CENG 481 GRAF TEORİ VE UYGULAMALARI
Hafta 15

Prof. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

Hafta 15
Konular

1- Graflarda(Ağlarda) Merkezlik Ölçümleri

--- Derece merkezliği

--- Özvektör merkezliği

--- Uzaklığa bağlı merkezlikler

--- Closeness (Yakınlık) Merkezliği

--- Betweenness (Arasındalık) Merkezliği

--- Graf teorisinde ve ağ analizinde, merkezilik göstergeleri, ağ konumlarına karşılık gelen bir grafik içindeki düğümlere sayılar veya sıralamalar ataması olarak ifade edilir Örneğin,

Bir sosyal ağdaki en etkili kişi(ler)in kimdir?,

İnternet veya kentsel ağlardaki temel altyapı düğümleri hangileridir?

Bir hastalığın yayılımı nasıldır?

--- Merkezilik kavramları ilk olarak sosyal ağ analizleri için geliştirilmiştir.

--- Merkeziliği ölçmek için kullanılan terimlerin çoğu sosyolojik kavramlar için kullanmaktadır.

--- Graf teorisinde merkeziliği önem (etki veya öncelik) olarak tanımlayabiliriz.

--- Grafları karşılaştırdığımızda grafın tamamına bir önem (merkezilik) değeri atanmaktadır. Bu kavram grafın merkeziliği olarak ifade edilir.

--- Bununla birlikte, bir ağımız olduğunda, her tepeye (veya ayrıta) bir önem değeri (merkezilik) atayarak hangi tepelerin (veya ayrıtların) daha önemli olduğunu analiz edebiliriz. Bu kavram tepe merkeziliği olarak ifade edilmektedir.

Derece merkezlilik (Degree Centrality)

Belirli bir tepenin etkisi ne kadar güçlüyse, o kadar çok komşusu vardır. İnsan kültüründe, çok arkadaşı olan bir kişinin daha az arkadaşı olan birinden daha iyi durumda olduğunu varsayarız. Bunun gibi bir kişi, etkileyici olarak çalışabilir ve bir sosyal ağda önemli bir rol oynayabilir. Bu kavram, bir sosyal ağı temsil eden bir grafikteki belirli bir düğümün derecesini ifade eden derece merkeziliğine yol açar.

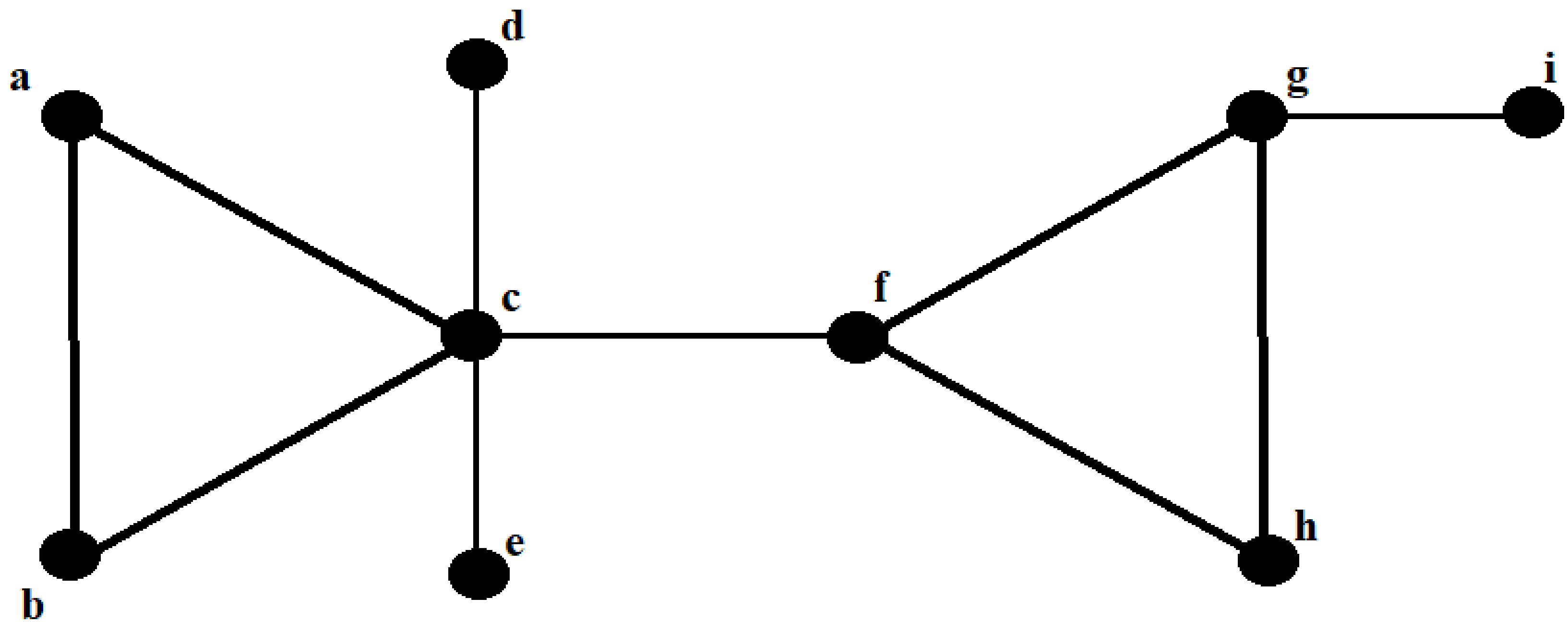
Her bir tepedeki ilişki düzeyi, komşularının toplam sayısı (tepenin derecesi) hesaplanarak ve graftaki tüm tepelerin derecelerinin toplamına bölünerek belirlenir. Sonuç olarak, bir tepe noktasının derece merkezliliği:

$$C_D(v) = \frac{\deg(v)}{2m}$$

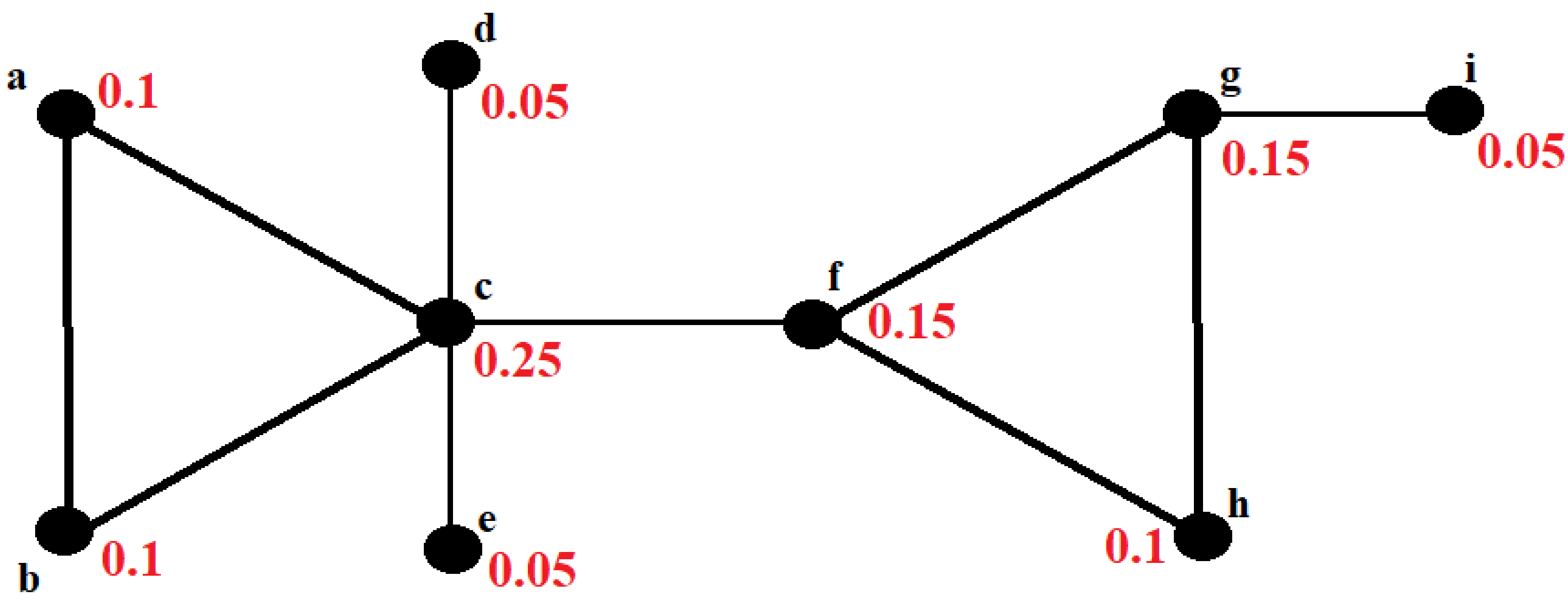
şeklinde tanımlanır. Burada *deg*(*v*), *v* tepesinin derecesi ve 2*m* *(ayrıt sayısının iki katı)* dereceler toplamına eşittir.

Sonuç olarak bu tanımda, bir tepenin ne kadar çok komşusu varsa o kadar önemli olduğu düşünülmektedir.

Örnek: Aşağıda verilen G grafındaki her bir tepenin derece merkezliğini bulunuz.



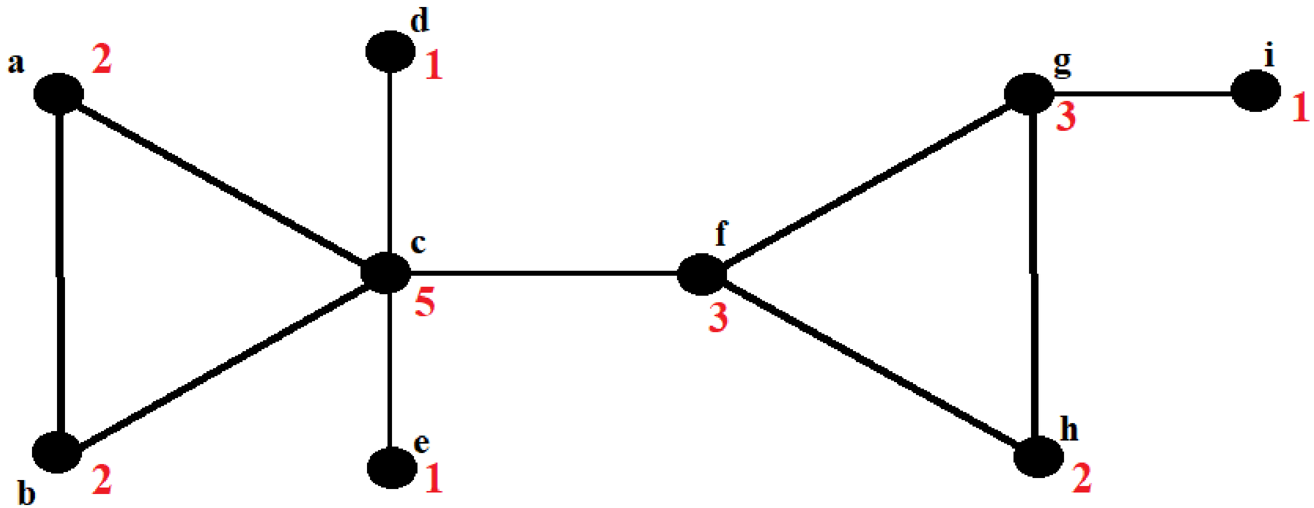
G grafı



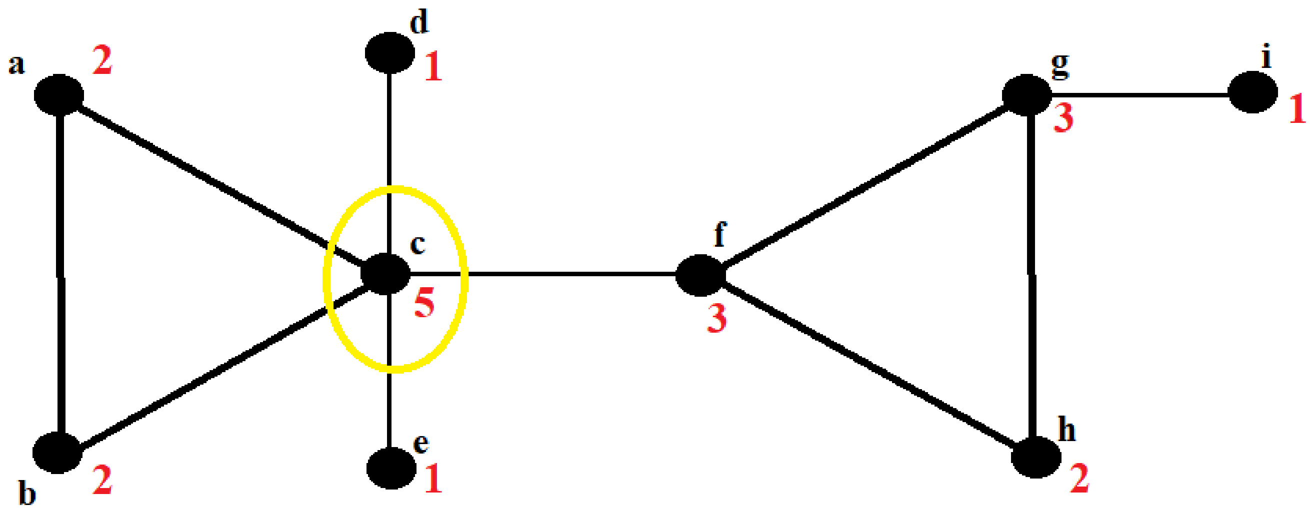
G grafı ve her bir tepenin derece merkezliliği

Kullanım alanlarına göre farklı derece merkezlik tanımlarıda kullanılmaktadır!!!

Örneğin, her bir tepenin derecesi belirlenir.



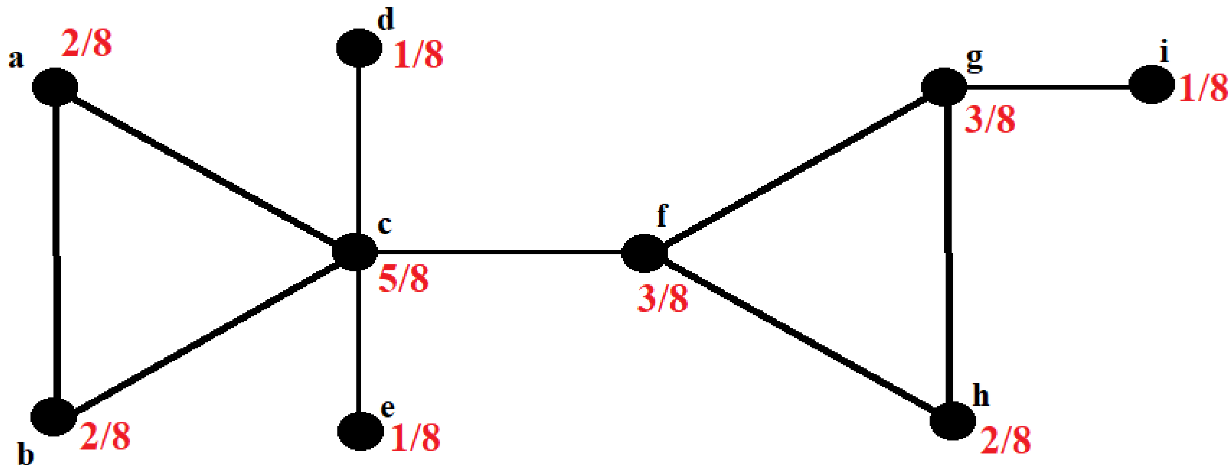
G grafı



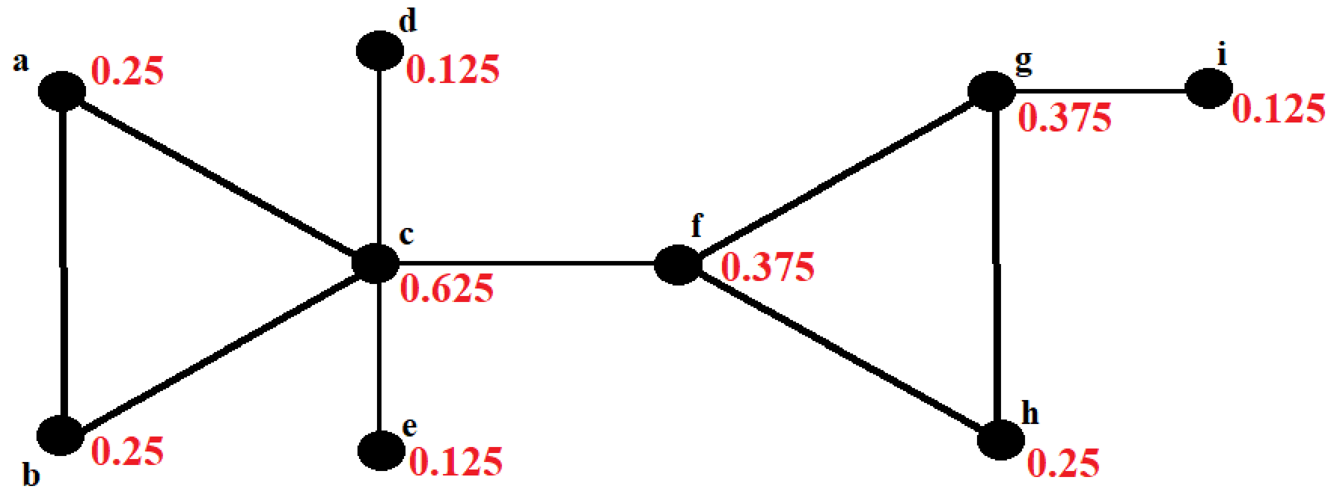
G grafı

Farklı bir tanım: Her bir tepenin derecesi normalleştirilir. (0-1 arasında değerler elde edilir!!!)

$$C_D(v) = \frac{\deg(v)}{|V(G)|-1}$$



G grafı

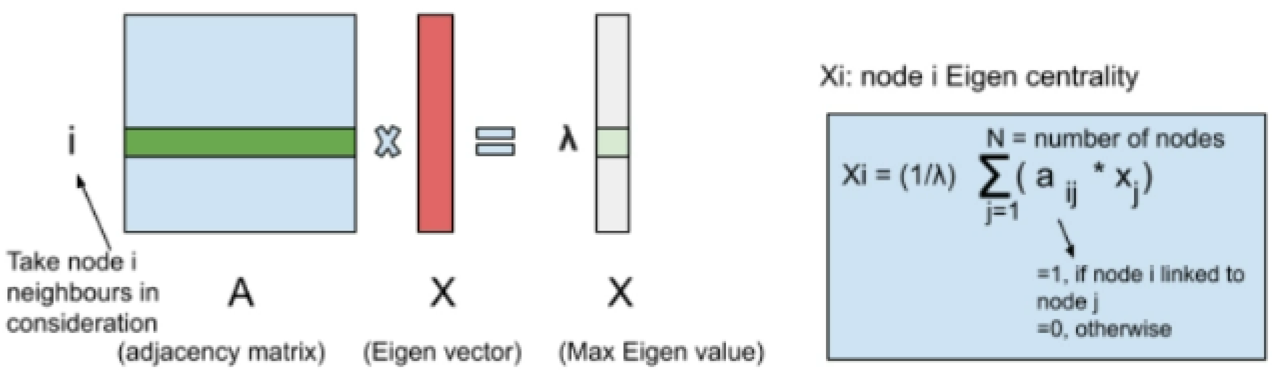


G grafı

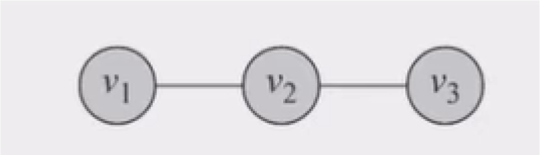
Özvektör merkezliliği (Eigenvector Centrality)

--- Özvektör merkeziliği, komşularını dikkate alarak bir tepenin önemini hesaplar. Öncelikle düğüm derecesi hesaplanır ve daha sonra bağlantılar (komşular) arasındaki bağlantı sayısı bulunur. Komşuluk matrisi ayrışması kullanılmaktadır.

--- Her bir "*i*" tepesi için en büyük özdeğere sahip özvektörünün "*i*." girişi, "*i*" tepesinin öz merkezilik değeri olarak tanımlanır.



Örnek: Aşağıda verilen G grafının özvektör merkezliliği değerlerini bulunuz.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\lambda)(\lambda^2-1)-1(-\lambda) = 2\lambda - \lambda^3 = \lambda(2-\lambda^2) = 0$$

Özdeğerler: $(-\sqrt{2}, 0, +\sqrt{2})$ Maksimum Özdeğer: $(-\sqrt{2}, 0, +\boxed{\sqrt{2})}$

Maksimum Özdeğere karşılık gelen özvektör:

$$\begin{bmatrix} 0-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0-\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.71 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Özvektör Merkezliliği:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.71 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} x_{v_1} \\ x_{v_2} \\ x_{v_3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_{v_1} &= 0.503 \\ x_{v_2} &= 0.709 \\ x_{v_3} &= 0.503 \end{aligned}$$

--- Özvektör merkeziliği (eigen vector centrality) sadece bir tepeye (düğüme) ait merkeziliği değil, ayrıca o tepeye (düğüme) bağlı diğer düğümlerin de merkeziliğini hesaplayan, stratejik olarak bağlantılı düğümlerin etki değerlerini gösteren, bir merkezilik ölçütü olarak ifade edilir. Özvektör merkezliği tepenin (düğümün) ağdaki öneminin ve etkisi olarak ifade edilir.

--- Temelde graftaki (ağdaki) bir tepe (düğüm) için önemli tepelere (düğümlere) olan bağlantıların etkisinin, diğer sıradan bağlantılardan daha fazla olabileceği düşüncesi savunulmaktadır. Bağlantıda olduğu tepelerin (düğümlerin) daha merkezi olması, o tepenin (düğümün) de daha merkezi bir konumda olacağını göstermektedir.

Uzaklığa Bağlı Merkezlilikler

Closeness (Yakınlık) ve Residual Closeness (Kalıntı Yakınlık) Merkezlikleri:

--- Yakınlık merkeziliği, graftaki (ağdaki) diğer tüm tepelere "yakınlığa" dayalı olarak her tepe için bir değer bulma olarak ifade edilir.

--- Bu ölçümde, öncelikle tüm tepeleri birbirine bağlayan en kısa yollar hesaplanır ve ardından en kısa yollarının toplamına dayalı olarak her tepeye bir değer verilir. Bu sayede, tüm grafı en kısa sürede etkileyecek en iyi pozisyonlara sahip tepeler belirlenmektedir.

--- Diğer tepeler kısa yollardan ulaşabilen veya diğer tepeler tarafından kısa yollardan "daha ulaşılabilir" olan tepeler daha yüksek bir değere sahiptir. Bu tepeler, tüm grafa (ağa) merkezi olmayan tepelerden daha hızlı erişebildikleri için ağın "merkezi" durumundadır. Böylece, bu yapısal avantaj güce dönüşür ve yakınlık merkeziliği kavramı ortaya çıkar.

--- Başka bir deyişle, belirli bir başlangıç tepesi ile ağın geri kalan düğümleri arasındaki ortalama uzaklıktır.

Closeness değeri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

Tanım: G bir graf ve $u \in V(G)$ olsun. u tepesinin G grafındaki closeness değeri,

$$C(u) = \sum_{\substack{v \neq u \\ v \in V(G)}} \frac{1}{2^{d(u,v)}} \text{ dir.}$$

Tanım: Bir G grafının closeness değeri,

$$C(G) = \sum_{u \in V(G)} C(u) \text{ dur.}$$

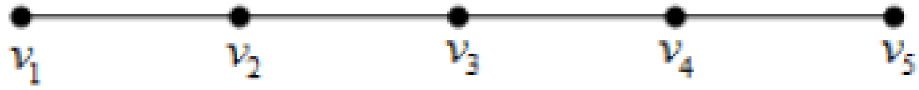
Örnek: P_5 yol grafının closeness değerinin hesaplanması:

P_5 yol grafi

P_5 yol grafının closeness değerini hesaplamak için $\forall v_i \in V(P_5)$ $(1 \leq i \leq 5)$ tepesinin P_5 grafındaki closeness değeri bulunur:

- v_1 tepesi P_5 grafında v_2 tepesine komşu, v_3 tepesine 2 uzaklıkta, v_4 tepesine 3 uzaklıkta ve v_5 tepesine 4 uzaklıktadır. O halde, v_1 tepesinin closeness değeri,

  $C(v_1) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 0.9375$ elde edilir.



P_5 yol grafi

- v_2 tepesi P_5 grafında v_1 ve v_3 tepelerine komşu, v_4 tepesine 2 uzaklıkta ve v_5 tepesine 3 uzaklıktadır. O halde, v_2 tepesinin closeness değeri,

  $C(v_2)=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=1.375$ elde edilir.

- v_3 tepesi P_5 grafında v_2 ve v_4 tepelerine komşu, v_1 ve v_5 tepelerine 2 uzaklıktadır. O halde, v_3 tepesinin closeness değeri,

  $C(v_3)=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=1.5$ elde edilir.

P_5 yol grafi

- v_4 tepesinin P_5 grafındaki closeness değeri v_2 tepesine benzer şekilde hesaplanır. O halde, v_4 tepesinin closeness değeri,

  $C(v_4)=1.375$ elde edilir.

- v_5 tepesinin P_5 grafındaki closeness değeri v_1 tepesine benzer şekilde hesaplanır. O halde, v_5 tepesinin closeness değeri,

  $C(v_5)=0.9375$ elde edilir.

Sonuç olarak:

P_5 grafının closeness değeri, $\boxed{C(P_5)=\sum_{i=1}^{5} C(v_i)=6.125}$ elde edilir.

Önemli bazı grafların Closeness Değerleri:

(a) K_n, n tepeli tam graf olmak üzere,

$$C(K_n) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ dir.}$$

(b) $K_{1,n-1}$, n tepeli yıldız graf olmak üzere,

$$C(K_{1,n-1}) = \frac{(n-1)(n+2)}{4} \text{ tür.}$$

(c) P_n, n tepeli yol graf olmak üzere,

$$C(P_n) = 2n - 4 + \frac{1}{2^{n-2}} \text{ dir.}$$

(d) C_n, n tepeli çevre graf olmak üzere,

$$C(C_n) = \begin{cases} 2n\left(1 - \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\right), & n \text{ çift ise;} \\ 2n\left(1 - \dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}\right), & n \text{ tek ise.} \end{cases} \text{ dir.}$$

Residual Closeness değeri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

Tanım: G bir graf ve $k \in V(G)$ olsun. k tepesi, G grafından atılırsa, geriye kalan grafın closeness değeri,

$$C_k = \sum_{u \in V(G \setminus \{k\})} C_k(u) = \sum_{u \in V(G \setminus \{k\})} \sum_{\substack{v \neq u \\ v \in V(G \setminus \{k\})}} \frac{1}{2^{d_k(u,v)}} \text{ dir.}$$

Tanım: G grafının residual closeness değeri,

$$R(G) = \min_{k \in V(G)} \{C_k\} \text{ dır.}$$

Örnek: P_5 yol grafının residual closeness değerinin hesaplanması:

P_5 yol grafi

P_5 yol grafının residual closeness değerinin hesaplanması için beş durum söz konusudur:

Durum 1: v_1 tepesi P_5 grafından atılırsa, geriye $P_5 \setminus \{v_1\}$ alt grafı kalır.

$P_5 \setminus \{v_1\}$ grafi

$P_5 \setminus \{v_1\}$ grafi

$P_5 \setminus \{v_1\}$ grafında,

- v_2 tepesi, v_3 tepesine komşu, v_4 tepesine 2 uzaklıkta ve v_5 tepesine 3 uzaklıktadır. O halde, v_2 tepesinin closeness değeri,

  $C_{v_1}(v_2) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 0.875$ elde edilir.

- v_3 tepesi, v_2 ve v_4 tepelerine komşu, v_5 tepesine 2 uzaklıktadır. O halde, v_3 tepesinin closeness değeri,

  $C_{v_1}(v_3) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} = 1.25$ elde edilir.

$P_5 \setminus \{v_1\}$ grafi

- v_4 tepesinin closeness değeri, v_3 tepesine benzer şekilde hesaplanır ve

  $C_{v_1}(v_4) = 1.25$ elde edilir.

- v_5 tepesinin closeness değeri, v_2 tepesine benzer şekilde hesaplanır ve

  $C_{v_1}(v_5) = 0.875$ elde edilir.

O halde, v_1 tepesi P_5 grafından atılırsa, geriye kalan $P_5 \setminus \{v_1\}$ grafının closeness değeri,

$$C_{v_1} = \sum_{i \neq 1} C_{v_1}(v_i) = 4.25$$ elde edilir.

Durum 2: v_2 tepesi P_5 grafından atılırsa, geriye $P_5 \setminus \{v_2\}$ alt grafı kalır .

$P_5 \setminus \{v_2\}$ grafı

$P_5 \setminus \{v_2\}$ grafında,

- v_1 tepesi izole tepedir ve closeness değeri,

  $C_{v_2}(v_1) = \frac{1}{2^{\infty}} + \frac{1}{2^{\infty}} + \frac{1}{2^{\infty}} = 0$ elde edilir.

- v_3 tepesi, v_4 tepesine komşu, v_5 tepesine 2 uzaklıktadır ve v_1 tepesiyle bağlantısı yoktur. O halde, v_3 tepesinin closeness değeri,

  $C_{v_2}(v_3) = \frac{1}{2^{1}} + \frac{1}{2^{2}} + \frac{1}{2^{\infty}} = 0.75$ elde edilir.

$P_5 \setminus \{v_2\}$ grafı

- v_4 tepesi, v_3 ve v_5 tepelerine komşudur ve v_1 tepesiyle bağlantısı yoktur. O halde, v_4 tepesinin closeness değeri,

  $C_{v_2}(v_4) = \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^\infty} = 1$ elde edilir.

- v_5 tepesinin closeness değeri, v_3 tepesine benzer şekilde hesaplanır ve

  $C_{v_2}(v_5) = 0.75$ elde edilir.

O halde, v_2 tepesi P_5 grafından atılırsa, geriye kalan $P_5 \setminus \{v_2\}$ grafının closeness değeri,

$C_{v_2} = \sum_{i \neq 2} C_{v_2}(v_i) = 2.5$ elde edilir.

Durum 3: v_3 tepesi P_5 grafından atılırsa, geriye $P_5 \setminus \{v_3\}$ alt grafı kalır.

$P_5 \setminus \{v_3\}$ grafı

$P_5 \setminus \{v_3\}$ grafında,

- v_1 tepesi, v_2 tepesine komşu, v_4 ve v_5 tepeleri ile bağlantısızdır. O halde, v_1 tepesinin closeness değeri,

  $C_{v_3}(v_1) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^\infty} + \frac{1}{2^\infty} = 0.5$ elde edilir.

$P_5 \setminus \{v_3\}$ grafı

- v_2, v_4 ve v_5 tepelerinin closeness değerleri, v_1 tepesine benzer şekilde hesaplanır ve

  $C_{v_3}(v_2) = C_{v_3}(v_4) = C_{v_3}(v_5) = 0.5$ elde edilir.

O halde, v_3 tepesi P_5 grafından atılırsa, geriye kalan $P_5 \setminus \{v_3\}$ grafının closeness değeri,

$C_{v_3} = \sum_{i \neq 3} C_{v_3}(v_i) = 2$ elde edilir.

Durum 4: v_4 tepesi P_5 grafından atılırsa, geriye $P_5 \setminus \{v_4\}$ alt grafı kalır.

$P_5 \setminus \{v_4\}$ grafı

$P_5 \setminus \{v_4\}$ grafının closeness değeri, Durum 2'ye benzer şekilde hesaplanır ve $C_{v_4} = 2.5$ elde edilir.

Durum 5: v_5 tepesi P_5 grafından atılırsa, geriye $P_5 \setminus \{v_5\}$ alt grafı kalır.

$P_5 \setminus \{v_5\}$ grafı

$P_5 \setminus \{v_5\}$ grafının closeness değeri, Durum 1'e benzer şekilde hesaplanır ve $C_{v_5} = 4.25$ elde edilir.

Sonuç olarak:

Durum 1, 2, 3, 4 ve 5'ten, P_5 grafının residual closeness değeri, $\boxed{R(P_5) = \min_i \{C_{v_i}\} = 2}$ elde edilir.

Residual closeness, Dangalchev (2006) tarafından tanımlanmış olan yeni bir graf zedelenebilirlik ölçümüdür. Residual closeness, graftan tek bir tepe atılması sonucu, geriye kalan grafın durumunu bağlantısız olma koşulu olmaksızın inceler. Residual closeness, graftaki herbir tepeyi grafın diğer tepelerinden bağımsız olarak ele alır. Dolayısıyla, grafta iletişimin hızlı ve etkin olmasını sağlayan tepe veya tepeleri ayırt eder. Bir grafın residual closeness değerini veren tepe veya tepeler, grafta hızlı veri dağılımını sağlar.

Önemli bazı grafların Residual Closeness Değerleri:

(a) P_n, n tepeli yol graf olmak üzere, $R(P_n)=\begin{cases} 2n-10+\dfrac{12}{2^{\frac{n}{2}}} & , n \text{ çift ise;} \\ 2n-10+\dfrac{1}{2^{\frac{n-7}{2}}}, & n \text{ tek ise.} \end{cases}$ dir.

(b) C_n, n tepeli çevre graf olmak üzere, $R(C_n)=2n-6+\dfrac{1}{2^{n-3}}$ dir.

Çalışma Sorusu: *n* tepeli tam grafın ve yıldız grafın Residual Closeness değerlerini bulunuz.

Yanıt:

$$R(K_n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$R(K_{1,n-1}) = 0$$

Betweenness Merkezliği (Arasındalık Merkezliği)

--- Arasındalık merkeziliği, en kısa yolları önceliklendirme açısından yakınlık merkeziliğinin göreli bir ölçüsüdür. İncelediğimiz tepeyi içeren en kısa yolların oranını hesaplar.

--- Yüksek arasındalık merkeziliğine sahip bir düğüm, diğer tepeler arasında hareket eden bilgileri önemli ölçüde etkileyebilir.

--- Sonuç olarak, bu tepelerin silinmesi graftaki tepeler (düğümler) arasındaki bağlantıları kesecektir. Bu haliyle, arasındalık önemli merkezlilik ölçümlerinden biri olmaktadır.

Betweenness (Arasındalık) değeri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

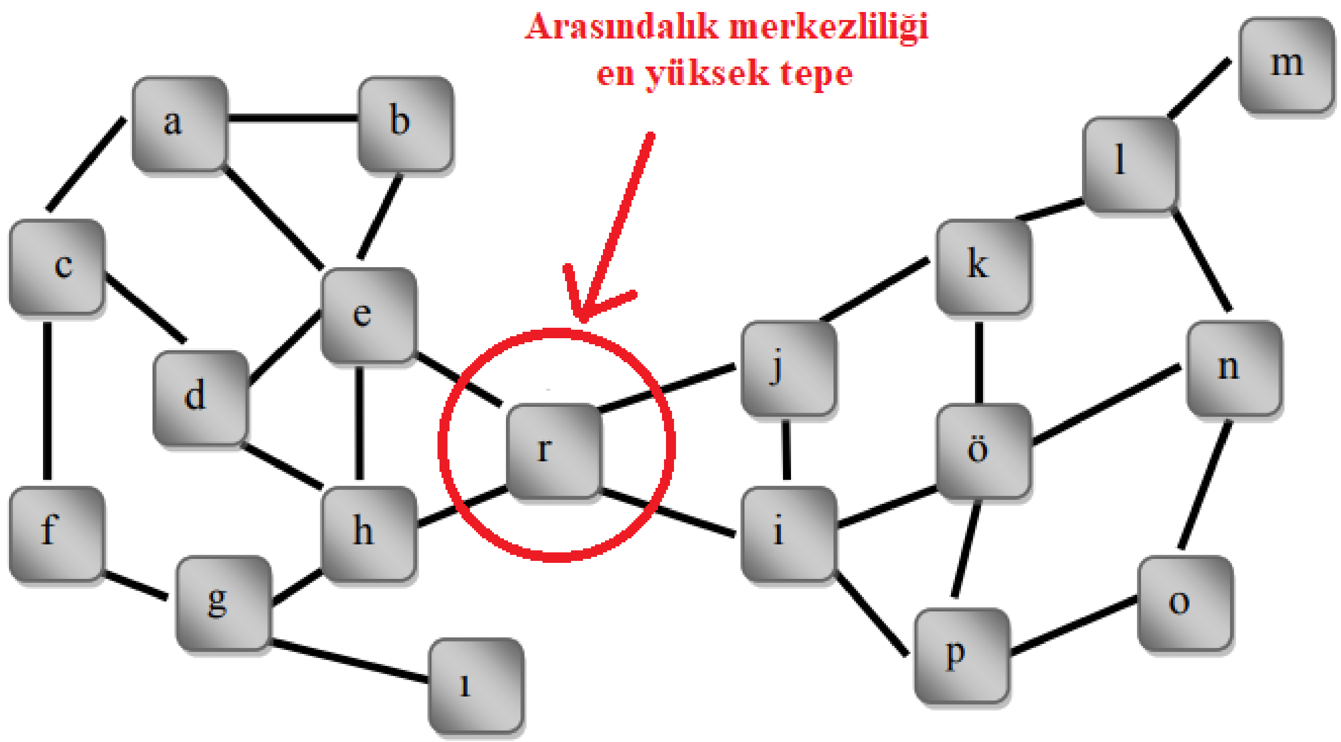
--- Arasındalık merkeziliği (betweenness centrality), graftaki (ağdaki) diğer tepelerin (düğümlerin) arasındaki belirli bir tepenin(düğümün) ne ölçüde arada olduğunu öğrenmekle ilgilenir.

--- Başka bir ifadeyle, arasındalık merkeziliği, birbirleriyle iletişim kuramayacak olan iki veya daha fazla düğüm kümesi arasında köprü görevi gören düğümlerin ölçütüdür.

--- Yüksek arasındalık merkeziliğine sahip olan tepelerin (düğümlerin) diğer tepeler (düğümler) arasındaki bilgi akışlarını kontrol etmesiyle, tepelerin (düğümlerin) grafı (ağı) kontrol etme potansiyeline sahip olduğu söylenebilir.

--- Herhangi iki tepe *i* ve *j* arasında yer alan *k* tepenin arasındalık merkeziliği hesaplanmak istendiğinde, G_{ij} , *i* düğümünden *j* düğümüne giden en kısa yolların sayısı, G_{ikj} de *i* ve *j* arasında yer alan ve *k* düğümünden geçen en kısa yolların sayısı olarak kabul edilir ve *k* tepesinin arasındalık merkeziliği aşağıdaki şekilde hesaplanır:

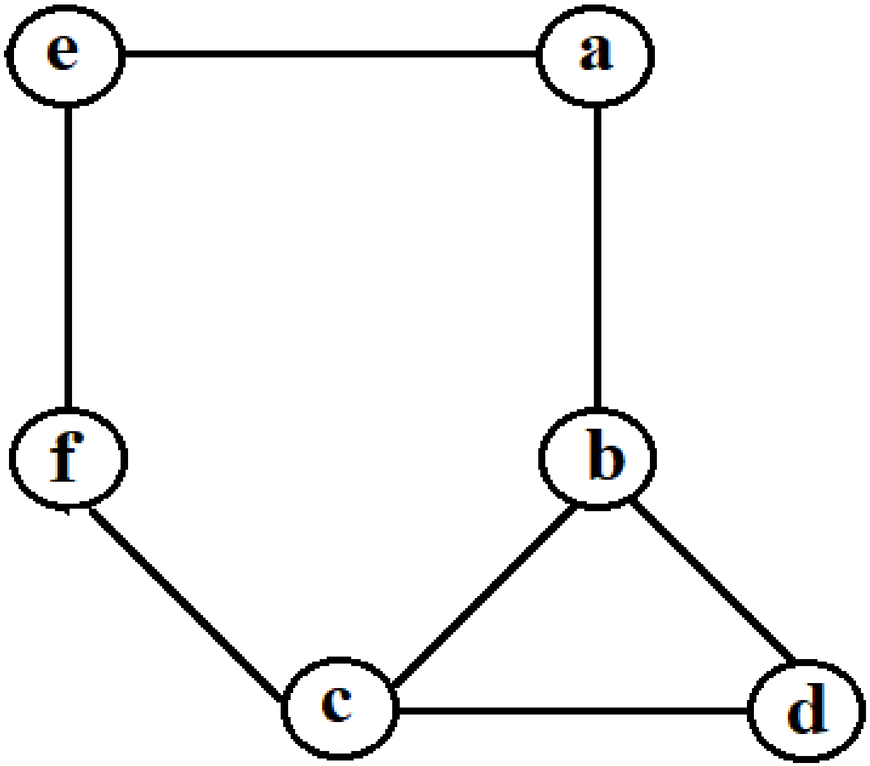
$$(C_k)^B = = \sum_i \sum_j \frac{G_{ikj}}{G_{ij}}, i \neq j \neq k$$



--- r tepesi gibi tepeler, graftaki (ağdaki) açık bilgi akışını sürdürmede kritik konumları nedeniyle güçlü oldukları ifade edilebilir.

--- Arasındalık derecesi yüksek olan tepeler konumları dolayısıyla, diğer düğümlere göre daha önemli bir konumdadırlar ve grafta (ağda) olup bitenden daha çok haberdardırlar denir.

Örnek: Aşağıda verilen G grafında her bir tepenin arasındalık merkezlik değerlerini bulunuz.

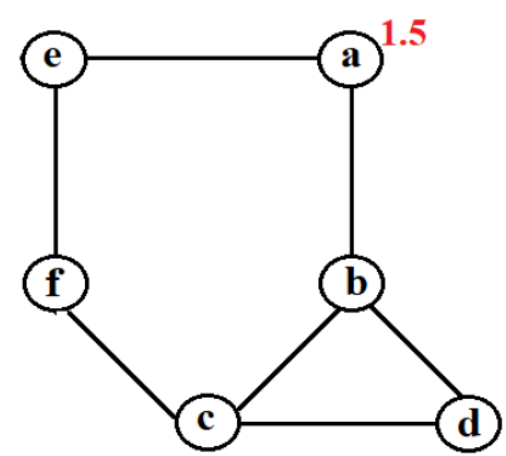


G grafı

a tepesi için arasındalık değeri:

i	j	G_{ikj}	G_{ij}	G_{ikj}/G_{ij}
b	c	0	1	0/1 = 0
b	d	0	1	0/1 = 0
b	e	1	1	1/1 = 1
b	f	0	1	0/1 = 0
c	d	0	1	0/1 = 0
c	e	0	1	0/1 = 0
c	f	0	1	0/1 = 0
d	e	1	2	1/2 = 0.5
d	f	0	1	0/1 = 0
e	f	0	1	0/1 = 0

Böylece, $(C_a)^B = 1.5$ elde edilir.

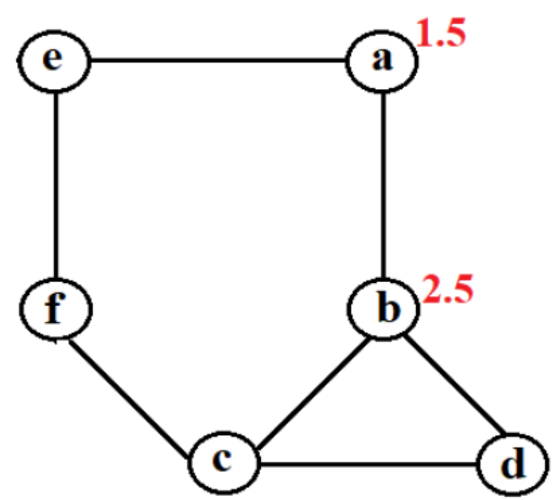


G grafı

b tepesi için arasındalık değeri:

i	j	G_{ikj}	G_{ij}	G_{ikj}/G_{ij}
a	c	1	1	1/1 = 1
a	d	1	1	1/1 = 1
a	e	0	1	0/1 = 0
a	f	0	1	0/1 = 0
c	d	0	1	0/1 = 0
c	e	0	1	0/1 = 0
c	f	0	1	0/1 = 0
d	e	1	2	1/2 = 0.5
d	f	0	1	0/1 = 0
e	f	0	1	0/1 = 0

Böylece, $(C_b)^B = 2.5$ elde edilir.

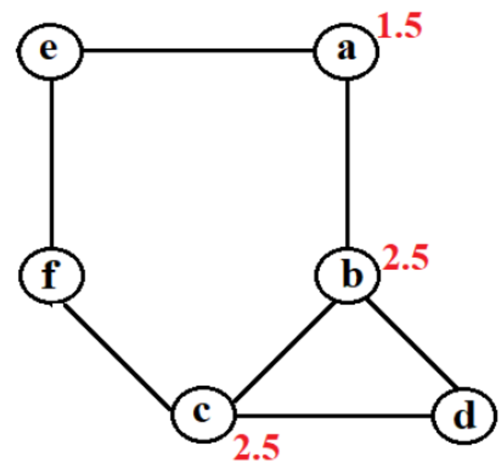


G grafı

c tepesi için arasındalık değeri:

i	j	G_{ikj}	G_{ij}	G_{ikj}/G_{ij}
a	b	0	1	$0/1=0$
a	d	0	1	$0/1=0$
a	e	0	1	$0/1=0$
a	f	0	1	$0/1=0$
b	d	0	1	$0/1=0$
b	e	0	1	$0/1=0$
b	f	1	1	$1/1=1$
d	e	1	2	$1/2=0.5$
d	f	1	1	$1/1=1$
e	f	0	1	$0/1=0$

Böylece, $(C_c)^B = 2.5$ elde edilir.

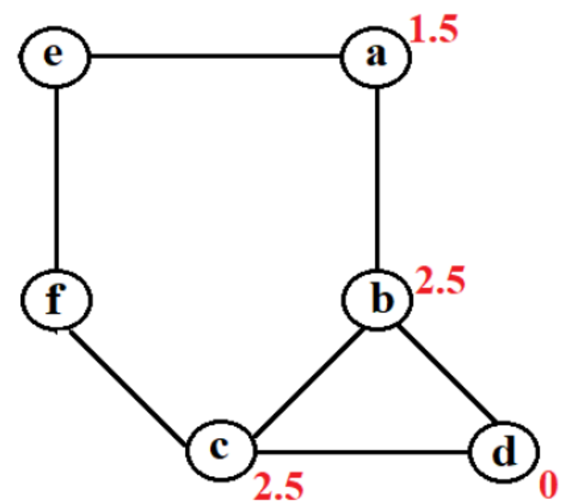


G grafı

d tepesi için arasındalık değeri:

i	j	G_{ikj}	G_{ij}	G_{ikj}/G_{ij}
a	b	0	1	$0/1=0$
a	c	0	1	$0/1=0$
a	e	0	1	$0/1=0$
a	f	0	1	$0/1=0$
b	c	0	1	$0/1=0$
b	e	0	1	$0/1=0$
b	f	0	1	$0/1=0$
c	e	0	1	$0/1=0$
c	f	0	1	$0/1=0$
e	f	0	1	$0/1=0$

Böylece, $(C_d)^B = 0$ elde edilir.

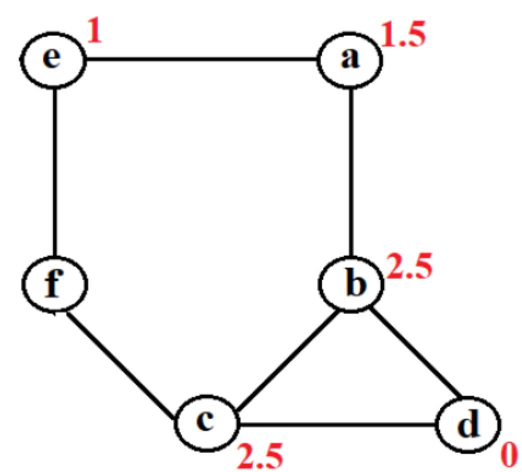


G grafı

e tepesi için arasındalık değeri:

i	j	G_{ikj}	G_{ij}	G_{ikj}/G_{ij}
a	b	0	1	$0/1=0$
a	c	0	1	$0/1=0$
a	d	0	1	$0/1=0$
a	f	1	1	$1/1=1$
b	c	0	1	$0/1=0$
b	d	0	1	$0/1=0$
b	f	0	1	$0/1=0$
c	d	0	1	$0/1=0$
c	f	0	1	$0/1=0$
d	f	0	1	$0/1=0$

Böylece, $(C_e)^B = 1$ elde edilir.

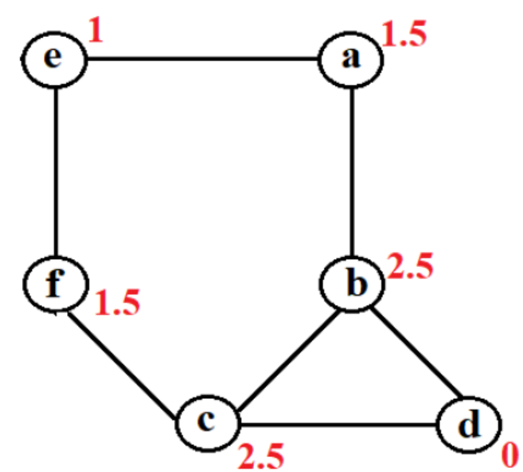


G grafı

f tepesi için arasındalık değeri:

i	j	G_{ikj}	G_{ij}	G_{ikj}/G_{ij}
a	b	0	1	0/1 = 0
a	c	0	1	0/1 = 0
a	d	0	1	0/1 = 0
a	e	0	1	0/1 =0
b	c	0	1	0/1 = 0
b	d	0	1	0/1 = 0
b	e	0	1	0/1 = 0
c	d	0	1	0/1 = 0
c	e	1	1	1/1 = 1
d	e	1	2	1/2 = 0.5

Böylece, $(C_f)^B = 1.5$ elde edilir.



G grafı

Merkezilik önlemlerinin gerçek hayattaki uygulamaları nelerdir?

Merkezilik ölçümlerinin çeşitli alanlarda gerçek hayat uygulamaları vardır:

--- Hava Ulaştırma Ağları

--- Biyolojik Ağlar

--- Sosyal Ağlar

--- Atıf Ağları

--- Her türlü iletişim ağı

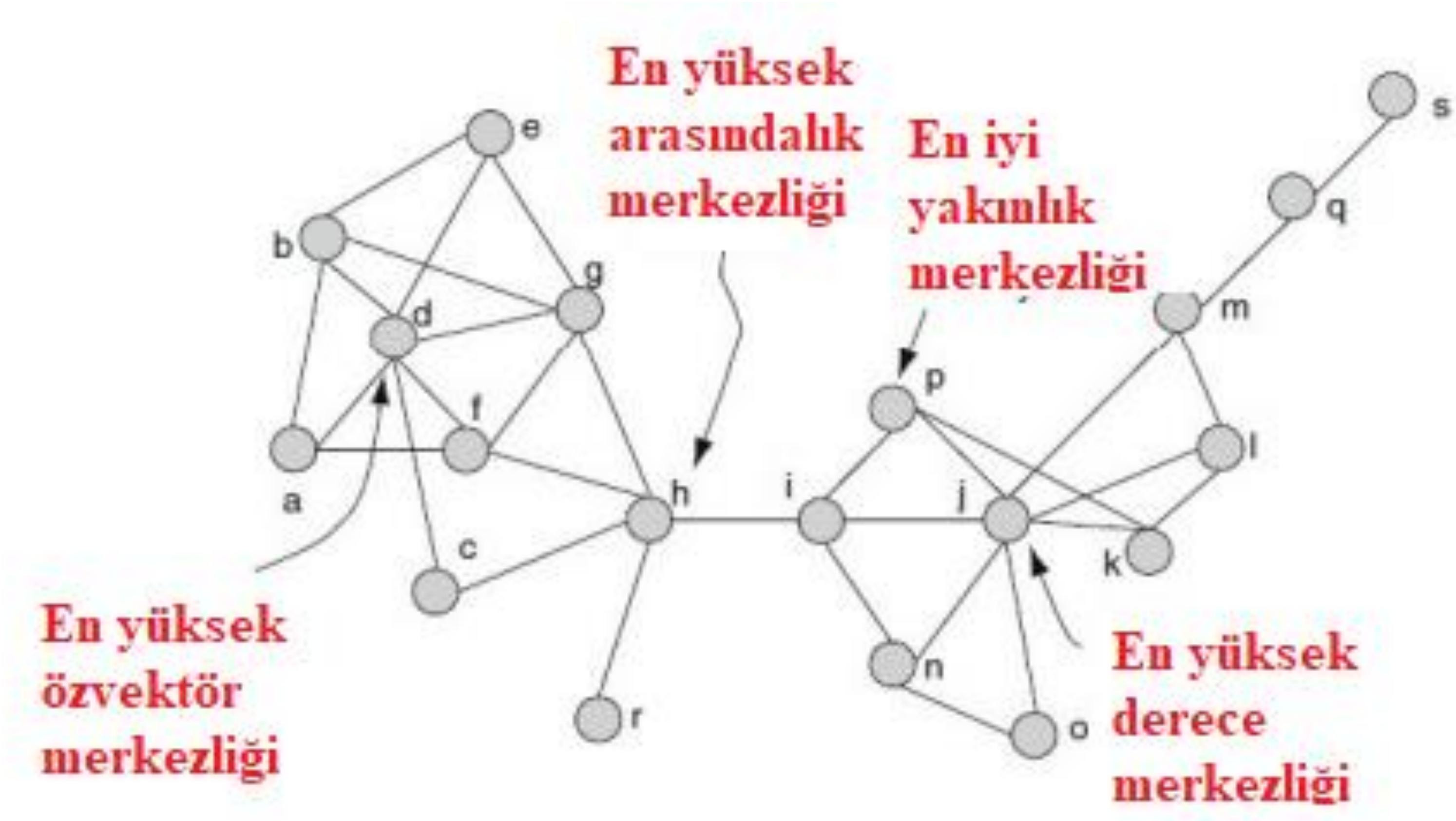
Ağ analizinde merkezilik ölçüleri nasıl kullanılır?

Ağ, yakından ilişkili bileşenlerin bir koleksiyonudur. Bireyler, şehirler veya alakalı herhangi bir şey olabilir. Onların karşılıklı bağlantılarını, ilişkilerinin şematik temsilleri olan ağlar biçiminde gösterebiliriz.

Hangi merkezilik ölçüsünü ne zaman kullanmalısınız?

Araştırma durumunuza uyan bir merkezilik ölçüsü seçmelisiniz. Daha da ileri gitmek isterseniz, diğer merkezilik ölçülerini sorun gereksinimlerinizi karşılayan tek bir genel merkezilik ölçüsünde birleştirebilirsiniz.

4 Farklı Merkezlik İçin Bir Örnek:



Merkezilik ölçümleri tanımları; *derece, matris* ve *uzaklık* kavramlarını içerdiğinden dolayı bu ölçümler *Polinom zamanda* hesaplanabilmektedir!

KAYNAKLAR

[1] Chartrand, G.-Lesniak, L., (1986) : *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, California

[2] West D.B. (2001) : *Introduction to Graph Theory, Prentice Hall*, USA.

[3] Graf Teoriye Giriş, Şerife Büyükköse ve Gülistan Kaya Gök, Nobel Yayıncılık

[4] Discrete Mathematical Structures for Computer Science, Ronald E. Prather, Houghton Mifflin Company, (1976).

[5] Christofides, N., 1986. Graph Theory an Algorithmic Approach, Academic Press, London

[6] Algoritmalar (Teoriden Uygulamalara), Vasif V. NABİYEV, Seçkin Yayıncılık

[7] İletişim ağlarında Residual Closeness, Doktora Tezi, Z. N. Berberler, Ege Üniversitesi, 2014.

[8] Yeni Bir Ağ Merkezilik Ölçütü: Göreceli Kenar Önemi Metodu, Yüksek Lisans Tezi, C. Salman, Hacettepe Üniversitesi, 2018.

[9] Dangalchev, C., 2006, Residual closeness in networks, *Physica A*, 365(2):556- 564 pp.

[10]https://www.hajim.rochester.edu/ece/sites/gmateos/ECE442/Slides/block_3_descriptive_analysis_properties_part_c.pdf