CENG 306 Biçimsel Diller ve Otomatlar
Formal Languages and Automata

Konular

- Düzenli ve Düzenli olmayan diller - Regular and Non-regular Languages
- Pumping Lemma and Its Application to RE/Non-RE Languages

Regular and Non-regular Languages

- Düzenli diller bazı işlemler (**birleşim, kesişim, Kleene star, complement, concatenation**) icin kapalıdır.
- Düzenli diller, düzenli ifadeler (regular expressions) ile veya sonlu otomatlar ile (deterministic veya nondeterministic) belirlenebilir.

Regular and Non-regular Languages

- Düzenli diller bazı işlemler (**birleşim, kesişim, Kleene star, complement, concatenation**) icin kapalıdır.
- Düzenli diller, düzenli ifadeler (regular expressions) ile veya sonlu otomatlar ile (deterministic veya nondeterministic) belirlenebilir.

Örnek:

$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$, $L \subseteq \Sigma^*$ olarak tanımlı olsun ve sadece 2'ye veya 3'e bölünebilen ve önünde 0 olmayan pozitif sayılara sahip olsun.

(0, 3, 6, 244 $\in L$ ve 1, 03, 00 $\notin L$)

Bu dilin regular olduğunun ispatı 4 kısımda yapılabilir.

Regular and Non-regular Languages

Örnek: (devam)

- $\sum = \{0, 1, 2, 3,..., 9\}$, $L \subseteq \sum^*$, *2'ye veya 3'e bölünebilen ve önünde 0 olmayan pozitif sayılara sahiptir*

1 L_1 *dili pozitif tamsayıların kümesi olsun*

$$L_1 = 0 \cup \{1, 2, \ldots 9\} \sum^* \quad \textit{(regular)}$$

Regular and Non-regular Languages

Örnek: (devam)

- $\sum = \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$, $L \subseteq \sum^*$, *2'ye veya 3'e bölünebilen ve önünde 0 olmayan pozitif sayılara sahiptir*

1) L_1 *dili pozitif tamsayıların kümesi olsun*

$$L_1 = 0 \cup \{1, 2, \ldots 9\} \sum^* \quad \textit{(regular)}$$

2) L_2 *dili 2'ye bölünebilen pozitif tamsayıların kümesi olsun*

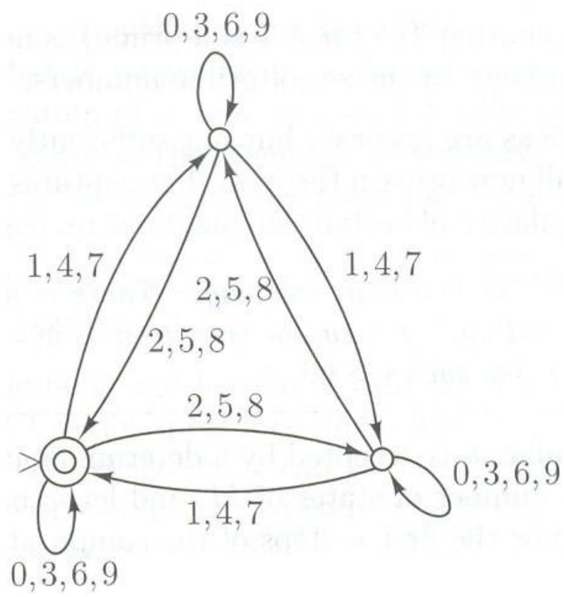
$$L_2 = L_1 \cap \sum^* \{0, 2, 4, 6, 8\} \quad \textit{(regular)}$$

Regular and Non-regular Languages

Örnek: (devam)

- $\sum = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$, $L \subseteq \sum^*$, *2'ye veya 3'e bölünebilen ve önünde 0 olmayan pozitif sayılara sahiptir*

3) *3'e bölünebilen pozitif tamsayıların kümesi olan dili aşağıdaki otomat tanır (regular)*

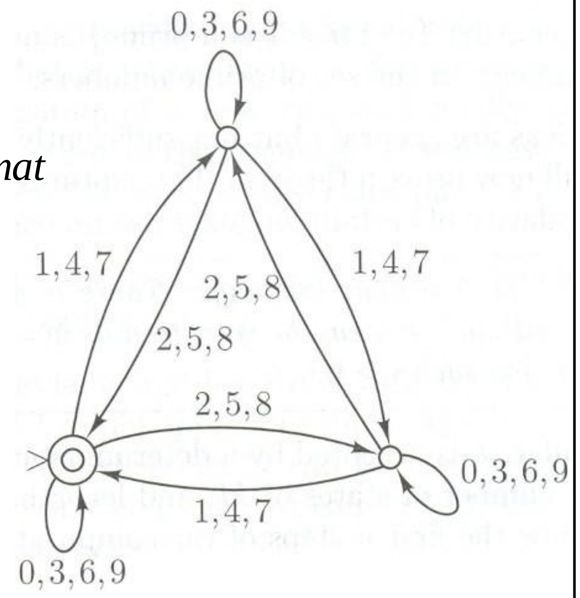


Regular and Non-regular Languages

Örnek: (devam)

- $\sum = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$, $L \subseteq \sum^*$, *2'ye veya 3'e bölünebilen ve önünde 0 olmayan pozitif sayılara sahiptir*

3) 3'e bölünebilen pozitif tamsayıların kümesi olan dili yandaki otomat tanır (regular)



4) L_3 bu otomat ile L_1'in kesişimidir. Sonuç olarak elde edilen dil regular dildir ve

$L = L_2 \cup L_3$, *şeklinde ifade edilir.*

Regular and Non-regular Languages

- Bir dilin düzenli dil olduğunu gösteren yöntemler vardır (ve öğrendik) ancak **düzenli olmadığını göstermek için özel araçlara ihtiyaç vardır.**

Regular and Non-regular Languages

- Bir dilin düzenli dil olduğunu gösteren yöntemler vardır ancak düzenli olmadığını göstermek için özel araçlara ihtiyaç vardır.
- **İki özellik** tüm düzenli dillerde bulunur, ancak düzenli olmayan dillerde bulunmaz;
  - Bir string soldan sağa doğru taranırken o string'in ilgili dile ait olup olmadığını belirlemek için gereken **toplam hafızanın bir sınırı vardır**, bu sınır sabittir ve ilgili string'e değil o dile bağlıdır.

    Örnek: $L = \{ a^n b^n : n \geq 0 \}$ dili regular değildir. b'leri okumaya başladığında kaç tane a okuduğu belli değildir ve n için bir sınır değer yoktur.

Regular and Non-regular Languages

- Bir dilin düzenli dil olduğunu gösteren yöntemler vardır ancak düzenli olmadığını göstermek için özel araçlara ihtiyaç vardır.
- **İki özellik** tüm düzenli dillerde bulunur, ancak düzenli olmayan dillerde bulunmaz;
  - Bir string soldan sağa doğru taranırken o string'in ilgili dile ait olup olmadığını belirlemek için gereken **toplam hafızanın bir sınırı vardır**, bu sınır sabittir ve ilgili string'e degil o dile baglıdır.

    Örnek: $L = \{ a^n b^n : n \geq 0 \}$ dili regular degildir. b'leri okumaya başladığında kaç tane a okuduğu belli değildir ve n için sınır değer yoktur.
  - Sonsuz sayıda string'e sahip olan düzenli diller, döngüye sahip **otomatlar** veya Kleene star içeren **regular expression'lar** tarafından gösterilebilir.

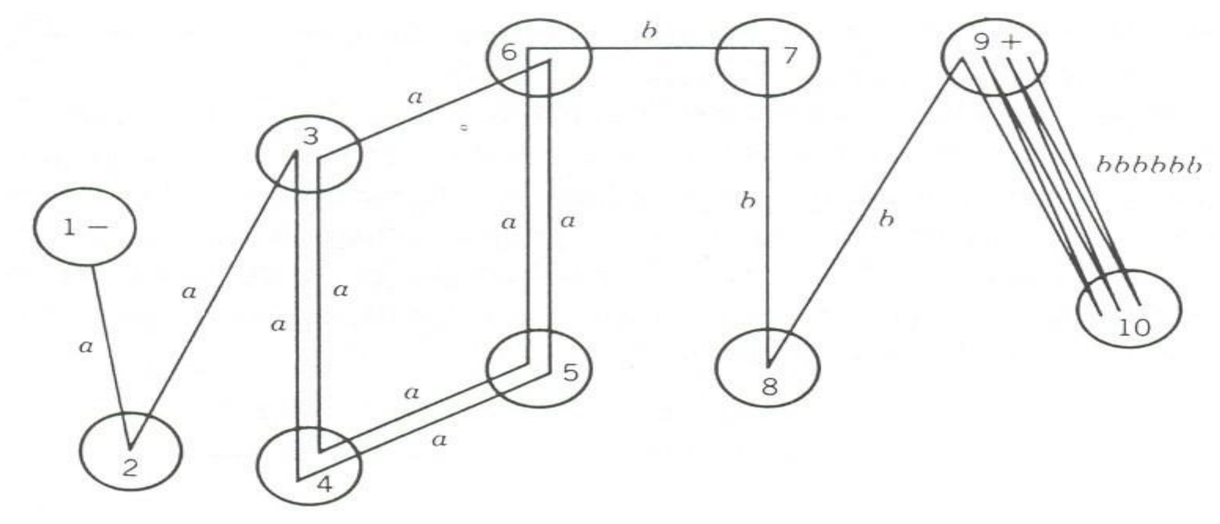
    Örnek: $L = \{ a^n : n \geq 1$ asal sayı$\}$ regular değildir. (ispatı daha sonra verilecektir.)

Regular and Non-regular Languages

- $\boldsymbol{L = \{ a^n b^n : n \geq 0 \}}$ şeklinde tanımlanmış olsun. Eğer bu dil regular ise bir sonlu otomat tarafından tanınır.
- $n = 96$ için $a^{96}b^{96}$ *olur*. Toplam 95 duruma sahip bir otomat bu dili tanıyor olsun.
- En az bir noktada yol daha önce geçtiği durumlara geri döner ve tekrar geçer.
- Bu tekrar geçişlere **loop** adı verilir.

Regular and Non-regular Languages

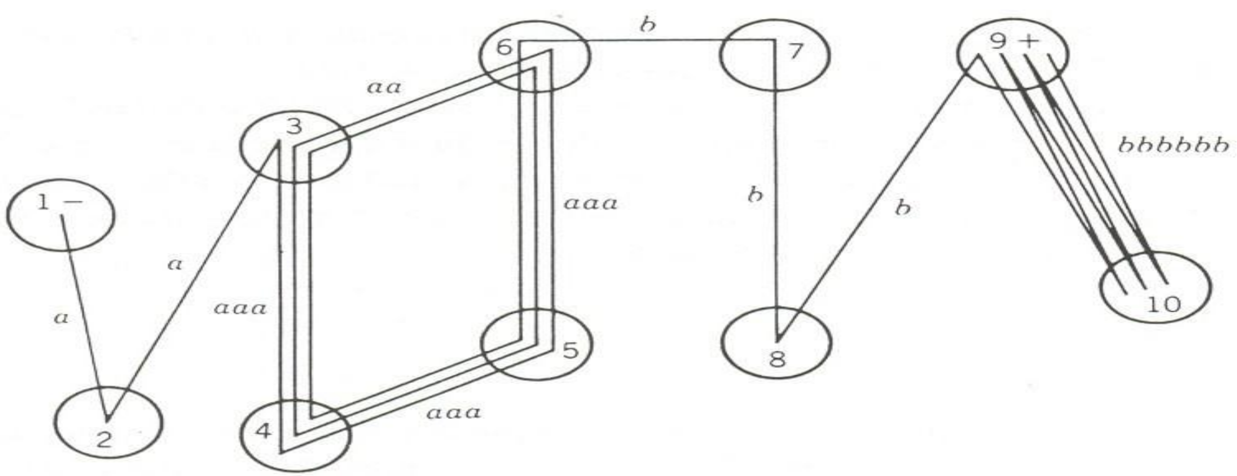
- $L = \{ a^n b^n : n \geq 0 \}$ şeklinde tanımlanmış olsun. Eğer bu dil regular ise bir sonlu otomat tarafından tanınır.
- $n = 96$ için $a^{96}b^{96}$ *olur*. Toplam 95 duruma sahip bir otomat bu dili tanıyor olsun.
- En az bir noktada yol daha önce geçtiği durumlara geri döner ve tekrar geçer.
- Bu tekrar geçişlere **loop** adı verilir.
- Aşağıdaki 10 durumlu otomat a^9b^9 için geçişleri vermektedir. Otomatta sadece geçilen yollar verilmiştir.



- $a^{13}b^9$ için nasıl bir yol izlenir ?

Regular and Non-regular Languages

- *$a^{13}b^{9}$ için 6-3-4-5 yolunda bir tur daha atılır.*
- *a^{9}**$(a^{4})^{m}$**b^{9} , $m \geq 0$ şeklinde tanımlanan tüm stringleri tanır. (Örn : $a^{25}b^{9}$)*
- *Bu şekilde bir string'in önündeki ve sonundakine bakmadan ortasına ekleme yapmaya **pumping** denilmektedir.*
- *string'in önündeki ve/veya sonundaki katar **boş olabilir**.*



Regular and Non-regular Languages

Teorem: Sonsuz sayıda string'e sahip bir regular L dilinde, kendisini tanıyan otomatın durum sayısından fazla sembole sahip tüm stringler için **x, y, z** şeklinde üç substring tanımlanabilir ve tüm stringler **xy^nz** olarak parçalarla ifade edilebilir. (n = 1, 2, 3, ...)

ispat: L dilinde sonsuz string olduğu için bazı w stringleri kendisini tanıyan otomatın durum sayısından daha fazla sembole sahiptir. Bu stringler için otomat üzerinde **loop** oluşur.

w string'leri x, y, z olarak üç kısımda incelenebilir;

1. x yeniden geçilen ilk duruma kadar olan sembolleri içersin. x eğer boş ise loop başlangıç durumunu da içine almıştır.
2. y string'i, x'den hemen sonra başlayıp loop'un sonuna kadar olan kısmı içersin. Bir loop oluştuğu için y boş olamaz.
3. z string'i loop'tan hemen sonra başlayıp w string'inin sonuna kadar olan kısmı içersin. z boş ise loop sonuç durumunu da içine almıştır.

Regular and Non-regular Languages

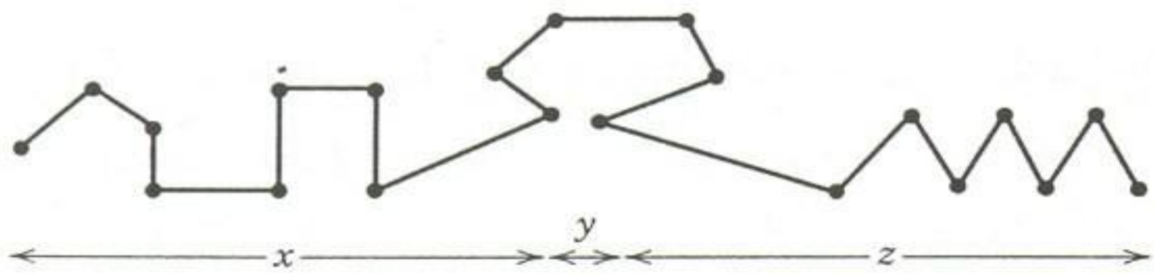
Teorem: (devam) *Sonsuz sayıda string'e sahip bir regular L dilindeki tüm stringler için*

x, y, z *şeklinde üç string tanımlanabilir ve*

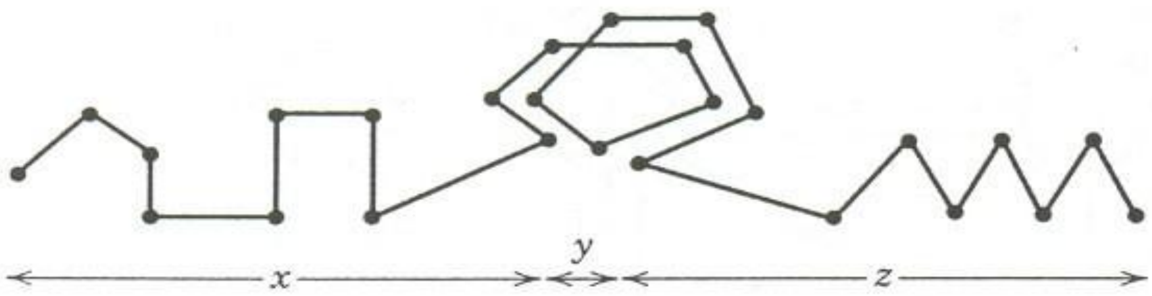
tüm stringler ***xy^nz*** *olarak parçalarla ifade edilebilir. (n = 1, 2, 3, ...)*

xyz, xyyz, xyyyz, ...xy^nz string'leri tanınır.

xyz



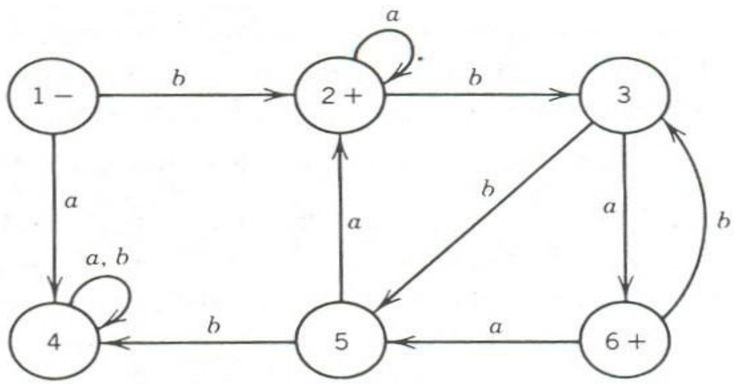
xyyz



Regular and Non-regular Languages

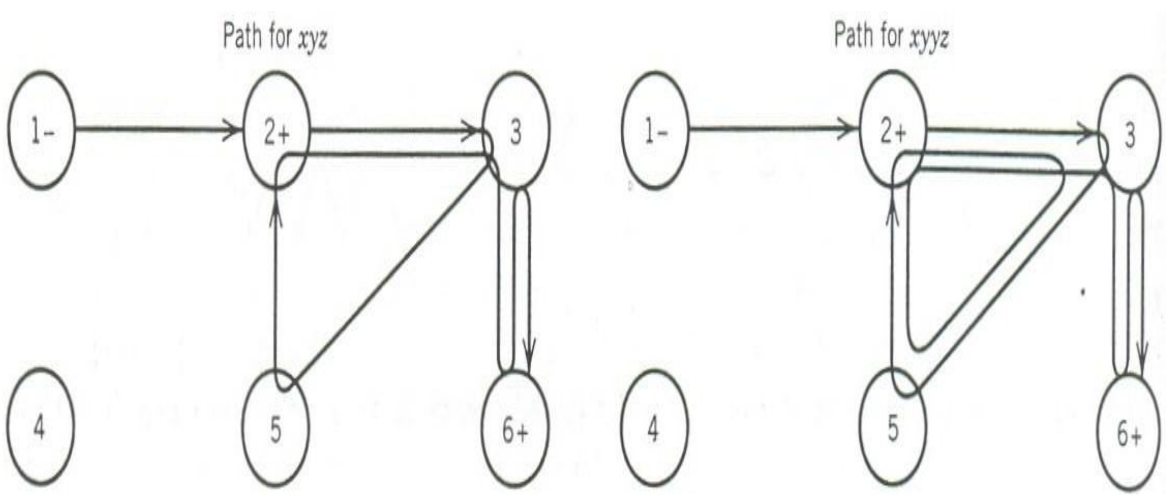
Örnek : Aşağıdaki otomatta "-" başlangıç ve "+" sonuç durumlarını göstermektedir ve

w = bbbababa string'ini tanır.



Durum sayısından fazla sembol oldugu için loop olmak zorundadır.

x = b, y = bba ve z = baba alınabilir.



Regular and Non-regular Languages

Örnek : *$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ dili regular değildir. Eger L regular olsaydı tüm string'ler x, y, z olarak üç parçaya ayrılabilirdi.*

Tipik bir string aaa.....aaaabbbb......bbb şeklindedir.

- *Eger y, a'ları içerirse xyyz şeklindeki string daha fazla a içerir ve elde edilen string L diline ait değildir.*
- *Eger y, b'leri içerirse xyyz şeklindeki string daha fazla b içerir ve elde edilen string L diline ait değildir.*
- *Eger y, ortadaki a ve b'leri içerirse xyyz string'i iki tane "ab" substringine sahiptir. L dilindeki tüm stringler sadece bir tane "ab" substringine sahip olabileceği için bu string L diline ait değildir.*

Bunların sonucu olarak L dili regular değildir.

Pumping Lemma

Teorem: ***L*** *regular dil olsun. Dile bağlı olarak seçilen bir*

$n \geq 1$ *için* $|w| \geq n$ *olacak şekilde bir* $w \in L$ *string'i vardır ve*

$w = xyz,$

$y \neq e,$

$|xy| \leq n$

olmak üzere *yeniden yazılabilir.* ***Her*** $i \geq 0$ *için* $xy^{i}z \in L$ *olur.*

İspat: ***L*** *regular dil olduğundan deterministic finite automata* ***M*** *tarafından kabul edilir.* ***M*** *automata'nın* ***n*** *duruma sahip olduğunu varsayalım ve*

$|w| = m,\ m \geq n$ *olsun.*

M *automata'nın ilk* ***m*** *adımı aşağıdaki gibidir;*

$(q_0, w_1w_2 \ldots w_m) \vdash_M (q_1, w_2 \ldots w_m) \vdash_M \ldots \vdash_M (q_m, e)$

Pumping Lemma

i*spat: (devam)*

$(q_0, w_1w_2...w_m) \vdash_M (q_1, w_2...w_m) \vdash_M ... \vdash_M (q_m, e)$

- *Burada* q_0 *başlangıç durumu ve* $w_1w_2...w_m$ *ilk m semboldür*
- M, n *adet duruma sahiptir ancak* $m \geq n$ *adet konfigürasyon vardır.*
- *Pigeonhole prensibine göre* $0 \leq i < j \leq m$ *olacak şekilde* i *ve* j *sayıları vardır ve* $q_i = q_j$ *olur.*
- $y = w_i w_{i+1} ... w_j$ *vardır ve* q_i *durumundan tekrar* q_i *durumuna geçiş yapar.*
- $i < j$ *oldugu için* y *boş olamaz.*
- y *string'i* w*'dan atılarak veya istendigi kadar tekrar edilerek bulunan stringler'de* M *tarafından tanınır.*
- $i \geq 0$ *olmak üzere* $xy^iz \in L$ *olur.*

Pumping Lemma

- Bir dilin regular olup olmadığını belirlemek icin kullanılır.
  - Öncelikle bir *n* sayısı belirlenir. (dili tanıyan ve en az duruma sahip otomat)
  - *n*'den uzun bir *w* string'i belirlenir.
  - *w* string'i *xyz* şeklinde parçalanır.
  - her $i \geq 0$ degeri için $xy^iz \in L$ olacak şekilde bir xy^iz bulunuyorsa L regulardır..
  - Eger bu şekilde bir değer hiçbir xy^iz için bulunamıyorsa *L* regular değildir.

Pumping Lemma

Örnek: (tekrar) $L = \{ a^i b^i : i \geq 0 \}$ *dili regular degildir.*

ispat:

- $w = a^n b^n \in L$ *olduğunu varsayalım.*
- *Pumping teoreminden* $w = xyz$ *yazılabilir.*
- $|xy| \leq n$ *alınırsa ve* $y \neq e$, $y = a^i$, $i > 0$ *değerleri için,*
- y*'nin çıkarıldığı string olan* $xz = a^{n-i} b^n$ *olur ve* L *diline ait değildir.*
- *Bu sonuç* $y = b^i$, $i > 0$ *için de aynı şekilde geçerlidir.*
- *Böylece bu dil regular değildir.*

Pumping Lemma

Örnek: $L = \{ a^k : k \text{ asal sayı} \}$ *dili regular degildir.*

ispat:

- *Pumping teoreminden* $w = xyz$ *yazılabilir.*
- $p, r \geq 0, q > 0$ *için* $x = a^p$, $y = a^q$, *ve* $z = a^r$ *olsun.*
- *Teoremden* $xy^nz \in L$ *olduğundan* $n \geq 0$ *için* $p + nq + r$ *asal sayı olmak zorundadır. (her* **n** *sayısı için sağlanmalıdır!)*
- ***Özel olarak*** $n = p + 2q + r + 2$ *için* $p + nq + r = (q + 1)(p + 2q + r)$ *olur.*
- *Burada iki çarpan da 1'den büyüktür ve böylece* $p + nq + r$ *asal sayı olamaz!*
- $n = p + 2q + r + 2$ *için elde edilen string* **L** *diline ait değildir.*
- *Öyle ise L dili regular değildir.*

Pumping Lemma

Örnek: ***L = { w ∈ a, b}**** * ***: w eşit sayıda a ve b'ye sahiptir }*** *dili regular değildir.*

ispat:

- *Bu ispat closure özelliği ile yapılabilir.*
- *Eger* ***L*** *dili regular ise, regular bir dil ile kesişim işlemi kapalı olur.*
- *Ancak* $\boldsymbol{L \cap a^*b^*}$ *kesişiminin sonucunda elde edilen dil*

  $\boldsymbol{\{a^n b^n : n \geq 0\}}$ *olur.*
- $\boldsymbol{\{a^n b^n : n \geq 0\}}$ *regular dil olmadığı için* ***L*** *dili de regular değildir.*

*Örnek: L = {**ab**, abba, **aabb**, abab, **aaabbb**,...},*

$L(a^*b^*) = \{a, b, aa, \mathbf{ab}, aab, bb, \mathbf{aabb}, abbbb, \mathbf{aaabbb}, \ldots\}$

$L \cap a^*b^* = \{\mathbf{ab, aabb, aaabbb, \ldots}\}$