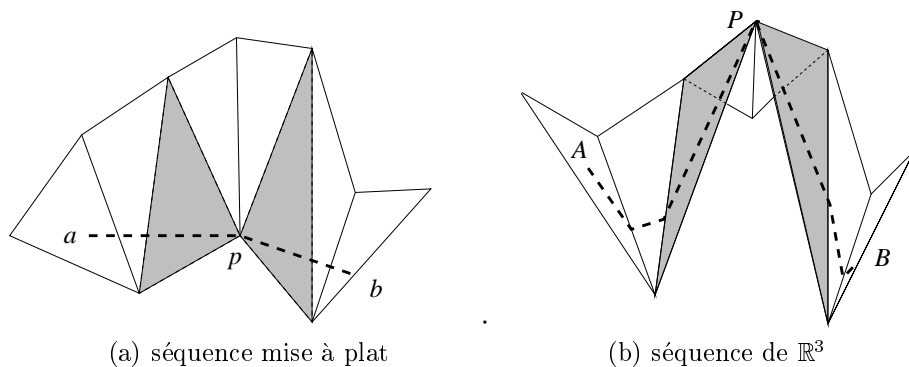
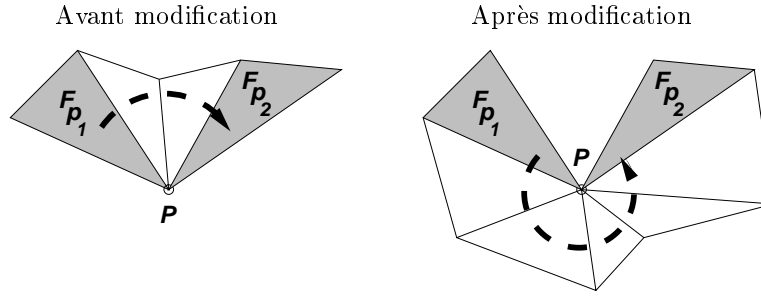


FIG. 2.12 – Plus court chemin dans une séquence. Les faces grises sont les première et dernière faces de la sous-séquence à modifier. (a) Vue dans l'espace de mise à plat du plus court chemin  $\mathcal{C}$  dans la séquence  $\mathfrak{F}$ . (b) Vue dans  $\mathbb{R}^3$  du plus court chemin  $\mathcal{C}$  dans la séquence  $\mathcal{F}$ .

Soit  $P$  un sommet pivot de  $\mathcal{C}$  n'appartenant pas à la frontière de  $\mathcal{P}$ . Soit  $(F_{p1}, F_{p1+1}, \dots, F_{p2})$  la sous-séquence de faces adjacentes contenant  $P$  de  $\mathcal{F}$  telle que  $F_{p1-1}$  et  $F_{p2+1}$  ne contiennent pas  $P$  (cf figure 2.12). Nous effectuons une mise à jour de  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $P$  en remplaçant  $(F_{p1}, F_{p1+1}, \dots, F_{p2})$  par la sous-séquence entre  $F_{p1}$  et  $F_{p2}$  orientée dans le sens contraire (cf figure 2.13).

Nous allons maintenant étudier en détail ce qui se passe localement lors d'une telle modification. Autour du sommet pivot  $P$ ,  $\mathcal{C}$  ne traverse pas l'intérieur des faces contenues dans la séquence strictement entre  $F_{p1}$  et  $F_{p2}$  (cf figure 2.12) sinon  $\mathcal{C}$  ne serait pas optimal dans  $\mathcal{F}$ . Le chemin  $\mathcal{C}$  est donc aussi un chemin de la séquence modifiée  $\mathcal{F}'$  (cf figure 2.14).

FIG. 2.13 – Sous-séquences autour du sommet pivot  $P$ 

Comme  $p$  est un sommet pivot de  $\mathcal{C}$ , l'angle formé par  $\mathcal{C}$  dans  $\mathfrak{F}$  en  $p$  est supérieur ou égal à  $\pi$ .

**$P$  n'est pas pivot de  $\mathcal{C}'$  :** ceci signifie donc que  $\mathcal{C}'$  ne passe pas par  $P$ . Donc  $\mathcal{C}'$  est différent de  $\mathcal{C}$ . Or  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{C}$  sont tous deux des chemins qui traversent  $\mathcal{F}'$ , donc  $\mathcal{C}'$  est plus court que  $\mathcal{C}$ . Cette mise à jour a donc fait disparaître le point pivot  $P$  et décroître strictement la longueur du chemin (cf figure 2.14(b)).

**$P$  est pivot de  $\mathcal{C}'$  :** cette mise à jour n'a donc rien modifié,  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ . La longueur du chemin reste donc inchangée.  $P$  pivot de  $\mathcal{C}'$  signifie donc que l'angle formé par  $\mathcal{C}'$  dans  $\mathfrak{F}'$  en  $p$  est supérieur ou égal à  $\pi$ . Nous en déduisons donc que l'angle que fait  $\mathcal{C}$  autour de  $P$  est supérieur ou égal à  $\pi$ .  $\mathcal{C}$  est donc optimal au voisinage de  $P$  et  $P$  est un sommet de déviation ou un sommet plat de  $\mathcal{C}$ . Nous allons garder la sous-séquence dans laquelle l'angle est minimal.

**Lemme 2.3** *La modification d'une séquence autour d'un sommet pivot fait décroître ou laisse inchangée la longueur du chemin (cf figure 2.14).*

La méthode itérative s'arrête après un nombre fini d'étapes en raison de la décroissance de la longueur ou de l'angle de déviation. Elle a donc pour résultat un chemin géodésique puisque la mise à jour autour des sommets pivots les élimine ou transforme les pivots en sommets de déviation ou sommets plats autour desquels le chemin est également optimal.

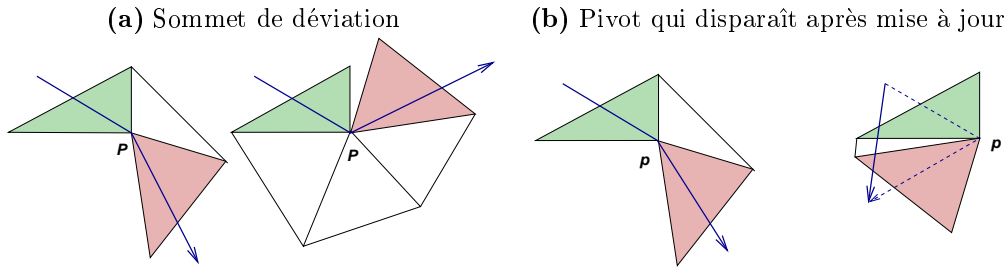


FIG. 2.14 – Décroissance de la longueur



Nous notons à nouveau qu'un chemin peut correspondre au plus court chemin dans deux séquences distinctes, ce que nous avons appelé équivalence des séquences pour le plus court chemin qui les traverse.

### 2.2.4 Algorithme

L'algorithme implémenté calcule des géodésiques sur la surface polyédrique considérée. Les deux paragraphes précédents nous permettent d'écrire l'algorithme correspondant à l'étape (1) de l'algorithme principal GÉODÉSIQUE :

#### GÉODÉSIQUE\_SUR\_UNE\_SURFACE\_POLYÉDRIQUE

Données

$\mathcal{C}$  chemin initial quelconque entre  $A$  et  $B$  sur  $\mathcal{P}$   
 $\mathcal{F}$  séquence de faces adjacentes traversée par  $\mathcal{C}$

Résultat

$\mathcal{G}$  : chemin géodésique entre  $A$  et  $B$  sur  $\mathcal{P}$

Algorithme

```

 $\mathcal{C} \leftarrow$  plus court chemin dans  $\mathcal{F}$ 
 $\mathcal{L} \leftarrow$  liste des sommets pivots de  $\mathcal{C}$ 
(1)
pour_tout  $P$  sommet de  $\mathcal{L}$  faire
     $\mathcal{F}' \leftarrow$  modification de  $\mathcal{F}$  autour de  $P$ 
     $\mathcal{C} \leftarrow$  plus court chemin dans  $\mathcal{F}'$ 
     $\mathcal{L}' \leftarrow$  liste des sommets pivots de  $\mathcal{C}$ 
     $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F}'$ 
    si  $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$  alors
         $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L}'$ 
        aller en (1)
    fin_si
fin_pour
 $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{C}$ 

```

Dans l'implémentation, nous avons retenu la séquence dans laquelle le minimum de l'angle de  $\mathfrak{C}$  en  $\mathfrak{p}$ , c'est-à-dire l'angle que fait  $\mathcal{C}$  autour de  $P$ , est atteint. Nous avons aussi ajouté une phase de vérification après chaque mise à jour pour ne traiter que des séquences simples et ainsi s'orienter avec plus de probabilité vers un chemin géodésique qui pourrait être un plus court chemin.

Dans ce chapitre, nous avons donc résolu le problème suivant : nous nous donnons une surface polyédrique  $\mathcal{P}$ ,  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{C}$  un chemin initial entre  $A$  et  $B$  sur  $\mathcal{P}$ . La méthode itérative génère un chemin géodésique  $\mathcal{G}$  entre  $A$  et  $B$  sur  $\mathcal{P}$ .

## 2.3 Subdivision et projection

La surface  $\mathcal{S}$  considérée présente l'intérêt d'être limite d'une suite de réseaux  $\{\mathbf{P}^k\}$  associée à une suite de surfaces polyédriques  $\{\mathcal{P}^k\}$ . Nous nous penchons maintenant sur la phase de projection qui va permettre de faire le lien entre les surfaces polyédriques et la surface de subdivision  $\mathcal{S}$ . Nous allons calculer sur chacun des réseaux un plus court chemin avec la méthode proposée. Sur chaque réseau, l'initialisation du processus itératif sera issue du chemin calculé à l'étape de subdivision précédente. Nous discuterons ensuite le choix de l'initialisation d'un chemin sur la surface polyédrique initiale.

### 2.3.1 Projection d'un chemin

Cette étape permet de relier les chemins sur deux surfaces polyédriques associées à deux niveaux de subdivision différents (sans perte de généralité, ces deux niveaux seront considérés consécutifs). L'espace des paramètres, commun aux deux polyèdres  $\mathcal{P}^k$  et  $\mathcal{P}^{k+1}$ , permet de réaliser cette transition. À  $\mathcal{G}^k$ , chemin géodésique entre  $A^k$  et  $B^k$  sur  $\mathcal{P}^k$ , est associé le chemin  $c^k$  — allant de  $a$  à  $b$  — par projection dans l'espace des paramètres. L'image de  $c^k$  sur  $\mathcal{P}^{k+1}$  peut alors être considérée : il s'agit d'un chemin entre  $A^{k+1}$  et  $B^{k+1}$ , noté  $\mathcal{C}^{k+1}$  et appelé **projection** de  $\mathcal{G}^k$  sur  $\mathcal{P}^{k+1}$ .  $\mathcal{C}^{k+1}$  est ainsi l'initialisation à la recherche d'un chemin géodésique entre  $A^{k+1}$  et  $B^{k+1}$  sur  $\mathcal{P}^{k+1}$ .

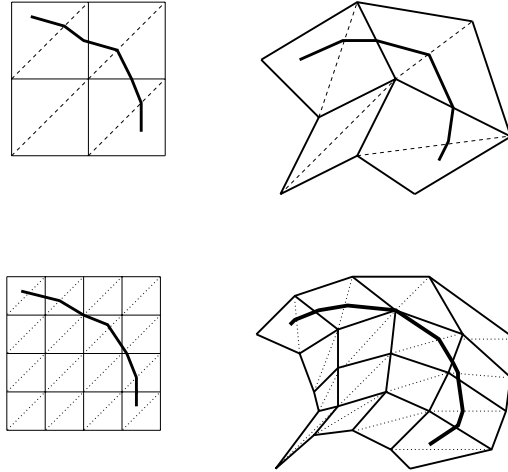


FIG. 2.15 – Phase de projection d'un chemin de  $\mathcal{P}^k$  sur  $\mathcal{P}^{k+1}$

### 2.3.2 Initialisation

Sur les surfaces polyédriques  $\mathcal{P}^k$ , le chemin entre  $A^k$  et  $B^k$  est initialisé par projection du chemin géodésique calculé sur  $\mathcal{P}^{k-1}$ . Sur la surface polyédrique  $\mathcal{P}^0$ , nous avons arbitrairement initialisé  $\mathcal{C}$  par l'image du segment de droite  $[ab]$  de l'espace des paramètres.

Un tel choix est naturellement discutable et il serait intéressant d'étudier l'influence de l'initialisation sur le résultat. À subdivision fixée, il y a décroissance de la longueur et l'initialisation peut ainsi mener à un minimum local non global. Un choix qui semblerait plus

judicieux, mais à étudier également, serait d'initialiser par un plus court chemin global entre  $A^0$  et  $B^0$  sur la surface  $\mathcal{P}^0$  initiale. Pour déterminer un plus court chemin, il serait alors envisageable d'effectuer une recherche exhaustive de parcours de l'ensemble des chemins possibles pour en extraire un plus court chemin.  $\mathcal{P}^0$  étant une approximation grossière de  $\mathcal{S}$ , elle contient peu de faces et cette recherche serait relativement peu coûteuse. Il faudrait ensuite discuter du bien fondé d'un tel choix, qui engendrerait probablement des plus courts chemins sur les surfaces  $\mathcal{P}^k$  avec une plus forte probabilité que l'initialisation actuelle, mais pas nécessairement dans tous les cas de figure. Le choix de l'initialisation reste donc un point à étudier pour améliorer l'algorithme global en termes de résultat, c'est-à-dire de chemin géodésique qui serait un plus court chemin.

## Chapitre 3

# Convergence

La méthode de subdivision exposée génère une suite  $\{\mathcal{G}^k\}_{k \leq \mathbf{k}}$  de chemins géodésiques. Le chemin  $\mathcal{G}^{\mathbf{k}}$  de la dernière étape de subdivision est l'approximation calculée d'un chemin géodésique entre  $A$  et  $B$  sur  $\mathcal{S}$ . Nous validons dans un premier temps la méthode avec un critère portant sur l'évolution de la déviation locale des chemins générés. La convergence de la suite  $\{\mathcal{G}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est ensuite étudiée pas à pas.

### 3.1 Déviation (locale)

La validation de notre méthode porte sur des propriétés locales de la suite de chemins géodésiques générée. Ces propriétés proviennent de l'hypothèse de convergence du schéma des différences dont nous allons donner une interprétation géométrique liée au plan tangent en tout point. Il en découlera que les chemins géodésiques sur les surfaces polyédriques tendent à la limite à posséder des propriétés locales proches de celles des géodésiques sur des surfaces régulières.

Par la suite, nous allons considérer les notations suivantes : soit  $(u_0, v_0)$  un point de l'espace des paramètres  $\mathfrak{D}$  dont l'image  $M^k$  est un point de contrôle de  $\mathbf{P}^k$  pour tout  $k \geq k_0$ . Soit  $N$  la normale à  $\mathcal{S}$  en  $S(u_0, v_0)$ . Nous noterons et parlerons aussi de  $\{M_i^k\}_{k \geq k_0}$  voisin de  $\{M^k\}_{k \geq k_0}$  dans  $\{\mathbf{P}^k\}_{k \geq k_0}$  (ou  $\{\mathcal{P}^k\}_{k \geq k_0}$ ) en sous-entendant que :

1. pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M_i^k$  est un voisin direct de  $M^k$  dans  $\mathbf{P}^k$  (ou  $\mathcal{P}^k$ )
2. les  $M_i^k$  sont les points correspondant aux noeuds  $m_i^k$  tels que tous les  $m_i^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  sont des noeuds insérés sur la même direction d'arête  $e_i$ .

#### 3.1.1 Interprétation géométrique du schéma des différences

Nous allons montrer que les points voisins d'un sommet se rapprochent en un sens angulaire de son plan tangent sur  $\mathcal{S}$ , formulé de la manière suivante et appelé **relation d'orthogonalité** :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N \cdot \frac{\overrightarrow{M^k M_i^k}}{\|\overrightarrow{M^k M_i^k}\|} = 0 \quad (3.1)$$

pour tout  $\{M_i^k\}_k$  voisin de  $\{M^k\}_k$  dans  $\{\mathbf{P}^k\}_k$ .

Nous allons présenter cette interprétation géométrique liée au schéma des différences dans le cas des courbes, des surfaces produit tensoriel et des réseaux triangulaires emboîtés à topologie quelconque.

### Cas des courbes

Nous décrivons géométriquement la convergence uniforme du schéma des différences vers la dérivée. Nous nous plaçons dans le cas uniforme. Sans perte de généralité, les grilles ont leurs noeuds  $(t_i^k)_{i \in \mathbb{Z}}$  en  $(\frac{i}{2^k})_{i \in \mathbb{Z}}$ . La différence divisée d'ordre 1 sur le segment  $[t_i^k, t_{i+1}^k]$  vaut  $\frac{P_i^k - P_{i+1}^k}{t_i^k - t_{i+1}^k}$ . La convergence uniforme du schéma des différences vers la dérivée s'exprime géométriquement par le fait que les côtés des polygones  $\mathcal{P}^k$  convergent uniformément vers la tangente (moyennant une normalisation des vecteurs). Soit  $t_0$  un noeud de l'espace des paramètres qui à partir d'un certain rang  $k_0$  correspond à un point de contrôle  $M^k$  de  $\mathbf{P}^k$ , pour tout  $k \geq k_0$ . La différence divisée d'ordre 1 à la subdivision  $k$ ,  $k \geq k_0$ , en  $t_0$  a une valeur à gauche et une valeur à droite. La convergence du schéma des différences en  $t_0$  s'écrit :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^k (M^k - P^k(t_0 - \frac{1}{2^k})) = C'(t_0) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k (P^k(t_0 + \frac{1}{2^k}) - M^k) = C'(t_0)$$

où  $P^k$  est la fonction paramétrant  $\mathcal{P}^k$  et  $C$  la fonction paramétrant la courbe limite  $\mathcal{C}$ . Ce qui nous intéresse est la relation d'orthogonalité avec la normale  $N$  à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $t_0$  :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N \cdot \frac{\overrightarrow{M^k M_i^k}}{\|M^k M_i^k\|} = 0 \quad \text{avec } \{M_i^k\}_{k \geq k_0} \in \left\{ \{P^k(t_0 - \frac{1}{2^k})\}_{k \in \mathbb{N}}, \{P^k(t_0 + \frac{1}{2^k})\}_{k \in \mathbb{N}} \right\}$$

**Remarque 3.1** *Ce résultat ne tient pas compte de la norme de la dérivée et se généralise facilement au cas non régulier avec des noeuds simples.*

Ceci traduit donc la convergence en termes d'angles des côtés du polygone de contrôle vers la tangente. Il s'agit de convergence uniforme.

### Cas des surfaces produit tensoriel

Dans le cas des surfaces produit tensoriel, l'*indépendance* des paramètres  $u$  et  $v$  permet de généraliser le résultat du cas courbe à la convergence des différences divisées suivant les lignes de coordonnées vers les dérivées partielles (cf paragraphe 1.3.2, page 52). En tout point  $(u_0, v_0)$ , noeud du réseau à partir d'un certain rang, il en découle donc la relation d'orthogonalité 3.1 pour les suites de voisins suivant les lignes de coordonnées (4 suites correspondant aux cas représentés dans la figure 3.1).

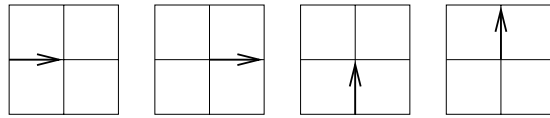


FIG. 3.1 – Convergence vers les dérivées partielles.

**Remarque 3.2** *Au lieu de se placer en un noeud correspondant à un point de contrôle, nous établissons le même type de résultat pour  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  quelconque en considérant les mailles emboîtées des grilles associées aux réseaux  $\mathbf{P}^k$  contenant  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  (cf figure 3.2). Soient  $\mathcal{M}^k$  les images de ces mailles. Par continuité de la différentielle, nous obtenons également la convergence vers le plan tangent en  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  des côtés des mailles  $\mathcal{M}^k$ .*

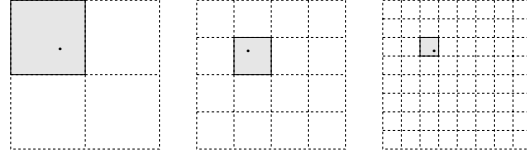


FIG. 3.2 – Suite de mailles associée à un point  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  dans l'espace des paramètres à des degrés de subdivision croissants.

### Cas de triangulations emboîtées à topologie quelconque

Pour construire le schéma des différences, il faut choisir deux directions<sup>1</sup> indépendantes suivant lesquelles se calculent les différences divisées. Sans perte de généralité, nous allons considérer qu'il s'agit des directions suivant les lignes de coordonnées  $u$  et  $v$ . Les différences divisées sur un triangle  $M_0 M_1 M_2$  sont :

$$\mathcal{D}_u(M_0 M_1 M_2) = \frac{(M_1 - M_0)(v_2 - v_0) - (M_2 - M_0)(v_1 - v_0)}{(u_1 - u_0)(v_2 - v_0) - (u_2 - u_0)(v_1 - v_0)}$$

$$\mathcal{D}_v(M_0 M_1 M_2) = \frac{(M_2 - M_0)(u_1 - u_0) - (M_1 - M_0)(u_2 - u_0)}{(v_2 - v_0)(u_1 - u_0) - (v_1 - v_0)(u_2 - u_0)}$$

Soit  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  un point de l'espace des paramètres  $\mathfrak{D}$  et  $\{m_0^k m_1^k m_2^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de mailles triangulaires des grilles  $\mathbf{X}^k$  contenant  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ . Soient  $M_0^k$ ,  $M_1^k$  et  $M_2^k$  les images respectives de  $m_0^k$ ,  $m_1^k$  et  $m_2^k$  sur  $\mathcal{P}^k$  et  $M_0^k M_1^k M_2^k$  la maille triangulaire associée, contenant  $M^k$ . La convergence du schéma des différences s'écrit :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{D}_u^k(M_0^k M_1^k M_2^k) = S_u(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{D}_v^k(M_0^k M_1^k M_2^k) = S_v(\tilde{u}, \tilde{v})$$

Considérons maintenant une direction  $w = \cos(\theta) u + \sin(\theta) v$ ,  $\theta \in [0, 2\pi[$ . En tout point  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  du triangle  $M_0 M_1 M_2$ , nous définissons la différence divisée suivant  $w$  par :

$$\mathcal{D}_w(M_0 M_1 M_2) = \cos(\theta) \mathcal{D}_u(M_0 M_1 M_2) + \sin(\theta) \mathcal{D}_v(M_0 M_1 M_2)$$

Nous avons :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\cos(\theta) \mathcal{D}_u^k(M_0^k M_1^k M_2^k) + \sin(\theta) \mathcal{D}_v^k(M_0^k M_1^k M_2^k)] = \cos(\theta) S_u(\tilde{u}, \tilde{v}) + \sin(\theta) S_v(\tilde{u}, \tilde{v})$$

soit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{D}_w^k(M_0^k M_1^k M_2^k) = S_w(\tilde{u}, \tilde{v})$$

---

1. Les directions seront considérées normalisées et orientées.

**Remarque 3.3** Comme les différences divisées sont définies sur les triangles, nous avons pris la notation  $\mathcal{D}_w^k(M_0^k M_1^k M_2^k)$ . Soit  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  un point quelconque de  $\mathfrak{D}$ . Soit  $\tilde{M}^k$  son image sur  $\mathcal{P}^k$  et  $\mathcal{T}^k$  un triangle de  $\mathcal{P}^k$  contenant  $\tilde{M}^k$ . Nous noterons également  $\mathcal{D}_w^k(\tilde{u}, \tilde{v})$ , la valeur de la différence divisée en  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  qui vaut la différence divisée sur le triangle  $\mathcal{T}^k$ , soit  $\mathcal{D}_w^k(\mathcal{T}^k)$ . Au niveau des arêtes et sommets, un point peut appartenir à plusieurs triangles mais ceci ne pose pas de problème, il suffit de considérer l'un d'eux. Nous allons établir des propriétés indépendamment du choix de ces triangles.

**Lemme 3.1** La convergence uniforme du schéma des différences associé aux directions  $u$  et  $v$  implique la convergence uniforme des différences divisées suivant toute direction de dérivation  $w$  considérée, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon, \quad \exists k_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad \forall k \geq k_\varepsilon \quad \sup_w (|\mathcal{D}_w^k(\tilde{u}, \tilde{v}) - S_w(\tilde{u}, \tilde{v})|) \leq \varepsilon \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathfrak{D}$$

Démonstration :

La convergence uniforme du schéma des différences s'exprime comme suit :

$$\forall \varepsilon, \exists k_\varepsilon \text{ tel que } \forall k \geq k_\varepsilon \quad \max (|\mathcal{D}_u^k(\tilde{u}, \tilde{v}) - S_u(\tilde{u}, \tilde{v})|, |\mathcal{D}_v^k(\tilde{u}, \tilde{v}) - S_v(\tilde{u}, \tilde{v})|) \leq \varepsilon \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathfrak{D}$$

Soit  $w = \cos(\theta)u + \sin(\theta)v$ , alors

$$\mathcal{D}_w^k(\tilde{u}, \tilde{v}) = \cos(\theta) \mathcal{D}_u^k(\tilde{u}, \tilde{v}) + \sin(\theta) \mathcal{D}_v^k(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \text{et} \quad S_w(\tilde{u}, \tilde{v}) = \cos(\theta) S_u(\tilde{u}, \tilde{v}) + \sin(\theta) S_v(\tilde{u}, \tilde{v})$$

et

$$|\mathcal{D}_w^k(\tilde{u}, \tilde{v}) - S_w(\tilde{u}, \tilde{v})| = |\cos(\theta) (\mathcal{D}_u^k(\tilde{u}, \tilde{v}) - S_u(\tilde{u}, \tilde{v})) + \sin(\theta) (\mathcal{D}_v^k(\tilde{u}, \tilde{v}) - S_v(\tilde{u}, \tilde{v}))| \leq 2\varepsilon$$

d'où le résultat. □

Plaçons-nous maintenant en un point  $(u_0, v_0)$  correspondant à un point de contrôle à partir d'un certain rang  $k_0$ . Soit  $w$  la direction d'une arête issue de  $(u_0, v_0)$ . Soit  $(u_1^k, v_1^k)$  le voisin direct de  $(u_0, v_0)$  dans cette direction et dans la grille  $\mathbf{X}^k$ . Nous avons

$$w = \frac{(u_1^k - u_0)u + (v_1^k - v_0)v}{\|(u_1^k - u_0)u + (v_1^k - v_0)v\|}$$

où nous supposons que les coordonnées sont exprimées dans la base des vecteurs  $(u, v)$ . Rappelons que  $M^k$  est l'image de  $(u_0, v_0)$  sur  $\mathcal{P}^k$  et notons  $M_1^k$  l'image de  $(u_1, v_1)$  sur  $\mathcal{P}^k$ .

**Proposition 3.1** Les différences divisées univariées au niveau d'une direction d'arête convergent vers la dérivée suivant cette direction, ce qui s'exprime comme suit :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\overrightarrow{M^k M_1^k}}{\|(u_1^k - u_0)u + (v_1^k - v_0)v\|} = S_w(u_0, v_0)$$

Démonstration :

Nous considérons une suite de sommets  $\{M_2^k\}_{k \geq k_0}$  telle que :

– pour tout  $k \geq k_0$ ,  $M^k M_1^k M_2^k$  est un triangle de  $\mathcal{P}^k$ ,

- la suite de triangles  $\{M^k M_1^k M_2^k\}_{k \geq k_0}$  correspond à une suite de triangles emboîtés dans  $\mathfrak{D}$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_w^k(u_0, v_0) &= \frac{(u_1^k - u_0)\mathcal{D}_u^k(M^k M_1^k M_2^k) + (v_1^k - v_0)\mathcal{D}_v^k(M^k M_1^k M_2^k)}{\|(u_1^k - u_0)u + (v_1^k - v_0)v\|} \\
&= \frac{(u_1^k - u_0)((M_1^k - M^k)(v_2^k - v_0) - (M_2^k - M^k)(v_1^k - v_0))}{\|(u_1^k - u_0)u + (v_1^k - v_0)v\| ((v_2^k - v_0)(u_1^k - u_0) - (v_1^k - v_0)(u_2^k - u_0))} \\
&\quad + \frac{(v_1^k - v_0)((M_2^k - M^k)(u_1^k - u_0) - (M_1^k - M^k)(u_2^k - u_0))}{\|(u_1^k - u_0)u + (v_1^k - v_0)v\| ((v_2^k - v_0)(u_1^k - u_0) - (v_1^k - v_0)(u_2^k - u_0))} \\
&= \frac{M_1^k - M^k}{\|(u_1^k - u_0)u + (v_1^k - v_0)v\|} = \frac{\overrightarrow{M^k M_1^k}}{\|(u_1^k - u_0)u + (v_1^k - v_0)v\|}
\end{aligned}$$

Avec la convergence du schéma des différences dans la direction  $w$ , nous en déduisons :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\overrightarrow{M^k M_1^k}}{\|(u_1^k - u_0)u + (v_1^k - v_0)v\|} = S_w(u_0, v_0)$$

□

Géométriquement, les arêtes normalisées  $\frac{\overrightarrow{M^k M_i^k}}{\|\overrightarrow{M^k M_i^k}\|}$  tendent vers la tangente unitaire dans la direction donnée par  $w$ . Il en découle la relation d'orthogonalité 3.1 :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N \cdot \frac{\overrightarrow{M^k M_i^k}}{\|\overrightarrow{M^k M_i^k}\|} = 0 \quad \text{pour tout } \{M_i^k\}_k \text{ voisin de } \{M^k\}_k \text{ dans } \{\mathbf{P}^k\}_k$$

Le lemme 3.1 établit l'uniformité de cette convergence sur la surface.

### 3.1.2 Somme des angles

La relation d'orthogonalité 3.1 vient d'être établie pour tout sommet et ses voisins directs dans les réseaux  $\mathbf{P}^k$ . Nous insistons maintenant sur le fait que la topologie associée aux réseaux  $\mathbf{P}^k$  et celle associée aux triangulations des surfaces polyédriques  $\mathcal{P}^k$  peut être différente. Nous supposons que les triangulations des  $\mathcal{P}^k$  correspondent à des grilles emboîtées dans  $\mathfrak{D}$ . Ce cas se présente pour tout réseau contenant des mailles non triangulaires. Nous allons étendre le résultat d'orthogonalité avec la normale aux voisins de  $M^k$  dans la triangulation des surfaces polyédriques  $\mathcal{P}^k$ .

**Lemme 3.2** *Pour tout voisin  $\{M_i^k\}_k$  de  $\{M^k\}_k$  sur  $\{\mathcal{P}^k\}_k$ , nous avons :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N \cdot \frac{\overrightarrow{M^k M_i^k}}{\|\overrightarrow{M^k M_i^k}\|} = 0$$

Démonstration :

Ceci est vérifié pour les suites de voisins de  $\{M^k\}_k$  dans  $\{\mathbf{P}^k\}_k$ , d'après ce qui précède.



Soit  $M^k$  un point de  $\mathcal{P}^k$ . Supposons qu'il existe un voisin direct de  $M^k$  dans la triangulation de  $\mathcal{P}^k$  qui, pour la topologie du réseau  $\mathbf{P}^k$  est un 2-voisin (cf figures 3.3 et 3.4). Nous allons montrer que la relation d'orthogonalité 3.1 est également vraie pour les voisins de  $\{M^k\}_k$  dans  $\{\mathcal{P}^k\}_k$  qui correspondent à des 2-voisins de  $\{M^k\}_k$  dans  $\{\mathbf{P}^k\}_k$ .

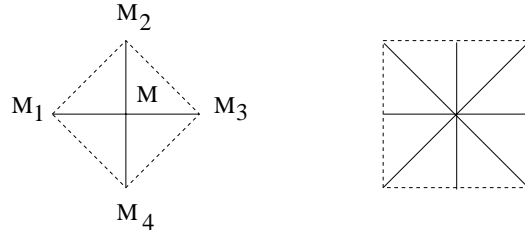


FIG. 3.3 – *Voisins directs pour la topologie du réseau de contrôle, réseau produit tensoriel et voisins éventuels pour la topologie associée à la triangulation de la surface polyédrique.*

Pour simplifier les notations, nous considérons celles de la figure 3.4.

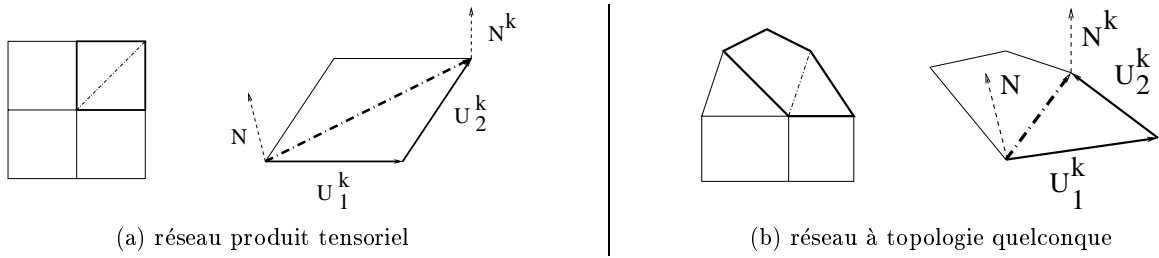


FIG. 3.4 – *2-voisin dans un réseau.*

$$\begin{aligned} \left| N \cdot \frac{U_1^k + U_2^k}{\|U_1^k + U_2^k\|} \right| &\leq \frac{1}{\|U_1^k + U_2^k\|} \left( |N \cdot U_1^k| + |N \cdot U_2^k| \right) \\ &\leq \frac{1}{\|U_1^k + U_2^k\|} \left( |N \cdot U_1^k| + |(N - N^k) \cdot U_2^k| + |N^k \cdot U_2^k| \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Or d'après l'interprétation géométrique de la convergence uniforme du schéma des différences vers le plan tangent, nous avons :

$$\forall \varepsilon, \quad \exists k_\varepsilon, \quad \forall k > k_\varepsilon, \quad \left| N \cdot \frac{U_1^k}{\|U_1^k\|} \right| < \varepsilon \quad \left| N^k \cdot \frac{U_2^k}{\|U_2^k\|} \right| < \varepsilon \quad (3.3)$$

qui permet de majorer le premier et le troisième terme de la somme.

La continuité<sup>2</sup> du vecteur normal sur la surface de subdivision s'écrit :

$$\forall \varepsilon, \quad \exists \eta, \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{v}), \quad \|(u_0, v_0) - (\tilde{u}, \tilde{v})\| < \eta \quad \|N(u_0, v_0) - N(\tilde{u}, \tilde{v})\| < \varepsilon$$

et correspond à la remarque 3.2.

---

2. La remarque 3.4 page 84, constate qu'en ce point, il serait intéressant d'avoir la continuité uniforme.

Comme nous avons la convergence uniforme du schéma de subdivision, d'après la proposition 1.5 et les remarques 1.6 et 1.7, pages 51 à 53,  $\{\Delta \mathbf{P}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers 0. A partir d'un certain rang les 2-voisins se trouvent donc dans la boule de centre  $M^k$  et de rayon  $\eta$ , soit :

$$\|(u_0, v_0) - (u_k, v_k)\| < \eta \quad \text{et donc} \quad \|\mathbf{N}(u_0, v_0) - \mathbf{N}(u_k, v_k)\| < \varepsilon$$

soit, avec les notations précédentes :  $\|N - N^k\| < \varepsilon$ . Ceci permet de majorer le deuxième terme de la somme de l'inégalité 3.2 :

$$|(N - N^k) \cdot U_2^k| < \varepsilon \|U_2^k\|$$

En rassemblant les différents termes et leur majoration, nous obtenons donc :

$$\left| N \cdot \frac{U_1^k + U_2^k}{\|U_1^k + U_2^k\|} \right| \leq \frac{\|U_1^k\| + 2\|U_2^k\|}{\|U_1^k + U_2^k\|} \varepsilon \quad (3.4)$$

Nous avons ici besoin d'une majoration uniforme du rapport des longueurs entre les côtés du réseau et les diagonales du réseau qui s'exprime comme suit :

$$\exists c_1 > 0 \quad \text{tel que} \quad \|U_1^k\| + 2\|U_2^k\| \leq c_1 \|U_1^k + U_2^k\|$$

Cette condition, ajoutée aux conditions requises exprime une certaine stabilité du schéma de subdivision que nous n'avons pas encore approfondie et qui constitue une partie de nos travaux actuels. Nous la supposons vérifiée. Moyennant cette condition, nous avons donc :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N \cdot \frac{\overrightarrow{M^k M_i^k}}{\|\overrightarrow{M^k M_i^k}\|} = 0 \quad \text{pour tout voisin direct et 2-voisin } \{M_i^k\}_k \text{ de } \{\mathbf{P}^k\}_k$$

Ce résultat sur les 2-voisins se généralise pour les  $i$ -voisins dans le cas où les triangulations font intervenir des plus proches voisins à distance  $i$  avec le même type de majoration sur les diagonales. Ceci correspond au cas de figure illustré par la figure 3.4. Nous ne disposons pas de tous les résultats nécessaires dans le cas de topologies quelconques (cf chapitre 1), mais si tel était le cas, cette démonstration se généraliserait facilement.

□

**Proposition 3.2** *La somme des angles autour de  $M^k$  sur les surfaces  $\mathcal{P}^k$  tend vers  $2\pi$ .*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{S}(M^k) = 2\pi$$

Démonstration :

Considérons une suite de triangles contenant  $M^k$ , correspondant à une suite de triangles emboîtés dans l'espace des paramètres  $\mathfrak{D}$ . Soient  $M_1^k$  et  $M_2^k$  les deux suites de voisins correspondant aux sommets des triangles. A tout niveau de subdivision  $k$ , nous considérons le plan de normale  $N$  passant par  $M^k$  et les projections  $\mathfrak{m}_1^k$  et  $\mathfrak{m}_2^k$  de  $M_1^k$  et  $M_2^k$  dans ce plan (cf figure 3.5). Nous allons supposer de plus que les vecteurs  $\overrightarrow{M^k \mathfrak{m}_1^k}$ ,  $\overrightarrow{M^k \mathfrak{m}_2^k}$ ,  $\overrightarrow{M^k M_1^k}$  et

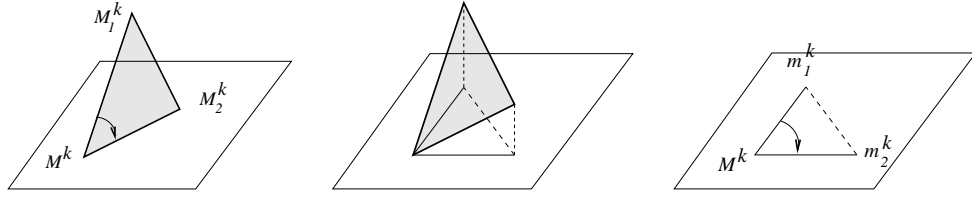


FIG. 3.5 – Angles en  $M^k$  dans un triangle de la surface polyédrique  $\mathcal{P}^k$  et dans sa projection dans le plan tangent.

$\overrightarrow{M^k M_2^k}$  sont normalisés. Nous voulons montrer que l'angle en  $M^k$  du triangle de la surface polyédrique tend vers celui du triangle du plan tangent, soit :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \left| \left( \overrightarrow{M^k M_1^k}, \overrightarrow{M^k M_2^k} \right) \right| - \left| \left( \overrightarrow{M^k m_1^k}, \overrightarrow{M^k m_2^k} \right) \right| \right| = 0$$

pour toute suite de triangles  $\{M^k M_1^k M_2^k\}_k$  correspondant à une suite de triangles emboîtés dans  $\mathfrak{D}$ .

Le lemme 3.2 exprimé avec les angles nous donne :

$$\forall \varepsilon, \quad \exists k_\varepsilon, \quad \forall k > k_\varepsilon, \quad \left| \left| \left( N, \overrightarrow{M^k M_1^k} \right) \right| - \frac{\pi}{2} \right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \left| \left( N, \overrightarrow{M^k M_2^k} \right) \right| - \frac{\pi}{2} \right| \leq \varepsilon$$

Comme  $\overrightarrow{M^k m_1^k}$  et  $\overrightarrow{M^k m_2^k}$  correspondent aux projections des vecteurs  $\overrightarrow{M^k M_1^k}$  et  $\overrightarrow{M^k M_2^k}$  dans le plan normal à  $N$ , il en découle :

$$\forall k > k_\varepsilon, \quad \left| \left( \overrightarrow{M^k m_1^k}, \overrightarrow{M^k M_1^k} \right) \right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \left( \overrightarrow{M^k m_2^k}, \overrightarrow{M^k M_2^k} \right) \right| \leq \varepsilon$$

d'où une majoration de l'erreur entre les angles

$$\left| \left| \left( \overrightarrow{M^k m_1^k}, \overrightarrow{M^k m_2^k} \right) \right| - \left| \left( \overrightarrow{M^k M_1^k}, \overrightarrow{M^k M_2^k} \right) \right| \right| \leq 2\varepsilon$$

Nous supposons que la triangulation est localement conforme<sup>3</sup> à partir d'un certain niveau de subdivision et que la valence autour des sommets est uniformément<sup>4</sup> bornée. Avec ces hypothèses, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |2\pi - \mathfrak{S}(M^k)| &= \left| \sum_i \left( \overrightarrow{M^k m_i^k}, \overrightarrow{M^k m_{i+1}^k} \right) - \sum_i \left( \overrightarrow{M^k M_i^k}, \overrightarrow{M^k M_{i+1}^k} \right) \right| \\ &\leq \sum_i \left| \left| \left( \overrightarrow{M^k m_i^k}, \overrightarrow{M^k m_{i+1}^k} \right) \right| - \left| \left( \overrightarrow{M^k M_i^k}, \overrightarrow{M^k M_{i+1}^k} \right) \right| \right| \leq C\varepsilon \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

3. Conforme signifie que la projection dans le plan tangent conserve l'ordre de parcours des points voisins, c'est-à-dire la topologie locale du maillage de  $\mathbb{R}^3$ .

4. Uniformément bornée signifie qu'il existe un entier  $L$  tel que quelquesoit le sommet de la triangulation, sa valence est inférieure ou égale à  $L$ .

### 3.1.3 Angle de déviation

Nous allons justifier la pertinence de notre méthode en proposant un critère de validation local. Nous considérons  $\{\mathcal{G}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de chemins géodésiques sur une suite de surfaces polyédriques  $\{\mathcal{P}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Définition 3.1** Soit  $(u_0, v_0)$  un point de  $\mathcal{D}$ .  $(u_0, v_0)$  est un point **permanent** de  $\{\mathcal{G}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  si pour tout entier  $k_0$ , il existe un entier  $k$  supérieur à  $k_0$  tel que  $P^k(u_0, v_0)$  est un sommet de déviation de  $\mathcal{G}^k$ .

**Proposition 3.3** Soit  $(u_0, v_0)$  un point permanent de  $\{\mathcal{G}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Soit  $\{\mathcal{G}^{\varphi(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  la sous-suite de  $\{\mathcal{G}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  contenant tous les chemins géodésiques tels que  $P^{\varphi(k)}(u_0, v_0)$  est un sommet de déviation de  $\mathcal{G}^{\varphi(k)}$ . Soit  $\alpha^{\varphi(k)}$  l'angle de déviation de  $\mathcal{G}^{\varphi(k)}$  autour de  $P^{\varphi(k)}(u_0, v_0)$ . Alors, nous avons :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^{\varphi(k)} = 0$$

Démonstration :

Pour alléger les notations, nous allons noter  $\{\mathcal{G}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  la sous-suite  $\{\mathcal{G}^{\varphi(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Comme  $(u_0, v_0)$  est un point permanent,  $P^k(u_0, v_0)$  est un sommet de déviation de  $\{\mathcal{G}^k\}$ . Par conséquent

$$\mathfrak{S}(P^k(u_0, v_0)) > 2\pi \quad (3.5)$$

Rappelons que  $\beta^k$  l'angle de  $\mathcal{G}^k$  autour de  $P^k(u_0, v_0)$  (cf définition 2.11, page 65) vérifie :

$$\mathfrak{S}(P^k(u_0, v_0)) \geq 2\beta^k > 2\pi$$

Or d'après la proposition 3.2

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{S}(P^k(u_0, v_0)) = 2\pi$$

donc  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta^k = \pi$ . L'angle que fait le chemin tend à la limite vers  $\pi$  donc l'angle de déviation tend vers zéro (cf figure 3.6).

□

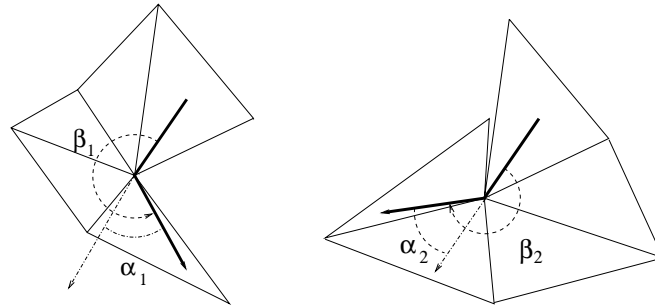


FIG. 3.6 – L'angle de  $\mathcal{G}^k$  autour de  $P^k(u_0, v_0)$  est  $\beta = \min(\beta_1, \beta_2)$  et l'angle de déviation  $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ .

**Théorème 3.1** L'angle de déviation en tout point des chemins géodésiques tend vers zéro.

Démonstration :

Si  $\{\mathcal{P}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de surfaces polyédriques convexes, le résultat est évident car  $\{\mathcal{G}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de chemins géodésiques sans sommet de déviation (cf propriété 2.4 sur les points pivots, page 66).

Plaçons-nous dans le cas où il existe des sommets de déviation. A toute étape de subdivision  $k_0$ , nous pouvons considérer l'ensemble des sommets de déviation :

- si le sommet de déviation considéré est permanent, alors l'angle de déviation autour de ce sommet tend vers zéro d'après la proposition 3.3.
- si le sommet de déviation considéré n'est pas permanent, alors il disparaît à partir d'un certain rang.

□

Ceci traduit donc la convergence *simple* de l'angle de déviation vers zéro qui permet de valider localement le chemin géodésique calculé par notre méthode de subdivision.

Dans le cas des réseaux triangulaires, les topologies des réseaux et des surfaces polyédriques associées sont les mêmes. La convergence uniforme du schéma des différences implique la convergence uniforme des différences divisées vers la différentielle (uniforme sur la surface et pour la direction, cf lemme 3.1). Ceci implique la convergence uniforme du produit scalaire des normales avec les arêtes normalisées des réseaux, \*\* donc des surfaces polyédriques vers 0. Cette convergence uniforme des angles implique alors la convergence uniforme de la somme des angles vers  $2\pi$ . Ce qui implique enfin la convergence uniforme de l'angle de déviation vers 0.

**Remarque 3.4** *Pour les réseaux possédant des mailles non triangulaires, il y a la phase d'extension de la relation d'orthogonalité aux 2-voisins, voire i-voisins du réseau. A ce niveau, il manque la continuité uniforme du vecteur normal sur la surface pour en déduire la convergence uniforme du produit scalaire pour toutes les arêtes des surfaces polyédriques, c'est-à-dire la relation d'orthogonalité pour toutes les arêtes des surfaces polyédriques. Cette phase s'insère alors en \*\* dans le paragraphe ci-dessus.*

**Conjecture** *La continuité uniforme des normales semble fortement liée à la convergence du schéma de subdivision vers une limite  $C^2$ . En effet, la convergence vers une limite  $C^2$  peut se traduire en termes de convergence du schéma des différences d'ordre 2. D'après la proposition 1.5 et les remarques 1.6 et 1.7, pages 51 à 53, la convergence uniforme du schéma des différences d'ordre 2 équivaut à la convergence uniforme du schéma des différences finies du schéma des différences (divisées) d'ordre 1 vers 0. Ceci devrait mener à la convergence uniforme des différences des normales vers 0 et donc à la continuité uniforme des normales sur la surface de subdivision.*

Nous verrons que dans la pratique, cette convergence uniforme a lieu et nous la validerons numériquement en observant le nombre de points pivots, l'angle de déviation et la mise à plat (cf paragraphe 4.1).

### 3.2 Convergence de la suite de chemins $\{\mathcal{G}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$

Nous entrons maintenant dans le détail des différents points concernant la convergence des courbes  $\mathcal{G}^k$  vers un chemin géodésique  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{S}$ .

### 3.2.1 Convergence dans l'espace des paramètres

**Proposition 3.4** *Soit  $\{\mathcal{P}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de surfaces polyédriques qui converge uniformément vers  $\mathcal{S}$ . Soit  $\{\mathcal{C}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de chemins sur  $\{\mathcal{P}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Soit  $\{c^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  la suite de chemins correspondants dans  $\mathfrak{D}$ .  $\{c^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers une courbe  $c$  si et seulement si  $\{\mathcal{C}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers une courbe  $\mathcal{C}$ , image de  $c$  sur  $\mathcal{S}$ .*

Démonstration :

Si  $\{\mathcal{C}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers une courbe  $\mathcal{C}$ , alors  $\mathcal{C}$  est un chemin de  $\mathcal{S}$ , d'après la convergence de  $\{\mathcal{P}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $\mathcal{S}$ . Les chemins correspondant dans  $\mathfrak{D}$  convergent donc également.

Supposons maintenant que nous avons la convergence dans  $\mathfrak{D}$ . Montrons que  $\mathcal{C}^k$  converge vers  $\mathcal{C}$ . La courbe  $\mathcal{C}^k$  est paramétrée par  $\mathbf{P}^k \circ c^k$  et  $\mathcal{C}$ , l'image de  $c$  sur  $\mathcal{S}$  par  $\mathbf{S} \circ c$ .

$$\begin{aligned} & |\mathbf{P}^k(c^k(t)) - \mathbf{S}(c(t))| \\ & \leq |\mathbf{P}^k(c^k(t)) - \mathbf{S}(c^k(t))| + |\mathbf{S}(c^k(t)) - \mathbf{S}(c(t))| \end{aligned}$$

La convergence uniforme de la suite  $\{\mathcal{P}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $\mathcal{S}$  :

$$\forall \varepsilon \quad \exists k_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad \forall k \geq k_\varepsilon \quad |\mathbf{P}^k(m) - \mathbf{S}(m)| \leq \varepsilon \quad \forall m \in \mathfrak{D}$$

appliquée en particulier à  $m = c^k(t)$  permet de majorer le premier terme. La convergence de la suite de courbes dans  $\mathfrak{D}$

$$\forall \eta, \quad \forall t, \quad \exists k_{\eta,t} \quad \text{tel que} \quad \forall k \geq k_{\eta,t} \quad |c^k(t) - c(t)| \leq \eta,$$

associée à la continuité de  $\mathcal{S}$  :

$$\forall \varepsilon, \quad \exists \eta, \quad \text{tel que} \quad |m^k - m| \leq \eta \quad \Rightarrow |\mathbf{S}(m^k) - \mathbf{S}(m)| \leq \varepsilon$$

permet de majorer le deuxième terme, ce qui nous donne la convergence de la suite de courbes dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}^k(c^k(t)) = \mathbf{S}(c(t))$$

□

Cette première phase ramène l'étude de la convergence des chemins  $\mathcal{C}^k$  des différentes surfaces  $\mathcal{P}^k$  à l'étude de la convergence des chemins correspondants dans  $\mathfrak{D}$ .

Nous proposons de paramétrer  $c^k$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  en effectuant une répartition régulière de ses sommets ou en les répartissant suivant la longueur de chaque segment de la ligne brisée tri-dimensionnelle relativement à sa longueur totale. Ce dernier paramétrage présente l'intérêt de pouvoir observer en même temps la convergence au sens des longueurs.

### 3.2.2 Observation de l'algorithme

Nous cherchons à établir la convergence de la suite de chemins  $\{\mathcal{G}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  vers un chemin limite. En effet, comme le suggère la définition des points permanents, l'algorithme pourrait pivoter entre deux configurations et ne pas engendrer de chemin limite.

Si nous nous plaçons dans l'espace des paramètres  $\mathfrak{D}$ , à un niveau de subdivision fixe, notre algorithme calcule un chemin géodésique. L'évolution est complètement dépendante de la surface tri-dimensionnelle. Au niveau de l'étape de subdivision, il n'y a pas d'ajout

d'information en ce qui concerne le chemin, il reste identique dans  $\mathfrak{D}$ , par contre, les points tri-dimensionnels changent. La convergence repose donc complètement sur le lien entre les surfaces polyédriques. Nous ne sommes pas parvenus à établir cette convergence ; elle n'est peut-être pas démontrable mais nous verrons néanmoins que ce point semble validé dans les exemples (cf chapitre 4).

# Chapitre 4

## Résultats

En effectuant une étude complète sur un ensemble de tests, nous donnons une validation numérique de notre méthode. Nous discutons l'influence de la triangulation des réseaux, l'intérêt de l'approche progressive par la subdivision et l'évolution de la longueur des chemins calculés. Nous étudions enfin la complexité de la méthode.

### 4.1 Validation numérique

#### 4.1.1 Analyse des résultats

Pour l'étude des exemples, nous donnons les informations suivantes :

- l'étape de **subdivision**  $k$ .
- la **longueur** du chemin géodésique  $\mathcal{G}^k$  sur la surface polyédrique  $\mathcal{P}^k$ .
- la visualisation de  $\mathcal{G}^k$  sur  $\mathcal{P}^k$  et éventuellement celle de la séquence de faces  $\mathcal{F}^k$  qui contient  $\mathcal{G}^k$ .
- la séquence de faces mise à plat  $\mathfrak{F}^k$  et le chemin  $\mathfrak{G}^k$ , qui correspond à la mise à plat du chemin géodésique  $\mathcal{G}^k$  dans  $\mathfrak{F}^k$ .
- le nombre de **pivots** à l'initialisation d'un chemin sur la surface polyédrique  $\mathcal{P}^k$ , c'est-à-dire avant les étapes de mise à jour.
- le nombre de mises à jour ou nombre d'**itérations** effectuées au niveau de subdivision  $k$  pour trouver  $\mathcal{G}^k$  sur  $\mathcal{P}^k$ .
- le nombre de **sommets** de déviation dans le chemin géodésique  $\mathcal{G}^k$ .
- l'**angle** de déviation maximal aux sommets de déviation de  $\mathcal{G}^k$ .
- la visualisation des projections  $g^k$  des chemins géodésiques  $\mathcal{G}^k$  dans l'espace des paramètres  $\mathfrak{D}$ . Afin de pouvoir mieux observer leur évolution, ces courbes sont observées sur le même graphe ; elles sont translatées pour une meilleure lisibilité. De gauche à droite, elles correspondent à des niveaux de subdivision croissants. La courbe la plus à droite correspond à celle obtenue à la dernière étape de subdivision, c'est-à-dire  $g^K$  et n'est pas translatée.

L'analyse des résultats nous permet de valider numériquement notre méthode sur de multiples aspects. En observant sur les exemples l'évolution des différents paramètres avec la subdivision, nous constatons que les résultats apportent les conjectures suivantes :



### l'existence d'une courbe limite

- la visualisation des courbes sur les surfaces polyédriques  $\mathcal{P}^k$  montre une localisation très rapide sur les surfaces, qui elles-mêmes convergent très rapidement vers la surface de subdivision.
- la visualisation des courbes dans  $\mathcal{D}$  confirme cette observation de convergence rapide, c'est-à-dire avec très peu de subdivisions vers une courbe limite.
- la convergence des longueurs est observée, et est une conséquence immédiate de la convergence des chemins.

### la déviation globale

- le nombre de sommets de déviation sur les chemins géodésiques reste constant
- l'angle de déviation maximal tend vers zéro
- la mise à plat tend à être localement et globalement rectiligne

La déviation locale a fait l'objet du chapitre précédent, la déviation globale est constatée dans les exemples (cf remarque 3.4, page 84).

### la stabilité algorithmique

- à chaque subdivision, le chemin est initialisé par projection. Lors de cette phase d'initialisation du processus itératif de calcul de chemin géodésique sur une surface polyédrique, le nombre de pivots est constant, indépendamment du niveau de subdivision ; le nombre de points autour desquels le chemin serait susceptible d'être dévié augmente pourtant rapidement.
- le nombre d'itérations évolue *raisonnablement*.

Nous retrouverons ce dernier point dans le paragraphe 4.2.2 et dans l'étude de la complexité (cf paragraphe 4.3).

#### 4.1.2 Tests

Nous avons choisi quatre exemples pour illustrer l'ensemble des tests que nous avons effectués ; ils correspondent à une nappe simple, une surface avec une montagne, une nappe complexe et une surface avec deux montagnes. Afin de faciliter la visualisation ultérieure des exemples, les surfaces sont observées sous différents angles de vue.

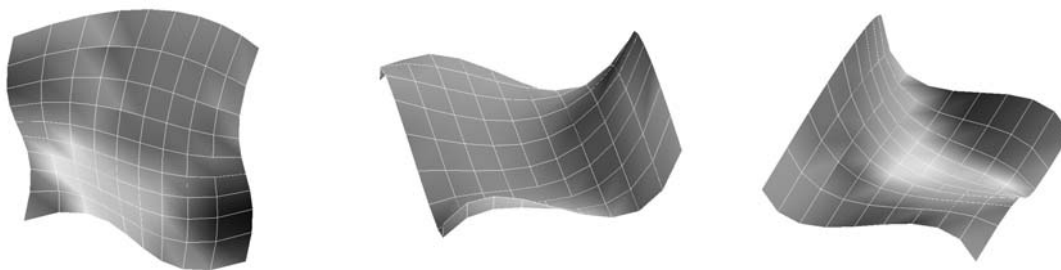


FIG. 4.1 – *Nappe simple correspondant à une surface de Bézier de degré  $3 \times 3$ .*

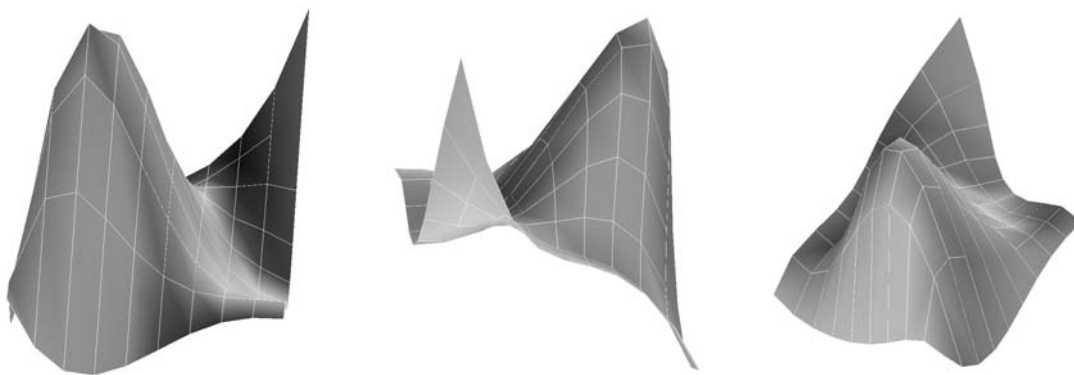


FIG. 4.2 – *Surface avec une montagne correspondant à une surface de Bézier de degré  $6 \times 6$ .*

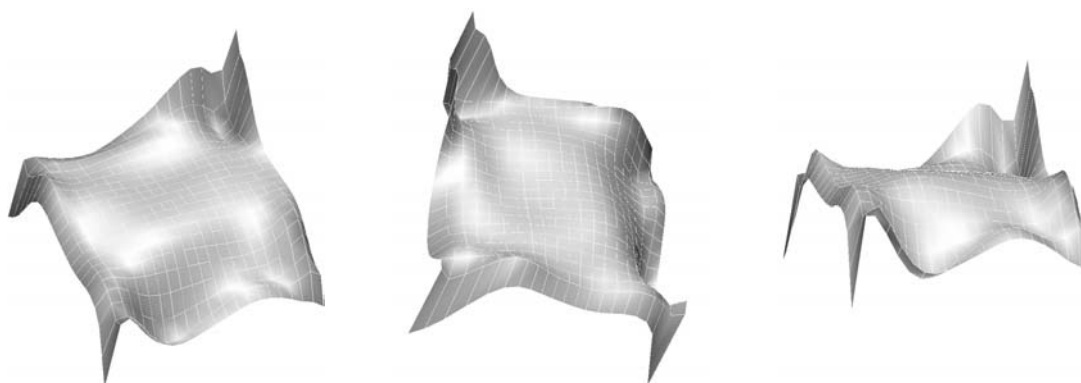


FIG. 4.3 – *Nappe complexe correspondant à une surface de Bézier de degré  $10 \times 10$ .*

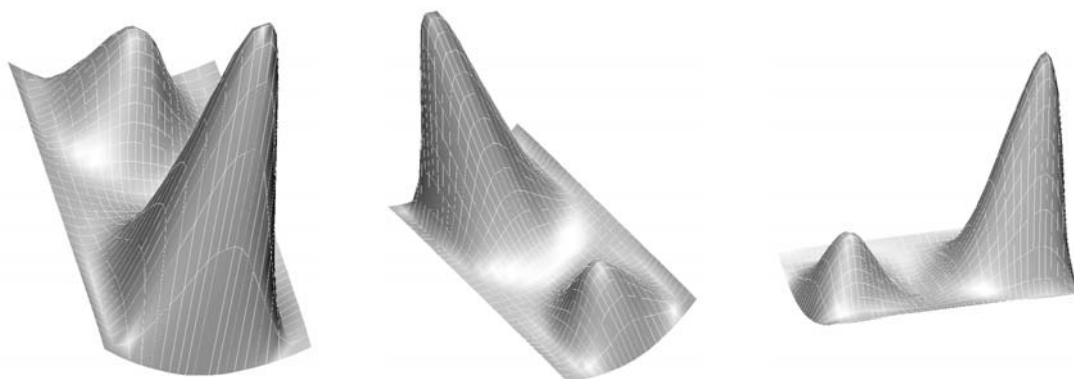
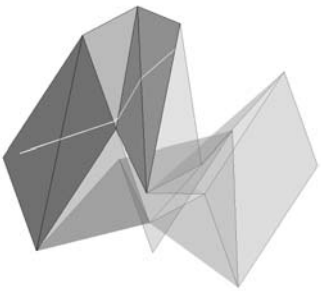
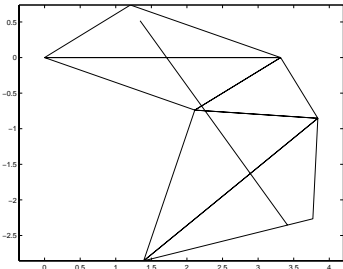
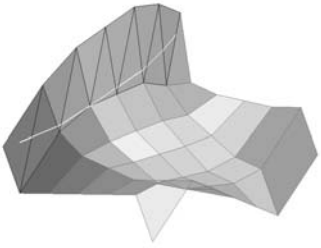
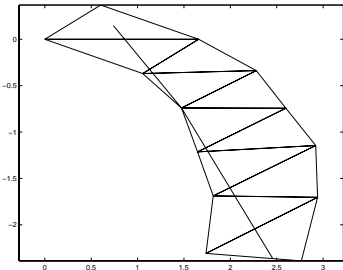
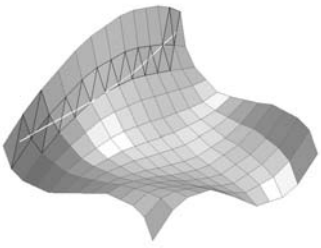
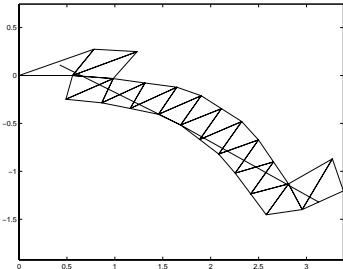
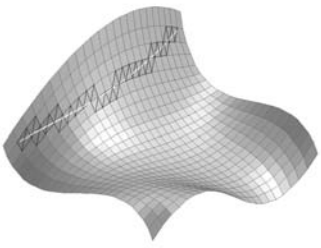
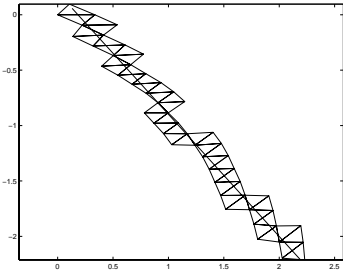


FIG. 4.4 – *Surface avec deux montagnes correspondant à une surface de Bézier de degré  $9 \times 5$ .*

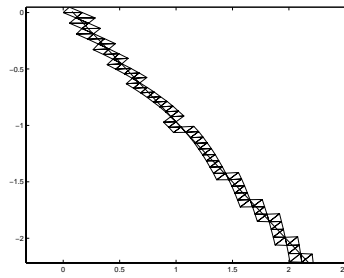
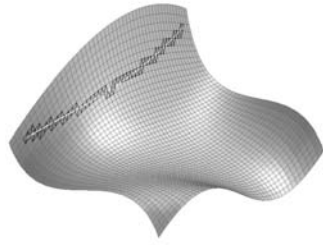
## CAS D'UNE NAPPE SIMPLE

subdivision longueur	géodésique sur la surface polyédrique et séquence de triangles	mise à plat	déviaton
subdivision <b>0</b>  longueur <b>3.539</b>			pivot : <b>0</b>
subdivision <b>1</b>  longueur <b>3.051</b>			pivot : <b>1</b> itérations : <b>3</b> sommet : <b>1</b> angle max : <b>0.07</b>
subdivision <b>2</b>  longueur <b>3.058</b>			pivot : <b>1</b> itérations : <b>3</b> sommet : <b>1</b> angle max : <b>0.02</b>
subdivision <b>3</b>  longueur <b>3.062</b>			pivot : <b>2</b> itérations : <b>7</b> sommet : <b>1</b> angle max : <b>0.0006</b>

subdivision

**4**

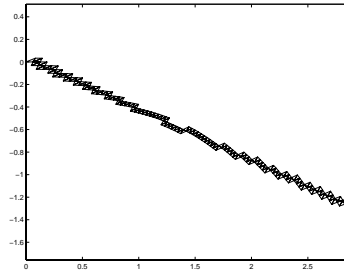
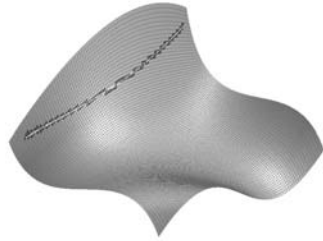
longueur

**3.0573**pivot : **3**itérations : **7**sommet : **0**

subdivision

**5**

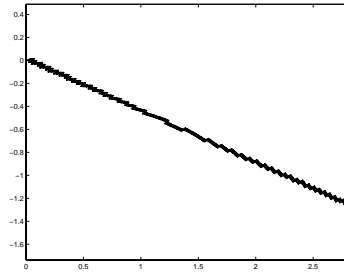
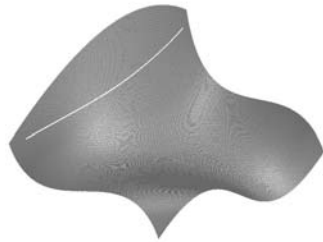
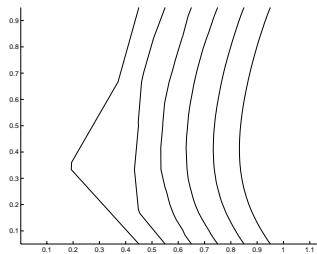
longueur

**3.0575**pivot : **4**itérations : **11**sommet : **1**angle max : **0.0003**

subdivision

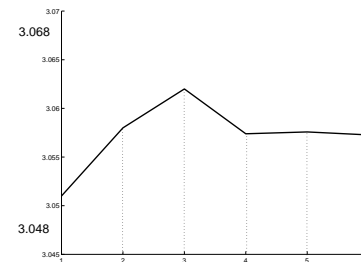
**6**

longueur

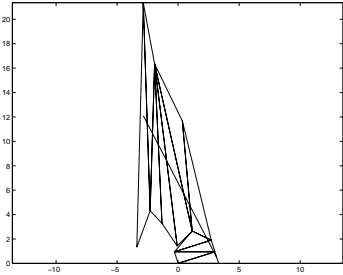
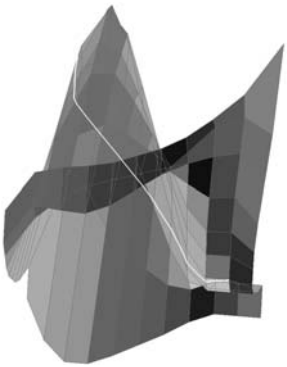
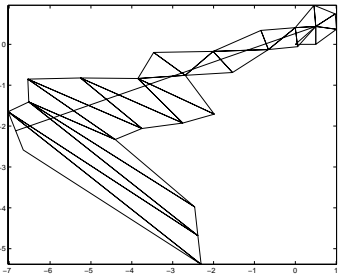
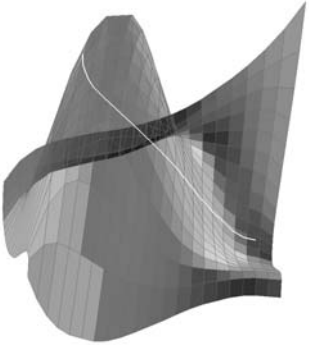
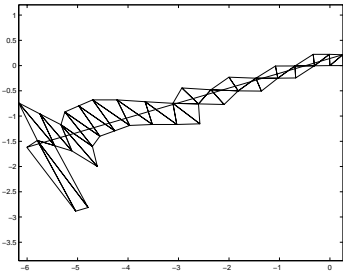
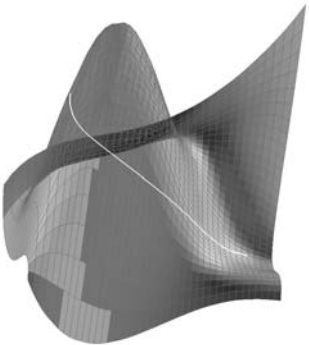
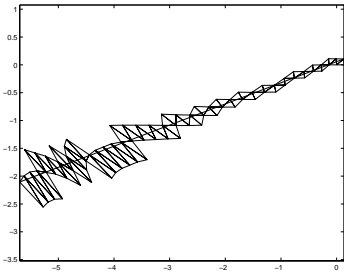
**3.0572**pivot : **3**itérations : **17**sommet : **2**angle max : **0.00005**

Visualisation dans l'espace des paramètres des courbes  $g^k$  correspondant aux chemins géodésiques  $\mathcal{G}^k$ .

Tracé des longueurs en fonction du niveau de subdivision à partir de la subdivision 1. Les longueurs ne diminuent pas à chaque étape car elles correspondent à des chemins géodésiques sur des surfaces différentes (cf paragraphe 4.2.3).

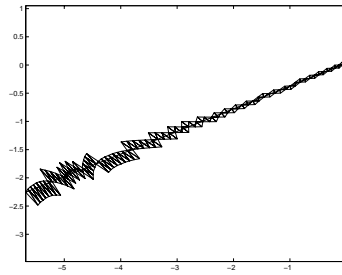
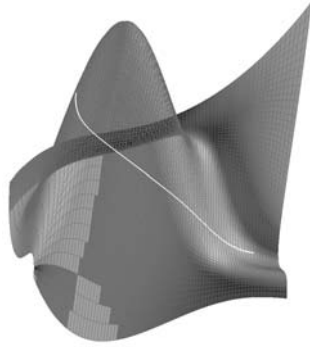


CAS D'UNE SURFACE AVEC UNE MONTAGNE

subdivision longueur	géodésique sur la surface polyédrique	mise à plat	déviatio
subdivision <b>0</b>			pivot : <b>1</b> itérations : <b>2</b> sommet : <b>0</b>
longueur <b>13.08</b>			pivot : <b>5</b> itérations : <b>19</b> sommet : <b>0</b>
subdivision <b>1</b>			
longueur <b>7.77</b>			pivot : <b>5</b> itérations : <b>14</b> sommet : <b>0</b>
subdivision <b>2</b>			
longueur <b>6.52</b>			pivot : <b>6</b> itérations : <b>28</b> sommet : <b>0</b>
subdivision <b>3</b>			
longueur <b>6.22</b>			

subdivision  
**4**

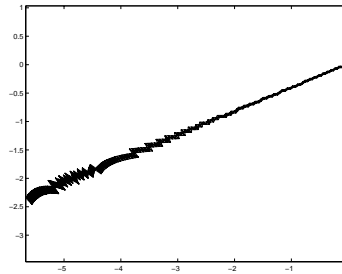
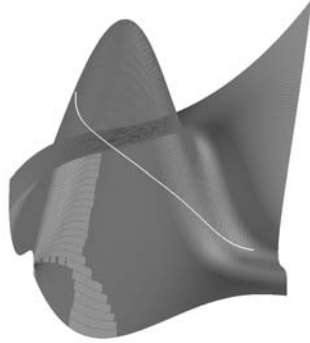
longueur  
**6.19**



pivot : **4**  
itérations : **5**  
sommet : **0**

subdivision  
**5**

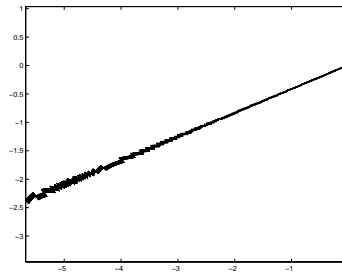
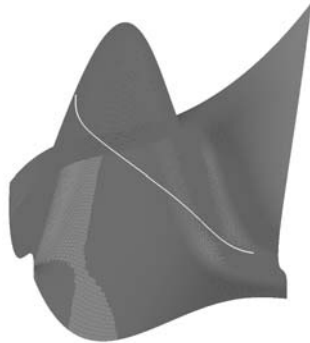
longueur  
**6.176**



pivot : **3**  
itérations : **39**  
sommet : **0**

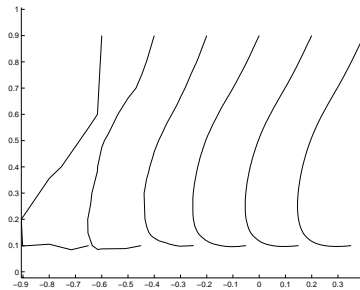
subdivision  
**6**

longueur  
**6.173**



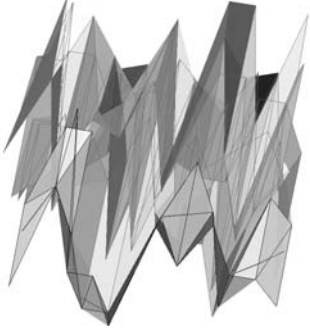
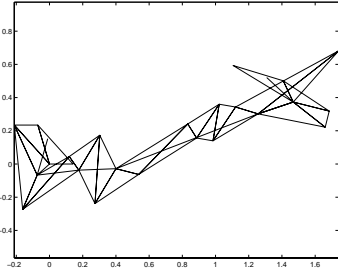
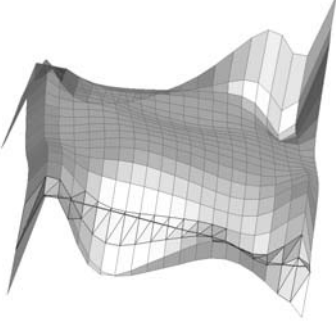
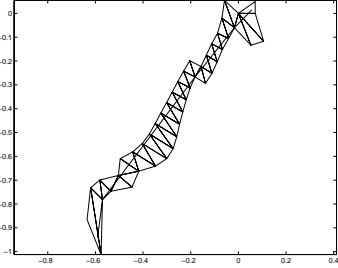
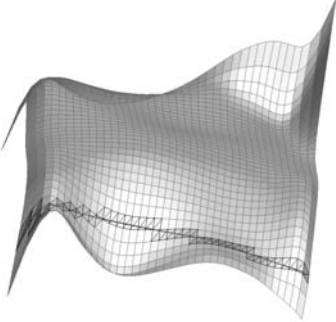
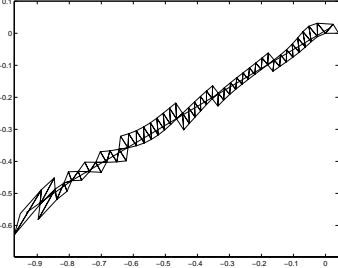
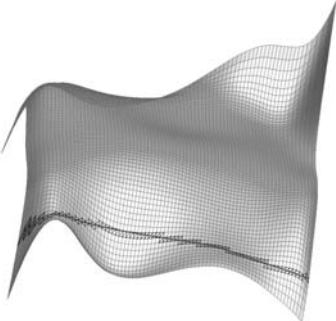
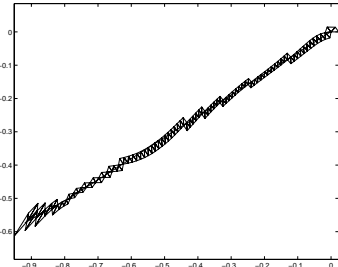
pivot : **5**  
itérations : **26**  
sommet : **0**

Dans la dernière colonne, nous pouvons voir que les mises à jour à chaque subdivision génèrent des chemins géodésiques sans sommet de déviation.



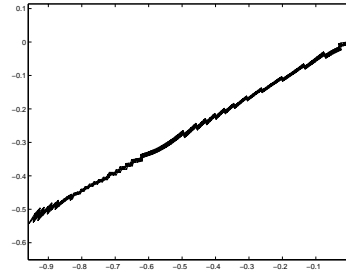
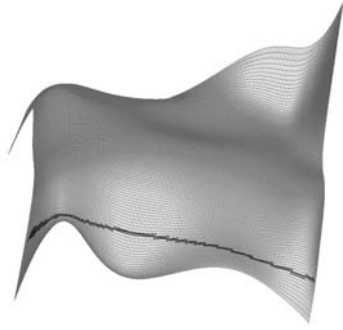
Visualisation dans l'espace des paramètres des courbes  $g^k$  correspondant aux chemins géodésiques  $\mathcal{G}^k$ .

## CAS D'UNE NAPPE COMPLEXE

subdivision longueur	géodésique sur la surface polyédrique et séquence de triangles	mise à plat	déviations
subdivision <b>0</b>  longueur <b>2.06</b>			pivot : <b>5</b> itérations : <b>6</b> sommet : <b>5</b> angle max : <b>0.8</b>
subdivision <b>1</b>  longueur <b>1.17</b>			pivot : <b>10</b> itérations : <b>111</b> sommet : <b>3</b> angle max : <b>0.3</b>
subdivision <b>2</b>  longueur <b>1.11</b>			pivot : <b>8</b> itérations : <b>24</b> sommet : <b>2</b> angle max : <b>0.03</b>
subdivision <b>3</b>  longueur <b>1.0876</b>			pivot : <b>7</b> itérations : <b>86</b> sommet : <b>2</b> angle max : <b>0.02</b>

subdivision  
**4**

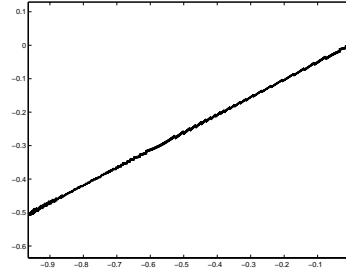
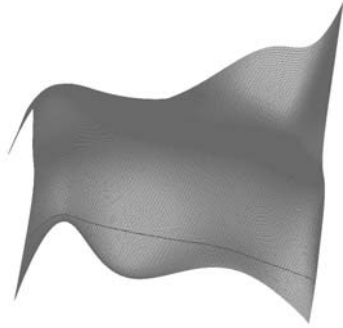
longueur  
**1.0884**



pivot : **7**  
itérations : **49**  
sommet : **2**  
angle max : **0.003**

subdivision  
**5**

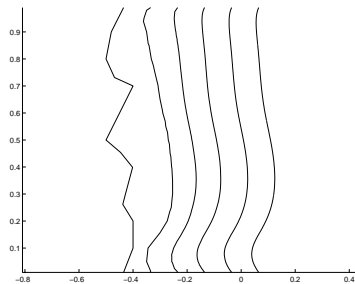
longueur  
**1.0881**



pivot : **9**  
itérations : **127**  
sommet : **1**  
angle max : **0.00008**

Dans la première mise à plat, nous pouvons observer que la séquence se recouvre autour d'un sommet, ce qui met d'autant plus en évidence la présence d'un sommet de déviation.

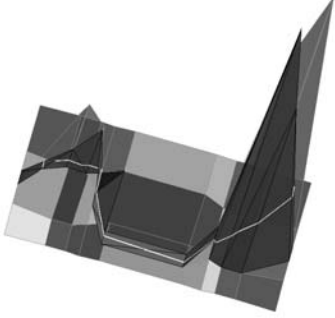
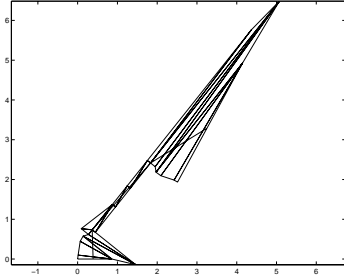
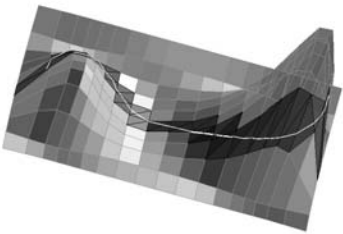
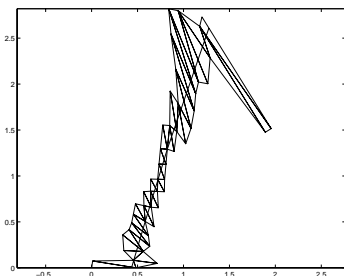
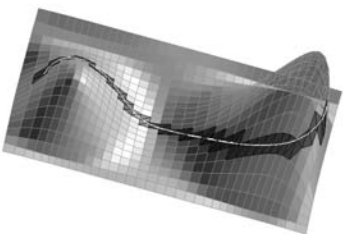
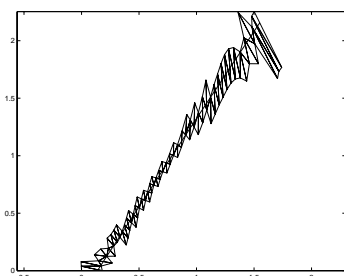
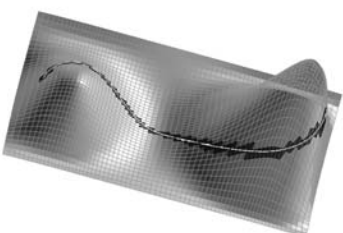
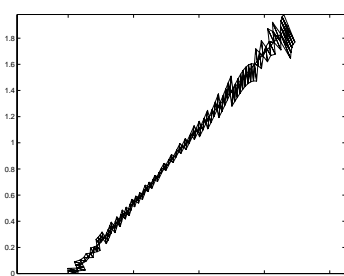
A la subdivision 1, le chemin calculé longe le bord. Ce cas est pris en compte par notre algorithme, la restriction ici étant qu'aucune mise à jour ne peut être effectuée autour d'un point de contrôle appartenant au bord du réseau. S'il existe un pivot permanent sur le bord du domaine, du fait de cette restriction, rien ne garanti qu'en ce point, la déviation des chemins tende vers 0. Sur cet exemple, le phénomène de bord disparaît à la subdivision suivante ; en pratique, nous considérons des paires d'extrémités telles que le chemin géodésique n'a pas cette particularité de longer le bord de la surface.



Visualisation dans l'espace des paramètres des courbes  $g^k$  correspondant aux chemins géodésiques  $\mathcal{G}^k$ .

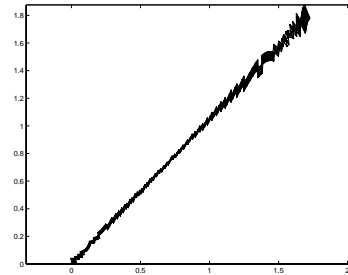
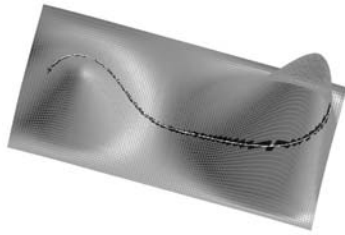


## CAS D'UNE SURFACE AVEC DEUX MONTAGNES

subdivision longueur	géodésique sur la surface polyédrique et séquence de triangles	mise à plat	déviations
subdivision <b>0</b>  longueur <b>4.61</b>			pivot : <b>2</b> itérations : <b>14</b> sommet : <b>2</b> angle max : <b>0.5</b>
subdivision <b>1</b>  longueur <b>2.73</b>			pivot : <b>6</b> itérations : <b>13</b> sommet : <b>2</b> angle max : <b>0.01</b>
subdivision <b>2</b>  longueur <b>2.56</b>			pivot : <b>4</b> itérations : <b>9</b> sommet : <b>2</b> angle max : <b>0.001</b>
subdivision <b>3</b>  longueur <b>2.49</b>			pivot : <b>8</b> itérations : <b>56</b> sommet : <b>1</b> angle max : <b>0.0002</b>

subdivision  
**4**

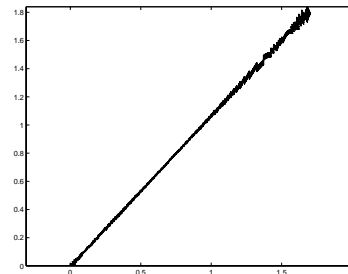
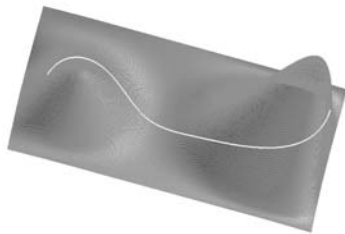
longueur  
**2.477**



pivot : **12**  
itérations : **85**  
sommet : **3**  
angle max : **0.0003**

subdivision  
**5**

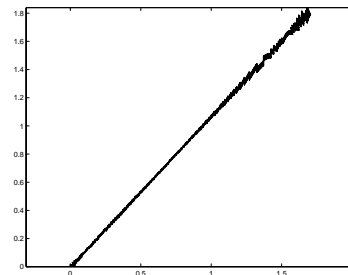
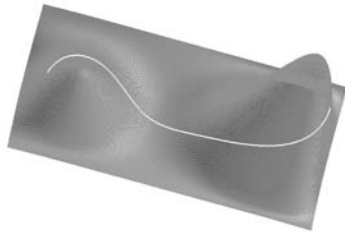
longueur  
**2.473**



pivot : **14**  
itérations : **122**  
sommet : **2**  
angle max : **0.00001**

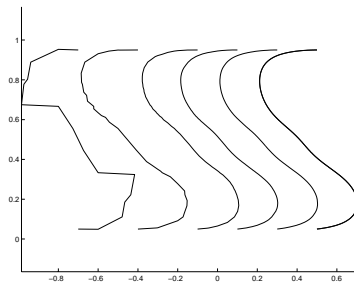
subdivision  
**6**

longueur  
**2.472**



pivot : **10**  
itérations : **94**  
sommet : **1**  
angle max : **0.00001**

Cette surface est visualisée avec un degré de transparence. Ceci permet, dans la figure représentant la surface polyédrique initiale  $\mathcal{P}^0$ , de voir complètement le chemin géodésique  $\mathcal{G}^0$ . Le chemin  $\mathcal{G}^0$  contourne la montagne de gauche.



Visualisation dans l'espace des paramètres des courbes  $g^k$  correspondant aux chemins géodésiques  $\mathcal{G}^k$ .

## 4.2 Discussion

### 4.2.1 Influence de la triangulation

Dans le cas de surfaces produit tensoriel, les réseaux engendrés possèdent des mailles quadrangulaires qui ne correspondent pas nécessairement à des faces planes. Une phase de triangulation s'avère donc nécessaire pour effectuer le passage de réseau à surface polyédrique. Nous discutons ici l'influence du choix de la triangulation sur la méthode en présentant un exemple qui correspond à la surface avec deux montagnes.

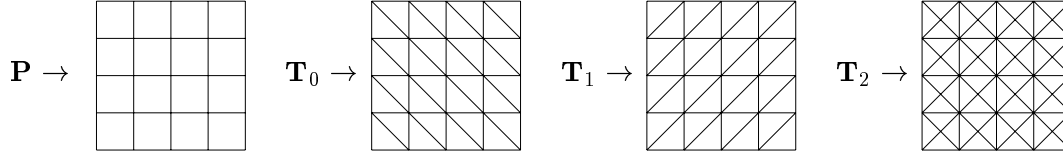


FIG. 4.5 – *Différentes triangulations à partir d'un réseau produit tensoriel*

Subd.	Sommets de déviation			Angle de déviation			Longueur		
	$\mathbf{T}_0$	$\mathbf{T}_1$	$\mathbf{T}_2$	$\mathbf{T}_0$	$\mathbf{T}_1$	$\mathbf{T}_2$	$\mathbf{T}_0$	$\mathbf{T}_1$	$\mathbf{T}_2$
<b>0</b>	2	3	5	0.5	0.2	0.7	4.6185	9.181	9.004
<b>1</b>	2	1	2	0.01	0.03	0.02	2.7348	2.7338	2.7305
<b>2</b>	2	2	2	0.003	0.005	0.001	2.5673	2.5664	2.5658
<b>3</b>	1	1	2	0.0002	0.0003	0.0001	2.4995	2.4992	2.4991
<b>4</b>	3	1	2	0.0003	0.0001	0.0001	2.4770	2.4769	2.4769
<b>5</b>	3	1	3	0.0003	0.000006	0.00001	2.4735	2.4735	2.4735
<b>6</b>	1	0	2	0.00001	0	0.000005	2.4723	2.4723	2.4723

FIG. 4.6 – *Comparaison entre différentes triangulations.*

Les réseaux  $\mathcal{P}^k$  correspondant à la surface avec deux montagnes sont triangulés de 3 façons différentes suivant les configurations proposées par la figure 4.5. Dans la figure 4.6, les chemins géodésiques calculés sont comparés en termes de sommets de déviation, d'angle de déviation et de longueur à chaque niveau de subdivision.

Nous constatons que le nombre de sommets de déviation est différent pour chacune des triangulations et ceci est prévisible puisque la méthode est appliquée à des surfaces polyédriques différentes. Nous observons que les différentes solutions ont très peu de sommets de déviation, donc quelqusoit la triangulation, la méthode est performante. Ceci est également visible dans l'évolution de l'angle de déviation avec la subdivision, qui dans les 3 cas de figures tend rapidement vers 0. Les longueurs diffèrent sur des subdivisions grossières mais tendent rapidement vers une valeur commune. Ceci se retrouve dans la figure 4.7 qui montre graphiquement l'influence de la triangulation. A peu de subdivisions, les trois types de triangulations génèrent des solutions très différentes en termes de position; cependant, au delà de 3 subdivisions, les courbes obtenues ne sont plus distinguables. Comme les 3 jeux de surfaces polyédriques convergent vers la surface limite, les 3 courbes limites coïncident.

triangulation	courbe	cpu
$\mathbf{T}_0$	-----	26
$\mathbf{T}_1$	- . - . - . - .	22
$\mathbf{T}_2$	.....	80

La triangulation  $\mathbf{T}_2$  est naturellement plus coûteuse en temps car elle contient plus de triangles.

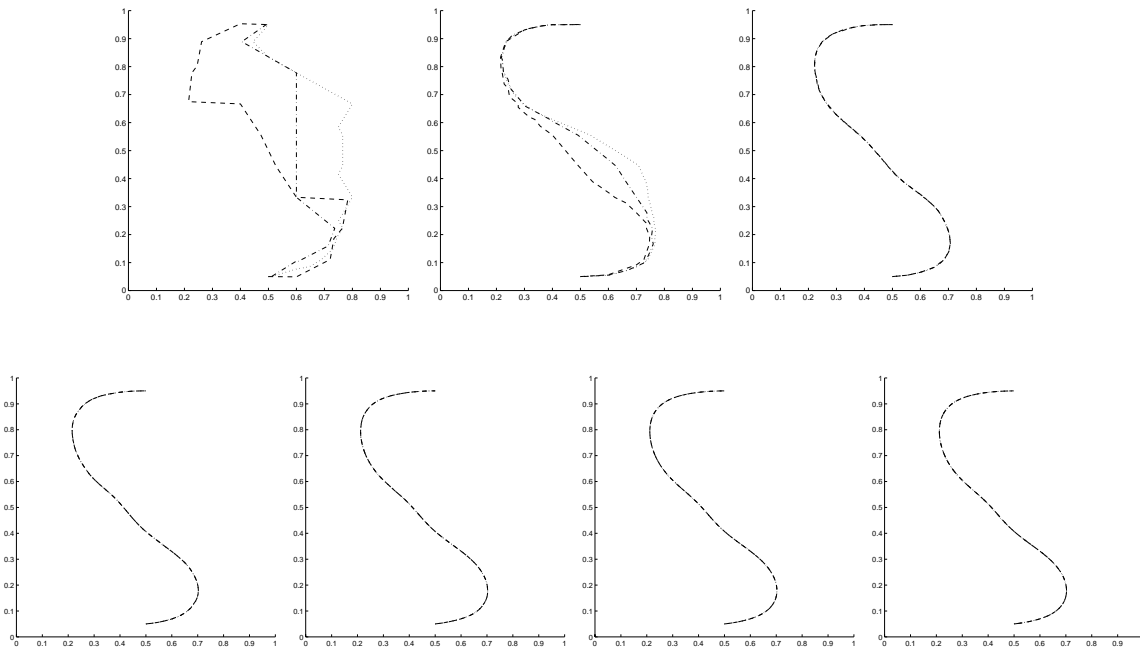


FIG. 4.7 – *Comparaison entre différentes triangulations des réseaux. Visualisation à chaque niveau de subdivision des courbes dans l'espace des paramètres  $\mathcal{D}$ .*

### 4.2.2 Subdivision progressive et subdivision directe

Comme nous l'avons déjà souligné, notre méthode présente la particularité d'utiliser la subdivision des réseaux. Elle pourrait être qualifiée de méthode *doublement* itérative dans le sens où elle est itérative lors du calcul de géodésique à subdivision fixée et itérative dans la suite de chemins géodésiques  $\{\mathcal{G}^k\}_{k \leq K}$  engendrés à chaque niveau de subdivision. Nous montrons ici l'intérêt de cette itération *globale* ou de ce que nous appelons **subdivision progressive**. En travaillant sur des approximations grossières de la surface, notre méthode permet une approche globale et une initialisation du processus sur une surface où les séquences traversées contiennent relativement peu de triangles. Avec la subdivision, la géodésique présente l'avantage d'être déjà grossièrement localisée.

Nous proposons une comparaison avec ce que nous appelons méthode basée sur la **subdivision directe** : cette dernière consiste à supprimer la phase de construction progressive et itérative des chemins  $\mathcal{G}^k, k < K$  ; elle consiste à déterminer directement le chemin géodésique  $\mathcal{G}^K$  sur la surface polyédrique  $\mathcal{P}^K$ . La différence du point de vue de l'implémentation est la suivante : pour la méthode directe, la première étape consiste à subdiviser le réseau initial jusqu'au niveau de subdivision maximal souhaité  $K$  ; l'algorithme itératif de calcul de géodésique sur  $\mathcal{P}^K$  à partir d'une initialisation quelconque est ensuite appliqué. Ici, le travail se fait immédiatement sur une surface très raffinée, le chemin initial traverse donc un grand nombre de triangles et possède ainsi un nombre de points pivots conséquent. Les séquences manipulées sont longues dès la première itération.

Les tableaux 4.8, 4.9 et 4.10 comparent le nombre total d'itérations effectuées, le nombre de points pivots avant mise à jour, les temps de calcul et les longueurs des chemins à différents niveaux de subdivision. Leur lecture se fait colonne par colonne pour observer l'évolution de ces différents aspects avec la subdivision, et en comparant les évolutions entre les colonnes *directe* et *progressive*. Les ... dans les tableaux correspondent à des problèmes de mémoire liés au trop grand nombre d'itérations effectuées.

Subd.	Nb total d'itérations		Nb pivots avant mise à jour		Temps de calcul		Longueur	
	directe	progr.	directe	progr.	directe	progr.	directe	progr.
<b>0</b>	14	14	2	2	0.4	0.4	4.6185	4.6185
<b>1</b>	76	27	10	6	0.24	0.1	2.7381	2.7348
<b>2</b>	375	36	21	4	1.86	0.24	2.5673	2.5673
<b>3</b>	1379	96	39	8	14	0.96	2.4995	2.4995
<b>4</b>	5380	181	83	12	125	3.3	2.4770	2.4770
<b>5</b>	...	243	167	14	...	11	...	2.4735
<b>6</b>	...	339	350	10	...	28	...	2.4723

FIG. 4.8 – Comparaison pour la surface avec deux montagnes.

Subd.	Nb total d'itérations		Nb pivots avant mise à jour		Temps de calcul		Longueur	
	directe	progr.	directe	progr.	directe	progr.	directe	progr.
0	2	2	1	1	0.3	0.3	13.0818	13.0818
1	16	21	6	5	0.07	0.06	7.4218	7.7729
2	69	35	5	5	0.23	0.1	6.5744	6.5200
3	295	63	3	6	1.59	0.36	6.3699	6.2267
4	857	69	4	4	8.68	0.58	6.1902	6.1902
5	3611	108	12	3	79	2	6.1762	6.1762
6	...	134	19	5	...	5.19	...	6.1736

FIG. 4.9 – *Comparaison pour la surface avec une montagne.*

Subd.	Nb total d'itérations		Nb pivots avant mise à jour		Temps de calcul		Longueur	
	directe	progr.	directe	progr.	directe	progr.	directe	progr.
0	6	6	5	5	0.4	0.4	2.0634	2.0634
1	52	117	11	10	0.19	0.43	1.1754	1.1754
2	95	141	11	8	0.63	0.64	1.0876	1.1104
3	490	227	31	7	5.28	1.75	1.0876	1.0876
4	1905	276	75	7	44	3.6	1.0884	1.0884
5	...	403	162	9	...	12.9	...	1.0881
6	...	516	361	9	...	34	...	1.0885

FIG. 4.10 – *Comparaison pour la nappe complexe.*

Le nombre total d'itérations croît très rapidement pour la subdivision directe jusqu'à atteindre les limites en mémoire, mais reste stable pour la subdivision progressive. Le nombre de pivots avant mise à jour y est lié, croît pour la méthode directe et reste constant à chaque subdivision pour la méthode progressive; ceci constitue l'un des atouts de notre méthode. Les temps de calculs sont conséquents. A noter que même si les courbes ne sont pas présentées, elles sont visuellement identiques et les colonnes contenant les longueurs ajoutent une information dans ce sens.

### 4.2.3 Evolution de la longueur

Nous avons établi la décroissance de la longueur lors du calcul de géodésique sur une surface polyédrique (cf théorème 2.3, page 71). Ceci correspond donc ici à l'évolution de la longueur à un niveau de subdivision donné. Pourtant, lors d'une mise à jour autour d'un sommet de déviation, c'est-à-dire autour duquel la mise à jour ne modifie pas le chemin, il apparaît parfois que la longueur augmente. Il s'agit d'un phénomène lié à la précision machine, où la sensibilité numérique intervient ; la différence entre les longueurs est de l'ordre de  $10^{-15}$ .

A titre de remarque, l'évolution de la longueur des chemins géodésiques  $\mathcal{G}^k$  ne décroît pas nécessairement. Il s'agit en effet de chemins sur les différentes surfaces  $\mathcal{P}^k$ , dont les extrémités ne sont pas identiques ; il n'est donc pas possible de prévoir leur décroissance, par contre, elles convergent naturellement vers la longueur de la courbe limite, si cette dernière existe.

## 4.3 Etude de la complexité

### 4.3.1 Place mémoire

Les objets représentés nécessitant de la place en mémoire sont :

– **la surface :**

celle-ci est représentée par son réseau de contrôle initial de  $M \times N$  points de contrôle. Pour effectuer le calcul de plus court chemin, il faut également les réseaux subdivisés jusqu'à  $K$  fois (stockés dans des fichiers). Les réseaux  $\mathbf{P}^k$  contiennent  $(2^k(M-1)+1) \times (2^k(N-1)+1)$  points de contrôle. La place mémoire requise est en  $O(4^K(M \times N))$ .

Ainsi, le nombre de subdivisions est limité dans la majorité des cas par le nombre de points de contrôle générés. Cette limitation du nombre de points n'est en pratique pas vraiment contraignante vue la rapidité de convergence des réseaux de contrôle vers la surface ; peu de subdivisions implique déjà une bonne approximation.

**Remarque 4.1** *Pour restreindre la place mémoire occupée par les points de contrôle, nous envisageons de subdiviser les réseaux localement. La propriété locale du schéma de subdivision le permet. La difficulté ici consiste à déterminer à priori l'ensemble des patches qui, lors de la méthode itérative à une étape de subdivision fixée, vont être traversés par un chemin reliant les deux extrémités. Nous avons néanmoins remarqué que les courbes géodésiques se localisent rapidement vers une certaine zone de la surface. Cette idée de subdiviser localement mériterait d'être approfondie et implémentée.*

– **la séquence de triangles :**

elle contient  $O(2^K(M+N))$  triangles, correspondant à l'ordre du nombre de triangles traversés par un plus court chemin dans l'espace des paramètres. Les figures 4.11 et 4.12 mènent à ce résultat : nous visualisons l'évolution du nombre de triangles traversés en fonction du nombre de subdivisions sur différentes surfaces.

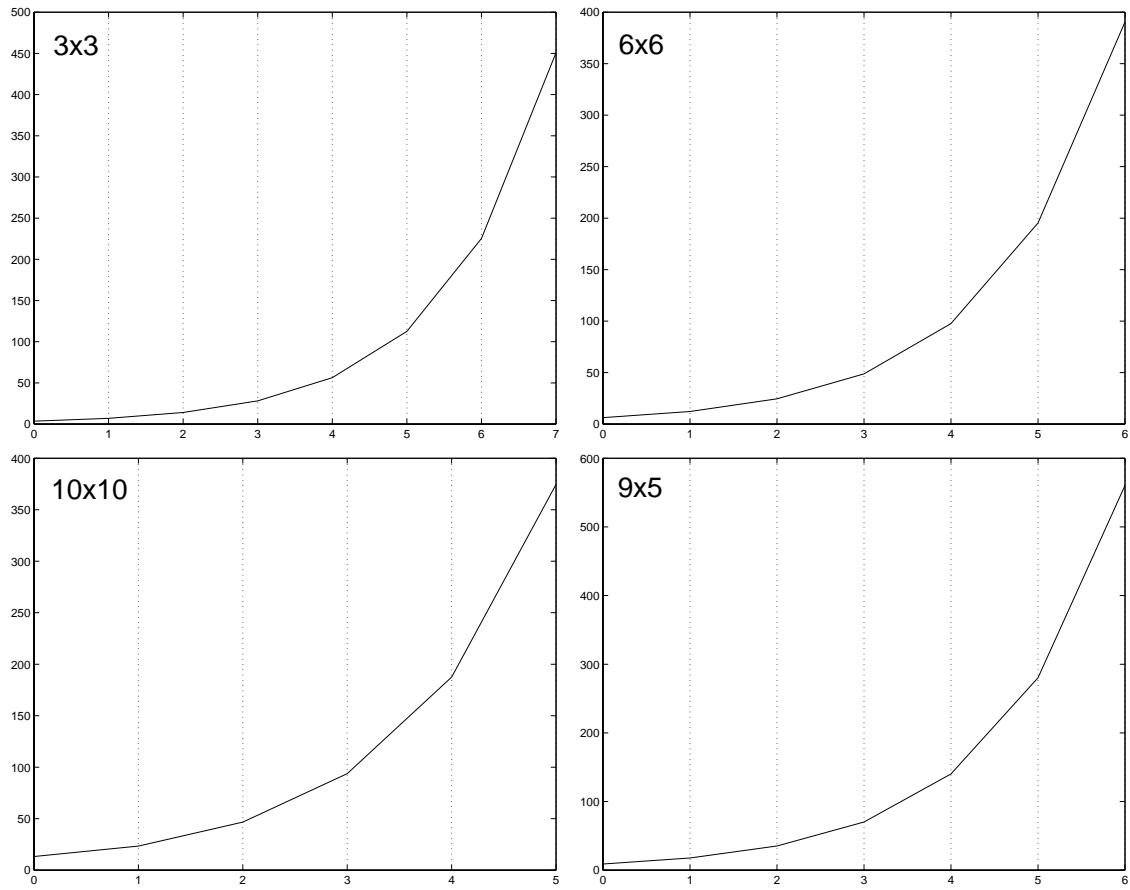


FIG. 4.11 – *Evolution du nombre de triangles traversés en fonction du nombre de subdivisions.*

La figure 4.11 donne l'évolution du nombre de triangles traversés en fonction du nombre de subdivisions sur les quatres surfaces tests. Nous avons choisi aléatoirement un ensemble



de 100 tests sur chacune des surfaces (dont le degré est noté en haut des graphes) et donnons la courbe moyenne de ces tests.

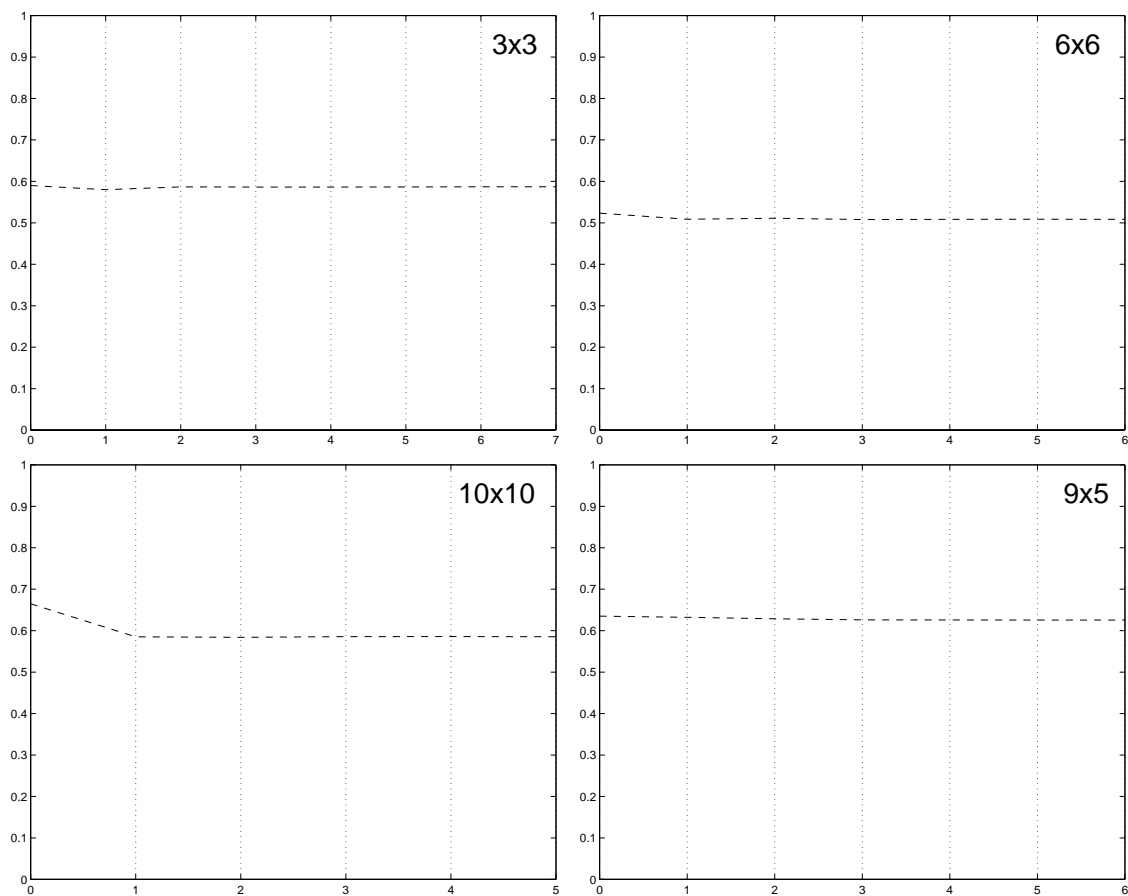


FIG. 4.12 – *Evolution moyenne normalisée par  $2^k(M + N)$ .*

La figure 4.12 correspond aux valeurs des courbes d'évolution moyenne de la figure 4.11 divisées par  $2^k(M + N)$ . Les courbes obtenues sont égales à une constante comprise entre 0.5 et 0.7. Le nombre de triangles traversés par un chemin est donc en  $O(2^k(M + N))$ .

### 4.3.2 Temps de calcul

Nous observons le coût en nombre d'itérations effectuées à chaque subdivision et en temps de calcul. De même que pour le nombre de triangles traversés, nous observons d'abord un ensemble de résultats issus de 100 tests aléatoires et la moyenne de ces résultats sur les quatre surfaces tests.

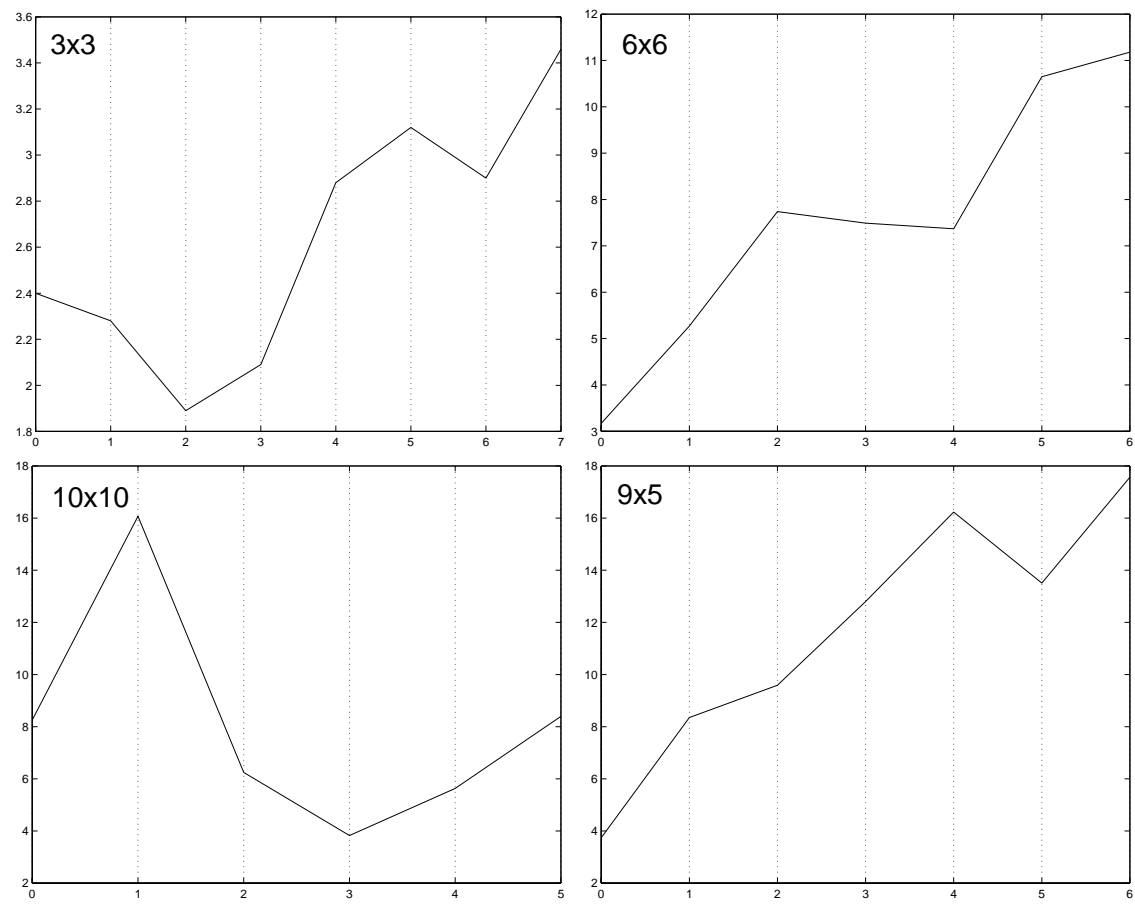


FIG. 4.13 – Evolution du nombre d'itérations effectuées à chaque étape de subdivision.

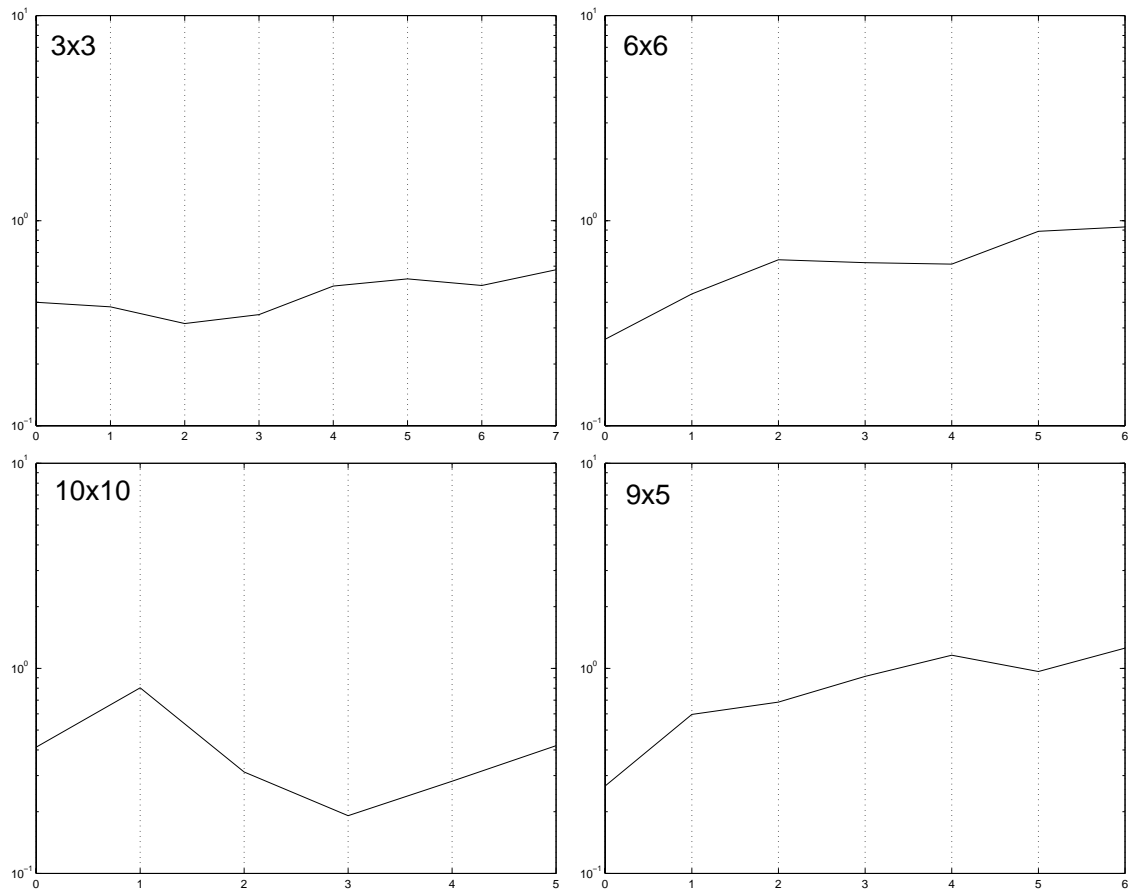


FIG. 4.14 – *Evolution moyenne du nombre d'itérations, normalisée par  $(M + N)$  et visualisée avec une échelle logarithmique. Les pentes des courbes sont proches de 0. La complexité est donc peu dépendante de  $k$  et quasiment en  $O((M + N))$ .*

La complexité en nombre d'itérations est quasiment en  $O((M + N))$  (cf figures 4.13 et 4.14). Le nombre d'itérations dépend aussi de la forme de la surface. Le temps de calcul est de l'ordre du nombre de points de contrôle, c'est-à-dire en  $O(4^k(M \times N))$  (cf figures 4.15 et 4.16). Comme nous l'avons souligné dans la remarque 4.1 concernant la place mémoire, une subdivision locale de la surface permettrait également d'améliorer ce temps de calcul.

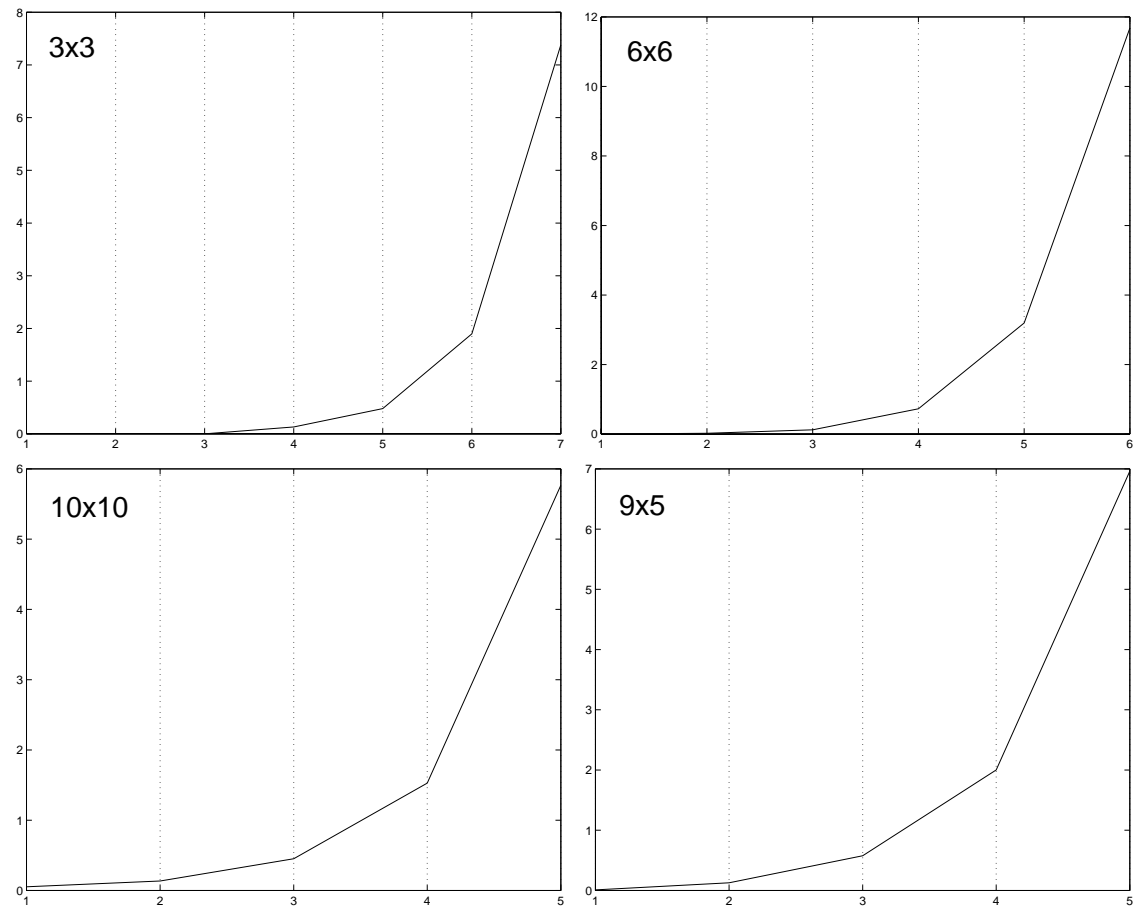


FIG. 4.15 – Evolution du temps de calcul en fonction du niveau de subdivision requis.

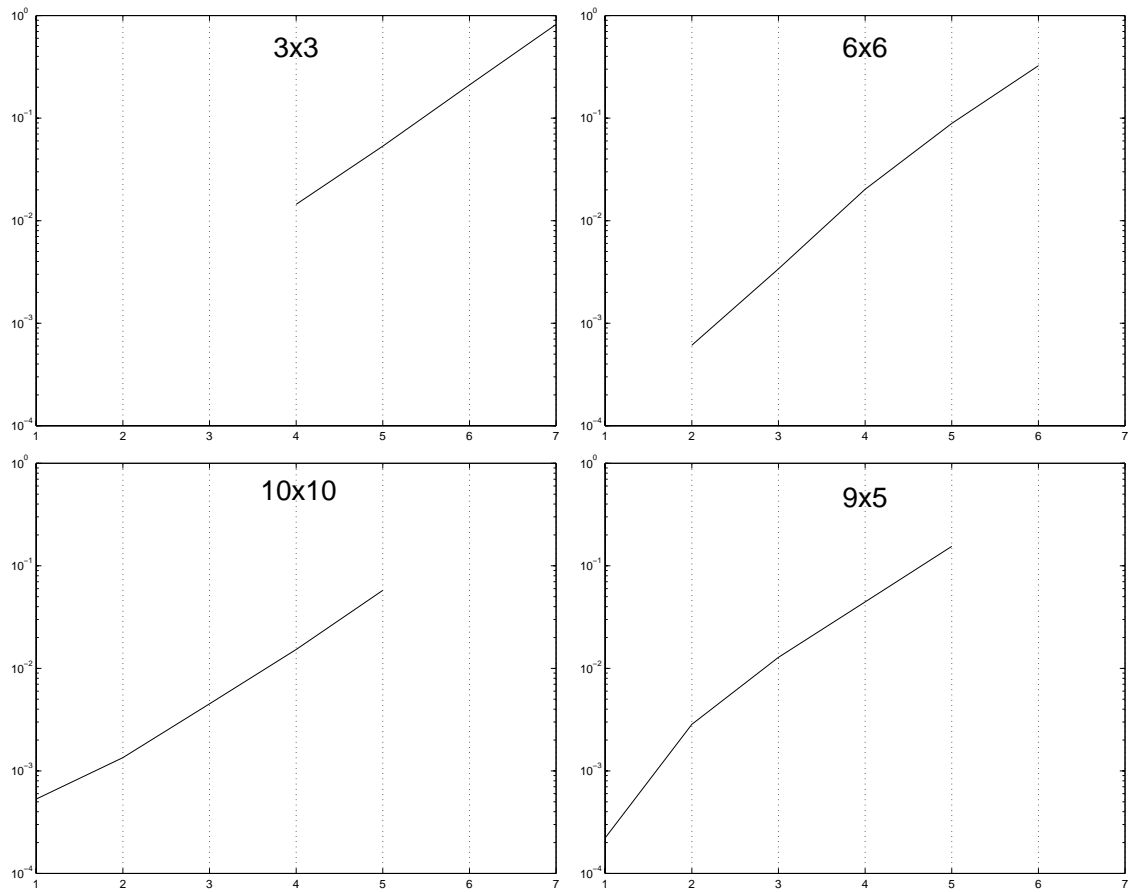


FIG. 4.16 – Evolution moyenne du temps de calcul, normalisée par  $M \times N$  et visualisée avec une échelle logarithmique en fonction du nombre de subdivisions. Les courbes tracées n'ont parfois pas de valeurs pour des niveaux de subdivision bas où le temps de calcul est trop faible, ou pour des niveaux de subdivision élevés où la place mémoire pour les points de contrôle pose problème. Les pentes relevées sont approximativement comprises entre  $1/2$  et  $2/3$ . Ceci montre que le temps de calcul est de l'ordre du nombre de points de contrôle, c'est-à-dire en  $O(4^k(M \times N))$ .

# Méthode de subdivision

## Conclusions

La méthode de subdivision est basée sur l'utilisation de nombreux outils géométriques : la subdivision de réseaux de points, des outils de mise à plat, de propagation de faisceaux, ...

Nous avons proposé une synthèse de résultats autour des schémas de subdivision et de la formule de commutation. Ceci nous a permis de caractériser les propriétés requises pour la surface de subdivision considérée.

Nous avons ramené le problème à la recherche de chemin géodésique sur une surface polyédrique. Nous avons ainsi été amenés à définir précisément les chemins géodésiques sur ce type de surface. Notre méthode s'est ensuite développée autour de cette caractérisation. Le lien avec les surfaces de subdivision s'est fait par une étape intermédiaire de projection de chemin entre deux réseaux successifs.

La validation de la méthode s'est construite autour de l'interprétation géométrique de la formule de commutation. A cette validation s'ajoutent de nombreux critères de validation numérique, observés lors des exemples présentés.

Dans cette étude, faire le lien avec les travaux sur la courbure discrète constitue l'objet de nos travaux actuels.



**Troisième partie**

**Applications**





# Chapitre 1

## Maillages

Le maillage d'un domaine plan, surfacique ou volumique consiste à le décomposer en éléments simples. L'analyse de ses propriétés géométriques peut fournir des informations intéressantes sur la qualité de l'approximation du domaine. En calcul scientifique, les maillages sont fréquemment utilisés comme supports de calcul et sont notamment à la base de la méthode des éléments finis. Les problèmes modélisés en termes d'équations aux dérivées partielles ou d'équations différentielles requièrent une solution numérique, calculée sur une décomposition du domaine, un maillage. La qualité du maillage est primordiale celui-ci influençant la validité des solutions engendrées lors de la résolution par ces méthodes.

Les outils et techniques évoqués dans ce chapitre sont plus longuement développés par [Bern and Eppstein, 1992] et [George and Borouchaki, 1997, Frey and George, 1999]. De nombreux travaux sont rassemblés dans ces deux derniers ouvrages qui exposent en détail l'ensemble des méthodes et résultats sur les maillages.

Le cas des maillages plans a été très étudié. Nous nous intéressons aux maillages surfaciques pour lesquels il existe encore de nombreux problèmes ouverts. Le cas tri-dimensionnel reste actuellement peu développé.

Dans le cadre de maillages liés à une surface, le problème consiste en général à approcher la surface le plus fidèlement possible, par une surface plane par morceaux. Les éléments simples sont donc dans la majorité des cas des faces polygonales planes, très souvent des triangles. L'idée de considérer d'autres types d'éléments que des faces triangulaires ou quadrangulaires semble encore peu développée, trop complexe et trop coûteuse. Nous proposons de nous rapprocher de la surface en créant des maillages surfaciques. Ces derniers, même s'ils n'ont jusqu'ici pas fait l'objet d'étude pour la méthode des éléments finis, ont d'autres applications plus immédiates notamment en plaquage de textures, en médecine, en géophysique, ...

La génération de maillages géodésiques est d'abord introduite. Elle se fait naturellement par l'intermédiaire de l'espace des paramètres. Nous proposons donc de présenter divers outils qui permettent de générer des maillages plans optimaux. L'optimalité ou ce que nous appellerons qualité d'un maillage sera déterminée en considérant des critères géométriques. Notre objectif consistera plus précisément à créer des maillages géodésiques équilibrés au sens des longueurs des arêtes. Nous terminerons donc par la présentation d'une méthode permettant de générer ce type de maillages, avec illustration par des exemples.

## 1.1 Maillages surfaciques géodésiques

### 1.1.1 Génération de maillages géodésiques

**Définition 1.1** *Un maillage surfacique est un maillage dont les noeuds sont des points de la surface et les arêtes, des chemins sur la surface. Si les courbes en question sont des géodésiques, il s'agit alors d'un maillage (surfacique) géodésique.*

Nous allons restreindre notre étude au cas de surfaces paramétriques ; nous proposons de générer les maillages à partir de maillages dans l'espace des paramètres en effectuant les étapes suivantes :

1. générer un premier maillage quelconque  $\mathbf{T}$  (en général une triangulation) dans l'espace des paramètres  $\mathfrak{D}$  ;
2. prendre l'image de ce maillage  $\mathbf{T}$  sur la surface  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  ; nous obtenons le maillage surfacique  $\tilde{\mathbf{T}}$  ;
3. remplacer chaque arête du maillage surfacique  $\tilde{\mathbf{T}}$  par un chemin géodésique reliant les deux extrémités de l'arête ; nous obtenons le maillage géodésique  $\mathbf{T}$ . Ici intervient donc l'un de nos algorithmes de calcul de chemin géodésique.

#### MAILLAGE\_SURFACIQUE\_GÉODÉSIQUE

Données

- |  $\mathcal{S}$  une surface paramétrée par  $S$  de  $\mathfrak{D}$  dans  $\mathbb{R}^3$
- |  $\mathbf{T}$  un maillage dans l'espace des paramètres  $\mathfrak{D}$

Résultat

- |  $\mathbf{T}$  un maillage géodésique sur  $\mathcal{S}$

Algorithme

```

pour_tout  $e$  arête de  $\mathbf{T}$  faire
     $(a,b) \leftarrow$  extrémités de  $e$ 
     $A \leftarrow S(a)$  et  $B \leftarrow S(b)$ 
     $\mathcal{G} \leftarrow$  chemin géodésique entre  $A$  et  $B$  sur  $\mathcal{S}$ 
     $\mathbf{T} \leftarrow \mathbf{T} \cup \mathcal{G}$ 
fin_pour

```

Les outils de géométrie algorithmique offrent diverses techniques pour générer des maillages plans qui se répartissent en plusieurs catégories :

- les techniques optimales (Delaunay, ... ),
- les techniques heuristiques (ajout de points de Steiner, ... ),
- les découpages en quatrees,
- les méthodes basées sur la décomposition de polygones après un premier découpage en éléments convexes,
- les méthodes de type frontal qui créent d'abord un maillage frontalier ensuite complété par un maillage sur tout le domaine (cf [Laug *et al.*, 1996]).

### 1.1.2 Exemples de maillages géodésiques

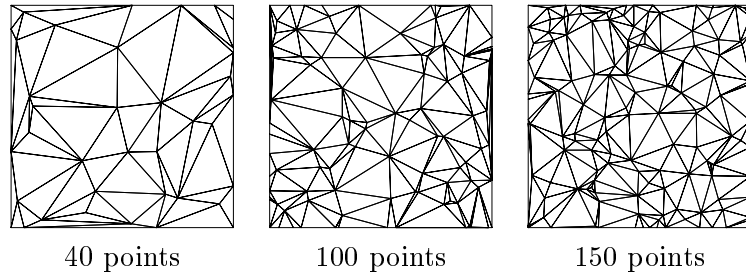


FIG. 1.1 – *Triangulations planes avec des noeuds tirés au hasard.*

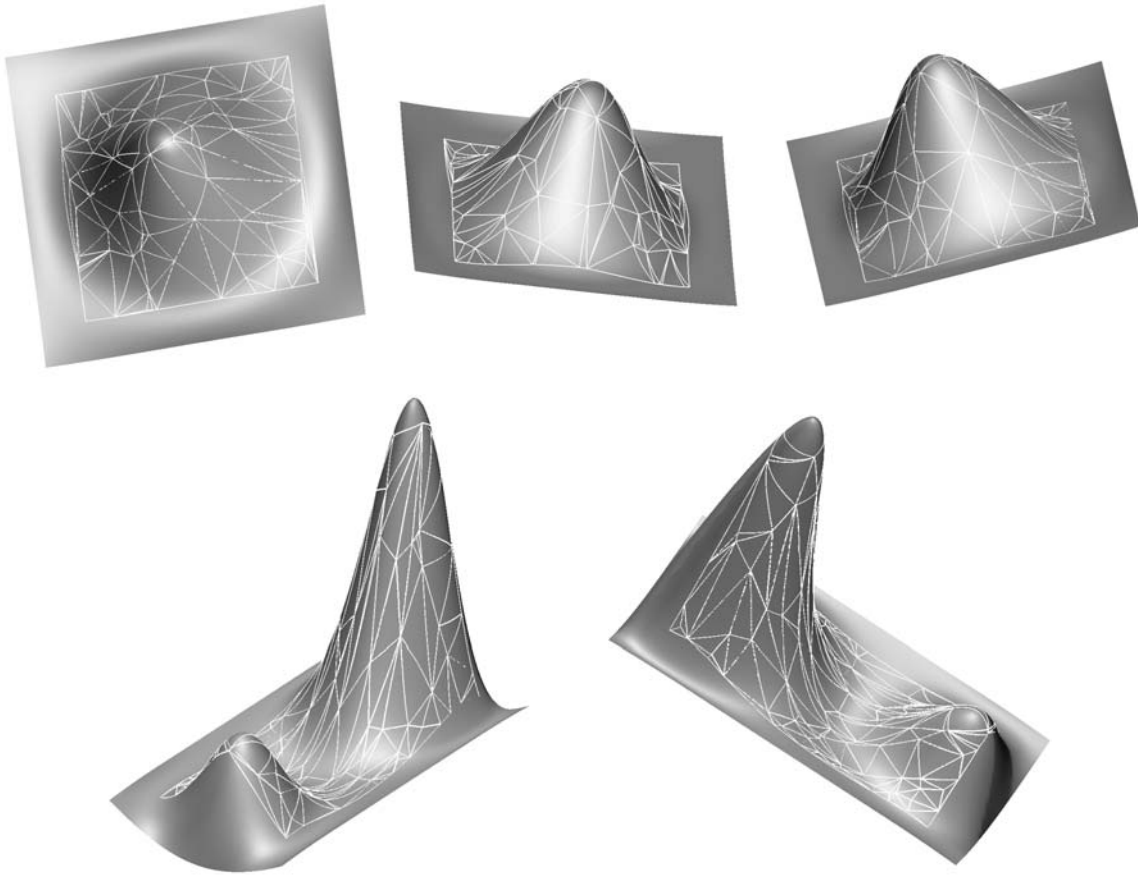


FIG. 1.2 – *Exemples de maillages géodésiques correspondant à la triangulation avec 100 points.*

Les maillages présentés ici utilisent la méthode de minimisation pour le calcul des arêtes géodésiques (cf partie I). Cette méthode est particulièrement adaptée aux maillages, où les chemins sont courts. La classe d'approximation utilisée est celle des courbes de degré 3, suffisamment flexibles dans ce contexte et relativement peu coûteuses en temps de calcul.

## 1.2 Optimisation de maillages

L'optimisation d'un maillage tente d'en améliorer la qualité. A partir d'un maillage initial quelconque, il s'agit donc de créer itérativement un maillage plus adapté à certaines exigences formulées en termes géométriques, données par le cadre d'étude. Nous présentons dans cette optique quelques outils et techniques qui permettent d'optimiser un maillage. Nous définissons ensuite des critères caractérisant les propriétés requises, auxquels nous associons des mesures de qualité.

### 1.2.1 Outils et techniques

Les algorithmes d'optimisation sont basés sur quelques outils de base, à effet local essentiellement, parmi lesquels nous pouvons distinguer les opérateurs topologiques, qui affectent les connexions, des opérateurs géométriques, qui modifient la position des sommets.

**Le bougé de points :** un sommet libre<sup>1</sup>  $P$  du maillage est déplacé vers un point  $P_{opt}$  calculé à partir des faces ou arêtes incidentes à  $P$ . Le repositionnement est effectué si la topologie du maillage ne subit pas de modification.

**La suppression d'arêtes :** une arête libre du maillage peut être supprimée; une telle modification implique une modification topologique du maillage et mène à la réécriture locale du maillage. De manière analogue, il est possible d'insérer une arête.

**L'insertion de points :** les sommets insérés s'appellent **points de Steiner** et permettent entre autres de *casser* une arête. Ces techniques sont essentiellement utilisées dans l'approximation de surfaces par des maillages. L'ajout ou la suppression de points à des endroits spécifiques du maillage, pour tenter de l'adapter au mieux, sont aussi appelés **raffinement** et **décimation**.

**La bascule d'arêtes :** ce procédé consiste à remplacer une arête "diagonale" dans un polygone par une autre diagonale du polygone<sup>2</sup>.

### 1.2.2 Critères et qualité

Les critères à satisfaire sur le maillage peuvent s'appuyer sur des considérations purement géométriques ou plus algorithmiques. Seul le problème considéré permet de manière précise de déterminer le critère qui correspond au mieux à sa résolution. Nous énumérons ici les critères les plus courants qui peuvent porter sur :

**les éléments :** sur leur taille avec une contrainte d'aire, sur leur forme avec une contrainte d'angle, de rapport d'aspect ou de type d'éléments (triangles, quadrangles), ...

**les arêtes :** sur leur longueur, ...

**les sommets :** sur leur degré de rugosité, ...

**l'approximation :** sur l'erreur entre la surface et le maillage l'approchant, ...

**la complexité :** avec une limite sur le nombre d'éléments, ...

...

---

1. Un sommet ou arête libre est non contraint à garder sa position dans la triangulation.

2. Le polygone correspond au lien de l'arête, c'est-à-dire au bord de son étoilé.

Les critères ne sont pas nécessairement compatibles entre eux. En géométrie algorithmique, un ou deux critères sont en général considérés, bien que certains maillages, comme les triangulations de Delaunay et les maillages en quatrie, optimisent plusieurs critères simultanément. Il est cependant difficile, voire impossible de trouver actuellement une méthode respectant exactement l'un des critères. La mesure de la qualité d'un maillage permet de quantifier le respect du critère par le maillage; il s'agit d'une application de maillages à des nombres réels, en général ramenés à l'intervalle  $[0, 1]$ . Suivant le critère considéré, la mesure de la qualité d'un maillage se fait en prenant la somme, le minimum, le maximum de la mesure de la qualité sur l'ensemble des éléments.

### 1.3 Tests et résultats

Dans ce qui va suivre, nous présentons des exemples d'optimisation de maillages: notre propos n'a pas été d'implémenter des méthodes mais d'utiliser nos algorithmes, c'est pourquoi nos techniques d'optimisation pourront paraître *élémentaires* faces aux maillages existants.

#### 1.3.1 Maillage géodésique par raffinement de l'approximation des arêtes

Nous reprenons des idées évoquées dans la partie I. Pour la construction du maillage surfacique, nous choisissons une classe d'approximation, par exemple  $\mathcal{B}_3(a, b)$ . Les arêtes du maillage sont calculées avec la méthode de minimisation dans cette classe d'approximation.

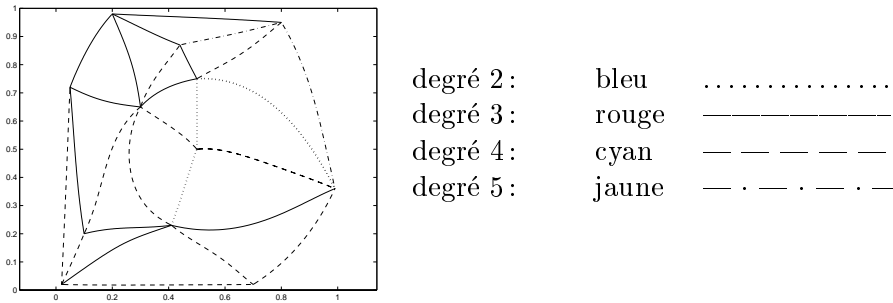


FIG. 1.3 – Vue du maillage dans l'espace des paramètres et légende.

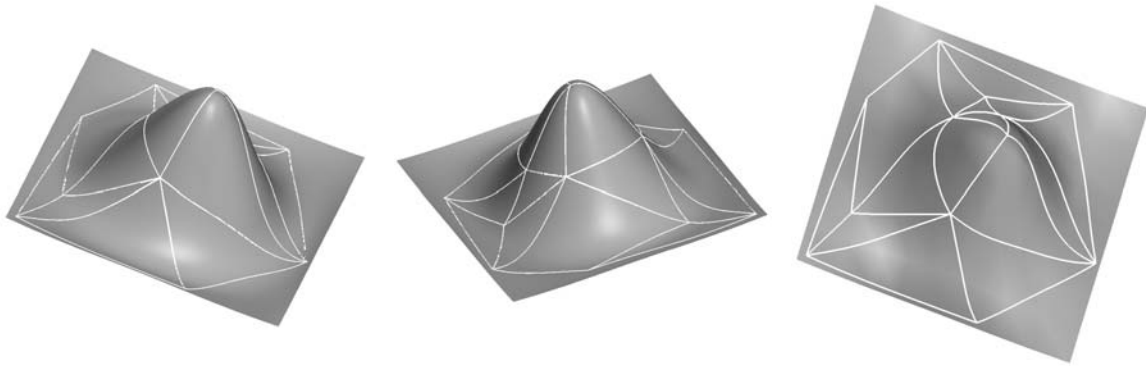


FIG. 1.4 – Maillage géodésique sur la surface sous 3 points de vue.

Le critère de qualité porte sur les arêtes : si leur courbure géodésique est suffisamment faible par rapport à un seuil donné, elles correspondent à des chemins relativement peu déviés et conviennent. Pour remédier à une arête de mauvaise qualité, nous proposons de raffiner la classe d'approximation (cf chapitre 1, page 13). La qualité du maillage est le minimum des qualités des arêtes.

L'exemple présenté dans les figures 1.3 et 1.4 propose un maillage avec des arêtes relativement longues, dont les extrémités sont relativement éloignées. Pour une bonne approximation des géodésiques, certaines nécessitent une flexibilité plus grande que d'autres et donc un raffinement. Elles sont distinguées suivant la classe d'approximation à laquelle elles appartiennent. De manière générale, les maillages mettent en jeu des paires de points rapprochés et le critère géodésique est vérifié pour une classe d'approximation de faible degré (cf figure 1.2, page 115).

### 1.3.2 Maillage équilibré par bougé de points

#### Description des différentes étapes

Nous proposons de construire des maillages géodésiques équilibrés au sens où les longueurs des arêtes géodésiques du maillage sont équivalentes. Dans la littérature, il existe aussi l'appellation de maillage *unité*. La mesure de la qualité s'appuie sur un critère lié au rapport entre les longueurs des arêtes incidentes à un sommet commun. Nous décrivons le processus pas à pas :

- **Le maillage géodésique  $\mathbf{T}$**  : sa construction s'effectue comme proposé au paragraphe 1.1. Pour des raisons de complexité dans l'implémentation, nous avons choisi de fixer la topologie du maillage. Les arêtes du maillage surfacique sont des chemins géodésiques calculés ici avec la méthode de subdivision.
- **La carte des longueurs** : les longueurs des arêtes géodésiques sont associées aux arêtes correspondantes dans l'espace des paramètres et constituent la **carte des longueurs**.
- **Le critère de qualité** : il est basé sur le fait d'avoir des arêtes géodésiques de même longueur. En un sommet  $P$  du maillage, le calcul de la qualité  $\mathcal{Q}$  utilise les longueurs  $l_i$  des arêtes incidentes au sommet  $P$  :

$$\mathcal{Q}(P) = \frac{\min_i l_i}{\max_i l_i}$$

La qualité du maillage correspond à la plus mauvaise qualité de ses sommets :

$$\mathcal{Q}(\mathbf{T}) = \min_{P \in \mathbf{T}} \mathcal{Q}(P)$$

- **Le bougé de point** : l'optimisation du maillage est locale : les sommets de mauvaise qualité sont déplacés en procédant à un équilibrage barycentrique, simple ou pondéré, ne modifiant pas la topologie du maillage.

Plaçons-nous dans l'espace des paramètres muni de la carte des longueurs. Soit  $p$  le point correspondant au sommet de plus mauvaise qualité. Soient  $n_v$  sa valence<sup>3</sup> et  $\{p_i\}_{i=1, \dots, n_v}$

---

3. La valence d'un sommet d'un maillage est le nombre de ses voisins.

l'ensemble de ses voisins. Nous posons

$$h = \frac{1}{n_v} \sum_{i=1}^{n_v} l_i$$

la moyenne des longueurs des arêtes incidentes à  $p$  (dans la carte des longueurs);  $h$  correspond à la longueur souhaitée pour l'ensemble de ces arêtes. Soit  $p_j$  un voisin de  $p$ . Le point  $p_{id_j}$  correspond à l'emplacement idéal de  $p$  sur l'axe  $p_j p$ :

$$\overrightarrow{p_j p_{id_j}} = \frac{h}{l_j} \overrightarrow{p_j p} = \frac{1}{n_v} \sum_{i=1}^{n_v} l_i \frac{1}{l_j} \overrightarrow{p_j p}$$

Ce calcul suppose que le rapport des distances entre  $p_j$  et  $p$  et entre  $p_{id_j}$  et  $p$  est égal au rapport des distances géodésiques des points correspondants sur la surface; en général, ceci n'est pas vrai, mais permet d'équilibrer itérativement et localement le maillage.

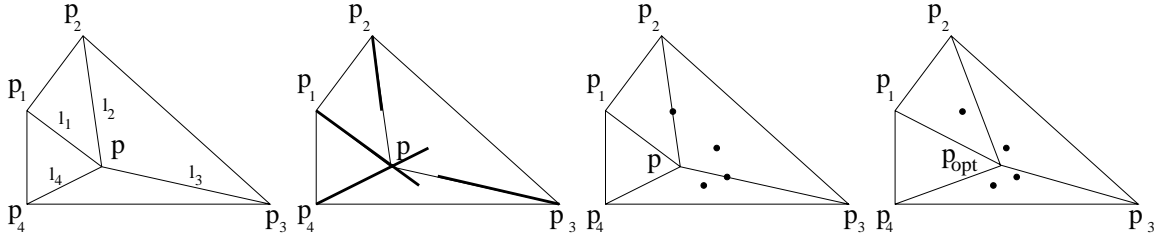


FIG. 1.5 – Bougé de points.

La position optimale  $p_{opt}$  de  $p$  se trouve dans l'enveloppe convexe de l'ensemble de points  $\{p_{id_j}\}_{j=1, \dots, n_v}$ :

$$p_{opt} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \beta_j} \sum_{j=1}^n \beta_j p_{id_j}$$

Plusieurs choix se présentent pour les coefficients  $\beta_j$ :

- $\beta_j = 1$  qui correspond à un barycentrage classique,
- $\beta_j$  lié à la qualité de l'arête  $pp_j$  (cf ci-après),
- $\beta_j = 0$  pour tous les voisins sauf pour celui correspondant à la plus mauvaise qualité où  $\beta_j = 1$ .

Nous proposons de pondérer les points par les longueurs  $l_j$ . Ceci correspond à l'interprétation géométrique suivante: plus la distance  $l_j$  entre  $p_j$  et  $p$  est grande, plus l'influence de son point idéal est grande; le point optimal a donc tendance à se rapprocher de ce point idéal, et inversement. Nous aboutissons donc à

$$p_{opt} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n l_j} \sum_{j=1}^n l_j p_{id_j}$$

Si le déplacement de  $p$  vers  $p_{opt}$  ne modifie pas la topologie du maillage, le déplacement est effectué, sinon le déplacement est modéré par un coefficient  $\alpha \in ]0, 1[$ , de sorte à conserver la topologie du maillage. Il s'agit de déplacer le point  $p$  vers un point  $p'_{opt}$  ainsi calculé:

$$p'_{opt} = p + \vec{d} \quad \vec{d} = \alpha \overrightarrow{pp_{opt}}$$



- **La mise à jour :** autour du sommet déplacé, la carte des longueurs est mise à jour en calculant les arêtes géodésiques correspondant à chaque arête incidente à  $p$  ainsi que leur longueur et en calculant les nouvelles qualités en  $p$  et chacun de ses voisins.
- **Le critère d'arrêt :** le maillage est ainsi progressivement et localement optimisé, au niveau des sommets autour desquels le critère de qualité est le moins bien satisfait. Notre critère d'arrêt peut porter sur la qualité du maillage, le nombre d'étapes d'optimisation effectuées, ...

### Exemples

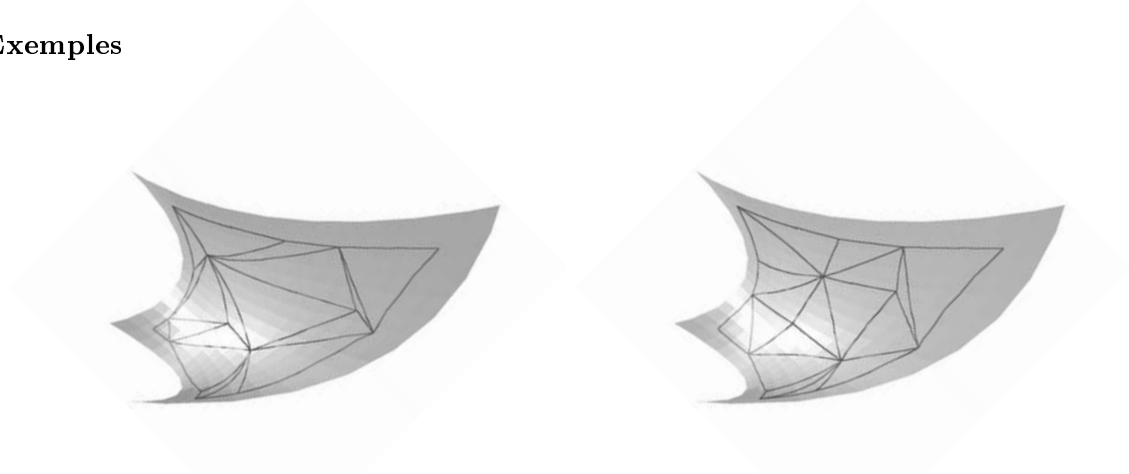


FIG. 1.6 – Maillage surfacique avant et après optimisation : la qualité varie de 0.17 à 0.4.

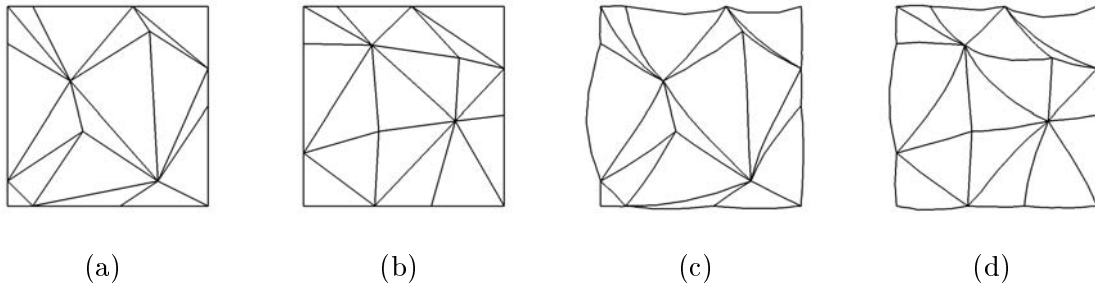


FIG. 1.7 – Vues dans l'espace des paramètres. – (a) Topologie du maillage avant optimisation. – (b) Topologie du maillage après optimisation. – (c) Maillage correspondant au maillage géodésique avant optimisation. – (d) Maillage correspondant au maillage géodésique après optimisation.

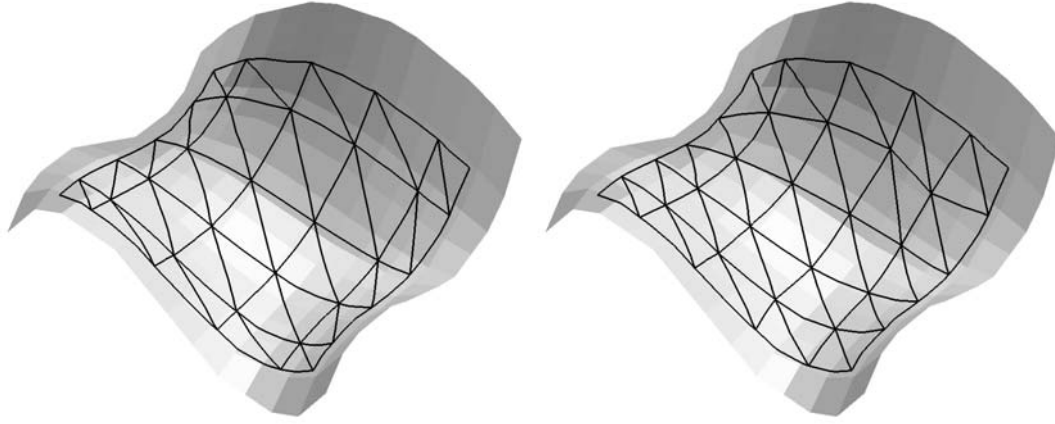


FIG. 1.8 – *Maillage surfacique avant et après optimisation.*

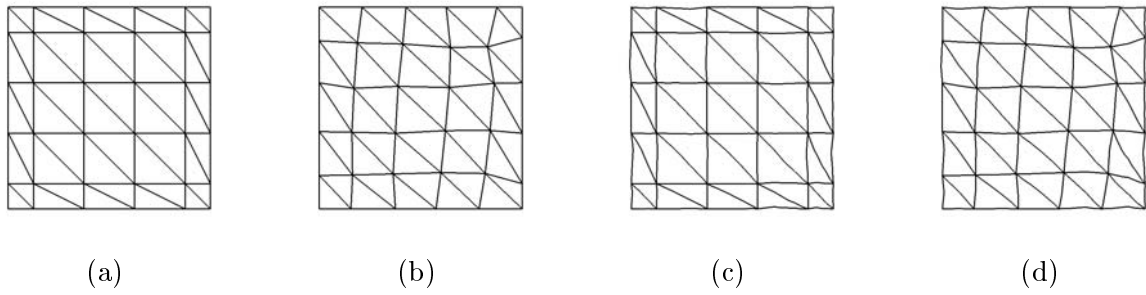


FIG. 1.9 – *Vues dans l'espace des paramètres.* – (a) *Topologie du maillage avant optimisation.* – (b) *Topologie du maillage après optimisation.* – (c) *Maillage correspondant au maillage géodésique avant optimisation.* – (d) *Maillage correspondant au maillage géodésique après optimisation.*

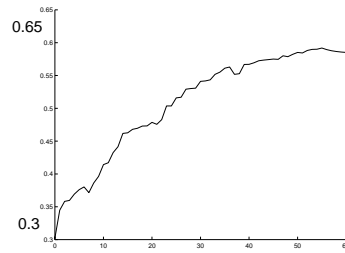


FIG. 1.10 – *Evolution de la qualité lors de l'optimisation.* L'axe des abscisses correspond au nombre de bougés de points. La qualité varie de 0.3 à 0.6.

Comme nous pouvons le constater dans les exemples, la qualité après optimisation n'atteint pas des valeurs très intéressantes, une qualité de 0.5 signifiant que la plus longue arête est deux fois plus longue que la plus courte arête autour d'un sommet. Nous avons été confrontés à des difficultés liées à la contrainte sur la topologie, l'algorithme bloquant sur une configuration limite.

Nos travaux concernant les maillages s'arrêtent ici, limités par les outils non implémentés. Il faudrait en effet combiner les différents outils possibles pour optimiser au mieux le maillage. Nous ne nous pencherons pas sur ce point car il existe, comme nous l'avons évoqué, des mailleurs appropriés. Dans la suite de cette approche, l'idéal serait justement d'intégrer notre calcul de géodésiques dans un logiciel de maillages. Dans ce domaine, [Frey and George, 1999] construisent également des maillages équilibrés et apportent des résultats performants. Ils considèrent cependant que la distance entre deux points sur la surface est la longueur de l'image du segment de droite de l'espace des paramètres. Leur calcul des longueurs de ces arêtes sur la surface nécessitent de plus un lourd procédé : il se fait par la mise en place d'une carte de métriques sur une grille discrète associant à l'espace des paramètres une structure riemannienne discrète. Par interpolation des métriques aux points où elle n'est pas donnée, cette structure permet de calculer une approximation des longueurs sur la surface. Notre outil serait ici propice puisqu'il permet un accès direct à la fois à la géodésique et à sa longueur.

## Chapitre 2

# Modélisation du myocarde

La modélisation géométrique et mécanique du myocarde fait l'objet d'une collaboration scientifique débutée en octobre 2000 entre une équipe de recherche clinique (Biologie du développement et génétique clinique) et des chercheurs en mathématiques appliquées et en mécanique du site grenoblois. Cette collaboration associe les laboratoires LMC, L3S et TIMC (équipe Reconnaissance des formes et microscopie quantitative). Elle est reconnue par une action concertée incitative et par la région Rhône-Alpes.

L'équipe clinique et l'équipe RFMQ disposent de données sur l'orientation des fibres cardiaques obtenues par microscopie en lumière polarisée. Elles désirent tester l'hypothèse selon laquelle les fibres cardiaques suivent des lignes géodésiques sur les couches fibreuses assimilées à des surfaces. Cette hypothèse proposée par [Streeter, 1979] pour le ventricule gauche à la géométrie simple pourrait être correcte pour le ventricule droit. Ceci est l'objectif du travail de thèse d'A. Mourad. Il a paru opportun d'appliquer à ce cas les résultats de tracés de géodésiques que nous avons développés.

Nous nous intéressons à modéliser approximativement la forme géométrique des surfaces des ventricules : elles sont topologiquement équivalentes à celle du tore. L'étude de ces surfaces nous mène naturellement au calcul de boucles géodésiques.

## 2.1 Surfaces fermées

### 2.1.1 Construction de surfaces de genre 1

Les surfaces produit tensoriel permettent, par un choix approprié des points de contrôle de construire des surfaces fermées de genre 1, c'est-à-dire topologiquement équivalentes à un tore. Le formalisme B-spline permet de construire de telles surfaces en contrôlant la régularité au niveau des jonctions des patchs (cf [Hoschek and Lasser, 1993]). Les points de contrôle sur les lignes  $u_{min}$  et  $u_{max}$  (resp.  $v_{min}$  et  $v_{max}$ ) sont les mêmes (cf figure 2.1).

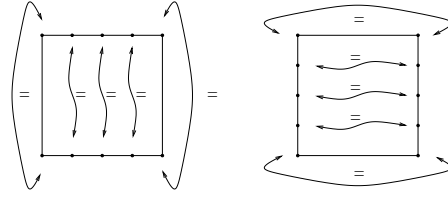
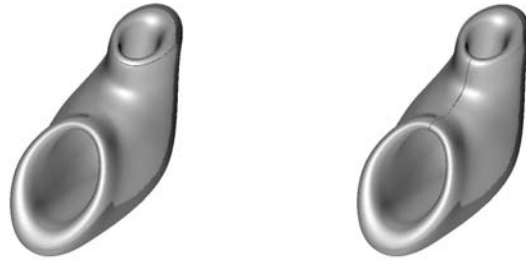


FIG. 2.1 – Égalité des points de contrôle pour générer une surface de genre 1.

**Définition 2.1** Soit  $\mathcal{S}$  une surface de subdivision de type produit tensoriel et de genre 1, paramétrée sur un domaine  $\mathfrak{D}_{00}$ . Les images sur  $\mathcal{S}$  des lignes d'ordonnée minimale  $v_{\min}$  et d'ordonnée maximale  $v_{\max}$  coïncident et la ligne image est appelée **ligne de jonction horizontale**. Les images sur  $\mathcal{S}$  des lignes d'abscisse minimale  $u_{\min}$  et d'abscisse maximale  $u_{\max}$  coïncident et la ligne image est appelée **ligne de jonction verticale**.



ligne de jonction horizontale      ligne de jonction verticale

FIG. 2.2 – Une modélisation du ventricule droit avec le tracé des lignes de jonction.

**Remarque 2.1** Les surfaces présentées sont modélisées avec des surfaces B-splines cubiques ; elles sont globalement  $C^2$  et notamment le long de ces lignes de jonction.

### 2.1.2 Duplication du domaine de paramétrisation $\mathfrak{D}_{00}$

L'information concernant le fait que la surface est fermée, caractérisée ici par l'égalité des points de contrôle de  $\mathbb{R}^3$  n'existe cependant pas dans  $\mathfrak{D}_{00}$ . Pour y remédier, nous dupliquons  $\mathfrak{D}_{00}$ , les grilles de  $\mathfrak{D}_{00}$  et les réseaux de contrôle associés ; nous élargissons ainsi l'espace des paramètres en parcourant plusieurs fois la surface (cf figure 2.3). Notons  $\mathfrak{D}_{ij}$  les duplications suivant  $u$  et  $v$  du domaine  $\mathfrak{D}_{00}$  et  $\mathfrak{D}$  l'espace obtenu par union des domaines  $\mathfrak{D}_{ij}$ . Plus précisément, avec  $\mathfrak{D}_{00} = [u_{\min}, u_{\max}] \times [v_{\min}, v_{\max}]$  et  $h_u = u_{\max} - u_{\min}$ ,  $h_v = v_{\max} - v_{\min}$ , nous avons :

$$\mathfrak{D}_{ij} = [u_{\min} + ih_u, u_{\max} + (i + 1)h_u] \times [v_{\min} + jh_v, v_{\max} + (j + 1)h_v]$$

De la même manière, tout point  $m = (m_u, m_v)$  de  $\mathfrak{D}_{00}$  est dupliqué en  $m_{ij}$  dans  $\mathfrak{D}_{ij}$  :

$$m_{ij} = (m_u + ih_u, m_v + jh_v)$$

L'image de ces points est par construction le même point de  $\mathcal{S}$ .

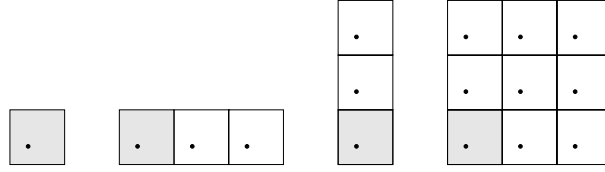


FIG. 2.3 – Duplication de l'espace des paramètres  $\mathcal{D}_{00}$  et d'un point de  $\mathcal{D}_{00}$

Revenons à notre recherche de chemin géodésique entre  $A$  et  $B$ , deux points distincts sur  $\mathcal{S}$ . Aux points  $A$  et  $B$  correspondent deux ensembles de points  $(a_{ij})_{ij}$  et  $(b_{ij})_{ij}$  dans les  $\mathcal{D}_{ij}$ .

**Définition 2.2** Soient  $a$  et  $b$  deux points de  $\mathcal{D}$ . Les **nombre de tours horizontaux**  $\mathfrak{T}_u$  et **verticaux**  $\mathfrak{T}_v$  entre  $a = (a_u, a_v)$  et  $b = (b_u, b_v)$  sont :

$$\mathfrak{T}_u = \left\lfloor \frac{b_u - a_u}{h_u} \right\rfloor \quad \mathfrak{T}_v = \left\lfloor \frac{b_v - a_v}{h_v} \right\rfloor$$

où  $\lfloor t \rfloor$  désigne la partie entière de  $t$ . Nous parlerons par extension du nombre de tours  $\mathfrak{T} = \lfloor \mathfrak{T}_u, \mathfrak{T}_v \rfloor$  d'un chemin entre  $A$  et  $B$  sur  $\mathcal{S}$ .

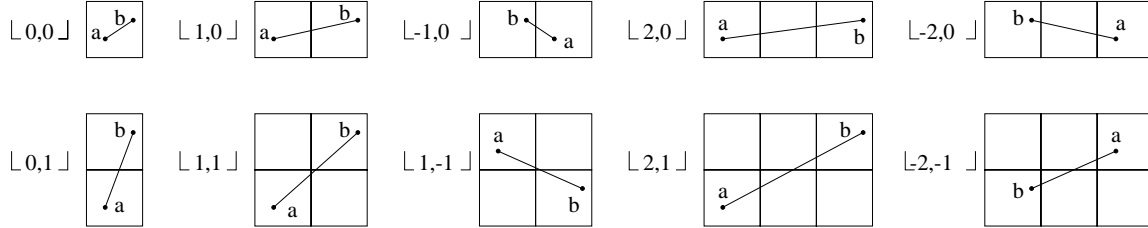


FIG. 2.4 – Différentes classes de chemins et nombres de tours horizontaux et verticaux associés.

Le choix des extrémités  $a \in (a_{ij})_{ij}$  et  $b \in (b_{ij})_{ij}$  nous permet de contrôler  $\mathfrak{T}$  entre  $A$  et  $B$  sur  $\mathcal{S}$ . Dans l'ensemble des paires d'extrémités  $\{(a, b); a \in (a_{ij})_{ij}, b \in (b_{ij})_{ij}\}$ , nous définissons une relation d'équivalence modulo  $\mathfrak{T}$ . Ainsi deux paires sont équivalentes si elles correspondent au même nombre de tours. Au niveau de la surface, considérons l'image sur  $\mathcal{S}$  du segment de droite reliant les deux extrémités d'une paire: les paires équivalentes ont la même image. Par extension, les chemins entre  $A$  et  $B$  appartiennent à des classes d'équivalence, définies modulo  $\mathfrak{T}$ ; la méthode itérative de calcul de géodésiques implique que le chemin géodésique calculé appartient à la classe d'équivalence du chemin initialisant le processus (cf figure 2.4).

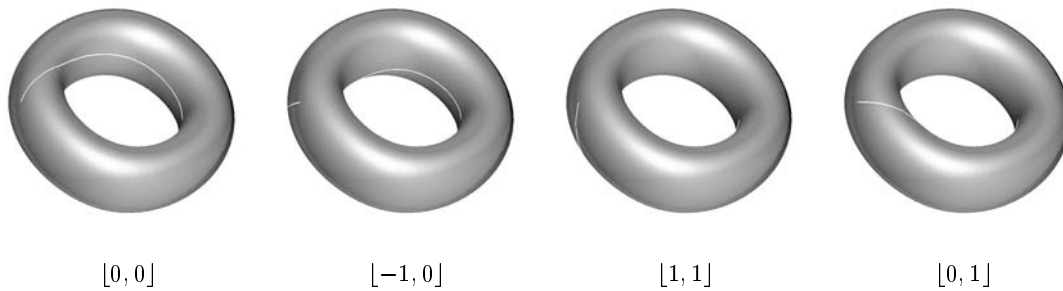


FIG. 2.5 – Différents chemins géodésiques de différentes classes d'équivalence entre deux points sur une surface B-spline correspondant à une approximation du tore.

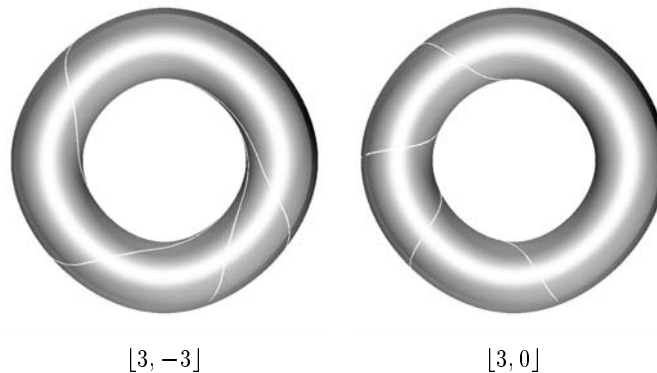


FIG. 2.6 – Même exemple que dans la figure 2.5 avec d'autres classes d'équivalence.



FIG. 2.7 – Exemple sur une forme cylindrique.

## 2.2 Boucles géodésiques

**Définition 2.3** Une boucle géodésique est un chemin géodésique dont les deux extrémités sur la surface coïncident.

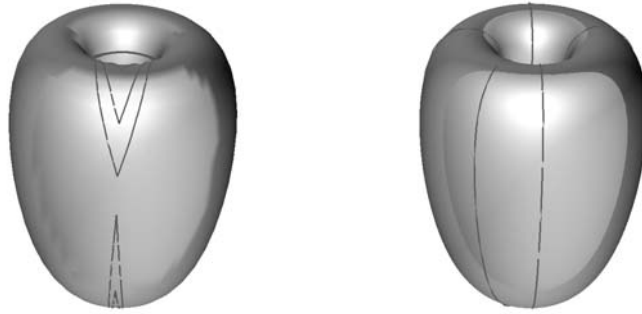
Notre méthode permet aisément de calculer ce type de courbes puisque nous fixons les extrémités, contrairement à une méthode de tir où l'instabilité est relativement forte et une

faible déviation au niveau de l'orientation de la tangente au départ peut générer un chemin qui ne boucle pas. Nous considérons que les deux extrémités correspondent au même point avant duplication de  $\mathfrak{D}_{00}$ , c'est-à-dire que nous considérons la paire  $(a, b)$  avec  $a, b \in (a_{ij})_{ij}$ .

**Remarque 2.2** Ici, l'appellation de nombre de tours prend intuitivement tout son sens. Il est directement lié au nombre de lignes de jonctions traversées et le calcul de  $\mathfrak{T}$  donne des entiers sans avoir à considérer la partie entière. La relation d'équivalence est conservée à la condition de considérer  $\mathfrak{T}_u$  et  $\mathfrak{T}_v$  non signés.

**Définition 2.4** Une **géodésique périodique** est une boucle géodésique telle que les tangentes unitaires aux extrémités coïncident.

La donnée d'un point et celle d'une direction déterminent une géodésique (cf Annexe B). Une géodésique périodique est une boucle géodésique donc ses points de départ et d'arrivée coïncident. De plus les tangentes unitaires coïncident également en ces points. Le point de d'arrivée et sa tangente déterminent donc la même géodésique que le point de départ et sa tangente, d'où la périodicité de la géodésique. D'un point de vue géométrique, les notions de point de départ et d'arrivée n'ont alors plus de signification tout point de la géodésique périodique présentant les mêmes propriétés.

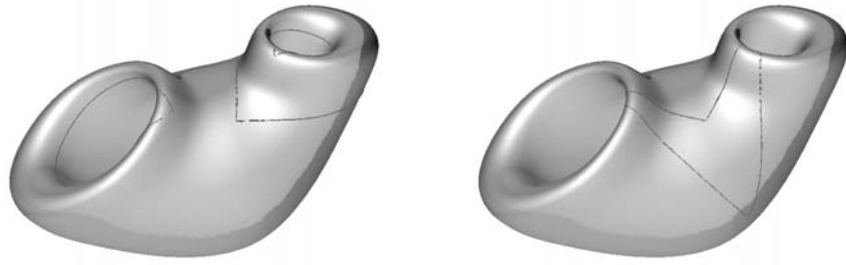


Boucles géodésiques non périodiques      Boucles géodésiques périodiques

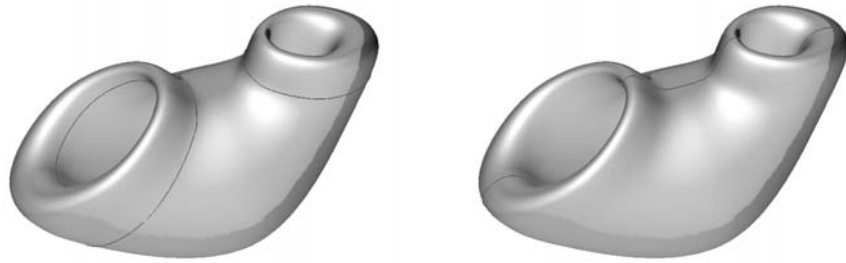
FIG. 2.8 – Exemples de boucles géodésiques sur le ventricule gauche.

A. Mourad se penche actuellement sur l'étude des géodésiques périodiques sur les surfaces de révolution, sur lesquelles les méridiens constituent une famille de géodésiques périodiques. Cependant étant donnée une surface quelconque, il n'existe pas nécessairement de géodésique périodique passant par tout point de la surface. L'un des atouts de notre algorithme est qu'il calcule aisément des boucles géodésiques, leur périodicité étant à vérifier après calcul. Le problème de l'existence est complètement dépendant de l'aspect tant local que global de la surface. A l'heure actuelle, il n'existe pas de travaux appliqués dans ce domaine. Dans la littérature, le sujet est abordé en mathématiques pures par [Klingenberg, 1978, Lusternik and Schnirelmann, 1929] et par [Bangert, 1980] qui énoncent l'existence d'une infinité de géodésiques périodiques sur une surface complète. Ce résultat est le seul dont nous disposons à l'heure actuelle.





Boucles géodésiques non périodiques



Boucles géodésiques périodiques

FIG. 2.9 – *Exemples de boucles géodésiques sur le ventricule droit.*

Notre contribution au projet de modélisation du myocarde s'est limitée à ce que nous venons de présenter, en collaboration avec A. Mourad qui a modélisé les surfaces et qui poursuit ses travaux dans le suivi de fibre et vers une modélisation mécanique du myocarde. Il s'intéresse en particulier à comprendre en quoi l'organisation géométrique des fibres cardiaques permet un fonctionnement efficace.

Cette étude nous permet de soulever l'intéressant problème de déterminer une surface telle qu'en tout point, il existe une géodésique périodique. Il s'agit là d'un problème excessivement difficile en raison de la sensibilité des géodésiques : d'une part à toute variation locale de la surface ; d'autre part dans leur construction avec la donnée d'un point de départ et d'une direction soumise à de faibles perturbations. Les surfaces constituées de fibres semblent répondre à cette hypothèse et la nature donnerait donc l'existence de solutions.

## Annexe A

# Quelques notions de CAGD

L'objet de cette annexe est d'énoncer des définitions et propriétés relatives aux courbes et surfaces Bézier et B-splines. Les outils présentés sont étudiés en détail dans les ouvrages de [Farin, 1988, Hoschek and Lasser, 1993, Risler, 1991], dans [Boehm *et al.*, 1984, Sablonnière and Le Méhauté, 1987], ...

### A.1 Courbes de Bézier polynomiales

**Définition A.1** Soit  $n$  un entier. Les **polynômes de Bernstein** sont définis par :

$$B_{n,i}(t) = C_n^i (1-t)^{n-i} t^i \quad \text{pour } i = 0, \dots, n$$

où les  $C_n^i$  sont les coefficients binômiaux.

Les polynômes de Bernstein sont de degré  $n$  et définissent une base pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

**Proposition A.1** Les polynômes de Bernstein possèdent trois propriétés importantes :

- *partition de l'unité* :  $\sum_{i=0}^n B_{n,i}(t) = 1 \quad t \in [0, 1]$
- *positivité* :  $B_{n,i}(t) \geq 0 \quad t \in [0, 1]$
- *récurivité* :  $B_{n,i}(t) = (1-t)B_{n-1,i}(t) + tB_{n-1,i-1}(t) \quad t \in [0, 1]$

**Définition A.2** Une **courbe de Bézier**  $\mathcal{C}$  polynomiale de degré  $n$  de  $\mathbb{R}^d$  est une courbe polynomiale paramétrée par  $\mathbf{C}$  dans la base de Bernstein :

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{n,i}(t) \quad t \in [0, 1]$$

où les points  $\{P_i\}_{i=0,\dots,n}$  appartiennent à  $\mathbb{R}^d$  et sont appelés **points de contrôle** de la courbe  $\mathcal{C}$ .

Une courbe de Bézier et son **polygone de contrôle**  $\mathcal{P} = P_0 P_1 P_2 \dots P_n$  présentent de nombreuses propriétés géométriques : ils vérifient des propriétés d'invariance par translation et rotation, d'invariance par transformation affine du paramètre, des propriétés d'enveloppe convexe, de diminution de la variation, d'interpolation aux extrémités et d'interpolation des tangentes aux extrémités.

**Algorithme de De Casteljau** L'algorithme de De Casteljau permet l'évaluation de  $C$  en tout point  $t \in [0, 1]$  avec des combinaisons affines de ses points de contrôle. Des points auxiliaires  $P_i^{(r)}$  sont évalués par récurrence :

$$P_i^{(r)} = P_i^{(r-1)}(1-t) + P_{i+1}^{(r-1)}t \quad r = 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, n-r$$

avec pour initialisation les points de contrôle initiaux :  $P_0^{(0)} = P_0, P_1^{(0)} = P_1, \dots, P_n^{(0)} = P_n$ . Le dernier point calculé nous donne l'évaluation :  $C(t) = P_0^{(n)}$ .

Ils sont arrangés dans un schéma triangulaire (cf figure A.1)

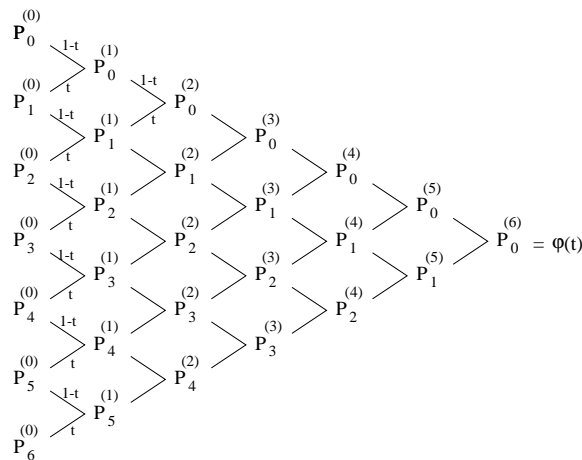


FIG. A.1 – *algorithme de De Casteljau pour une courbe de Bézier de degré 6.*

**Subdivision d'un polygone de contrôle** L'algorithme de De Casteljau permet de subdiviser le polygone de contrôle  $\mathcal{P}$  d'une courbe de Bézier et les nouveaux points de contrôle correspondent aux lignes supérieures et inférieures dans le schéma triangulaire. Ils forment le polygone  $\mathcal{P}^1$ . La valeur pour  $t$  est généralement  $1/2$  et ce schéma de subdivision correspond à une répartition régulière des noeuds sur  $[0, 1]$ . La ligne supérieure correspond au polygone de contrôle d'une courbe de Bézier paramétrée sur  $[0, 1/2]$  et la ligne inférieure correspond au polygone de contrôle d'une courbe de Bézier paramétrée sur  $[1/2, 1]$ . La concaténation de ces deux courbes de Bézier est la courbe  $\mathcal{C}$ .

**Convergence vers la courbe de Bézier** Récursivement, le processus est répété et génère la suite de polygones  $\{\mathcal{P}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Théorème A.1 (Théorème de convergence)** *Lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ , la suite des polygones  $\{\mathcal{P}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tend uniformément vers la courbe de Bézier  $\mathcal{C}$ .*

Des démonstrations de ce résultat se trouvent dans [Fiorot, 1987, Lane and Riesenfeld, 1980].

**Dérivation** La dérivée d'une courbe de Bézier s'exprime comme une courbe de Bézier de degré  $n-1$  dont les points de contrôle sont les différences finies pondérées par un coefficient

de normalisation des points de contrôle de  $\mathcal{C}$  :

$$C'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1} - P_i) B_{n-1,i}(t)$$

Cette expression de la dérivée montre que les schémas de subdivision associés aux courbes de Bézier de différents degrés vérifient la formule de commutation.

**Élévation de degré** Toute courbe de Bézier exprimée dans la base de Bernstein de degré  $n_0$  est une courbe polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n_0$ . Elle appartient donc en particulier à la classe des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ , pour tout  $n > n_0$  et peut s'exprimer dans la base de Bernstein de degré  $n$ . Ceci s'appelle l'élévation de degré et le calcul des nouveaux points de contrôle pour exprimer une courbe de Bézier de degré  $n$  comme une courbe de degré  $n + 1$  est donnée par :

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n+1} Q_i B_{n+1,i}(t) \quad \text{avec} \quad Q_0 = P_0, Q_{n+1} = P_{n+1} \quad \text{et} \quad Q_i = \frac{iP_{i-1} + (n+1-i)P_i}{n+1}$$

## A.2 Courbes splines uniformes

**Définition A.3** Les fonctions B-splines uniformes  $N_{n,i}$  de degré  $n$  supérieur à 1 sont définies par la relation de récurrence :

$$N_{n,i}(t) = \frac{t-i}{n} N_{n-1,i}(t) + \frac{i+n-t}{n} N_{n-1,i+1}(t)$$

avec la B-spline de degré 0

$$N_{0,i}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq t < i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Définition A.4** Une courbe spline uniforme  $\mathcal{C}$  de degré  $n$  s'écrit sous forme paramétrée :

$$C(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i N_{n,i}(t).$$

La courbe  $\mathcal{C}$  est  $C^{n-1}$ . Les points  $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  sont les points de contrôle. Il leur est associé un schéma de subdivision stationnaire uniforme où les nouveaux points de contrôle vérifient :

$$C(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_{n,i}^1 N_{n,i}(2t).$$

Considérons plus spécifiquement les fonctions B-splines de degré 1 uniformes sur les entiers, ou fonctions *chapeaux*  $N_{1,-1}, N_{1,0}, N_{1,1}, \dots$

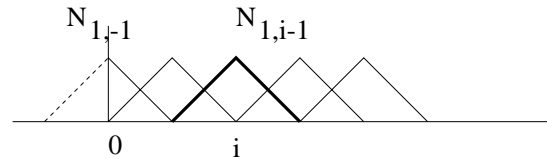


FIG. A.2 – Fonctions B-splines de degré 1 uniformes sur les entiers.

$N_{1,i-1}$  a pour support  $[i-1, i+1]$  et  $N_{1,i-1}(2^k nt)$  est donc non nul pour  $t \in ]\frac{i-1}{2^k n}, \frac{i+1}{2^k n}[$ . Le polygone  $\mathcal{P}^k$  a pour représentation paramétrique

$$P^k(t) = \sum_{i=0}^{2^k n} P_i^k N_{1,i-1}(2^k nt) \quad \text{pour } t \in [0, 1].$$

### A.3 Surfaces produit tensoriel

Les surfaces produit tensoriel peuvent être obtenues à partir de la représentation des courbes. Soit une courbe  $C(u) = \sum_{i=0}^{n_1} P_i F_i(u)$ , où les  $F_i$  sont les fonctions de base. Nous déplaçons cette courbe le long d'une autre courbe. Ce déplacement peut être décrit à l'aide d'un second paramètre  $v$  :

$$C_i(v) = \sum_{j=0}^n P_{ij} G_j(v)$$

**Définition A.5** *La surface résultante*

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} F_i(u) G_j(v)$$

*est appelée surface produit tensoriel, où les paramètres  $(u, v)$  parcourent un domaine rectangulaire, sans perte de généralité  $[0, 1]^2$ .*

Les surfaces produit tensoriel sont ainsi générées en prenant le produit tensoriel des fonctions de base en suivant deux directions orthogonales. Les points  $(P_{ij})_{ij}$  forment le réseau de contrôle  $\mathbf{P}$ . En CAGD, nous considérons en général le produit tensoriel de fonctions de base limites d'un schéma de subdivision, autrement dit les points de contrôle suivant chaque direction suivent un schéma de subdivision.

**Subdivision d'un réseau de contrôle** La subdivision d'un réseau s'effectue de manière analogue au cas courbe. Elle est d'abord effectuée suivant une direction, d'après le processus appliqué dans le cas courbe puis dans l'autre direction. Considérons le réseau de contrôle initial  $\mathbf{P}$ .

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & \dots & P_{0,n} \\ P_{1,0} & P_{1,0} & P_{1,1} & \dots & \dots & P_{0,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m,0} & P_{m,0} & P_{m,1} & \dots & \dots & P_{m,n} \end{matrix}$$

Chaque colonne du réseau est considérée comme un polygone et est subdivisée par le processus associé à une courbe. Après cette étape intermédiaire, chaque colonne contient  $2m+1$  points de contrôle. Nous considérons maintenant chacune des  $2m+1$  lignes comme un polygone à  $n$  points de contrôle, que nous subdivisons.

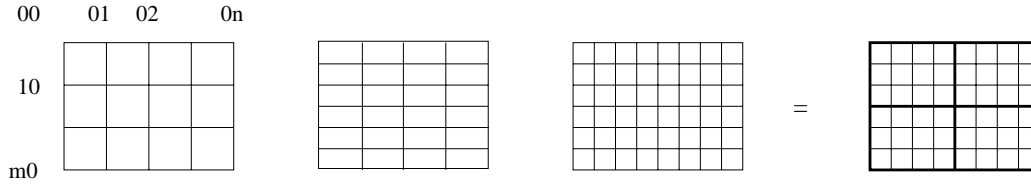


FIG. A.3 – Réseau initial, réseau obtenu après la subdivision suivant les colonnes et réseau obtenu après la subdivision suivant les lignes, qui correspond au réseau subdivisé.

Le réseau ainsi obtenu est le réseau subdivisé  $\mathbf{P}^1$  ayant  $(2m + 1) \times (2n + 1)$  points de contrôle et les points

$$\mathbf{P}^1 = \begin{matrix} & P_{0,0}^1 & P_{0,1}^1 & P_{0,2}^1 & \cdots & P_{0,2n}^1 \\ P_{1,0}^1 & P_{1,1}^1 & \cdots & \cdots & \cdots & P_{1,2n}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{2m,0}^1 & P_{2m,1}^1 & \cdots & \cdots & \cdots & P_{2m,2n}^1 \end{matrix}$$

En poursuivant ce procédé, nous obtenons à la  $k$ -ième étape, un réseau noté  $\mathbf{P}^k$  dont le nombre total de sommets est  $(2^k m + 1) \times (2^k n + 1)$ .

$$\mathbf{P}^k = \begin{matrix} & P_{0,0}^k & P_{0,1}^k & P_{0,2}^k & \cdots & P_{0,2^k n}^k \\ P_{1,0}^k & P_{1,1}^k & \cdots & \cdots & \cdots & P_{1,2^k n}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{2^k m,0}^k & P_{2^k m,1}^k & \cdots & \cdots & \cdots & P_{2^k m,2^k n}^k \end{matrix}$$

**Exemple** Les surfaces de Bézier produit tensoriel de degré  $(m - 1) \times (n - 1)$  s'écrivent :

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{n,i}(u) B_{n,j}(v)$$

Les résultats énoncés dans le cas courbe sont généralisés :

- *Théorème de convergence :*

Lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ , la suite des surfaces  $\{\mathcal{S}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tend uniformément vers la surface de Bézier  $\mathcal{S}$ .

- *La formule de commutation est vérifiée :*

les différences finies des points de contrôle suivant les lignes de coordonnées permettent de déterminer en tout point le plan tangent à la limite de la subdivision des réseaux.



## Annexe B

# Quelques notions de géométrie différentielle

Sans entrer dans le détail de la géométrie des courbes et surfaces, il convient cependant de rappeler certaines notions de formes fondamentales et de définir précisément ce qu'est une géodésique, de donner quelques caractérisations et propriétés.

Soit  $\mathcal{S}$  une nappe  $\mathcal{C}^k$ , ( $k \geq 1$ ). Soit  $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^2$  l'espace des paramètres. La surface  $\mathcal{S}$  est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{S} & : \quad \mathfrak{D} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & M(u, v) \end{aligned}$$

### B.1 Première forme fondamentale

$T_M$ , le plan vectoriel tangent à  $\mathcal{S}$  en  $M(u, v)$ , est dirigé par les vecteurs :

$$\frac{\partial M}{\partial u} = S'_u(u, v) \quad \frac{\partial M}{\partial v} = S'_v(u, v)$$

La forme quadratique positive

$$\begin{aligned} \phi_1^M & : \quad T_M & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \vec{V} & \longmapsto & \|\vec{V}\|^2 \end{aligned}$$

est appelée **première forme quadratique fondamentale** de  $\mathcal{S}$  en  $M$ . Elle s'écrit

$$\phi_1^M(\vec{V}) = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 \quad \vec{V} = \lambda \frac{\partial M}{\partial u} + \mu \frac{\partial M}{\partial v}$$

où

$$E = \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\|^2 \quad F = \frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \quad G = \left\| \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2$$

En considérant  $B_1^M$  la forme bilinéaire associée à  $\phi_1^M$ , deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ , (avec  $\vec{V}_i = (\lambda_i, \mu_i)$ ), sont orthogonaux si et seulement si

$$B_1^M(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad E\lambda_1\lambda_2 + F(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + G\mu_1\mu_2 = 0$$



## Normale

$$(\lambda, \mu) \mapsto E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2$$

est une forme quadratique définie positive si et seulement si  $M$  est régulier. Donc  $EG - F^2 \geq 0$ .  
Nous posons

$$H = \sqrt{EG - F^2}, \quad \text{soit} \quad H = \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\|.$$

Le vecteur normal unitaire à  $T_M$  en tout point régulier  $M(u, v)$  est défini par

$$N_M = \frac{1}{H} \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}$$

## Longueur d'arc

Soit  $\mathcal{C}$  un arc tracé sur  $\mathcal{S}$ , paramétré par :

$$\begin{array}{lll} \mathbf{c} & : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{D} & \mathbf{C} = \mathbf{S} \circ \mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ & t \mapsto (u(t), v(t)) & t \mapsto \mathbf{S}(u(t), v(t)) \end{array}$$

La longueur de  $\mathcal{C}$  est :

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|(\mathbf{C})'(t)\| dt = \int_a^b (\phi_1^M(c'(t)))^{1/2} dt = \int_a^b \sqrt{(Eu'^2(t) + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'^2(t))} dt$$

Soit avec une paramétrisation normale :  $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$

## B.2 Géodésiques

### Courbure géodésique

Le vecteur courbure en un point  $M$  d'une courbe  $\mathcal{C}$  est dirigé et orienté suivant la normale principale  $\vec{N}$  et sa norme est la valeur de la courbure  $k$  :

$$\vec{N} = (\vec{C}' \wedge \vec{C}'') \wedge \vec{C}', \quad k = \frac{\|\vec{C}' \wedge \vec{C}''\|}{\|\vec{C}'\|^3}$$

Sur la surface  $\mathcal{S}$  régulière, nous considérons au point  $M$  de la courbe  $\mathcal{C}$ , le plan tangent  $T$  et la normale  $\vec{N}$  en  $M$ .

- La courbure normale en  $M$  correspond à la composante suivant la normale du vecteur courbure. Elle ne dépend que de la direction de la tangente de  $\mathcal{C}$  en  $M$ .

- La courbure géodésique  $k_g$  en  $M$  correspond à la composante tangentielle du vecteur courbure, autrement dit à la courbure de la projection de la courbe dans le plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $M$ . En notant  $\theta$  l'angle entre la normale à la surface  $\vec{N}$  et la normale principale  $\vec{N}$ , nous avons :

$$k_g = k \sin(\theta) = k \frac{\|\vec{N} \wedge \vec{N}\|}{\|\vec{N}\| \|\vec{N}\|}$$

## Caractérisations d'une géodésique

**Définition B.1** Une ligne géodésique sur une surface paramétrée  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^3$  est une courbe paramétrée telle que, en tout point de la courbe sur la surface sa courbure géodésique s'annule.

Cette définition mène à des équations différentielles :

$$Eu'' + Fv'' + \frac{1}{2}E'_u u'^2 + E'_v u'v' + \left(F'_v - \frac{1}{2}G'_u\right)v'^2 = 0$$

$$Fu'' + Gv'' + \left(F'_u - \frac{1}{2}E'_v\right)u'^2 + G'_u u'v' + \frac{1}{2}G'_v v'^2 = 0$$

Remarque: ces expressions dépendent uniquement de  $E, F, G$  et de leurs dérivées partielles par rapport à  $u$  et  $v$ . Nous donnons quelques caractérisations pour se familiariser avec cette notion. Les ouvrages de géométrie différentielle et de calcul différentiel exposent de nombreux résultats sur les géodésiques (cf [Do Carmo, 1976, Darboux, 1972]), nous en énonçons ici quelques uns que nous utilisons dans nos travaux.

**caractérisation géométrique:** en tout point de la courbe  $\mathcal{C}$ , la normale à la surface  $\vec{N}$  et la normale principale sont colinéaires  
ou de manière équivalente  
en tout point de la courbe  $\mathcal{C}$ , la projection de la courbe dans le plan tangent a une courbure nulle.

**caractérisation différentielle:** la dérivée covariante est nulle en tout point de la courbe  $\mathcal{C}$   
ou de manière équivalente  
le champ de vecteurs tangents est parallèle le long de la courbe  $\mathcal{C}$  en tout point.

**caractérisation cinématique:** Pour un point mobile décrivant une trajectoire en mouvement uniforme sur une surface, l'accélération à chaque instant est nulle ou normale au plan tangent.

**Proposition B.1** Soit  $P$  un point de  $\mathcal{S}$  et  $\vec{V} \in T$ ,  $\vec{V} \neq 0$ . Alors il existe une unique géodésique  $G$  telle que  $G(0) = P$  et  $G'(0) = \vec{V}$ .

**Proposition B.2** Les chemins géodésiques entre deux points  $A$  et  $B$  s'expriment comme solutions d'un problème variationnel où la fonctionnelle considérée est la longueur. Ce sont donc des plus courts chemins locaux.



# Bibliographie

- [Agarwal *et al.*, 1997] P. K. Agarwal, S. Har Peled, M. Sharir, and K. R. Varadarajan. Approximating shortest paths on a convex polytop in three dimensions. *Journal of the ACM*, 44(4):567–584, 1997.
- [Ball and Storry, 1984] A.A. Ball and D.J.T. Storry. Recursively generated b-spline surfaces. *CAD*, pages 112–119, 1984.
- [Ball and Storry, 1988] A.A. Ball and D.J.T. Storry. Conditions for tangent plane continuity over recursively generated b-spline surfaces. *ACM Trans. Graph.*, 7(2), 1988.
- [Bangert, 1980] V. Bangert. Closed geodesics on complete surfaces. *Mathematische Annalen*, 251:83–96, 1980.
- [Beck *et al.*, 1986] J.M. Beck, R.T. Farouki, and J.K. Hinds. Surface analysis methods. *IEEE CG&A*, pages 18–36, 1986.
- [Bern and Eppstein, 1992] M. Bern and D. Eppstein. Mesh generation and optimal triangulation. Technical report, Palo Alto Research Center, California, March 1992.
- [Boehm *et al.*, 1984] W. Boehm, G. Farin, and J. Kahmann. A survey of curve and surface methods in cagd. *CAGD*, 1:1–60, 1984.
- [Boissonnat and Yvinec, 1995] J.-D. Boissonnat and M. Yvinec. *Géométrie algorithmique*. Ediscience international, Paris, 1995. Collection informatique.
- [Boix, 1995] E. Boix. *Approximation linéaire des surfaces de  $\mathbb{R}^3$  et applications*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1995.
- [Bonneau, 1997] G.P. Bonneau. Analyse multirésolution. manuscript, 1997. Cours de DEA.
- [Castro Diaz and Hecht, 1995] M.J. Castro Diaz and F. Hecht. Anisotropic surface mesh generation. Rapport de Recherche 2672, INRIA, Octobre 1995. 31 pages.
- [Catmull and Clark, 1978] E. Catmull and J. Clark. Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *CAD J.*, 10(6):350–355, Nov 1978.
- [Cavaretta *et al.*, 1991] A.S. Cavaretta, W. Dahmen, and C.A. Micchelli. *Stationary Subdivision*, volume 93 of *453*. American Mathematical Society, memoirs of the american mathematical society edition, Sept 1991. ISSN 0065-9266.
- [Chaikin, 1974] G.M. Chaikin. An algorithm for high speed curve generation. *Computer Graphics and Image Processing*, 3:346–349, 1974.
- [Chen and Han, 1996] J. Chen and Y. Han. Shortest paths on a polyhed. i: Computing shortest paths. *Int. J. Comput. Geom. Appl.*, 6(2):127–144, 1996.
- [Choi *et al.*, 1994] J. Choi, J. Sellen, and C.K. Yap. Approximate euclidean shortest paths in 3-space. pages 41–48, 1994.
- [Chui, 1992] C.K. Chui. *An Introduction to Wavelets*, volume 1. Boston, MA: Academic Press., 1992. Wavelet Analysis and its applications.

- [Cohen and Herlin, 1997] I. Cohen and I. Herlin. Tracking meteorological structures through curves matching using geodesic paths. Rapport de recherche 3191, INRIA, Juns 1997.
- [Cohen and Kimmel, 1997] L. D. Cohen and R. Kimmel. Global minimum for active contour models: a minimal path approach. *International Journal of Computer Vision*, 24(1):57–78, 1997.
- [Cohen and Schumaker, 1985] E. Cohen and L.L. Schumaker. Rates of convergence of control polygons. *CAGD*, 2:229–235, 1985.
- [Cohen *et al.*, 1980a] E. Cohen, T. Lyche, and R. Riesenfeld. Discrete b-splines and subdivision techniques in cagd and computer graphics. *Comp. Graphics and Image Processing*, 14:87–111, 1980.
- [Cohen *et al.*, 1980b] E. Cohen, T. Lyche, and R. Riesenfeld. Polyhedral subdivision methods of free-form surfaces. 1980.
- [Cohen *et al.*, 1996a] A. Cohen, N. Dyn, and D. Levin. Matrix subdivision schemes, 1996.
- [Cohen *et al.*, 1996b] L. Cohen, E. Bardinet, and N. Ayache. Tracking and motion analysis of the left ventricle with deformable superquadrics. *MEDIA, Medical Image Analysis*, 1(2):129–149, 1996. an international journal on Computer Vision, Visualisation and Image Guided Intervention in Medicine,.
- [Colin de Verdière, 1990] Y. Colin de Verdière. Comment rendre géodésique une triangulation d’une surface. Prépublication 161, Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques, Grenoble, 1990.
- [Dahlquist and Björck, 1974] G. Dahlquist and A. Björck. *Numerical methods*. Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, N.J., 1974. trans. N. Anderson.
- [Dahmen *et al.*, 1985] W. Dahmen, N. Dyn, and D. Levin. On the convergence rates of subdivision algorithms for box spline surfaces. *Constr. Approx.*, 1:305–322, 1985.
- [Dahmen, 1986] W. Dahmen. Subdivision algorithms converge quadratically. *J. of Comp. and Applied Math.*, 16:145–158, 1986.
- [Darboux, 1972] G. Darboux. *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal: 3: lignes géodésiques et courbure géodésique*. Bronx, N. Y.: Chelsea Publishing Comp., 1972.
- [Daubechies *et al.*, 1997a] I. Daubechies, I. Guskov, and W. Sweldens. Regularity of irregular schemes. Technical report, may 1997.
- [Daubechies *et al.*, 1997b] I. Daubechies, I. Guskov, and W. Sweldens. Regularity of irregular subdivision. *Constructive Approximation*, 15(3), 1997.
- [Daubechies *et al.*, 1998] I. Daubechies, I. Guskov, and W. Sweldens. Commutation of irregular subdivision. Technical report, 1998.
- [Daubechies *et al.*, 1999] I. Daubechies, I. Guskov, P. Schröder, and W. Sweldens. Wavelets on irregular point sets. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 1999. Submitted.
- [De Boor, 1978] C. De Boor. *A practical guide to splines*. Springer, 1978.
- [De Boor, 1987] C. De Boor. Cutting corners always works. *CAGD*, 4:125–131, 1987.
- [De Boor, 1995] C. De Boor. A multivariate divided difference. In Charles K. Chui and Larry L. Schumaker, editors, *Approximation Theory VIII, Vol. 1: Approximation and Interpolation*, pages 87–96. World Scientific Publishing Co., Inc., 1995.
- [Dijkstra, 1959] E.W. Dijkstra. A note on two problems in connection with graphs. *Numer. Math.*, 1:269–271, 1959.

- [Do Carmo, 1976] M. P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1976.
- [Duflos *et al.*, 1988] C. Duflos, P. Meheut, and J.-C. Weill. Calcul de géodésiques par une méthode de projection. Rapport de recherche 0907, INRIA, Rocquencourt, Octobre 1988. 32 pages.
- [Dyn and Levin, 1990] N. Dyn and D. Levin. Interpolating subdivision schemes for the generation of curves and surfaces. *International Series of Numerical Mathematics*, 94, 1990.
- [Dyn and Levin, 1994] N. Dyn and D. Levin. The subdivision experience. In A. Le Méhauté P.J. Laurent and L. L. Schumaker, editors, *Wavelets, Images and Surface Fitting*, pages 229–244, Wellesley, MA, 1994. A K PETERS.
- [Dyn, 1992] N. Dyn. *Subdivision Schemes in CAGD*, pages 36–105. Oxford Sci. Publication, ed. will light edition, 1992.
- [Dyn, 2001] N. Dyn. Subdivision schemes on hexagonal meshes. MINGLE, 2001.
- [Farin, 1988] G.E. Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, London, 1st ed. edition, 1988.
- [Fiorot and Jeannin, 1989] J.-C. Fiorot and P. Jeannin. *Courbes et surfaces rationnelles*. Masson, rma 12 edition, 1989.
- [Fiorot, 1987] J.-C. Fiorot. Courbes bézier. In *Colloque Courbes et Surfaces Bézier/B-Splines*, pages 1–31, Rennes, mai 1987.
- [Floater, 1997] M. S. Floater. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. *CAGD*, 14:231–250, 1997.
- [Franklin and Akman, 1984] W.R. Franklin and V. Akman. Minimal paths between two points on/around convex polyhedra. Tech. report, Dept. and Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY, may 1984. Electrical, Computer and systems Engineering.
- [Frey and Borouchaki, 1996] P. J. Frey and H. Borouchaki. Critères géométriques pour l'évaluation des triangulations de surfaces. Rapport de Recherche 2951, INRIA, 1996. 32 pages.
- [Frey and George, 1999] P. J. Frey and P. L. George. *Maillages*. Hermes, Paris, 1999. Application aux éléments finis.
- [Frey *et al.*, 1997] P. J. Frey, Pascal J., and H. Borouchaki. Qualité des maillages de surfaces. partie i: spécifications isotropes. Rapport de Recherche 3228, INRIA, Aot 1997.
- [Gallier, 2000] J. Gallier. *Geometric Methods and Applications*. Springer, 2000. For Computer Science and Engineering.
- [Gallot *et al.*, 1990] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemanian Geometry*. Springer Verlag, second edition, 1990.
- [George and Borouchaki, 1997] P. L. George and H. Borouchaki. *Triangulation de Delaunay et maillage*. Hermes, Paris, 1997. Application aux éléments finis.
- [Gerussi, 2000] Alexandre Gerussi. *Analyse Multirésolution Non Embote: Applications la visualisation scientifique*. PhD thesis, LMC-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, December 2000.
- [Gramain, 1971] A. Gramain. *Topologie des surfaces*. PUF, Paris, 1971.
- [Grayson, 1989] M.A. Grayson. Shortening embedded curves. *Annals of Mathematics*, 129:71–111, 1989.

- [Gregory and Qu, 1996] J. A. Gregory and R. Qu. Nonuniform corner cutting. *CAGD*, 13:763–772, 1996.
- [Gruendig *et al.*, 1996] L. Gruendig, L. Ekert, and E. Moncrieff. Geodesic and semi-geodesic line algorithms for cutting pattern generation of architectural textile structures. In *Shell and Spacial Structure*, China, may 1996. Asia-Pacific Conference.
- [Guskov, 1998] I. Guskov. Multivariate subdivision schemes and divided differences. Technical report, 1998.
- [Har Peled, 1997a] S. Har Peled. Approximate shortest path maps in three dimensions. In *SCG 98*, pages 383–, Minneapolis Minnesota, USA, 1997.
- [Har Peled, 1997b] S. Har Peled. Approximate shortest paths and geodesic diameters on convex polytopes in three dimensions. In *Computational Geometry 97*, pages 359–, Nice, France, 1997.
- [Hershberger and Snoeyink, 1994] J. Hershberger and J. Snoeyink. Computing minimum length paths of a given homotopy class. *Comp. Geom.*, 4:63–97, 1994.
- [Hershberger and Suri, 1994] J. Hershberger and S. Suri. Practical methods for approximating shortest paths on a convex polytope in  $\mathbb{R}^3$ . *Comput. Geom.*, 10(1):31–46, 1994. Chapter 49.
- [Hoschek and Lasser, 1993] J. Hoschek and D. Lasser. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. AK Peters, Wellesley, Massachusetts, 1993.
- [Huot *et al.*, 1999] E. Huot, H. Yahia, I. Herlin, and I. Cohen. Mise en correspondance de surfaces par chemins géodésiques. Rapport de recherche 3842, INRIA, Dec. 1999.
- [Jia *et al.*, 1999] R.-Q. Jia, S. D. Riemenschneider, and D.-X. Zhou. Smoothness of multiple refinable functions and multiple wavelets. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 21(1):1–28, 1999.
- [Kajiya, 1982] J.T. Kajiya. Ray tracing parametric patches. *Computer Graphics*, 16(3):245–254, July 1982. Proc. SIGGRAPH 82.
- [Kimmel and Sapiro, 1995] R. Kimmel and G. Sapiro. Shortening three-dimensional curves via two-dimensional flows. *Computers Math. Applic.*, 29(3):49–62, 1995.
- [Kimmel and Sethian, 1998] R. Kimmel and J.A. Sethian. Computing geodesic paths on manifolds. In *Natl. Acad. Sci.*, 1998.
- [Kimmel *et al.*, 1994] R. Kimmel, A. Amir, and A.M. Bruckstein. Finding shortest paths on surfaces using level sets propagation. In Le Méhauté Laurent and Schumaker, editors, *Curves and Surfaces in Geometric Design*, pages 259–268, Chamonix, France, August 1994.
- [Kiryati and Szekely, 1993] N. Kiryati and G. Szekely. Estimating shortest paths and minimal distances on digitized three dimensional surfaces. *Pattern Recognition*, 26(11):1623–1637, 1993.
- [Klingenberg, 1978] W. Klingenberg. *Lectures on closed geodesics*. Springer, grundlehren der math. wissens. edition, 1978.
- [Lane and Riesenfeld, 1980] J.M. Lane and R.F. Riesenfeld. A theoretical development for the computer generation and display of piecewise polynomial surfaces. *IEEE Trans. on PAMI*, 2(1), January 1980.
- [Laug *et al.*, 1996] P. Laug, H. Borouchaki, and P. L. George. Maillage de courbes gouverné par une carte de métriques. Rapport de Recherche 2818, INRIA, Mars 1996. 52 pages.

- [Lee *et al.*, 1998] A. W. F. Lee, W. Sweldens, P. Schröder, L. Cowsar, and D. Dobkin. *Parameterization, remeshing, and compression using subdivision. MAPS: Multiresolution Adaptive Parameterization of surfaces*, chapter 9. 1998.
- [Lemarié-Rieusset, 1992] P. G. Lemarié-Rieusset. Analyses multirésolutions non-orthogonales, commutations entre projecteurs et dérivation et ondelettes vecteurs à divergence nulle. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 8:221–238, 1992.
- [Lounsbery *et al.*, 1997] M. Lounsbery, T. D. DeRose, and J. Warren. Multiresolution analysis for surfaces of arbitrary topological type. *ACM Trans. on Graphics*, 16(1):34–73, January 1997.
- [Lusternik and Schnirelmann, 1929] L. Lusternik and L. Schnirelmann. Sur le problème de trois géodésiques fermées sur les surfaces de genre 0. *C. R. Acad. Sci.*, 189:269–271, 1929.
- [Maekawa and Chalfant, 1998] T. Maekawa and J.S. Chalfant. Computation of inflection lines and geodesics on developable surfaces. *Mathematical Engineering in Industry*, 7(2):251–267, 1998.
- [Maekawa and Patrikalakis, 1994] T. Maekawa and N.M. Patrikalakis. Interrogation of differential geometry properties for design and manufacture. *The Visual Computer*, 10(4):216–237, March 1994.
- [Maekawa, 1996] T. Maekawa. Computation of shortest paths on free-form parametric surfaces. *Journal of Mechanical Design*, 118(4):499–508, Dec 1996. ASME Transactions.
- [Mitchell *et al.*, 1987] J.S.B. Mitchell, D.M. Mount, and C.H. Papadimitriou. The discrete geodesic problem. *SIAM J. COMPUT.*, 16(4):647–668, aug 1987.
- [Neamtu, 1992] M. Neamtu. Multivariate divided differences. i: Basic propeties. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(5):1435–1445, 1992.
- [O’Rourke *et al.*, 1984] J. O’Rourke, S. Suri, and H. Booth. Shortest paths on polyhedral surfaces. Technical report, Dept. Electrical Engineering and Computer Science, Johns Hopkins Univ. and Baltimore, september 1984.
- [Osher and Sethian, 1988] S.J. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J.Comp. Phys.*, 79:12–49, 1988.
- [Papadimitriou, 1985] C. H. Papadimitriou. An algorithm for shortest-path motion in thres dimensions. *Inform. Process. Lett.*, 20:259–263, 1985.
- [Prautzsch and Kobbelt, 1994] H. Prautzsch and L. Kobbelt. Convergence of subdivision and degree elevation. *Adv. Comput. Math.*, 2:143–154, 1994.
- [Prautzsch, 1985] H. Prautzsch. Generalized subdivision and convergence. *CAGD*, 2:69–75, 1985.
- [Rabut, 1999] C. Rabut. Multivariate divided differences with simple knots. *SIAM*, 1999.
- [Reif and Storer, 1985] J. H. Reif and J.A. Storer. Shortest paths in euclidean space with polyhedral obstacles. Technical Report CS-85-121, Computer Science Dept, Brandeis Univ. and Waltham, MA, April 1985. Technical report.
- [Risler, 1991] J.-J. Risler. *Méthodes Mathématiques pour la CAO*. Collection Recherches en Mathématiques Appliquées, 1991.
- [Sablonnière and Le Méhauté, 1987] P. Sablonnière and A. Le Méhauté. Courbes et surfaces bézier/b-splines. Rennes, 1987.



- [Schaback, 1993] R. Schaback. Error estimates for approximations from control nets. *CAGD*, 10(1):57–66, 1993.
- [Schwartz *et al.*, 1989] E.L. Schwartz, A. Shaw, and E. Wolfson. A numerical solution to the generalized mapmaker’s problem: flattening nonconvex polyhedral surfaces. *IEEE Trans. on PAMI*, 11(9), sept 1989.
- [Sethian, 1987] J.A. Sethian. *Numerical methods for propagation fronts*. Springer, New York, p. concus and r. finns edition, 1987. Variational methods for free surface Interfaces.
- [Sharir and Schorr, 1986] M. Sharir and A. Schorr. On shortest paths in polyhedral spaces. *SIAM J. COMPUT.*, 15(1):193–215, 1986.
- [Sharir, 1987] M. Sharir. On shortest paths amidst convex polyhedra. *SIAM J. Comput.*, 16:561–572, 1987.
- [Sneyd and Peskin, 1990] J. Sneyd and C.S. Peskin. Computation of geodesic trajectories on tubular surfaces. *SIAM J. of scientific statistical computing*, 11(2):230–241, march 1990.
- [Speer *et al.*, 1998] T. Speer, M. Kuppe, and J. Hoschek. Global reparametrization for curve approximation. *CAGD*, 15:869–877, 1998.
- [Spivak, 1975] M. Spivak. *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume 3. Public ou Perish, Inc., 2nd edition, 1975.
- [Stollnitz *et al.*, 1996] E.J. Stollnitz, T.D. Deroose, and D.H. Salesin. *Wavelets for Computer Graphics Theory and Applications*. Morgan Kaufmann Publishers, Inc., San Francisco, California, 1996.
- [Streeter, 1979] D. D. Streeter. Gross morphology and fiber geometry of the heart. In *Handbook of physiology*, section 2: the cardiovascular system., 1979. American Physiology Society, Bethesda, Matyland.
- [Szafran, 1997] N. Szafran. Triangulation et maillage. Cours de DEA, 1997.
- [Varadarajan and Agarwal, 1997] K. R. Varadarajan and P. K Agarwal. Approximating shortest paths on a nonconvex polyhedron. *IEEE*, pages 182–191, 1997.
- [Véron, 1997] P. Véron. *Techniques de simplification de modèles polyédriques pour un environnement de conception mécanique*. PhD thesis, INPG, Lab. Sols, Solides, Structures de Grenoble, 1997. Thèse, Mécanique.
- [Warren, 1995] J. Warren. Subdivision methods for geometric design. Technical report, Department of Computer Science, Rice University, nov. 1995.
- [Wolfson and Schwartz, 1989] E. Wolfson and E.L. Schwartz. Computing minimal distances on polyhedral surfaces. *IEEE Trans. on PAMI*, 11(9):1001–1005, 1989.
- [Zorin and Schröder, 1999] D. Zorin and P. Schröder. Subdivision. In *SIGGRAPH*, 1999.