CENG 481 GRAF TEORİ VE UYGULAMALARI
Hafta 4

Prof. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

Hafta 4
Konular

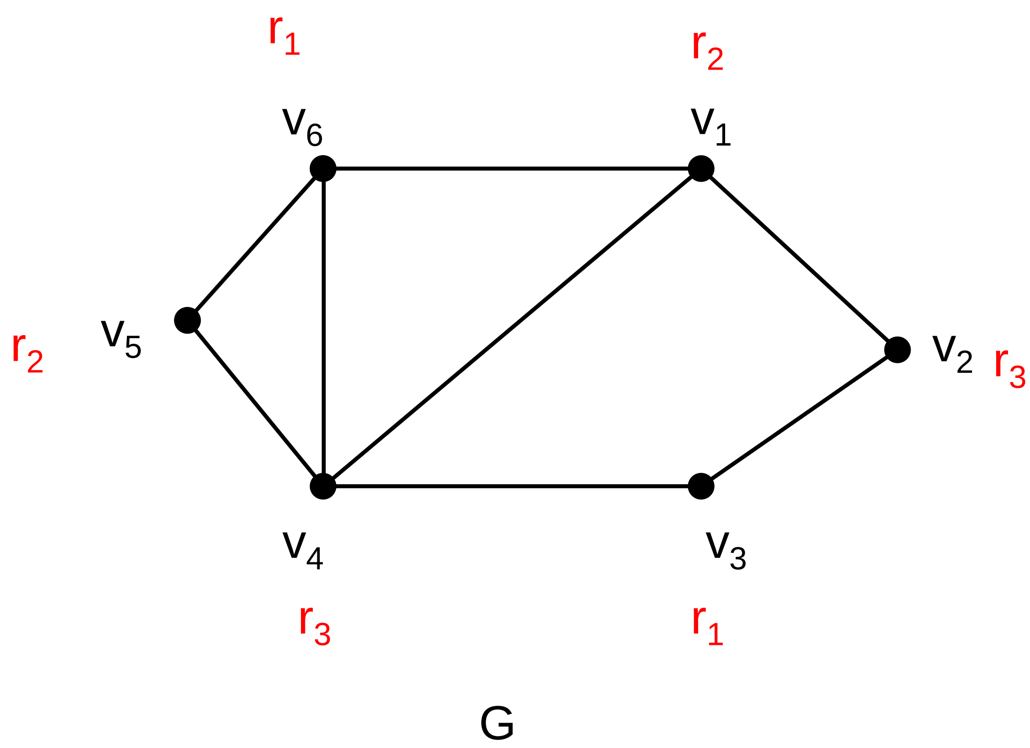
1- Grafların Boyanması

2- Kromatik Sayı ve Algoritması

3- Kromatik Polinomlar ve Önemli Teoremler

Grafların Boyanması

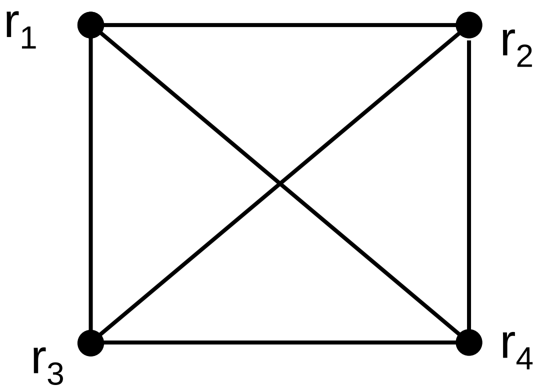
KROMATİK SAYI: G, p-tepeli bir graf olsun. G grafının birbirine komşu olan (aralarında tek bir ayrıt olan) tepeleri farklı renkte boyamak için gerekli olan en az renk sayısına bu grafın kromatik sayısı denir ve $\chi(G)$ ile gösterilir.



P tepeli, birleştirilmiş bir G grafı için, $\chi(G) \leq p$ dir. Yani, bir g grafının kromatik sayısı en fazla tepe sayısı kadardır. Yukarıdaki grafı boyamak için en az renk sayısı $\chi(G) = 3$ olup, graf 2 renkte boyanmaz.

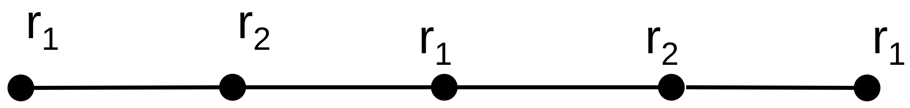
- **Tam Graf (K_p):**

p tepeli bir tam grafın, kromatik sayısı $\chi(K_p)=p$ dir.

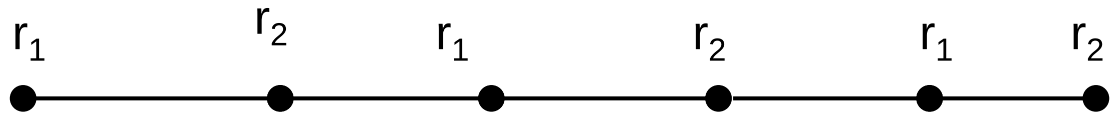


- Yol Graf (P_p): p tepeli yol grafın kromatik sayısı $\chi(P_p)=2$ dir.

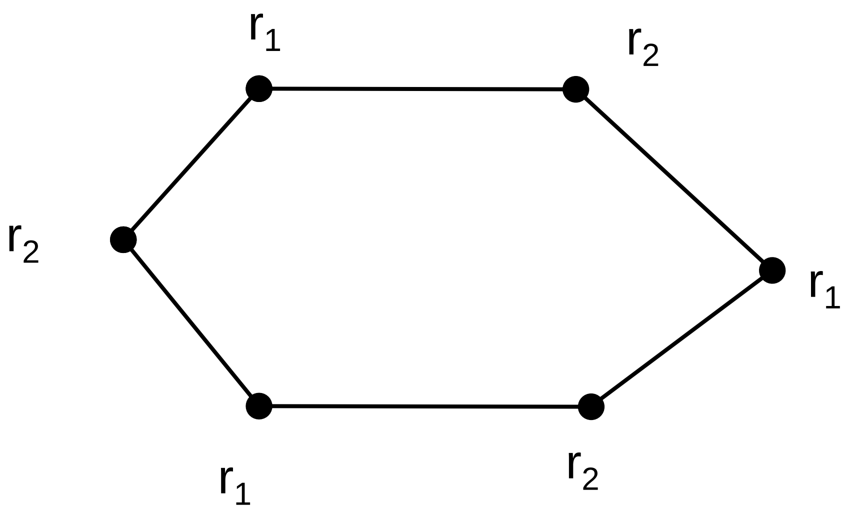
P_5

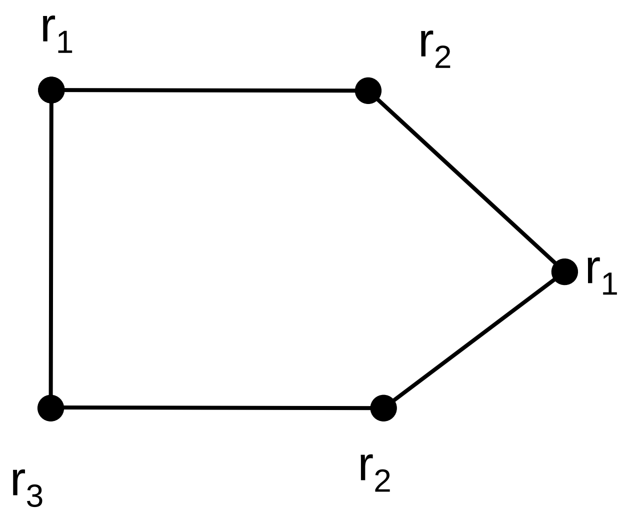


P_6



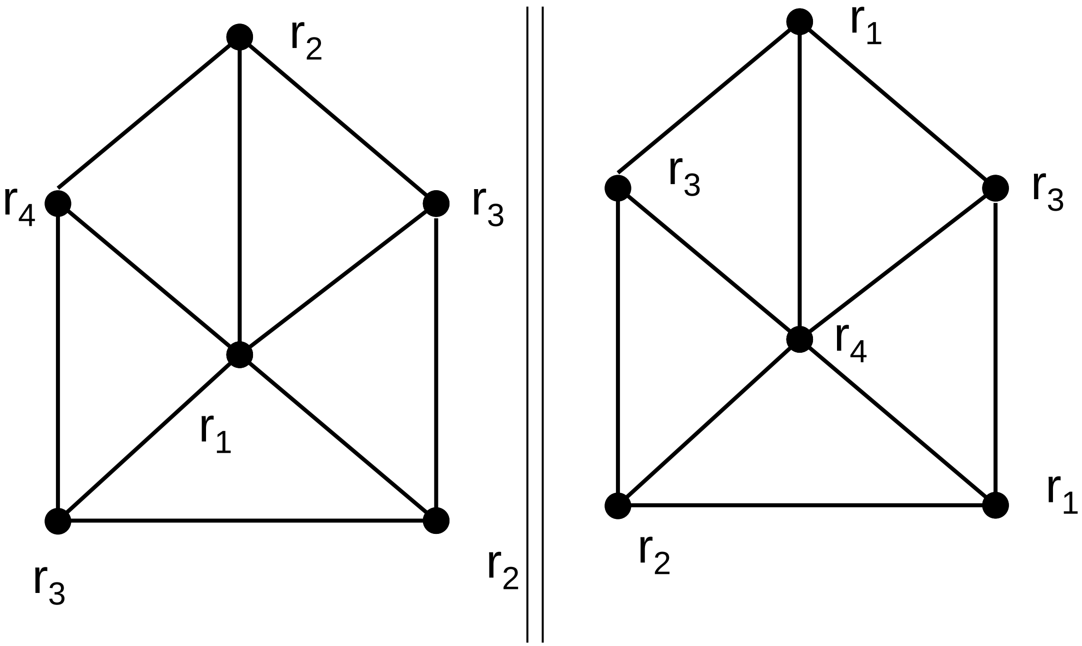
- **Çevre Graf:**

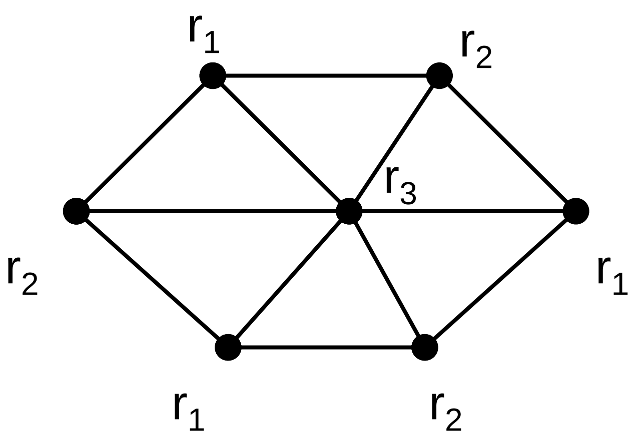




$$\chi(C_p) = \begin{cases} 2, & p-\text{çift} \\ 3, & p-\text{tek} \end{cases}$$

- **Tekerlek Graf($W_{1,p}$):**

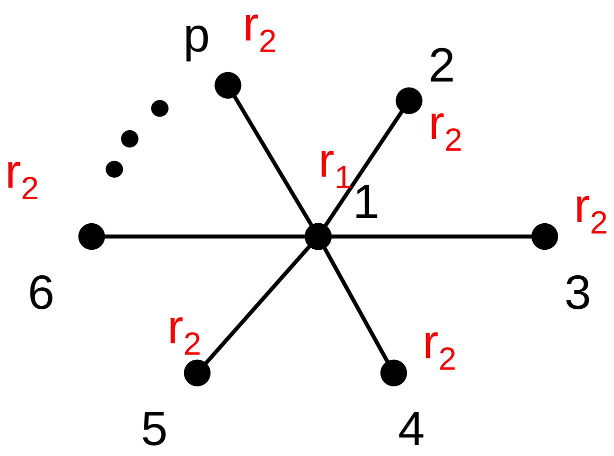




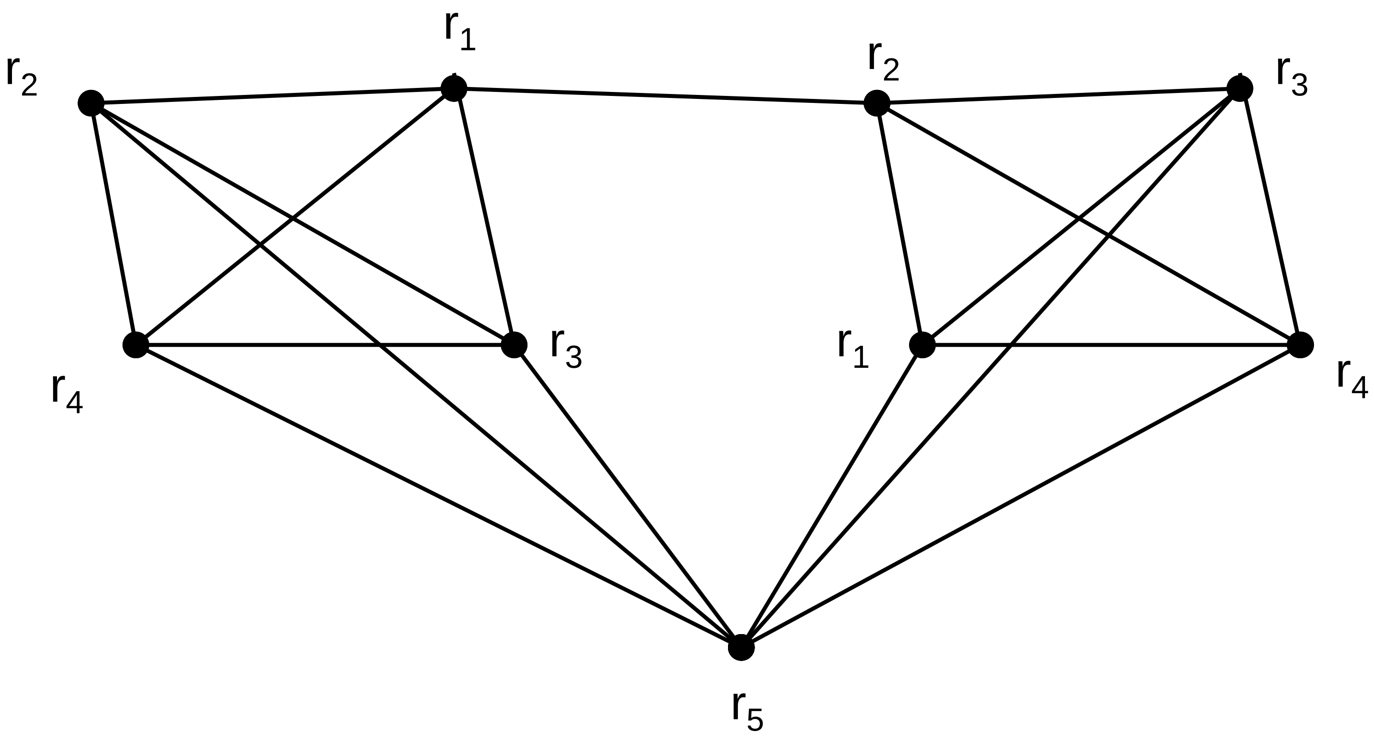
$$\chi(W_{1,p}) = \begin{cases} 3, & p-\text{çift} \\ 4, & p-\text{tek} \end{cases}$$

- **Yıldız Graf ($K_{1,p-1}$):** P tepeli bir yıldız grafın kromatik sayısı

$\chi(K_{1,p-1})=2$ dir.

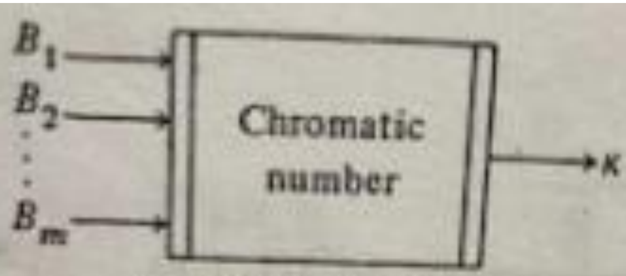


Örnek: Aşağıdaki grafın kromatik sayısı 5 dir.



$\chi(G)=5$

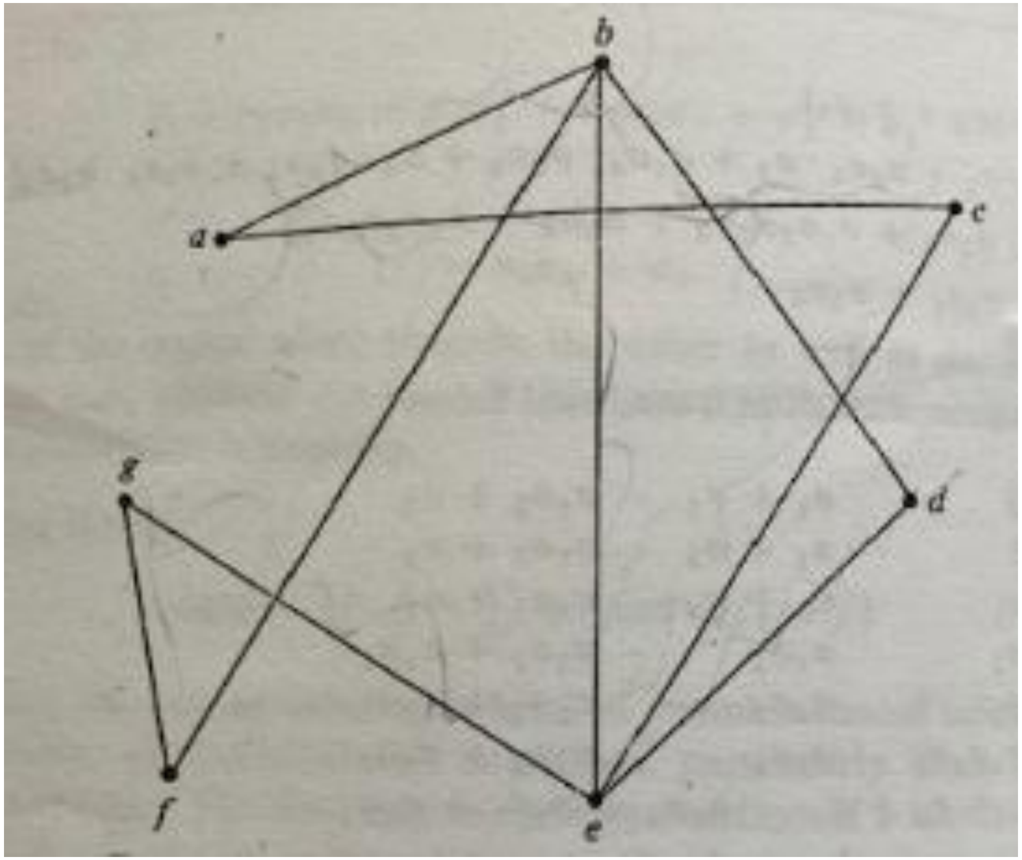
Kromatik Sayıyı bulmak için bir algoritma



i: element of m^+
j: element of n^+
κ: nonnegative integer
f: element of $L(n)$
g: array n^+ of $L(n)$

```
begin for j ← 1 to n do
        begin g[j] ← 0;
              for i ← 1 to m do
              if v_j ∈ B_i then
                        g[j] ← g[j] + B_i
        end;
        f ← 1;
        for j ← 1 to n do
              f ← f · g[j];
        κ ← min   {|x|}
           x in f
end
```

Örnek:



Şekilde verilen grafın kromatik sayısını bulunuz.

Verilen grafın maksimal bağımsız kümeleri:

A= *cdg* **B**=*cdf* **C**=*adg* **D**=*adf* **E**=*aef* **F**=*bcg*

Örtü Matrisi:

	a	b	c	d	e	f	g
A	0	0	1	1	0	0	1
B	0	0	1	1	0	1	0
C	1	0	0	1	0	0	1
D	1	0	0	1	0	1	0
E	1	0	0	0	1	1	0
F	0	1	1	0	0	0	1

F fonksiyonun oluşturulması:

$$
\begin{aligned}
f &= (C + D + E)F(A + B + F)(A + B + C + D)E(B + D + E)(A + C + F) \\
&= (CF + DF + EF)(A + B + F)\cdots \\
&= (CF + DF + EF)(A + B + C + D)\cdots \\
&= (CF + DF + AEF + BEF)E\cdots \\
&= (CEF + DEF + AEF + BEF)(B + D + E)\cdots \\
&= (CEF + DEF + AEF + BEF)(A + C + F) \\
&= CEF + DEF + AEF + BEF
\end{aligned}
$$

It follows that the chromatic number of the graph of Figure 4.8 is $\kappa = 3$.

If we wish to obtain a proper coloring of the graph with only three colors, we will choose any combination in f of size three, say

$$CEF: \quad C = \{a, d, g\} \qquad E = \{a, e, f\} \qquad F = \{b, c, g\}$$

These three blocks will cover V, but we have to "back off" to a partition:

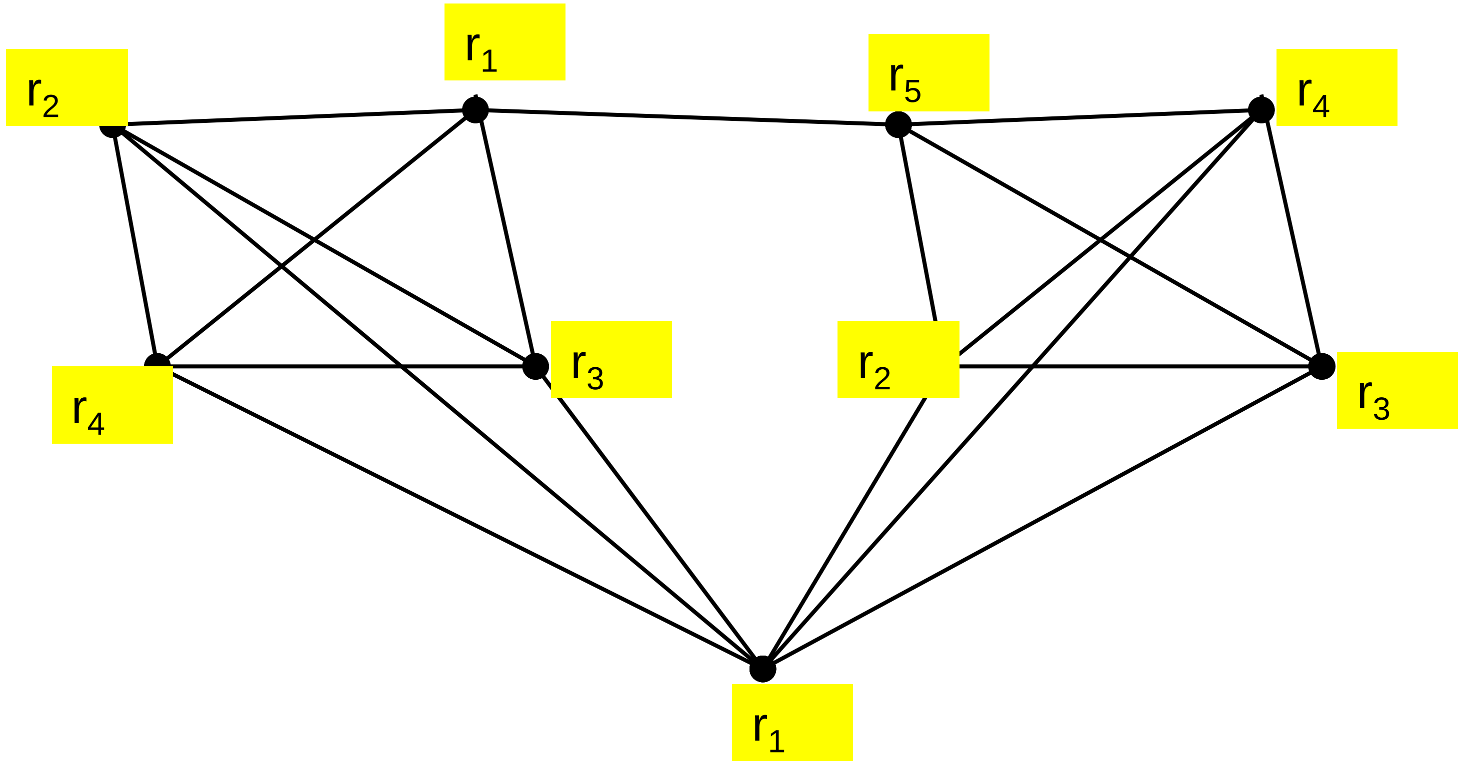
$$C' = \{d, g\} \qquad E' = \{a, e, f\} \qquad F' = \{b, c\}$$

Önemli Teoremler:

Teorem: Herhangi bir G grafı için $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$ dir.

Kritik Graf: G bir graf olsun. G nin her $H \subset G$ alt kümesi için $\chi(H) < \chi(G)$ oluyorsa G ye kritik graf denir.

Örnek: Aşağıdaki graf için $\chi(G)=5$ olup, G kritik graf mıdır?



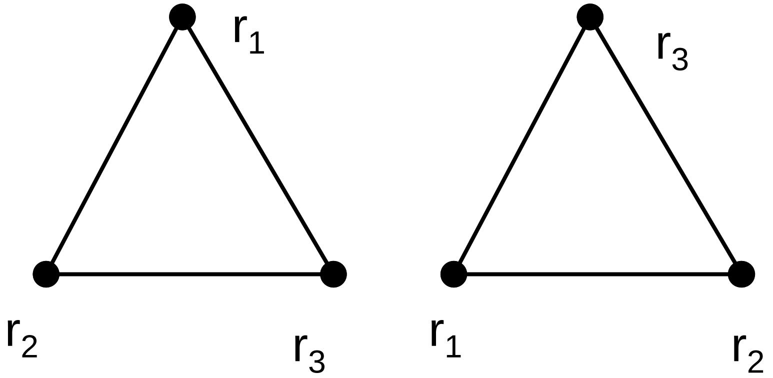
G kritik graf ise $\forall$ $H \subset G$ için $\chi(H) < \chi(G)$ olmalıdır. Aşağıdaki alt grafları, ele alalım.

$r_1r_2r_3r_4$, $r_2r_5r_4r_3$ ve $r_1r_5r_3r_2r_1$ ile belirtilen alt graflar için kromatik sayılar, sırasıyla, 4,4 ve 3 dür. Buradaki diğer alt graflar içinde kromatik sayı en fazla 4 olup, G grafı kritik grafdır.

- Tam graf kritik graftır.
- Yol graf kritik graf değildir.

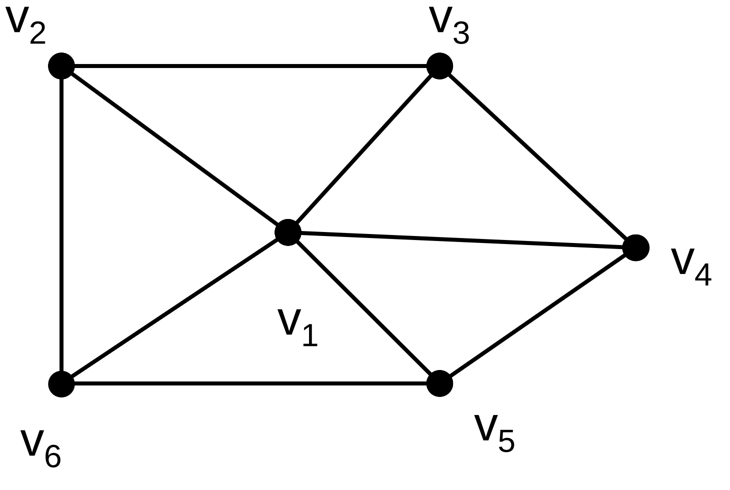
Teorem: Her kritik graf birleştirilmiştir.

Kanıt: Olmayana ergi yöntemi ile graf birleştirilmiş olmasın. Bu durumda, aşağıdaki gibi birleştirilmemiş öyle bir $H \subset G$ alt grafı vardır ki $\chi(H) < \chi(G)$ koşulu sağlanmaz. Bu ise hipoteze aykırıdır.



Teorem: G, kromatik sayısı 4 olan bir kritik graf ise her bir tepenin derecesi en az 3 tür.

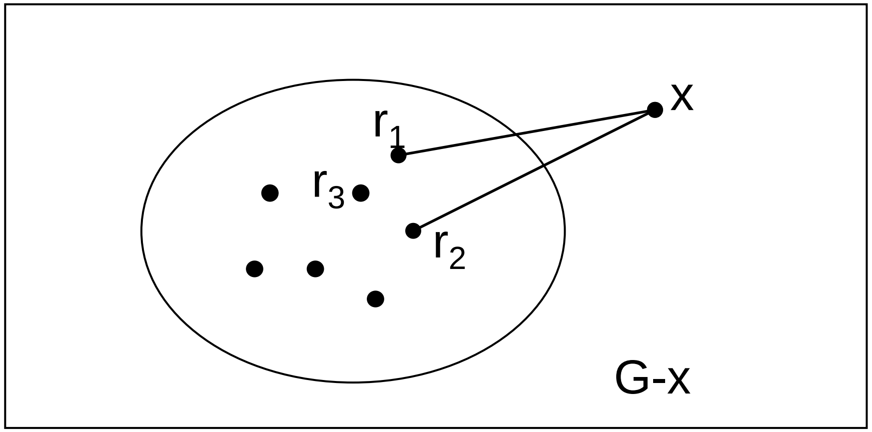
Teoreme örnek olarak aşağıdaki graf verilebilir. Bu graf için $\chi(W_{1,5})=4$ olup, her $H \subset W_{1,5}$ alt grafı için $\chi(H)<4$ dür. Yani, $W_{1,5}$ kritik grafdır ve her bir tepesinin derecesi en az 3 dür.



$W_{1,5}$

Kanıt: Kanıt olmayana ergi yöntemi ile yapılır.

G, kromatik sayısı 4 olan bir kritik graf ise G grafının bir x tepesinin en çok 2 dereceli olduğunu kabul edelim. G kritik graf olduğu için ($x \in V(G)$ olmak üzere) $\chi(G-x) < \chi(G)$ olup, G-x grafı 3 renkle boyanabilir. x tepesini grafta geriye koyarsak, kabulümüzden x en çok iki tepe ile bitişiktir.



Bu durumda, x tepesini 3. renk ile boyayabiliriz. Bu ise, G grafının kromatik sayısının 3 olması demektir ve hipotez ile çelişkilidir.

Teorem: G, kromatik sayısı $\chi(G)$ olan kritik bir graf ise her bir tepesinin derecesi en az $\chi(G)-1$ dir.

Teorem: G, p-tepeli, q-ayrıtlı kritik bir graf ve G nin kromatik sayısı $\chi(G)$ ise

$(\chi(G)-1)p \leq 2q$ dur.

Kanıt: Son teoremden, G nin her bir tepesinin derecesi en az $\chi(G)-1$olup, grafın tüm tepe derecelerinin toplamı en az $(\chi(G)-1)p$ dir. Bir G grafının tepe derecelerinin toplamı, ayrıt sayısının (q) iki katına eşit olduğuna göre

$(\chi(G)-1)p \leq 2q.$

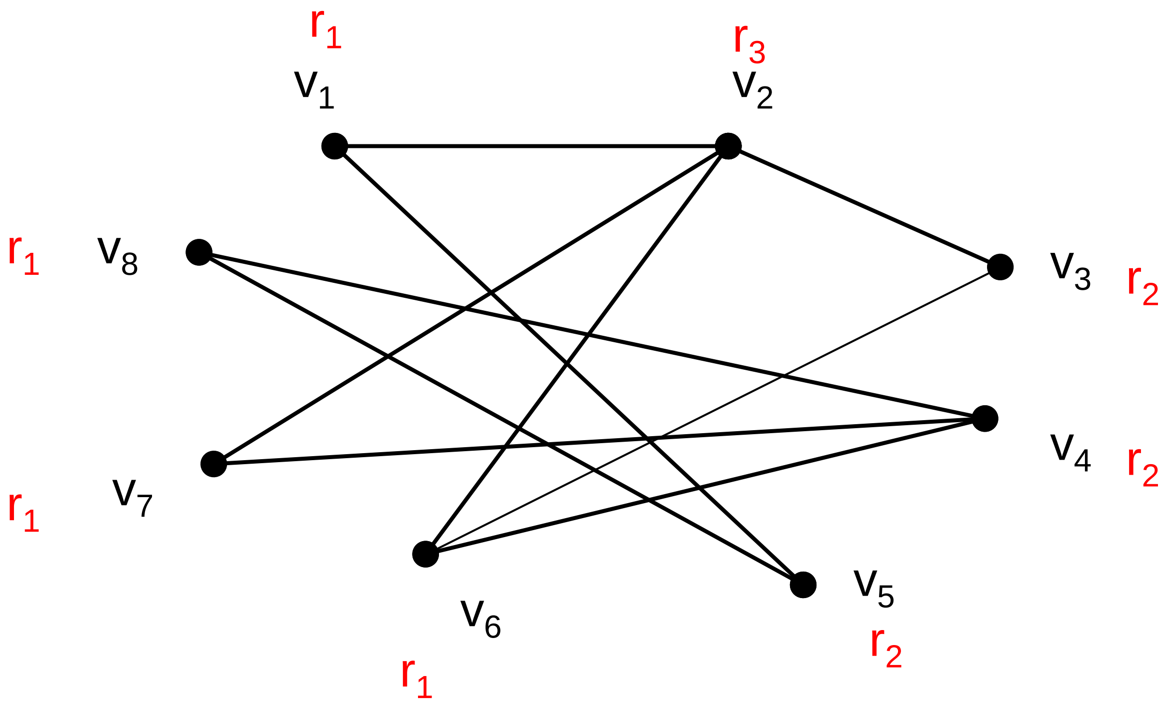
Kromatik sayı için güncel bir örnek :

Örnek: Bir ilaç firması n tane kimyasal maddeyi satın ıştır. Bu maddeleri işlemeden önce saklamak için firmanın en az kaç tane depoya ihtiyacı vardır?

Problemin çözümü için örnek olarak n=8 alalım ve bu maddeler maddelerin aşağıdaki gibi kimyasal etkileşime girdiğini düşünelim?

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	$\mathbf{x_7}$	$\mathbf{x_8}$
x_2	x_3	x_2	x_7	x_1	x_2	x_4	x_4
x_5	x_7	x_6	x_6	x_8	x_4	x_2	x_5
	x_1		x_8		x_3		
	x_6						

O halde en az kaç depoya gereksinim vardır.?



$$r_1=\{x_1,x_6,x_7,x_8\} \quad r_2=\{x_3,x_4,x_5\} \quad r_3=\{x_2\}$$

Burada her bir renk kümesi bir depoya yani grafın bir bağımsızlık kümesine karşılık gelmektedir.Ayrıca bu kümeler bir parçalanış oluşturur.
Yani; grafın tepeleri 3 parçaya ayrılmış olur.

Tanım (Parçalanış):

A bir küme olsun.
1)$\forall$i için Ai$\neq\varnothing$
2) $\forall$i,j için (i$\neq$j) Ai $\cap$Aj =0

3) $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{r} A_i = A$

A_1, A_2,…,Ar ye A nın bir parçalanışı denir. Gerçekten, sorunun yanıtını veren renk kümelerini ele alırsak:

1) $r_1\neq\varnothing$

$r_2\neq\varnothing$

$r_3\neq\varnothing$

2) $r_1\cap r_2=\varnothing$

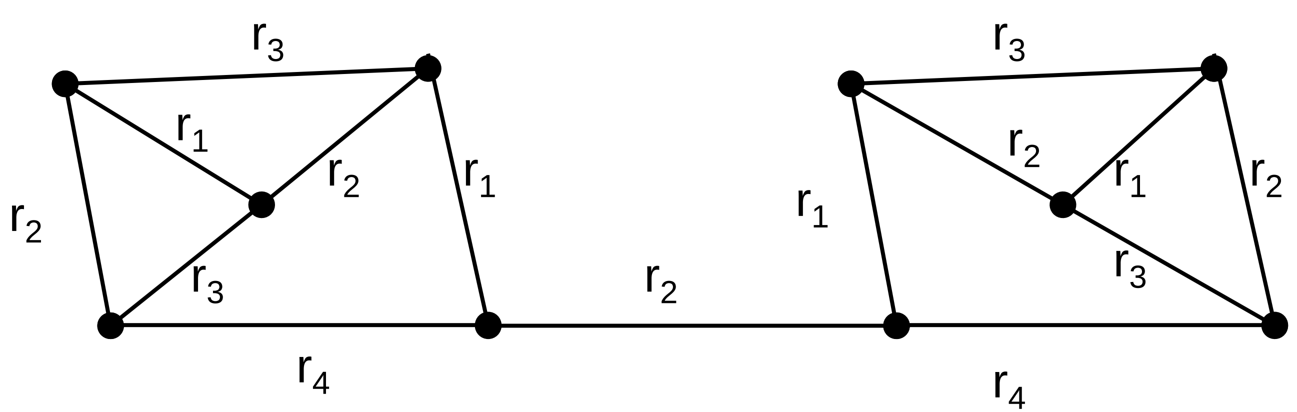
$r_1\cap r_3=\varnothing$

$r_2\cap r_3=\varnothing$

3) $r_1\cup r_2\cup r_3=V(G)$

Koşulları sağlanmakta olup bu kümeler bir parçalanış oluşturur.

Ayrıt Boyama: G bir graf olsun. G nin birbirine bitişik olan (ortak bir tepeye sahip olan) ayrıtları farklı renkte olacak şekilde grafın tüm ayrıtlarını boyamak için gerekli olan en az renk sayısına renk sayısına ayrıt kromatik sayı denir ve $\chi'(G)$ ile gösterilir.

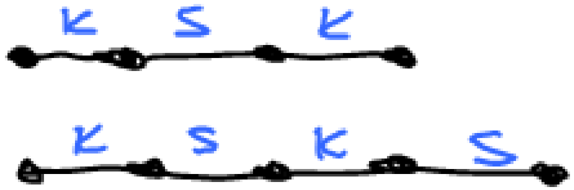


- **Yol, Çevre, Tam, Yıldız, Tekerlek ve İki parçalı Tam grafların**
- **Ayrıt Boyama Sayıları nedir?**

- **Ayrıt Boyama sayısı algoritmik olarak nasıl hesaplanabilir?**

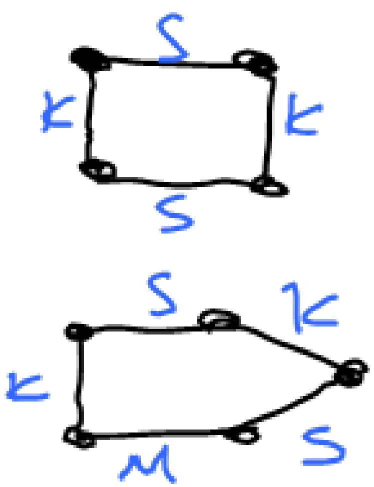
Ayrıt Boyama

1) Yol Graf



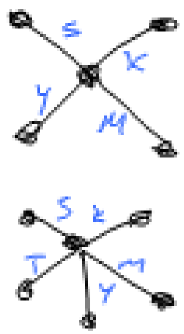
$$\chi'(P_n) = 2$$

2) Çevre Graf



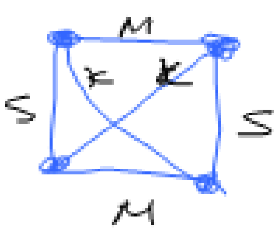
$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ çift} \\ 3, & n \text{ tek} \end{cases}$$

3) Yıldız Graf



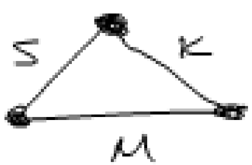
$$\chi'(K_{1,n}) = n$$

4) Tam Graf



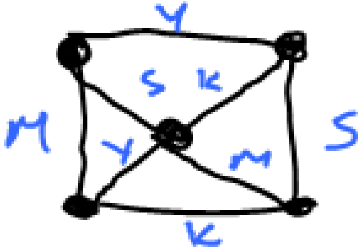
K_4

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n, & n \text{ tek} \\ n-1, & n \text{ çift} \end{cases}$$

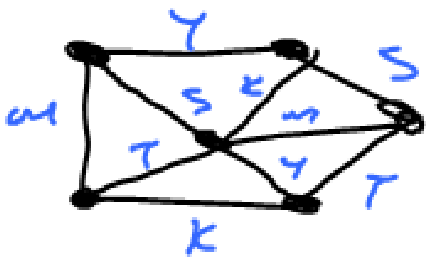


K_3

5) Tekerlek Graf



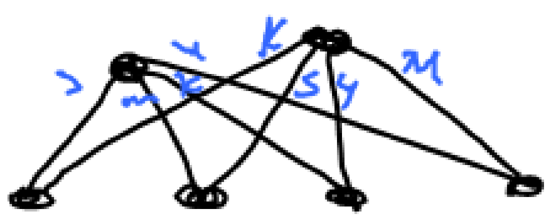
$W_{1,4}$



$W_{1,5}$

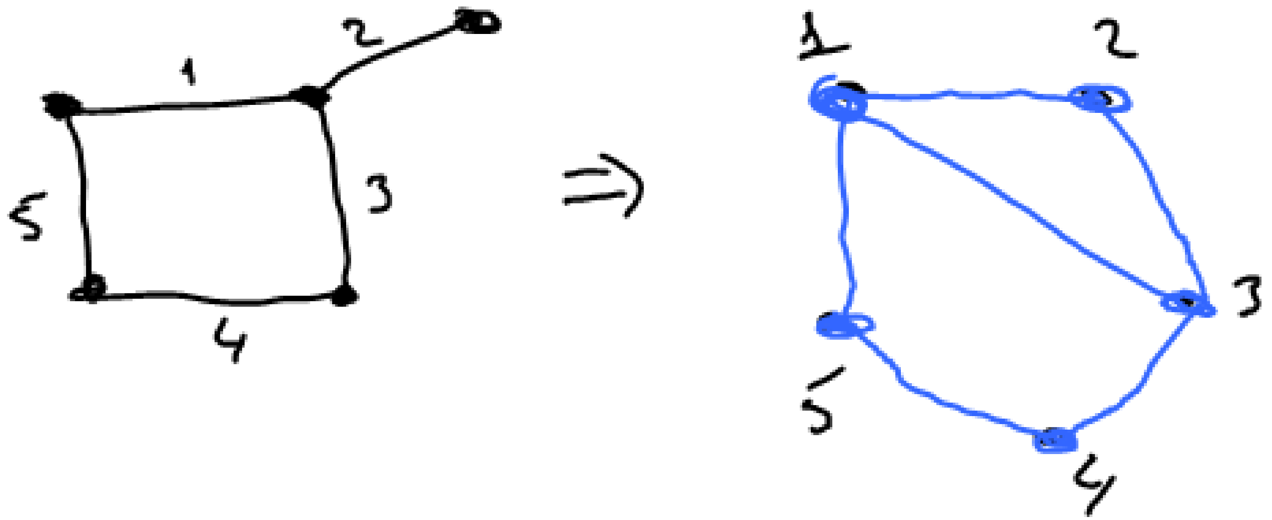
$\chi'(W_{1,n}) = n$

6) iki parçalı tam graf



$\Rightarrow \chi'(K_{m,n}) = \max\{m,n\}$

Line Graf



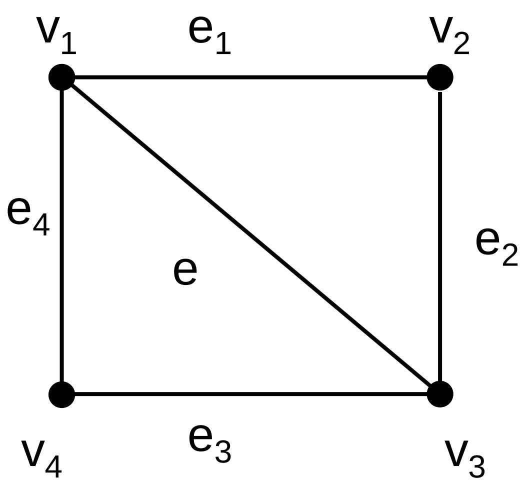
$$G \Rightarrow L(G)$$

* Ayrıtlar tepe oluyor.

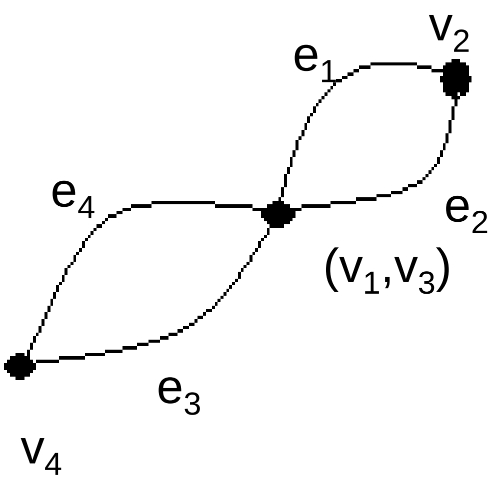
Contraction (Büzülme) işlemi:

Bir G grafının herhangi bir e=(u,v) ayrıtına büzülme işlemi uygulamak, bu ayrıtı graftan silmek ve ayrıtın uç noktalarını üst üste gelecek şekilde çakıştırmaktır. Yeni oluşan graf G.e simgesi ile gösterilir.

Örnek:



ayrıt

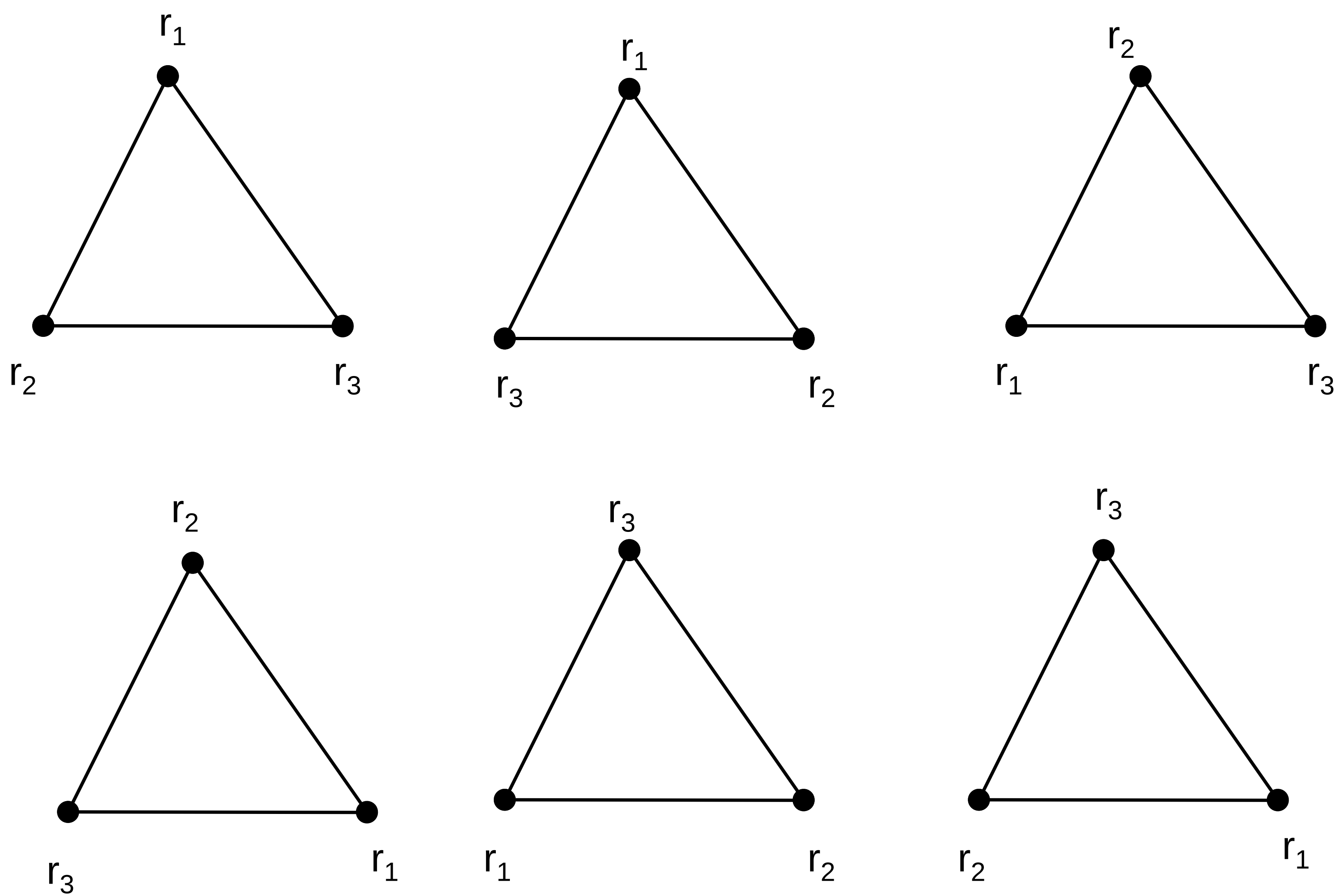


e ayrıtının büzülmesi ile
elde edilen graf G.e

Kromatik polinomlar:

--- Bir G grafının, birbirinden ayrık k-boyamalarının sayısı $\Pi_k(G)$ ile gösterilir. $\Pi_k(G)>0$ olması için gerek ve yeter koşul G grafının k-boyanabilir olmasıdır.

--- Örneğin, K_3 tam grafının, 6 tane birbirinden ayrık 3-boyaması vardır.



K_3 grafının birbirinden ayrık boyamaları

- G, p tepeli boş bir graf (hiç ayrıta sahip olmayan graf) ise her bir tepe k tane rengin her birinden bağımsız olarak boyanabilir. Bu durumda $\Pi_k(G)=k^p$ dir.
- G, p-tepeli bir tam graf olsun. 1. tepenin rengi için k seçim, 2. tepenin rengi için (k-1) seçim ve 3. tepenin rengi için (k-2) seçim yapılabilir. Bu şekilde devam ederek

$$\Pi_k(G)=k(k-1)(k-2)\ldots(k-p+1) \text{ dir.}$$

- Örneğin, K_3 tam grafı için

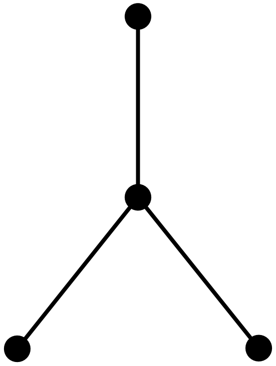
$$\Pi_k(K_3)=k(k-1)(k-2)=3(3-1)(3-2)=3.2.1=6$$

olup, gerçekten K_3 tam grafının 6 boyaması vardır.

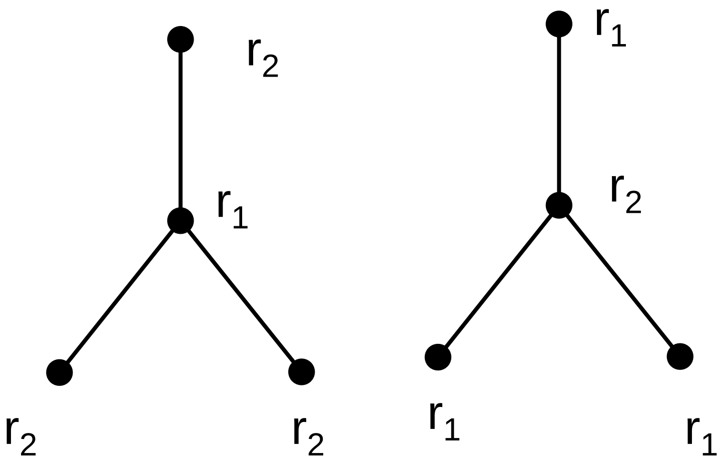
- Bir G grafının kromatik polinomunu bulurken, boş grafın yada tam grafların kromatik polinomlarını kullanırız.

Teorem: G bir graf olsun. G nin herhangi bir e-ayrıtı için $\Pi_k(G) = \Pi_k(G\text{-}e) - \Pi_k(G.e)$

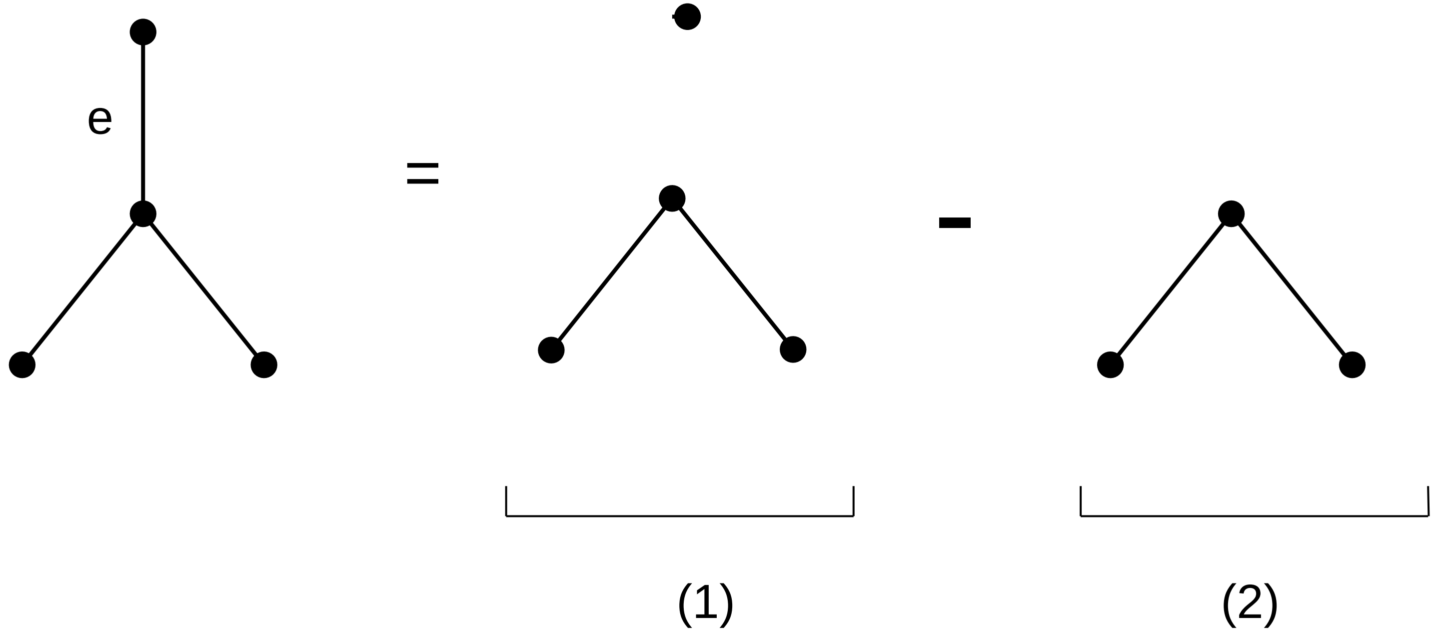
Örnek: $K_{1,3}$ grafının kromatik polinomunu bulunuz.

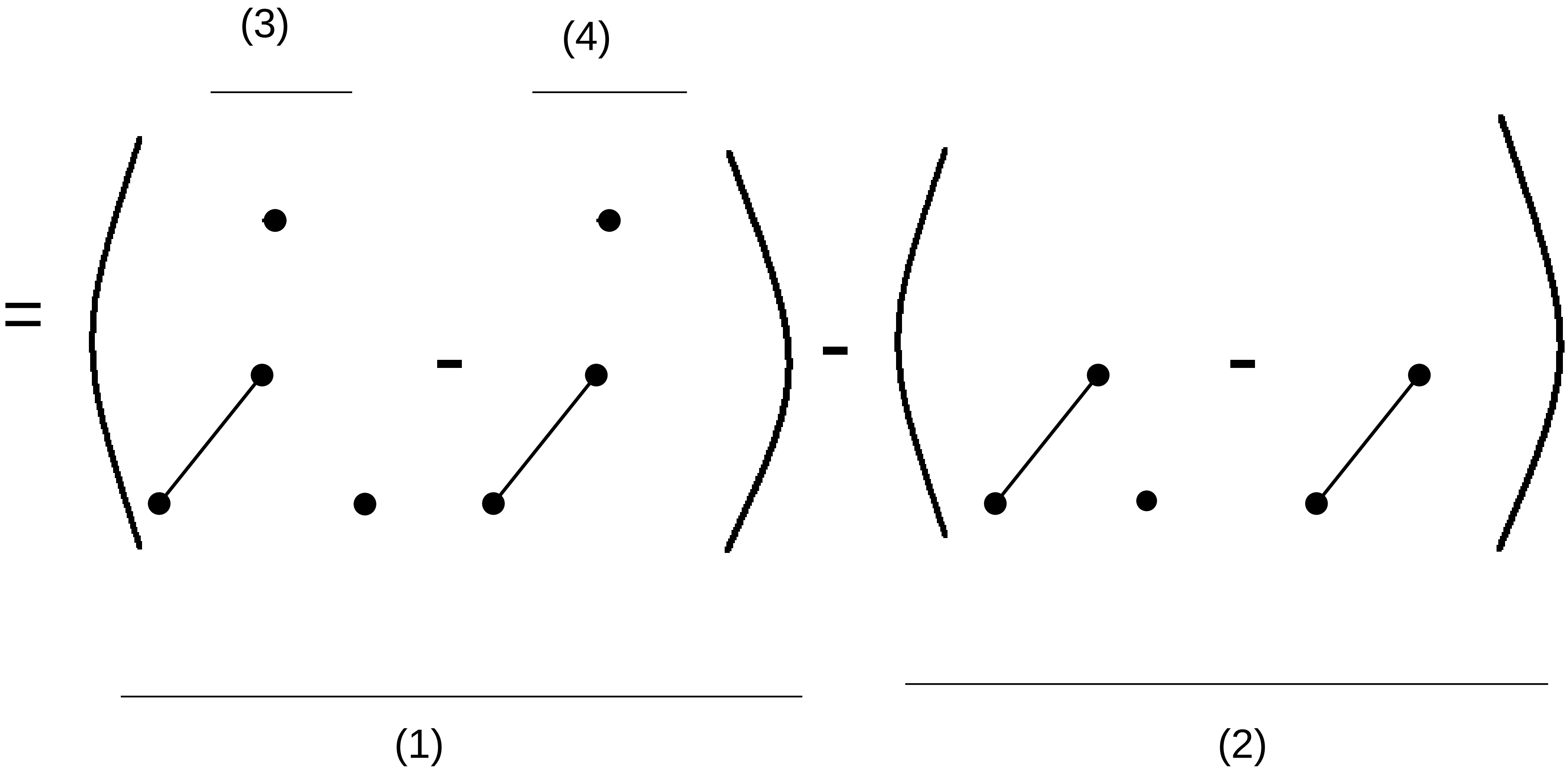


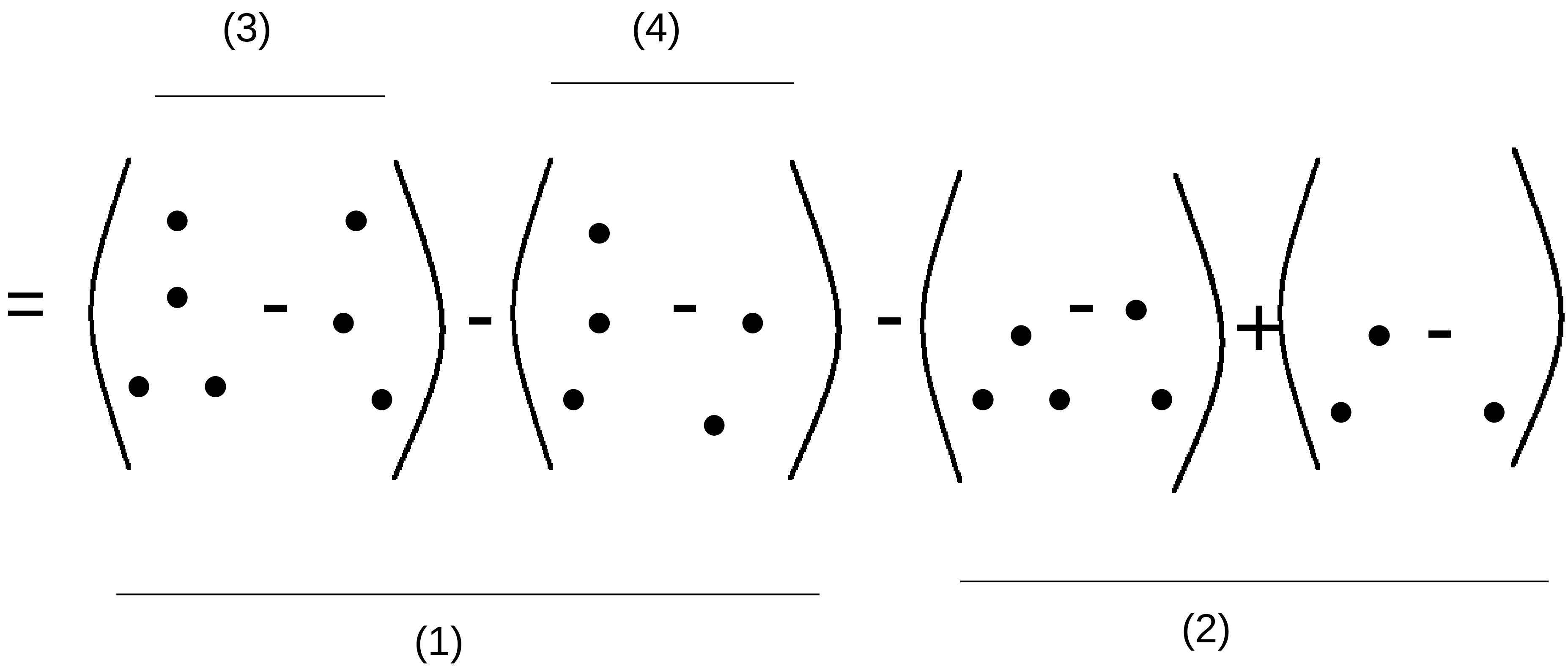
$K_{1,3}$ yıldız graf

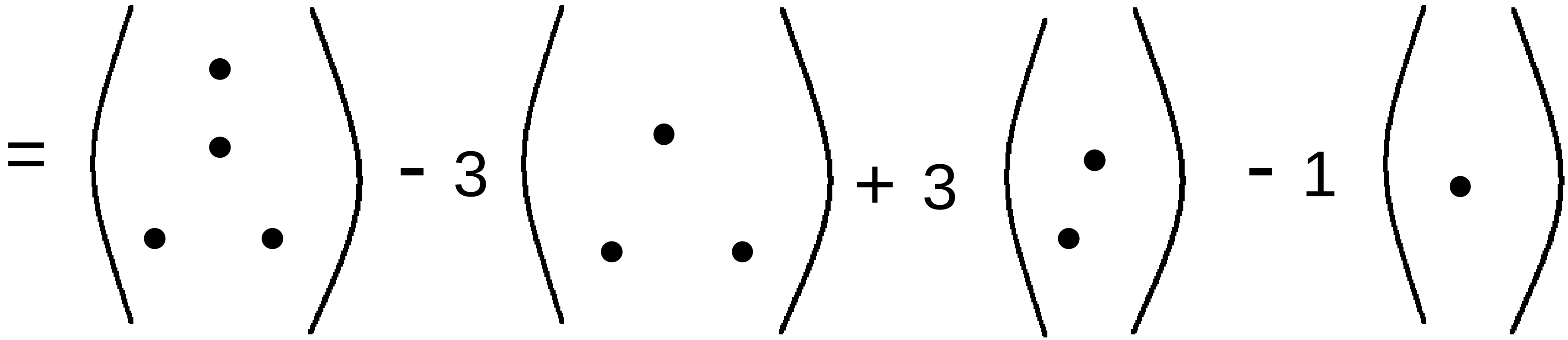


(1) (2)


e
=
-
(1)
(2)


(3)
(4)
(1)
(2)


(3)
(4)
(1)
(2)



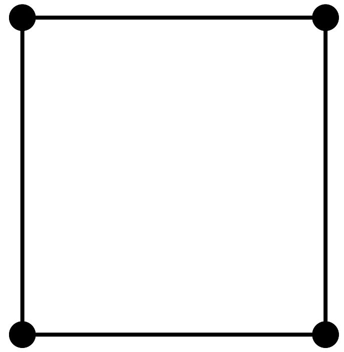
$$=k^4-3k^3+3k^2-k$$

$$=k(k^3-3k^2+3k-1)=k(k-1)^3 \quad \Rightarrow \quad \Pi_k(K_{1,3})= k(k-1)^3$$

Gerçekten, polinomda k=2 alınırsa, bu grafın 2 tane farklı boyaması

olduğu görülür.

Örnek: C_4 grafının kromatik polinomunu bulalım.



Burada,

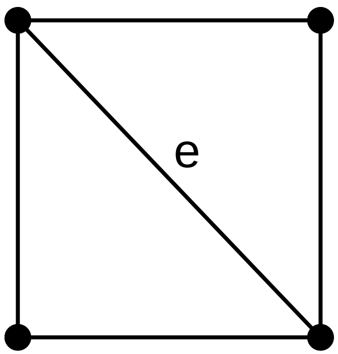
$$\Pi_k(G)= \Pi_k(G\text{-}e)-\Pi_k(G.e)$$

formülünü,

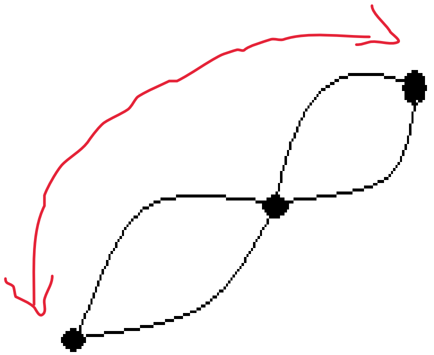
$$\Pi_k(G\text{-}e)= \Pi_k(G)+\Pi_k(G.e)$$

şeklinde düşünerek kromatik polinomu buluruz. Sonuçta, elde ettiğimiz tam grafların kromatik polinomlarını kullanarak, C_4 grafının kromatik polinomunu buluruz..

=



+

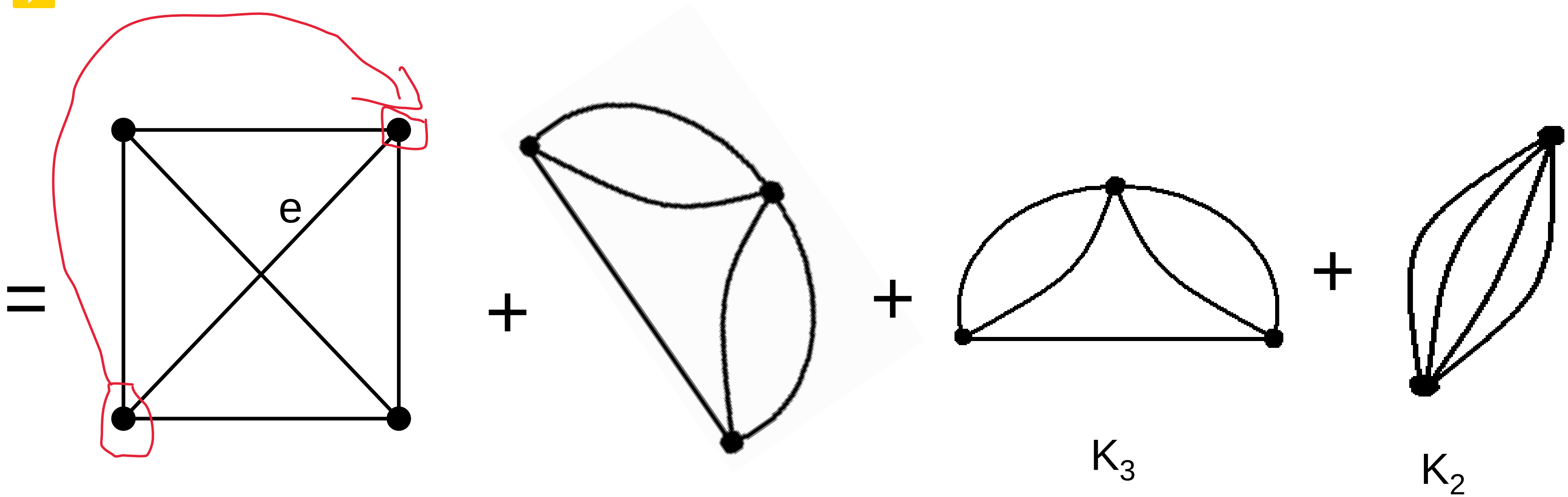


Diyelim e yi sildik

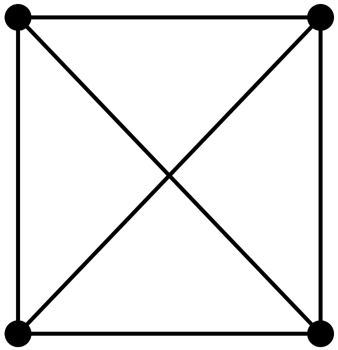
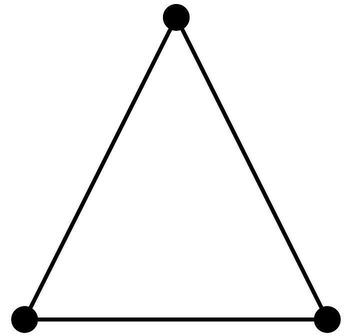
Büzülmüş hali

(1)

(2)



Bir ayrıt daha ekledik

=  + 2  + 

$$=k(k-1)(k-2)(k-3)+2k(k-1)(k-2)+k(k-1)$$

$$=k(k-1)(k^2-3k+3)$$

$$\Pi_k(C_4)=k(k-1)(k^2-3k+3)$$

$$=2(2-1)(4-6+3)=2.1.1=2$$

Teorem: G, p-tepeli, q-ayrıtlı bir graf olsun. G grafının bileşenleri $G_1, G_2, \ldots, G_t$ olmak üzere,

a) $\Pi_k(G)$ polinomu p derecelidir.

b) $\Pi_k(G)$ de, k^p in katsayısı 1 dir.

c) $\Pi_k(G)$ polinomunda, k^{p-1} in katsayısı $-q$ dur.

d) $\Pi_k(G)$ nin en küçük üsülü terimi $a_t x^t$ olup $a_t \neq 0$ dir.

e) $\Pi_k(G)$ polinomunun sabit katsayısı sıfırdır.

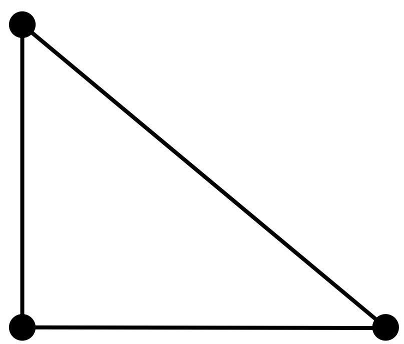
Soru: $k^4-3k^3+3k^2$ kromatik polinomuna sahip bir graf var mıdır?

Yanıt: Yukarıdaki teoremden,

(a) $\rightarrow$ graf 4 tepelidir.

(c) $\rightarrow$ grafın ayrıt sayısı 3 tür.

(d) $\rightarrow$ graf iki bileşene sahiptir.

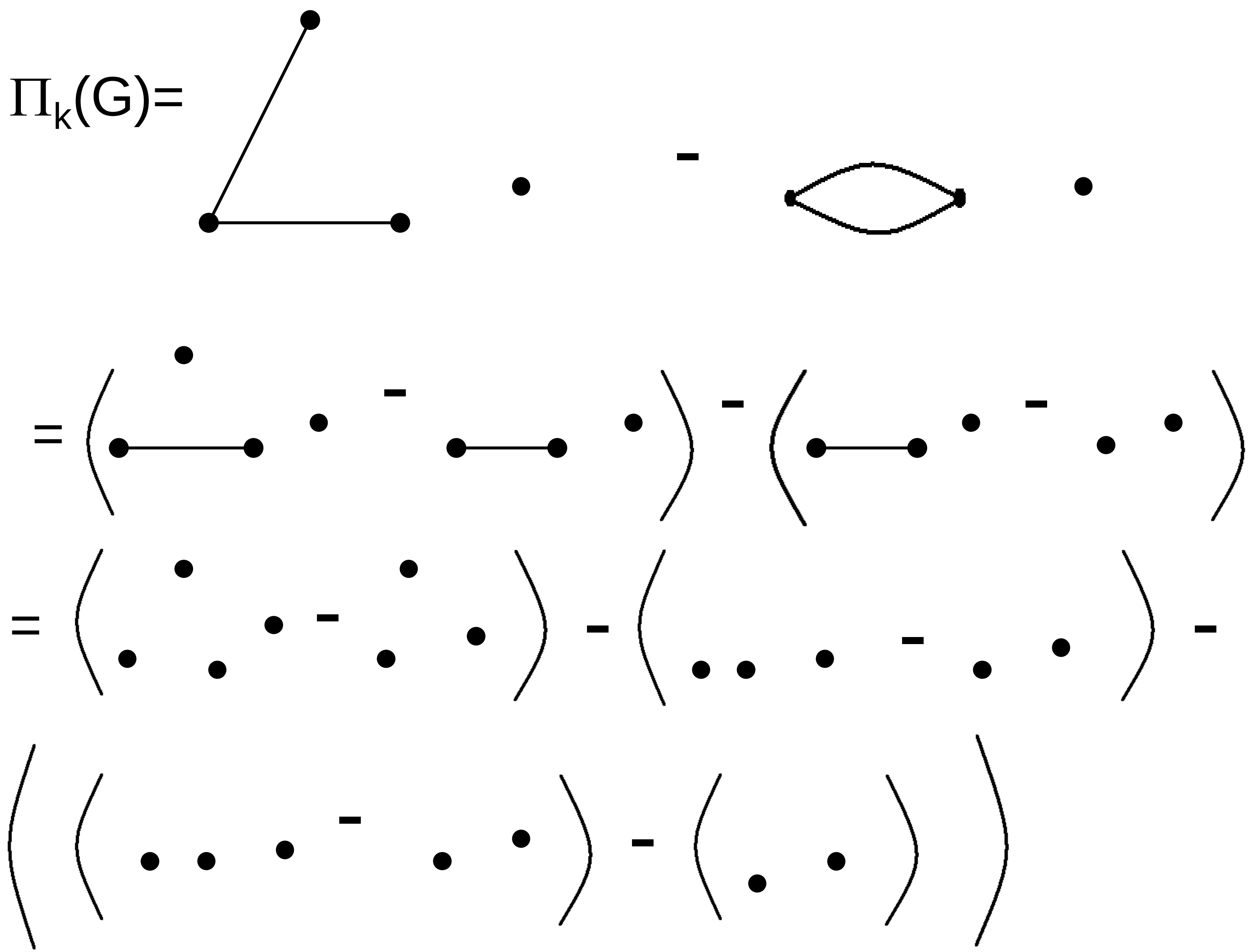


K_3

K_1

$G=K_3 \cup K_1$

Şimdi, bu grafın kromatik polinomunu bulalım ve doğruluğunu görelim.

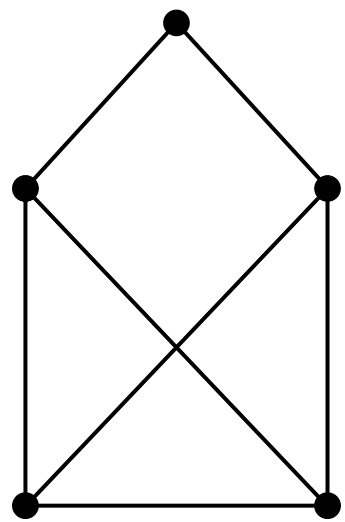

Πk(G)=

$$= (k^4-k^3)-(k^3-k^2)-((k^3-k^2)-k^2)$$

$$= k^4-k^3-k^3+k^2-k^3+k^2+k^2$$

$$= k^4-3k^3+3k^2$$

Çalışma Sorusu: $k^5-7k^4+19k^3-23k^2+10k$ kromatik polinomu aşağıdaki grafa ait olabilir mi?



KAYNAKLAR

[1] Chartrand, G.-Lesniak, L., (1986) : *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, California

[2] West D.B. (2001) : *Introduction to Graph Theory*, *Prentice Hall*, USA.

[3] Graf Teoriye Giriş, Şerife Büyükköse ve Gülistan Kaya Gök, Nobel Yayıncılık

[4] Discrete Mathematical Structures for Computer Science, Ronald E. Prather, Houghton Mifflin Company, (1976).

[5] Christofides, N., 1986. Graph Theory an Algorithmic Approach, Academic Press, London

[6] Algoritmalar (Teoriden Uygulamalara), Vasif V. NABİYEV, Seçkin Yayıncılık