

CENG 481 GRAF TEORİ VE UYGULAMALARI

Hafta 10

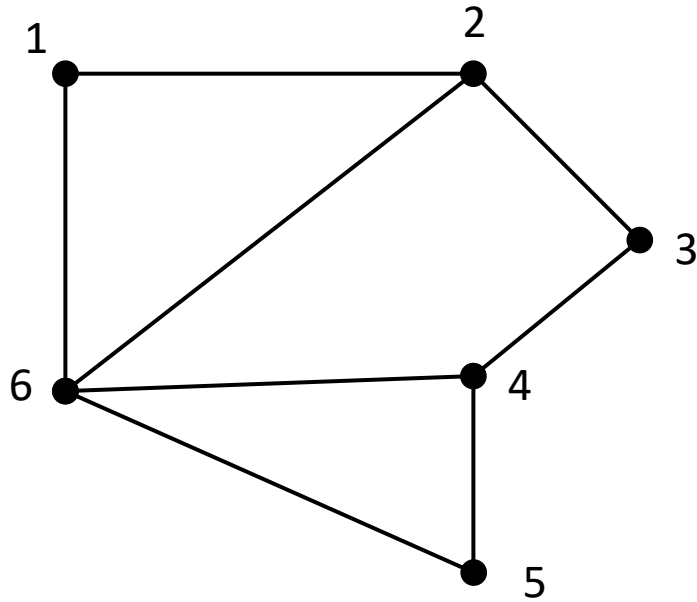
Prof. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

Hafta 10

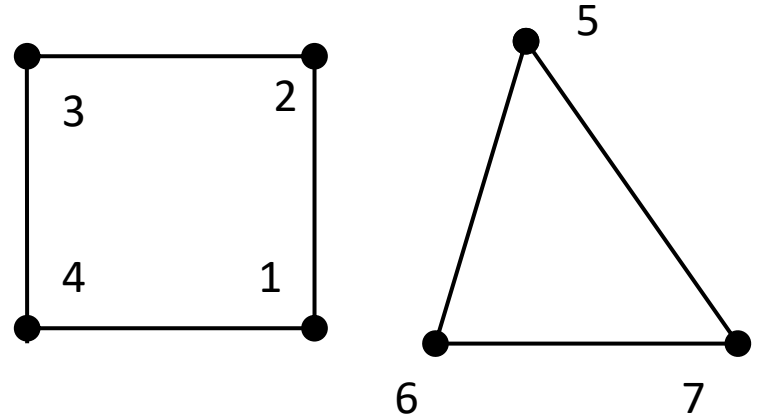
Konular

- 1- Graflarda Bağlantılılık (Birleştirilmişlik)
- 2- Bağlantılılık değeri (Connectivity number)

Birleştirilmiş Graf: Bir G grafında herhangi iki tepe arasında en az bir tane yol varsa, grafın herhangi bir tepesinden diğer tüm tepelere gidilebiliyorsa bu grafa birleştirilmiş graf denir.



Birleştirilmiş Graf



Birleştirilmemiş Graf

Birleştirilmemiş bir graftaki her bir parçaya grafın **bileşeni** adı verilir(*component*).

Bir Graf Nasıl Bağlantılıdır?

Bir bilgisayar ağının bir graf ile temsil edildiğini farz edelim. Bu grafın bağlantılı olduğunun bilinmesi bize bu ağda iki bilgisayarın iletişim halinde olduğunu söyler. Fakat biz ağın nasıl dayanıklı olduğunu anlamak isteriz. Örneğin, bir iletişim hattı arızalandığında veya yönlendiricilerden sonra bütün bilgisayar iletişimi için bu hala mümkün olabilecek mi? Bunu ve benzer soruları cevaplamak için, bazı kavramlar geliştirilmiştir.

Bazen bir tepe ve bitişik tüm ayrıtlar graftan kaldırıldığında birden fazla bağlantılı bileşen elde edilir. Bu tepeler **kesim tepeler** (veya birleşim noktaları) olarak çağırılır. Bir kesim tepe graftan kaldırıldığında bağlantılı olmayan bir alt graf üretilir. Benzer olarak, kesim ayrıt veya köprü olarak adlandırılan bir ayrıt graftan kaldırıldığında orijinal graftan daha fazla bileşene sahip bağlantılı bir graf oluşur. Unutmayalım ki, bir graf ile temsil edilmiş bilgisayar ağında, bir kesim tepe ve bir kesim ayrıt, gerekli yönlendiriciyi ve zarar görmemiş gerekli bir iletişim hattını temsil eder.

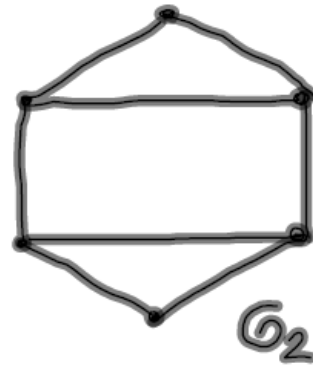
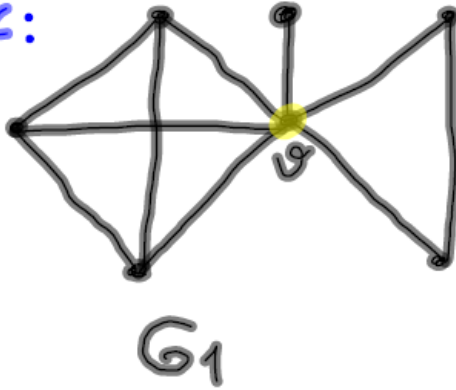
Tanım:Eğer G grafında (u,v) -yolu mevcut ise u,v ayrık tepeleri G grafında bağlıdır.Eğer tüm tepe çiftleri bağlıysa G grafi da bağlıdır.

Tanım:Eğer H grafi, bağlantılı ve G nin daha fazla tepe ya da ayrıt içeren bağlantılı bir alt grafi tarafından içerilmeyen bir graf ise G grafının H alt grafına G nin bir bileşeni denir ve G nin bileşenlerinin sayısı $w(G)$ ile gösterilir.

Tanım:Bir G grafi için $V^* \subset V(G)$ ve $E^* \subset E(G)$ olsun.Eğer $w(G-V^*) > w(G)$ ise V^* bir ‘*vertex cut*’ olarak adlandırılır.Eğer V^* yalnızca bir tepeden oluşuyorsa, v bir ‘*cut vertex*’ olarak adlandırılır.Benzer şekilde, eğer $w(G-E^*) > w(G)$ ise E^* bir ‘*edge cut*’ olarak adlandırılır.Eğer E^* yalnızca bir ayrıttan oluşuyorsa, e ‘*cut edge*’ olarak adlandırılır.

Tanım: Bir G grafının bir v tepesi için $w(G-v) > w(G)$ oluyor ise v 'ye kesim tepe denir.

Örnek:



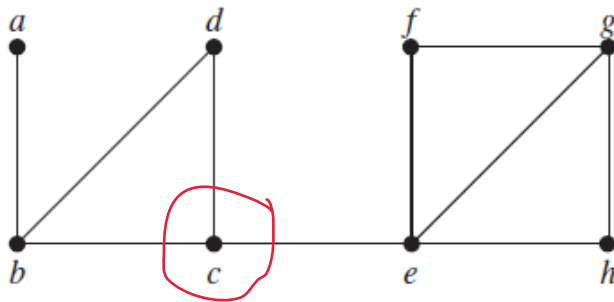
$$w(G_1) = 1$$

$$w(G_1 - v) = 3$$

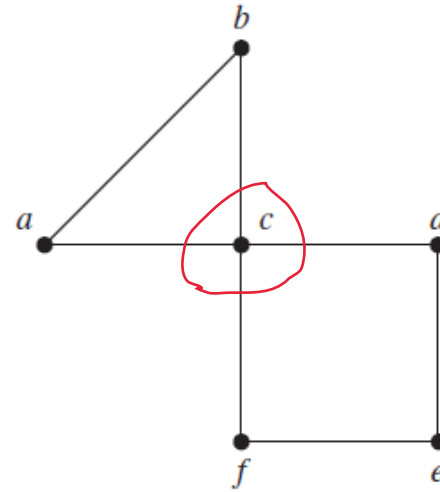
G_1 grafında v bir kesim tepedir.

G_2 grafında bir kesim tepe yoktur.

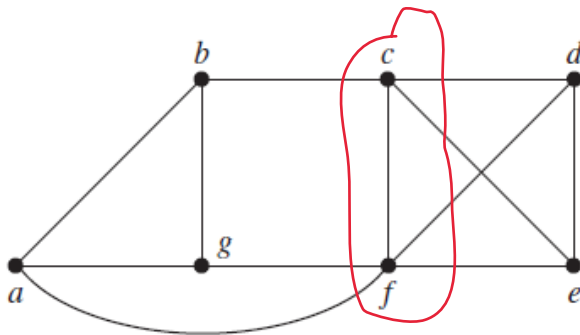
-- Aşağıdaki grafları bağlantısız yapmak için graftan atılması gerekli tepeler hangileridir?



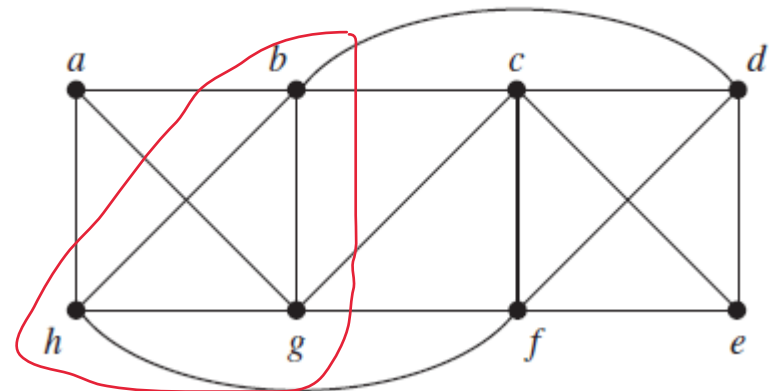
1



2



3

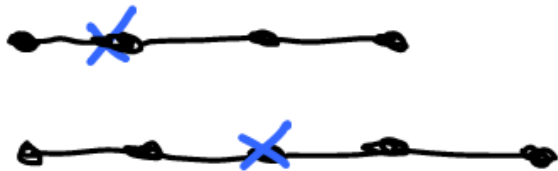


4



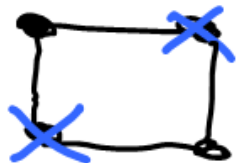
Tanım 1: Bağlantılı bir G grafını bağlantısız yapmak veya tek izole tepe elde etmek için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına grafın **bağlantılılığı (connectivity)** denir ve $k(G)$ ile gösterilir. Önemli grafların connectivity değerleri aşağıdadır.

1) Yol Graf

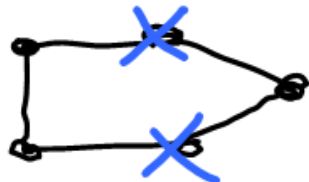


$$> k(P_n) = 1$$

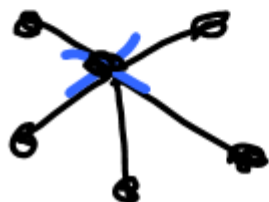
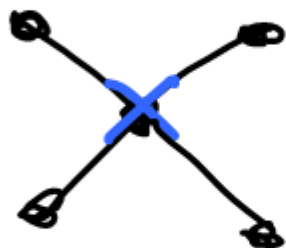
2) Çevre Graf



$$> k(C_n) = 2$$

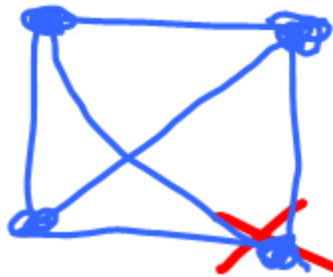


3) Yıllık Graf



$$k(K_{1,n}) = 1$$

4) Tom Graf



K_4

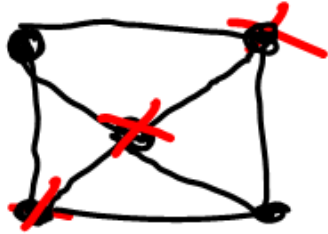
$$k(k_n) = n - 1$$

izole tipe
kolmenya koder
tipe atilir.



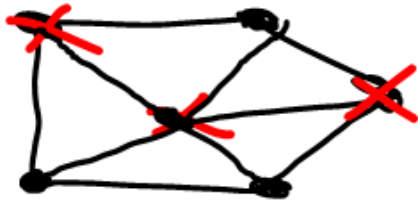
K_3

3) Tekerlek Graf



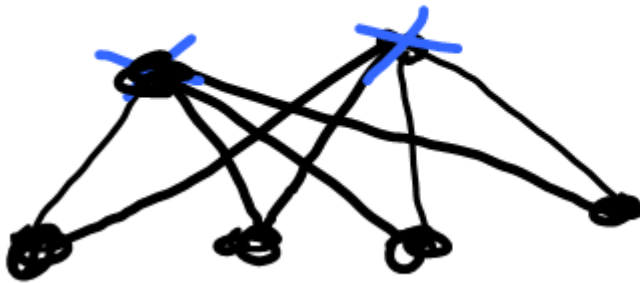
$W_{1,4}$

$$\Rightarrow k(W_{1,n}) = 3$$



$W_{1,5}$

6) iki parçalı tam graf



$$\Rightarrow k(K_{m,n}) = \min\{n, m\}$$

Tanım: G grafi eğer $\chi(G)=n$ n -bağlı graftır denir.

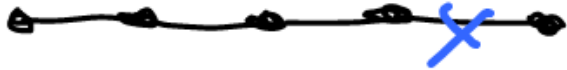
Teorem: G , 2-bağlı bir graf ve u ve v bu grafın 2 tepesi olsun. Bu durumda G 'de bir C çevrini vardır öyleki u ve v bu döngüde yer alırlar.

- K_n den bir tepe çıkarılır ise K_{n-1} elde edilir.
Öyleyse $\chi(K_n)=n-1$

Tanım 2: Bir G grafini bağlantısız yapmak için graftan çıkarılması gereken en az ayrıt sayısına ayrıt bağlantılılık sayısı (edge connectivity number) denir ve $k'(G)$ ile gösterilir.

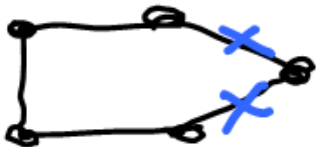
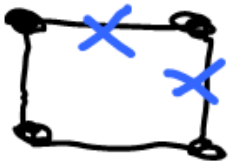
Önemli grafların ayrıt connectivity değerleri:

1) Yol Graf



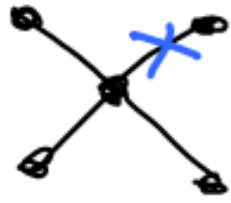
$$> k'(P_n) = 1$$

2) Çevre Graf



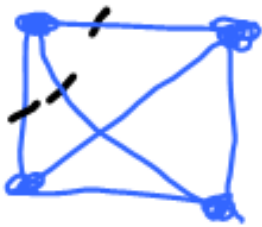
$$> k'(C_n) = 2$$

3) Yıldız Graf



$$k'(k_{in}) = 1$$

4) Tam Graf



k_4

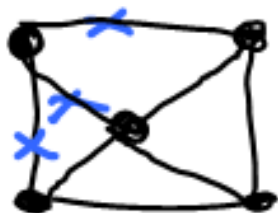


$$k'(k_N) = n-1$$



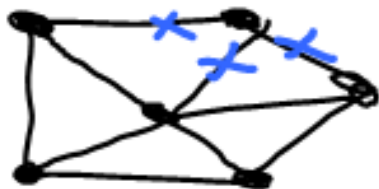
k_3

3) Tekerlek Graf



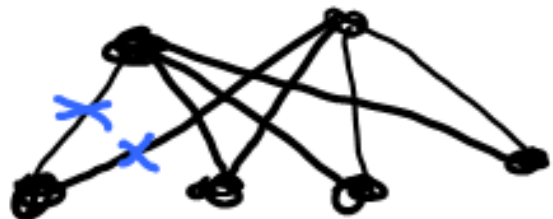
$w_{1,4}$

$$\Rightarrow k'(w_{1,n}) = 3$$



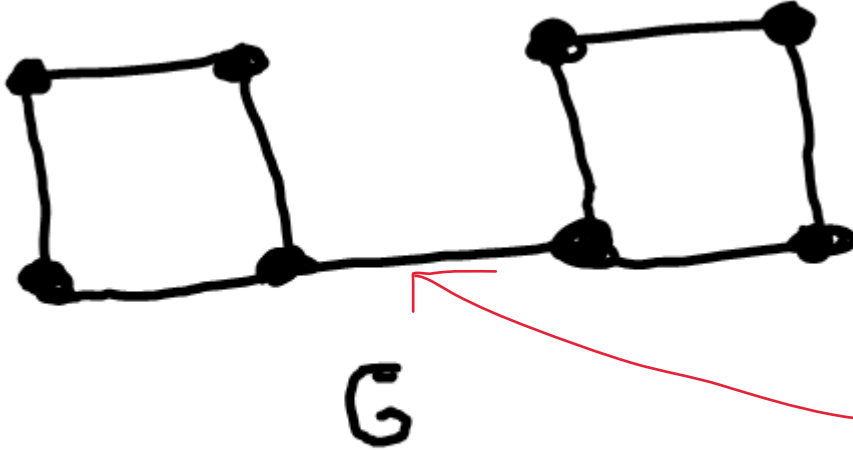
$w_{1,5}$

6) iki parçalı tam graf



$$\Rightarrow (k_{min}) = \min\{n, m\}$$

Teorem : n tepeli herhangi bir G grafi için, $\delta(G) \geq k'(G) \geq k(G)$ dır.



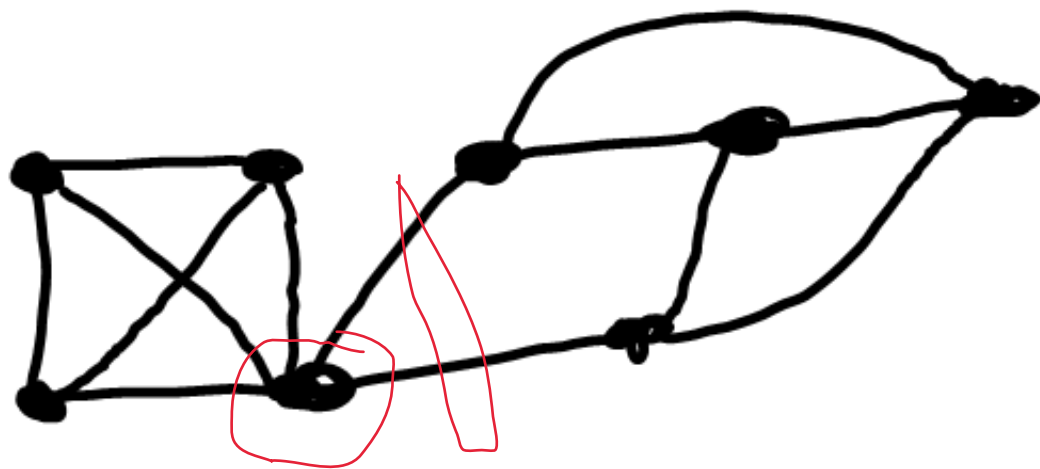
$$\delta(G) = 2$$

$$k(G) = 1$$

$$k'(G) = 1$$



$$\delta(G) > k'(G) = k(G)$$



G

$$\begin{aligned} g(G) &= 3 \\ k(G) &= 1 \\ k'(G) &= 2 \end{aligned}$$

$$g(G) > k'(G) > k(G)$$

Kanıt. $\delta(G)$ minimum dereceli tepeye bitişik olan ayrıtlar, bir ayrıt kesim küme oluşturur. Buradan $\lambda(G) \leq \delta(G)$ sonucuna ulaşılır. n tepeli herhangi bir grafın tepe bağlantılılığı, tam grafın bağlantılılığı gözönüne alınarak $\kappa(K_n) = n - 1$ ile sınırlansın. $G = (V, E)$ en az iki tepeli bir graf ve minimal ayrıt kesim kümenin, S tepe kümesini, diğer tüm tepelerin oluşturduğu $\bar{S} = V \setminus S$ kümesinden ayırır. S ve \bar{S} arasındaki tüm ayrıtlar G 'de ise,

$$\lambda(G) = |S| \cdot |\bar{S}| \geq |V| - 1$$

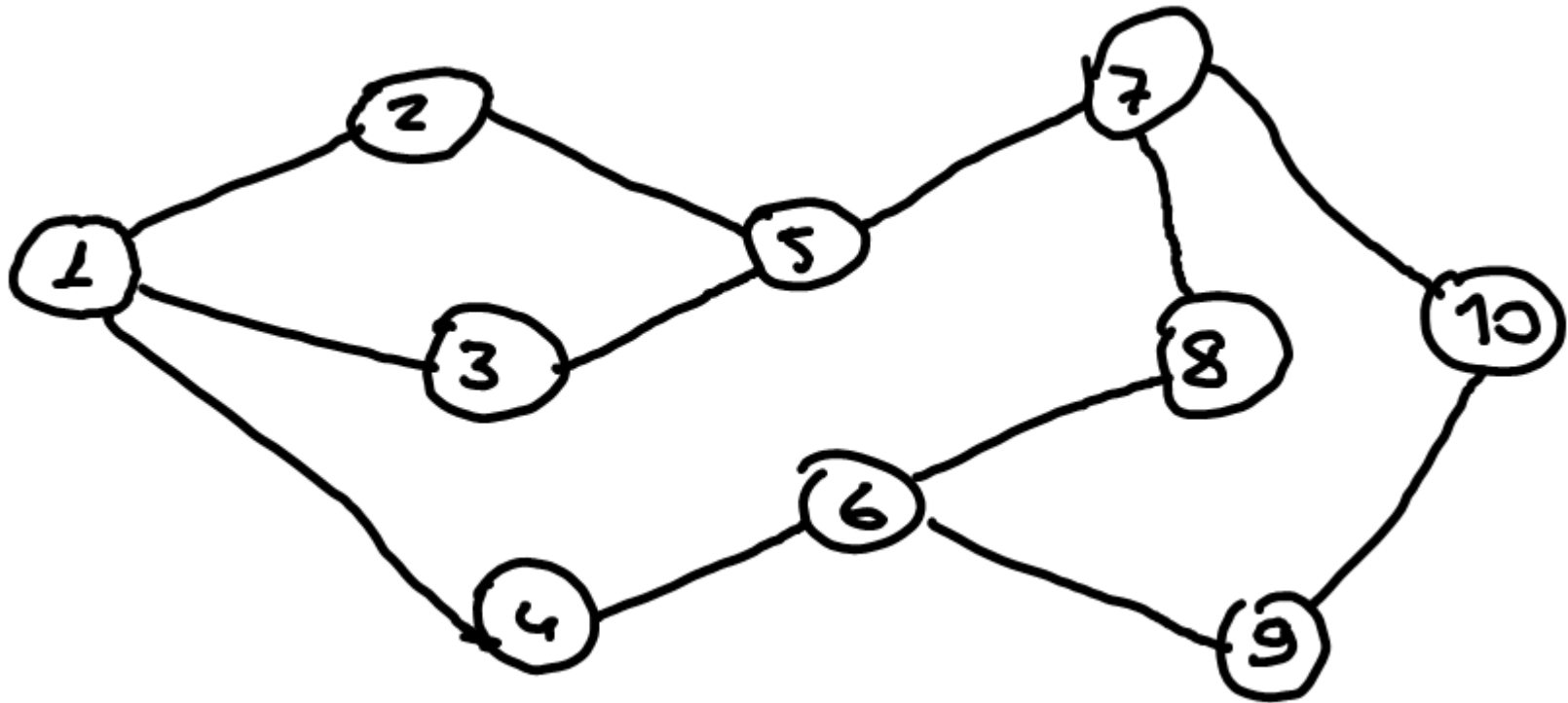
elde edilir. Aksi halde $\{x, y\} \notin E$ olan $x \in S$ ve $y \in \bar{S}$ tepeleri mevcuttur. x 'in, \bar{S} 'deki tüm komşularının kümesi ve buna ek olarak $S \setminus \{x\}$ 'deki tepelerden \bar{S} 'da komşusu olanlar bir tepe kesim oluştururlar. Kesim kümenin eleman sayısı S 'den \bar{S} 'ye doğru olan ayrıtların maksimum sayısı kadardır ve bu kesim (en azından) x ve y 'yi birbirinden ayırır. \square

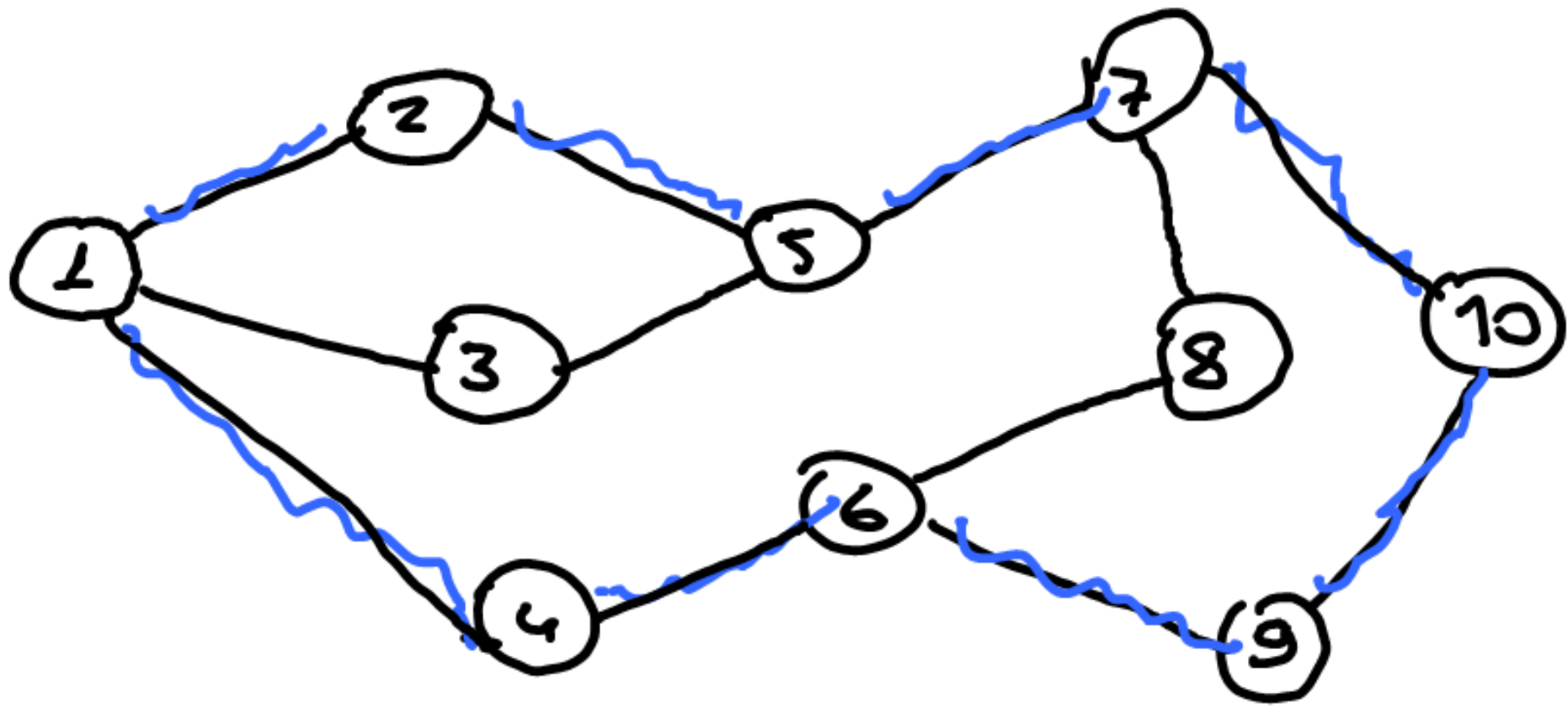
Bir Grafın Tepe ve Ayrıt Connectivity Değerlerinin Bulunması

Ağlardaki maksimum akış minimum kesme ye dayanan Menger'in teoremi birleştirilmişlik konusundaki en temel teoremdir ve bu teoreme göre bir grafta bitişik olmayan u ve v tepeleri arasındaki tepe tekrarsız yolların maksimum sayısı u ve v yi bağlantısız yapmak için çizgeden atılması gereken minimum tepe sayısına eşittir. Tepe birleştirilmişlik için ifade edilen bu teorem ayrıt tekrarsız yollar kullanılarak ayrıt birleştirilmişlik için de geçerlidir. Bu haliyle teorem grafın bağlantısız olmasını sağlayan tepelerin hangileri olduğu ile ilgili bir bilgi vermemektedir.

Teorem . *Bağlantılı bir G grafında ayrık ve komşu olmayan iki tepe u ve v olsun. Buna göre, G 'deki içten ayrık $u - v$ yollarının maksimum sayısı, u 'yu v 'den ayırmak için atılması gerekli tepelerin minimum sayısına eşittir.*

ÖRNEK: Aşağıda 10 tepeli bir G grafı verilmiştir. İçten ayrık yolların sayısı nedir?



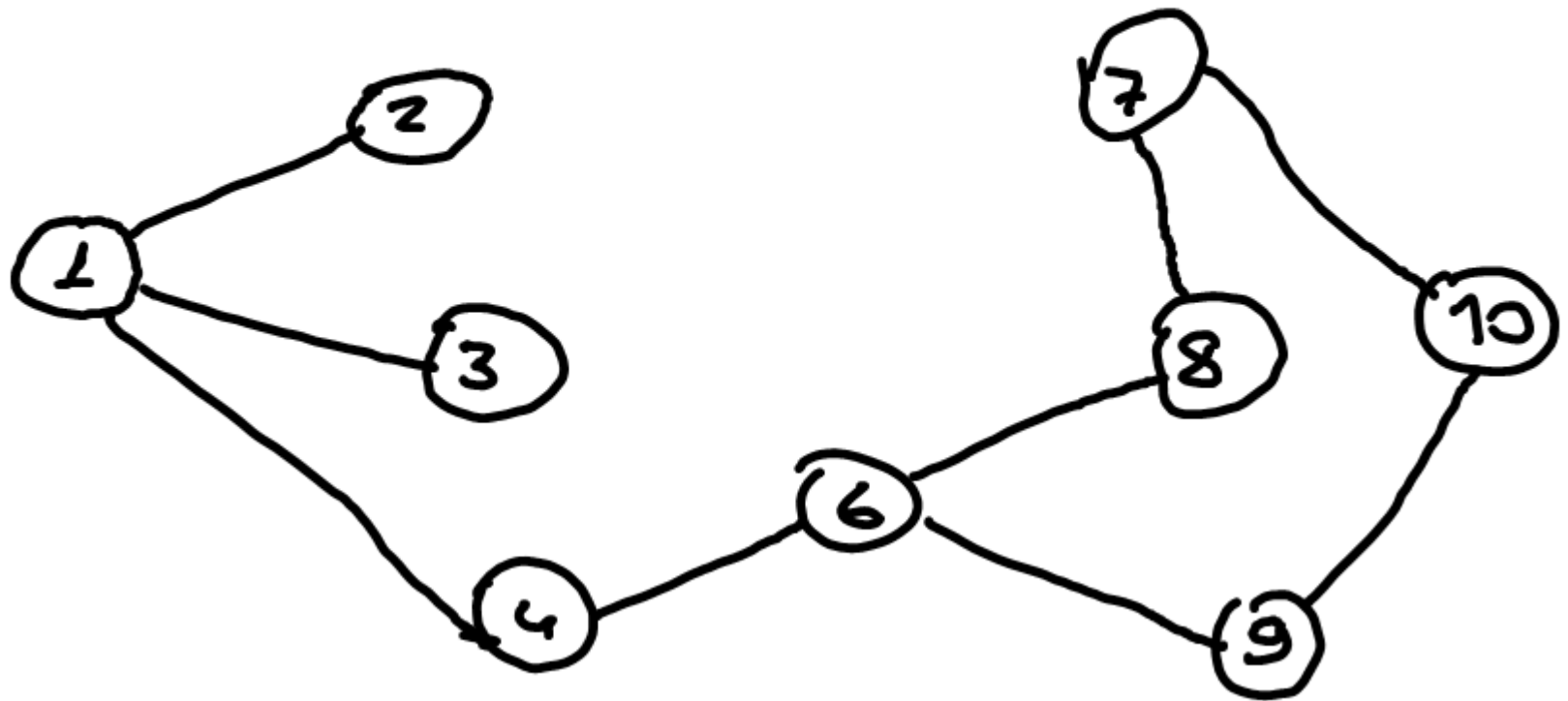


1,2,5,7,10 } yellow 5 ve 6
1,4,6,9,10 } tepelerini kullanan
isten sonra yellerdir.

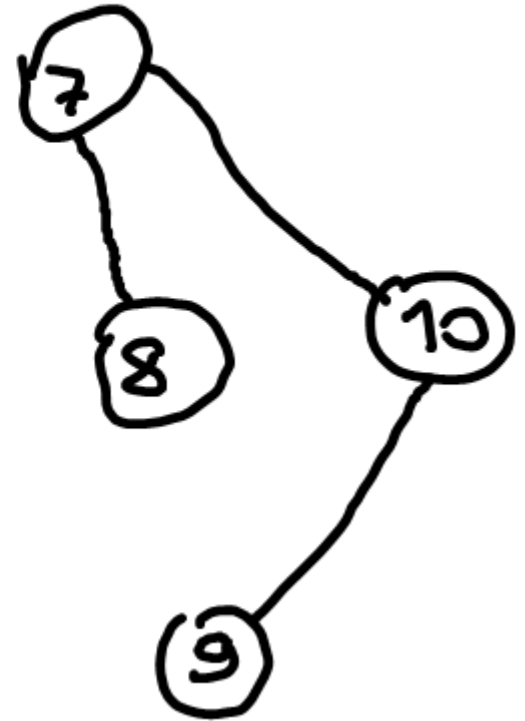
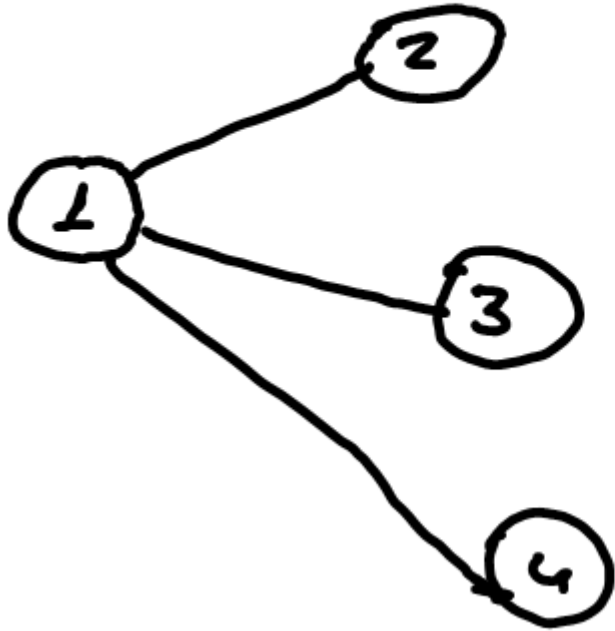
5 ve 6 tepelerini kullanan farklı
iken aynı yollarla bulunabilir.
Fakat bunların sayısı maksimum
2'dir.

Böylece $k(G) = 2$ elde edilir.

5 ತರಸ್ಸು ಸಿಗಬೇಡಿತ್ತೆ.



5 ve 6 tepeleri silindiğinde:

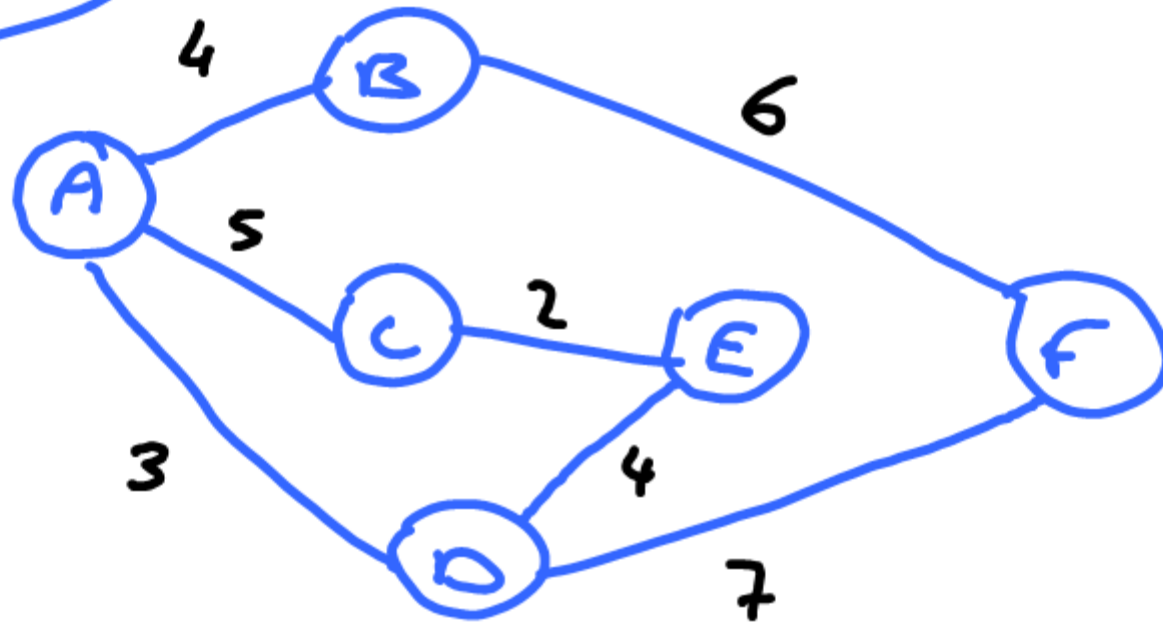


✱ iktisadî maksatla yollar seçimi
Ford-Fulkerson (en büyük akış)
algoritması yardımıyla bulunabilir.

Ford-Fulkerson Sözdə Kodu

```
ford-fulkerson (G, s, t)
  for each edge (u, v)  $\in E(G)$ 
     $f[u, v] = 0$ 
     $f[v, u] = 0$ 
  while (s'dən t'ye P yolu var isə)
     $C_f(P) = \min \{ C_f(u, v) \mid (u, v) \in P \}$ 
    for each edge (u, v) in P
       $f(u, v) = f(u, v) + C_f(P)$ 
       $f(v, u) = -f(u, v)$ 
    end
  end
```

Örnek

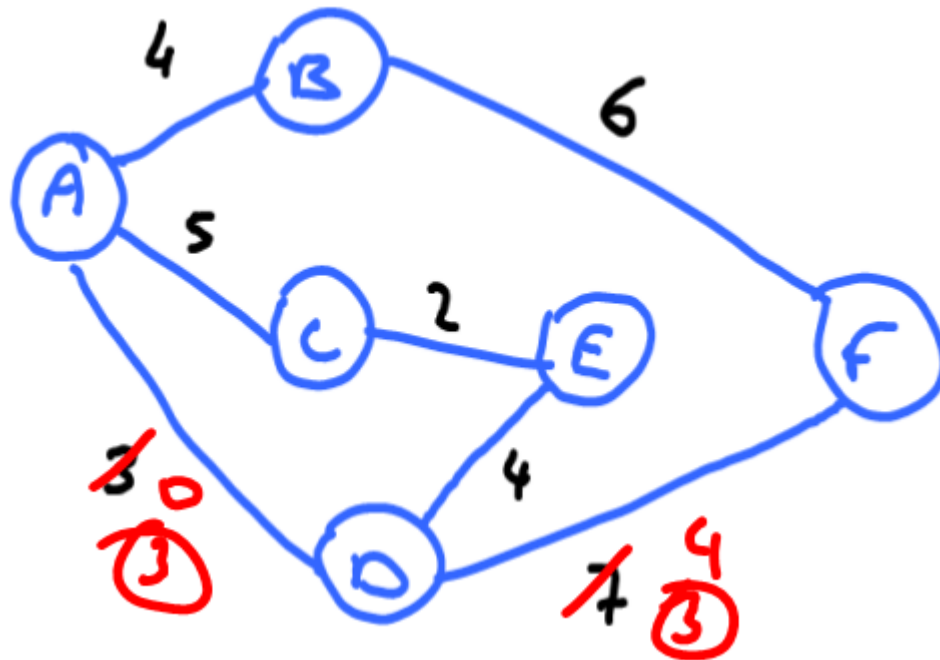


$A \rightarrow F$ 'ye en büyük çıkış?

1. adım: DFS ile $A \rightarrow F$ ye gide
bulunur.

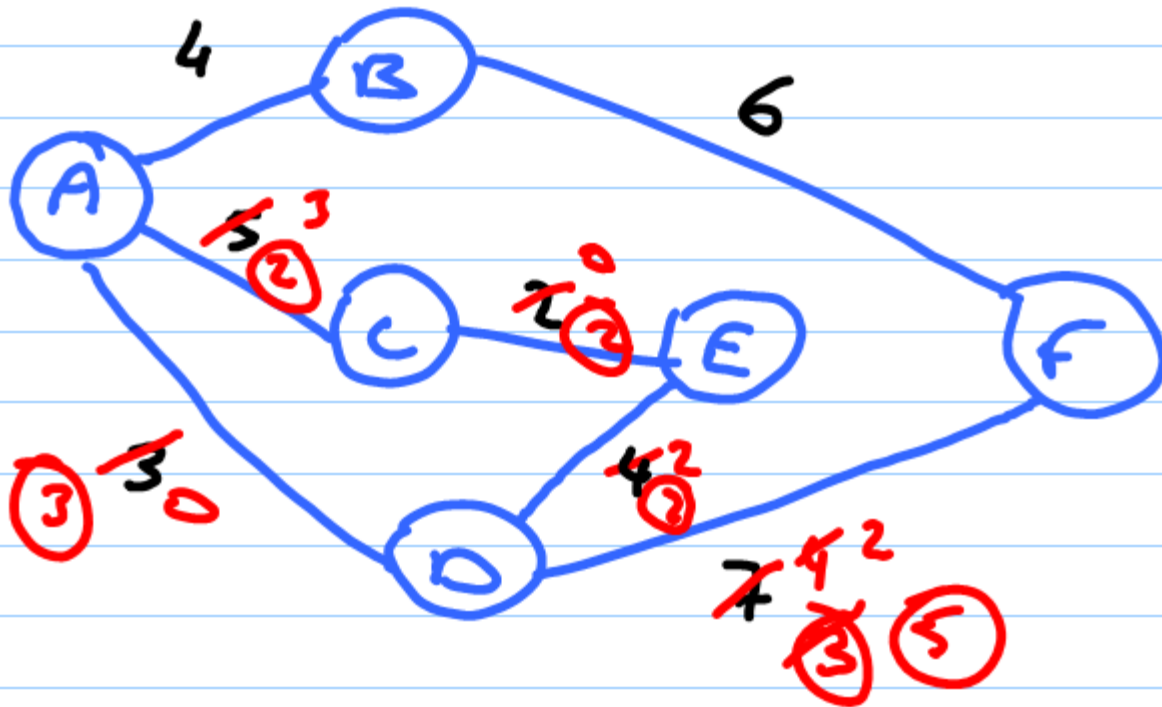
ADF yolu

$$\min \{ \underset{3}{A-D}, \underset{7}{D-F} \} = 3 //$$



2. edim: $A \subset E \supset f$ yolu

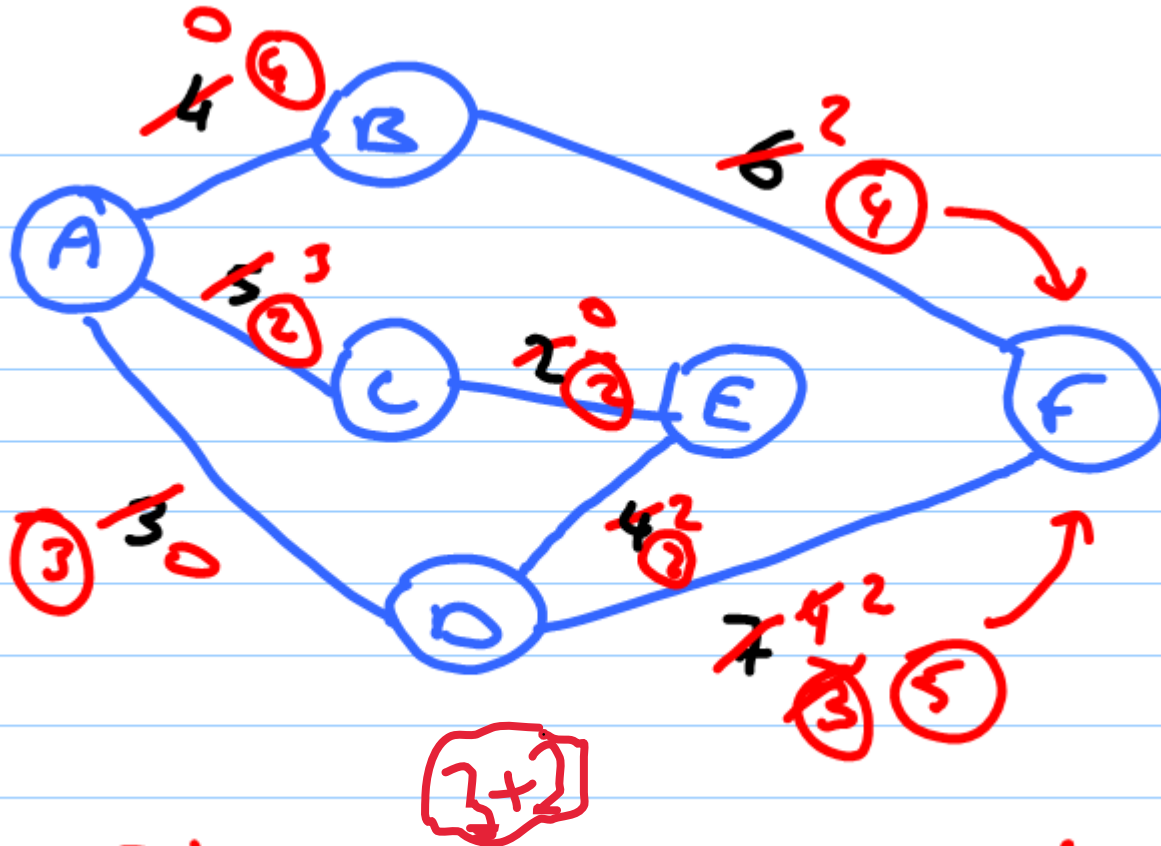
$$\min \{ \underset{5}{A-C}, \underset{2}{C-E}, \underset{4}{E-D}, \underset{\text{4}}{D-F} \} = 2$$



3. adım

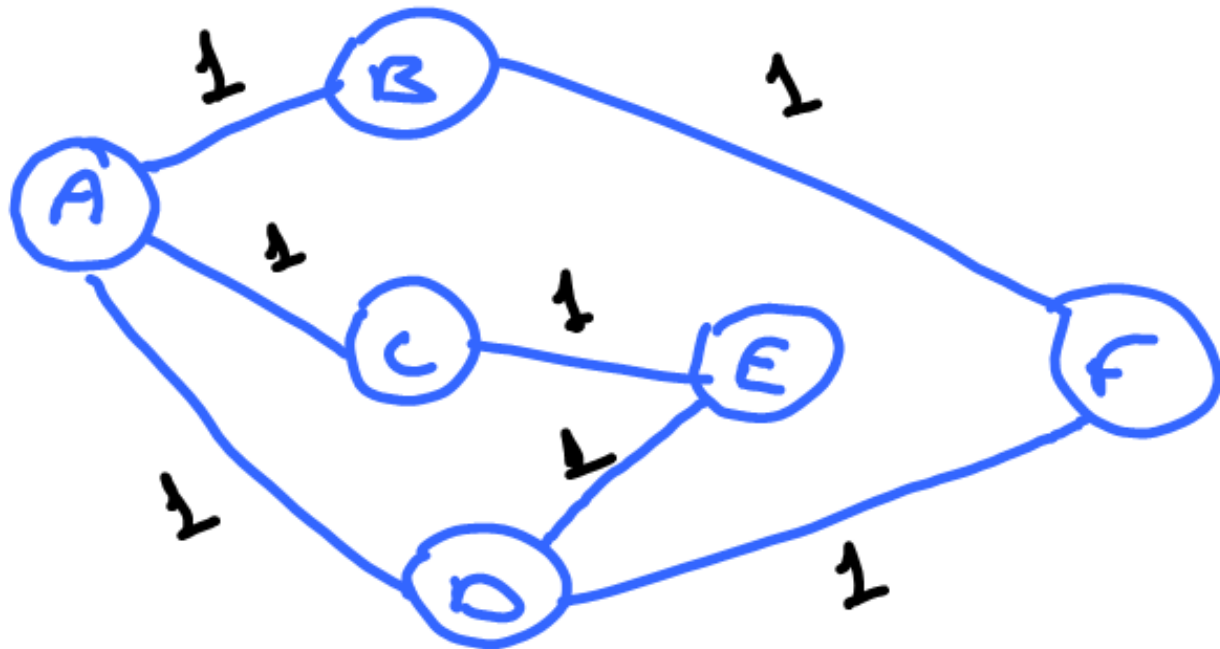
ABF yolu

$$\min \left\{ \begin{array}{cc} A-B & B-F \\ 4 & 6 \end{array} \right\} = 4$$



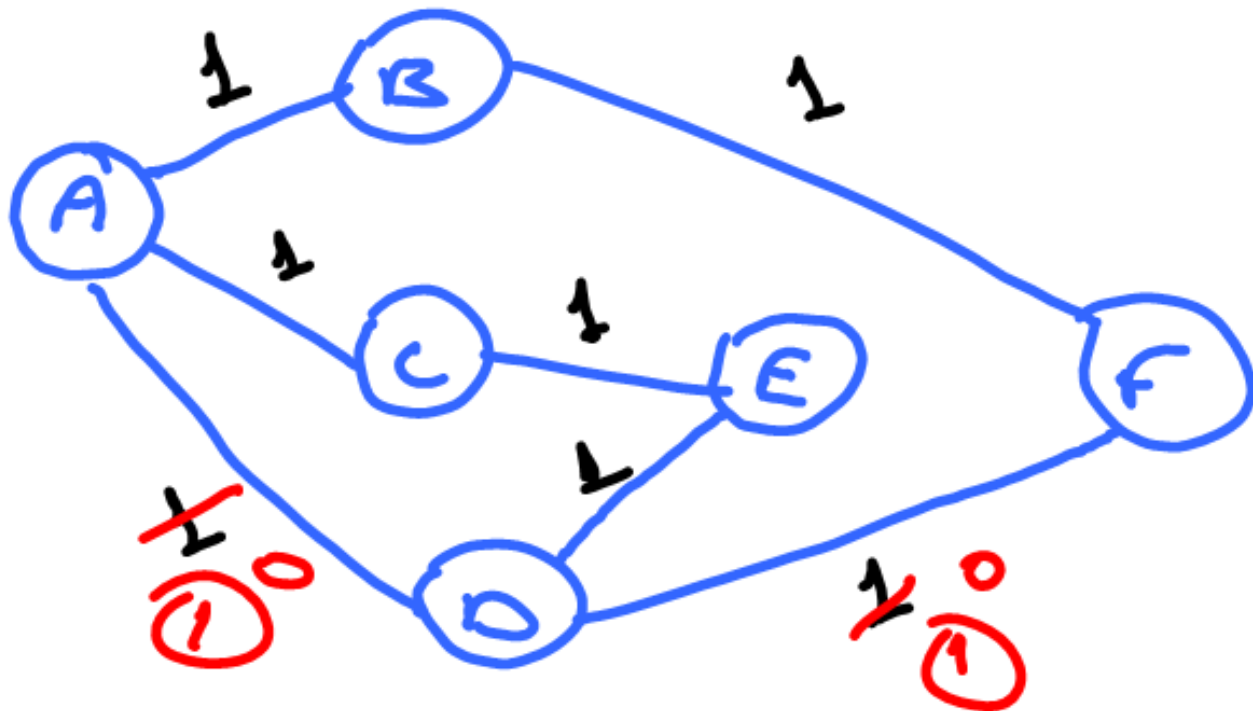
A'dan F'ye $4+5=9$ birim çıkıyor oldu.

* Tüm ağız değerlerine 1
verildiğini zede, aşağıdaki graf
elde edilir.



1. a2m: ADF gets

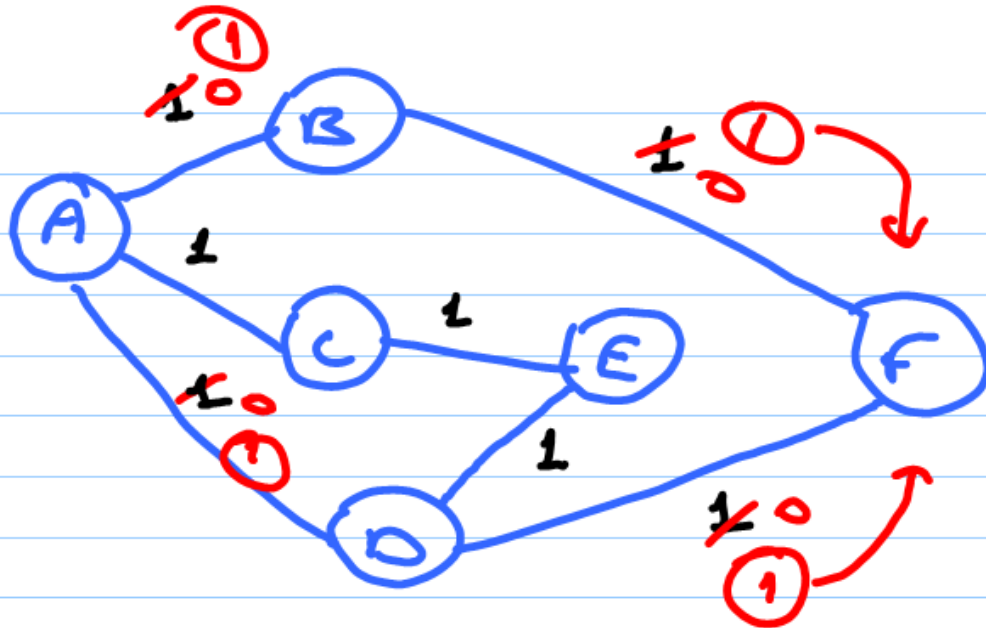
$$\min \sum_1 A-D, D-F \} = 1$$



2. adım: | A C E D F yolu

$$\min \left\{ \underset{1}{A-C}, \underset{1}{C-E}, \underset{1}{E-D}, \underset{0}{D-F} \right\} = 0$$

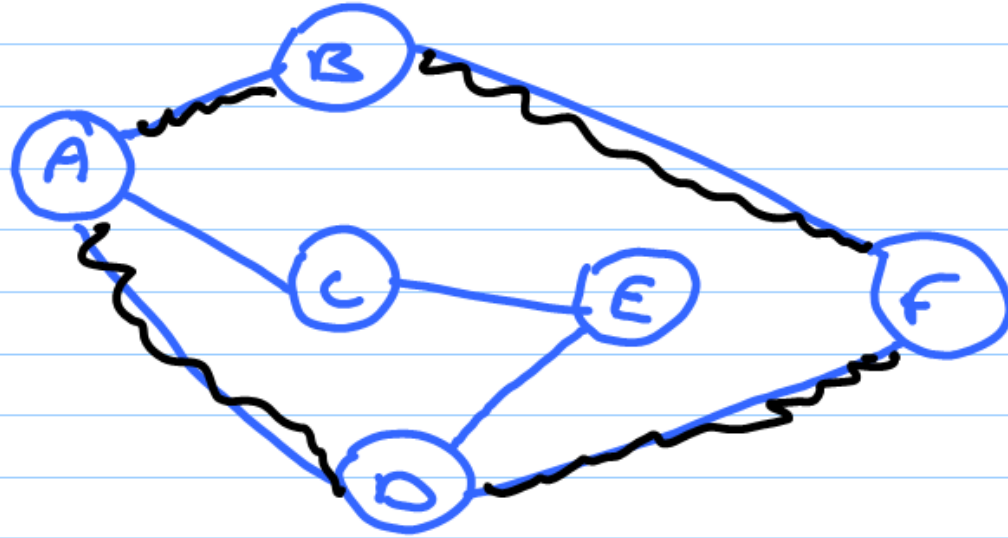
3. adım: | A B F yolu $\min \left\{ \underset{1}{A-B}, \underset{1}{B-F} \right\} = 1$



$1+1=2$
mek. okk
isten aynik
yollann
sayış

Sıra olarak:

İstenen en kısa yolun sayısı 2'dir.



Böylece $k(G) = 2$ dir.

~~İstenen~~ isten en kısa yollarda en az 2 yol vardır!!!

Bir Grafin Tepe ve Ayrıt Connectivity Değerlerinin Bulan Alternatif Bir Algoritma

Tepe Geçiş Yoğunluğu

Grafin tüm tepe çiftleri arasındaki en kısa yolların üzerinde bulunan *tepelerin kullanılma sıklığına* denir.

Kritik Tepe

Grafta tepe geçiş yoğunluğu en büyük olan tepe veya tepelere denir.


Ayrıt Geçiş Yoğunluğu

Grafin tüm tepe çiftleri arasındaki en kısa yolların üzerinde bulunan *ayrıtların kullanılma sıklığına* denir.

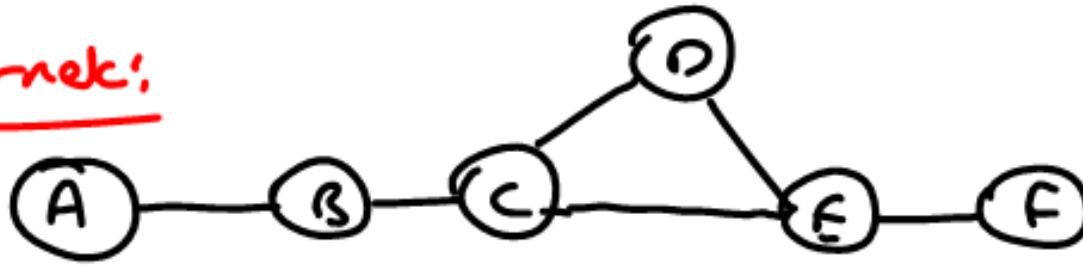
Kritik Ayrıt

Grafta ayrıt geçiş yoğunluğu en büyük olan ayrıt veya ayrıtlara denir.

Algoritma:

- i) Çizgenin bitişiklik matrisini oku
- ii) $\kappa = 0$ / $\lambda = 0$ al 
- iii) Floyd algoritması ile çizgenin bağlantılı olup olmadığını test et.
tepe / ayrıt geçiş yoğunluğunu hesapla.
- iv) Eğer çizge bağlantılı değilse adım vii)'e git
- v) Kritik tepeyi / kritik ayrıtı çizgeden sil
 $\kappa = \kappa + 1$ / $\lambda = \lambda + 1$ işlemini yap
- vi) Adım iii) ' e git
- vii) Tepe Birleştirilmişlik Sayısını κ
Ayrıt Birleştirilmişlik Sayısını λ yazdır
- viii) SON.

mek:



Tepe bağlantı matrisi

	A	B	C	D	E	F
A	-	4	3	0	1	0
B	0	-	3	0	1	0
C	0	1	-	0	1	0
D	0	1	2	-	1	0
E	0	1	2	0	-	0
F	0	1	2	0	4	-

Sıra toplamı

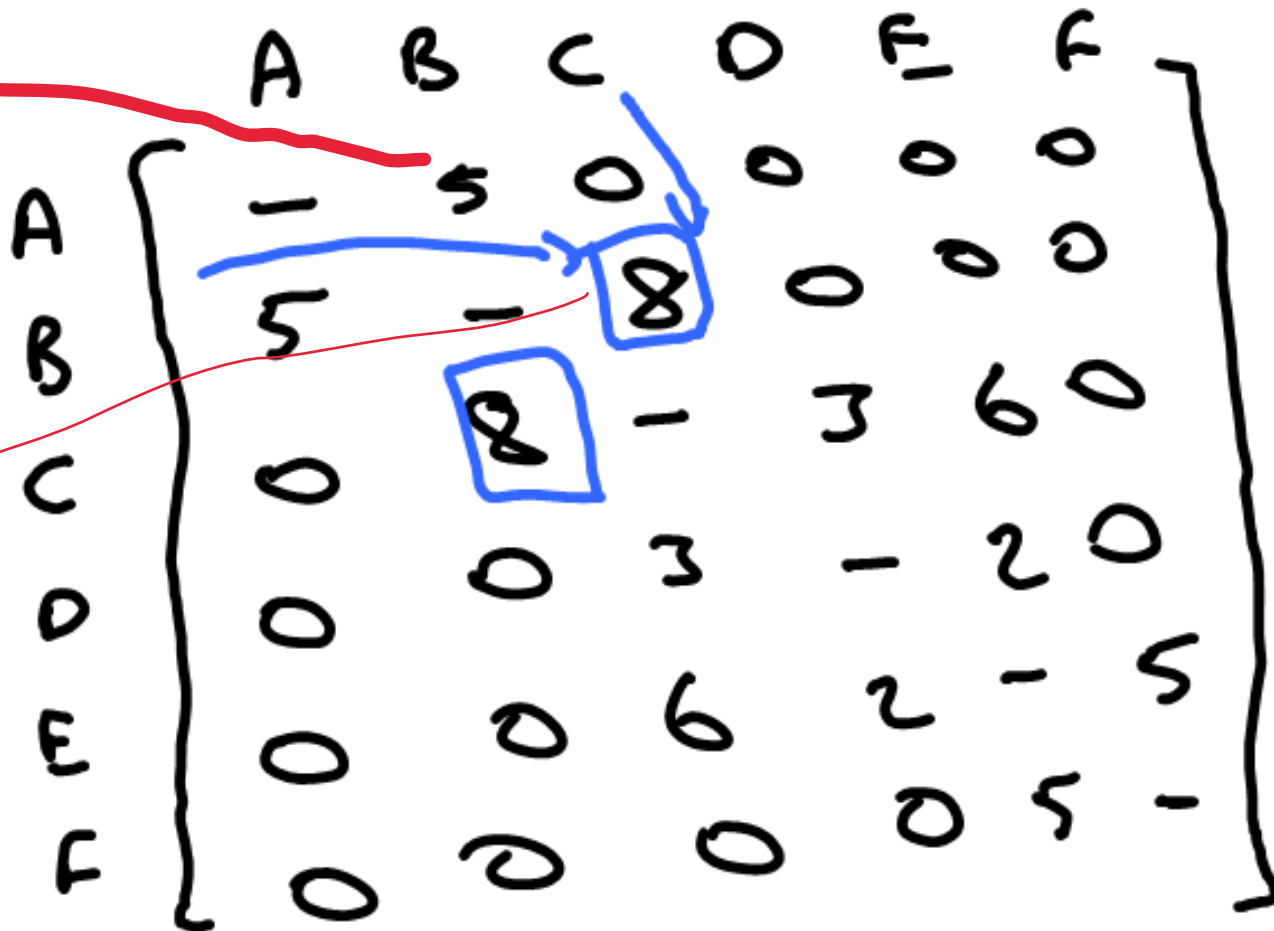
0	8	12	0	8	0
		*			

C, kritik tepedir.



C, tepesi çıkarıldığında Graf bağlantı
sız olur. Böylece $k(G) = 1$ 'dir.

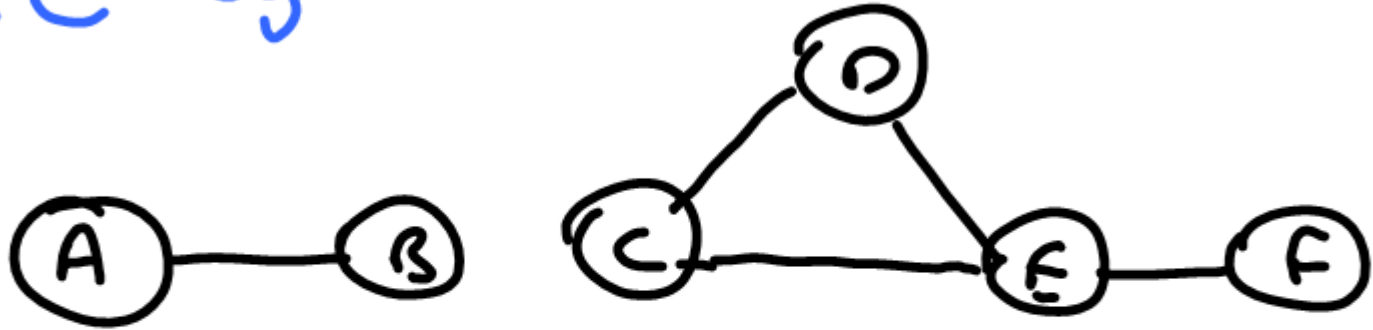
Ayrıt Yönlüklü Matrisi



The diagram shows a handwritten matrix with rows and columns labeled A through F. The matrix is enclosed in large square brackets. Annotations include a red line starting from a yellow comment icon on the left, passing through the first row, and another red line starting from a second yellow comment icon, pointing to the value 2 in the third row, second column. Blue boxes highlight the values 8 in the first row, third column and 2 in the third row, second column. A blue arrow points from the first row, third column towards the second row, third column.

	A	B	C	D	E	F
A	-	5	0	0	0	0
B	5	-	8	0	0	0
C	0	2	-	3	6	0
D	0	0	3	-	2	0
E	0	0	6	2	-	5
F	0	0	0	0	5	-

BC ağırlı kritik ağırlıdır.



BC ağırlı çıkarıldığında Graf bağlantı
sız olur. Böylece $k'(G)=1$ 'dir.

FLOYD ALGORİTMASI

Floyd Algoritması, graf üzerindeki her bir tepe için diğer tepelere olan en kısa yolları ve bu yolların uzaklıklarını bulmak için kullanılan bir algoritmadır. En kısa yolu bulmak için en genel algoritma Floyd'un algoritmasıdır. Grafın bitişiklik matrisi şeklinde tutulması durumunda bu algoritma $O(n^3)$ karmaşıklığında olmaktadır.

```
for i=1 to n
  for j=1 to n
    if  $A[i,j] \neq 0$  then  $D[i,j]=A[i,j]$ 
      else  $D[i,j]=\infty$ 
  repeat
repeat
for k=1 to n
  for i=1 to n
    for j=1 to n
      if  $(D[i,k]+D[k,j] < D[i,j])$  then  $D[i,j]=D[i,k]+D[k,j]$ 
    repeat
  repeat
repeat
```


KAYNAKLAR

- [1] Chartrand, G.-Lesniak, L., (1986) : *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, California
- [2] West D.B. (2001) : *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, USA.
- [3] Graf Teoriye Giriş, Şerife Büyükköse ve Gülistan Kaya Gök, Nobel Yayıncılık
- [4] Discrete Mathematical Structures for Computer Science, Ronald E. Prather, Houghton Mifflin Company, (1976).
- [5] Christofides, N., 1986. Graph Theory an Algorithmic Approach, Academic Press, London
- [6] M.E.Berberler, 2006. Çizgelerde Birleştirilmişlik Sayısı Üzerine.
- [7] Algoritmalar (Teoriden Uygulamalara), Vasif V. NABİYEV, Seçkin Yayıncılık