CENG 481 GRAF TEORİ VE UYGULAMALARI
Hafta 3

Prof. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

Hafta 3
Konular

1- Graf Parametreleri

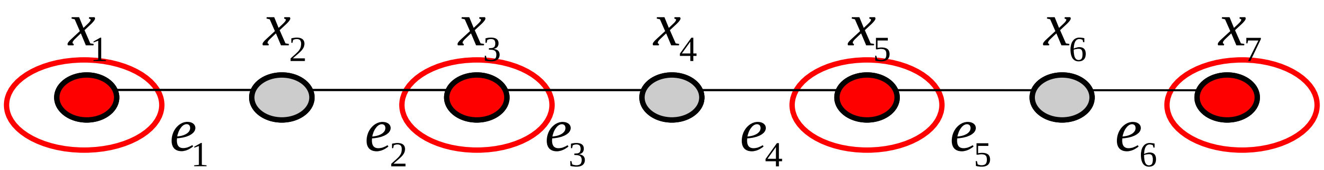
iii-) Baskınlık Sayısı ve Algoritması

2- İzomorfik graflar

3- Birleştirilmiş graf ve Ağaç graf tanımları ve önemli teoremler

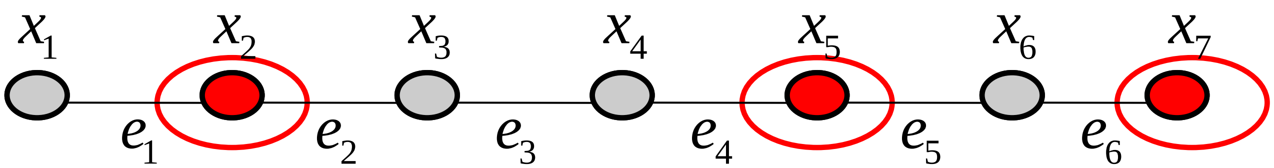
Baskınlık Sayısı: $S \subseteq V(G)$, bir G grafının tepeler kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. G grafının her bir tepesi; S ye ait veya S nin bir tepesine bitişik ise bu S kümesine bir baskın küme denir. Baskın kümeler arasında en az elemana sahip kümenin eleman sayısına baskınlık sayısı denir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir.

Örnek 4.1: P_7 grafının baskınlık sayısını bulalım.



$$S_1 = \{x_1, x_3, x_5, x_7\}$$

Benzer şekilde başka bir baskın küme,



$$S_2 = \{x_2, x_4, x_6\}$$

S_1 ve S_2 baskın kümelerdir. P_7 grafının baskınlık sayısı $\gamma(P_7) = 3$ dür.

Baskın küme problemi,

- Hiyerarşi problemlerinin çözümünde
- Dağıtım Problemlerimin çözümünde

Problem 4.1: Şekil 4.1’ de gösterilen bir bölgeye posta hizmeti verilmek isteniyor. Bir postacı sadece bir bölgeye değil, o bölgeye bitişik olan bölgeye de hizmet veriyor. **En az** kaç postacı ile posta dağıtım işini gerçekleştirebiliriz?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Şekil 4.1

Örneğin,

1 bölgesine gelen bir postacı, aynı zamanda 1 bölgesinin yatay ve düşey komşusu olan 2 ve 5 bölgelerine de hizmet vermektedir.

7 bölgesine gelen bir postacı, aynı zamanda 7 bölgesinin yatay ve düşey komşuları olan 3,6,8 ve 11 bölgelerine de hizmet vermektedir.

Problemin Matematiksel Modeli

$$x_j = \begin{cases} 1, & j.ci\ bölgeye\ postacı\ konursa \\ 0, & j.ci\ bölgeye\ postacı\ konmazsa \end{cases}$$

1 bölgesi için, $x_1 + x_2 + x_5 \geq 1$

2 bölgesi için, $x_1 + x_2 + x_3 + x_6 \geq 1$

3 bölgesi için, $x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 1$

4 bölgesi için, $x_3 + x_4 + x_8 \geq 1$

5 bölgesi için, $x_1 + x_5 + x_6 + x_9 \geq 1$

6 bölgesi için, $x_2 + x_5 + x_6 + x_7 + x_{10} \geq 1$

7 bölgesi için, $x_3 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{11} \geq 1$

8 bölgesi için, $x_4 + x_7 + x_8 + x_{12} \geq 1$

9 bölgesi için, $x_5 + x_9 + x_{10} + x_{13} \geq 1$

10 bölgesi için, $x_6 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{14} \geq 1$

11 bölgesi için, $x_7 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{15} \geq 1$

12 bölgesi için, $x_8 + x_{11} + x_{12} + x_{16} \geq 1$

13 bölgesi için, $x_9 + x_{13} + x_{14} \geq 1$

14 bölgesi için, $x_{10} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 1$

15 bölgesi için, $x_{11} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \geq 1$

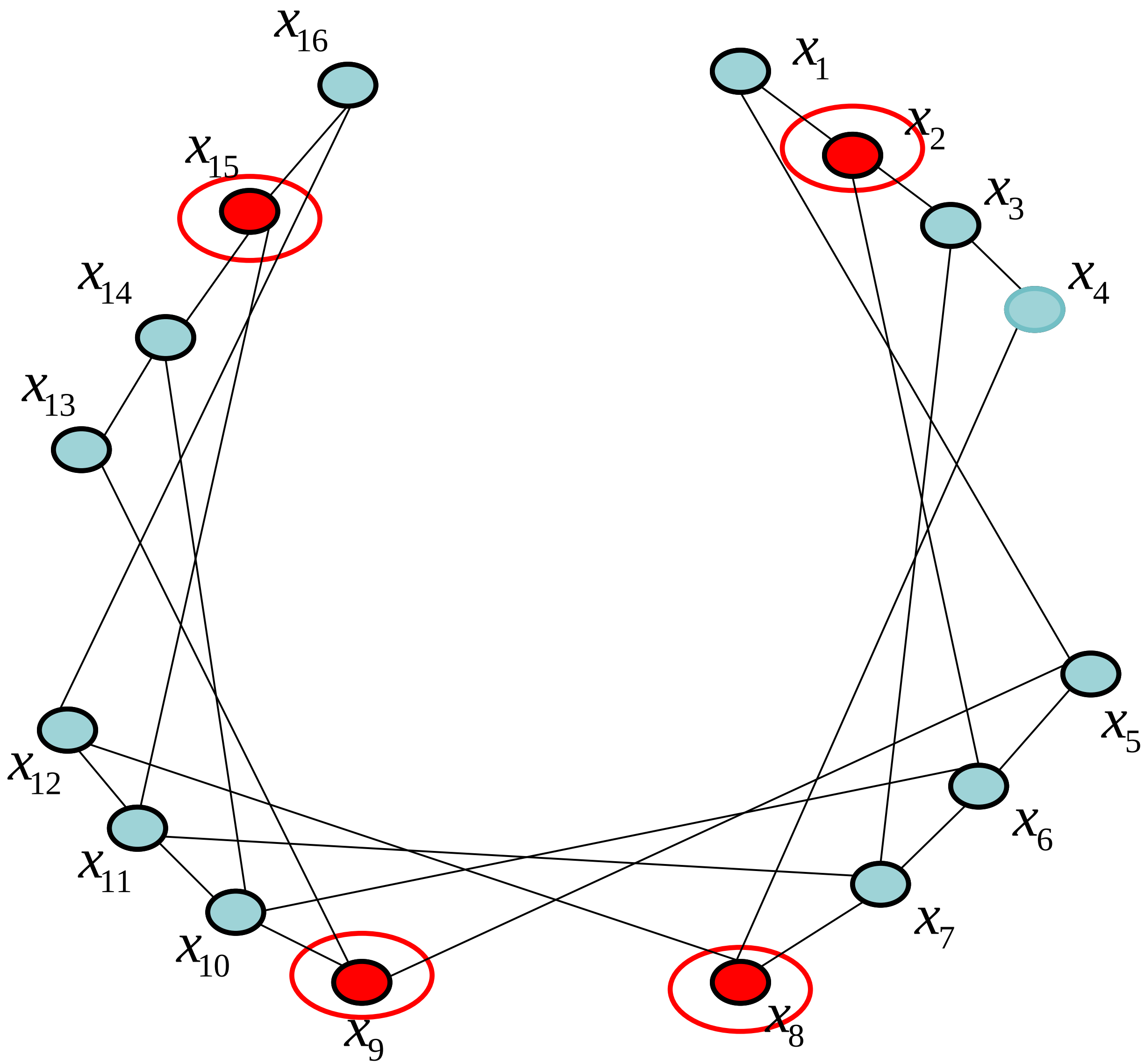
16 bölgesi için, $x_{12} + x_{15} + x_{16} \geq 1$

k.a., $Z_{\min} = \sum_{j=1}^{16} x_j$

Problem,

- Simplex yöntemle çözülebilir.
- Bilinmeyen veya kısıt sayı artığında çözüm zorlaşır.
- Problemin graf modeli kurulur.
- Grafın baskınlık sayısı bulunur.

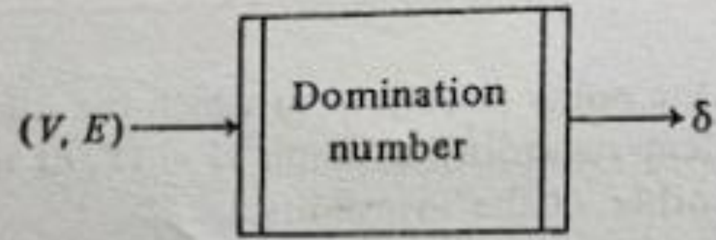
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16



G grafı

$$S = \{x_2, x_8, x_9, x_{15}\} \Rightarrow \gamma(G) = 4$$

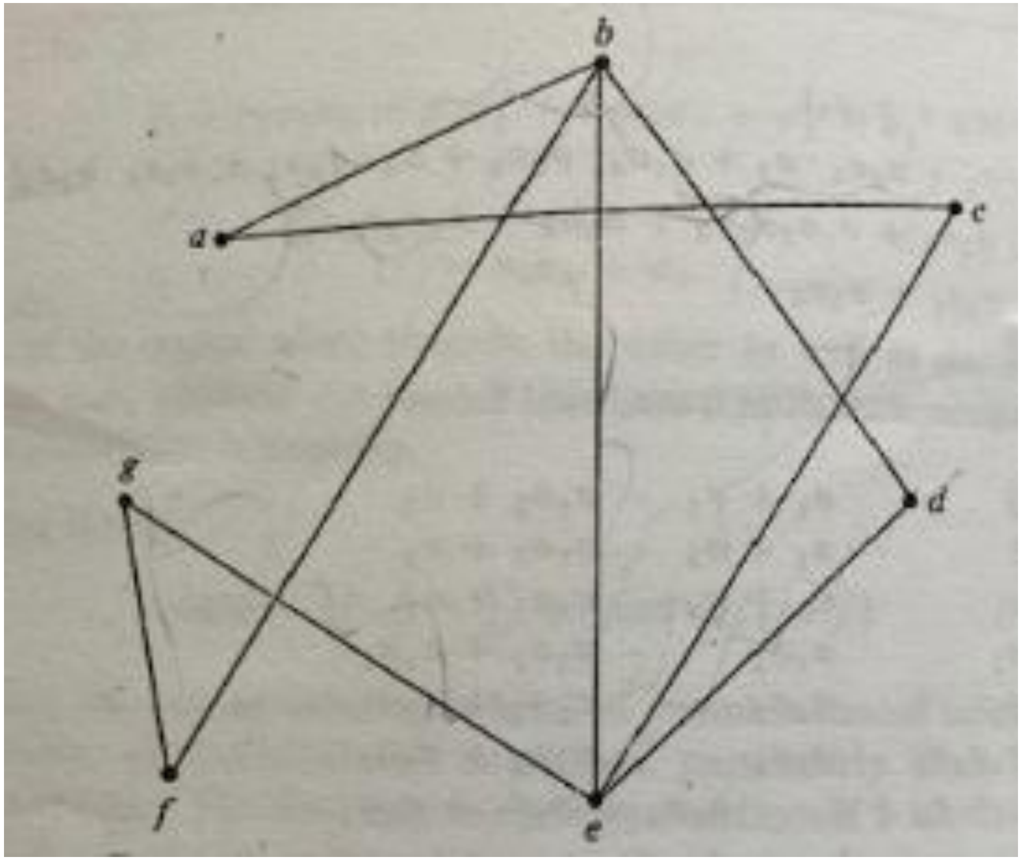
Baskınlık Sayısı bulmak için bir algoritma



i, j: element of n^+
δ: nonnegative integer
f: element of $L(n)$
g: array n^+ of $L(n)$

```
begin for j ← 1 to n do
        begin g[j] ← 0;
                for i ← 1 to n do
                if v_i E v_j then
                        g[j] ← g[j] + v_i
        end;
        f ← 1;
        for j ← 1 to n do
                f ← f · g[j];
        δ ← min {|x|}
           x in f
end
```

Örnek:



Şekilde verilen grafın baskın kümelerini ve baskınlık sayısını bulunuz.

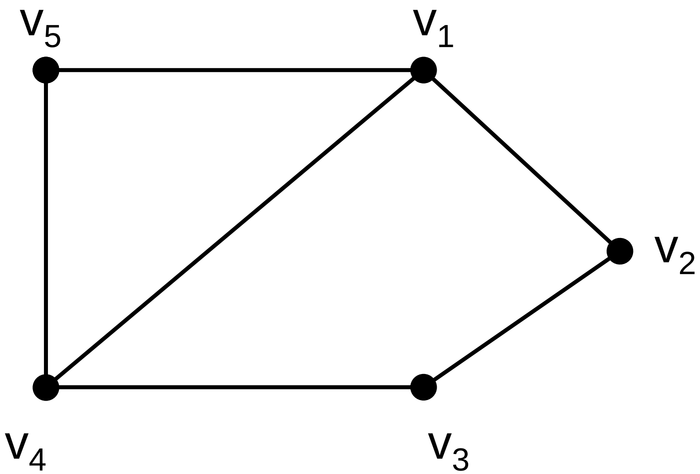
$$
\begin{aligned}
f &= (a+b+c)(a+b+d+e+f)(a+c+e)(b+d+e)\\
&\qquad (b+c+d+e+g)(b+f+g)(e+f+g)\\
&= (a+b+cd+ce+cf)(a+c+e)\cdots\\
&= (a+bc+cd+ce+cf+be)(b+d+e)\cdots\\
&= (ab+bc+be+ad+cd+ae+ce)(b+c+d+e+g)\cdots\\
&= (ab+bc+be+ad+cd+ae+ce)(b+f+g)\cdots\\
&= (ab+bc+be+adf+cdf+aef+cef+adg+cdg\\
&\qquad +aeg+ceg)(e+f+g)\\
&= be+aef+cef+aeg+ceg+abf+bcf+adf+cdf\\
&\qquad +abg+bcg+adg+cdg
\end{aligned}
$$

Accordingly, $\delta = 2$ because $\{b, e\}$ is a smallest dominating set.

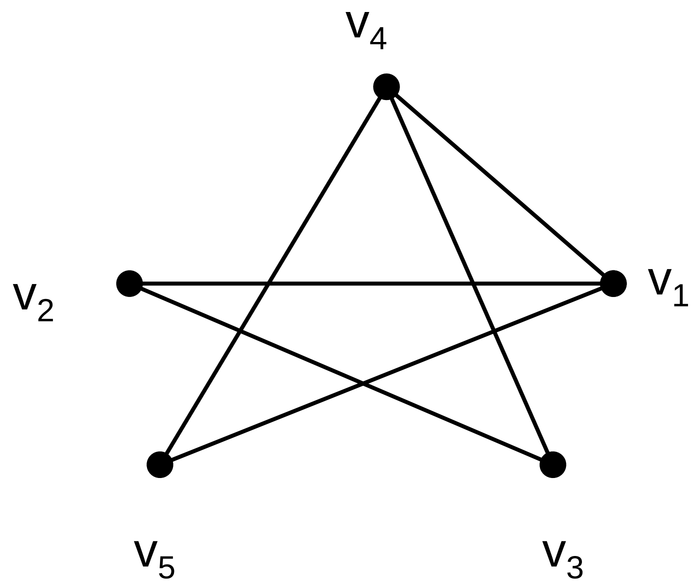
Böylece baskınlık sayısı 2 bulunur.

Önemli grafların baskınlık sayıları nedir?

İzomorfik Graflar:



G_1



G_2

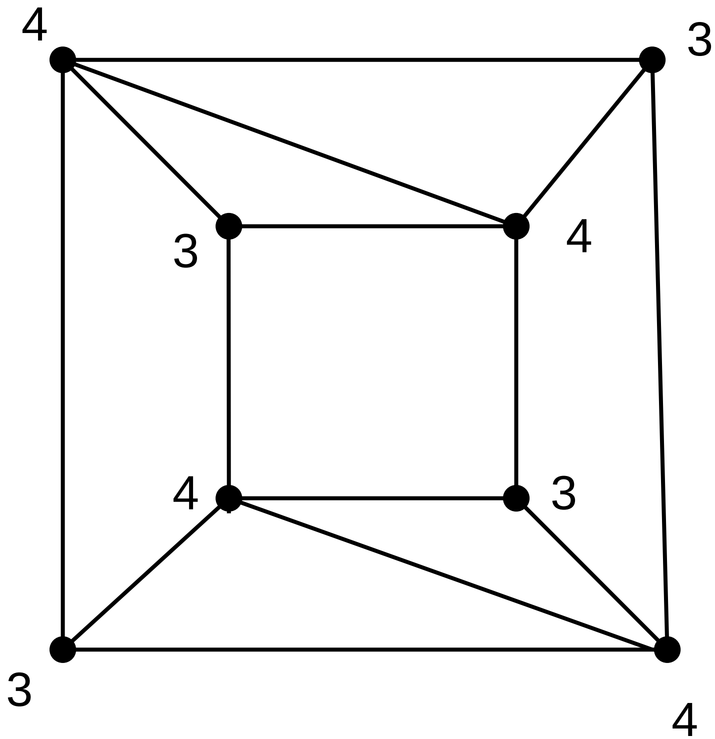
G_1 ve G_2 , p tepeli bir graf olsun. Her iki grafın tepeleri 1 den p ye kadar isimlendirilir. G_1 deki i tepesinden j. ye gidiş olduğu her zaman G_2 deki i tepesi j ye bitişik ise G_1 ve G_2 graflarına izomorf graflar denir.

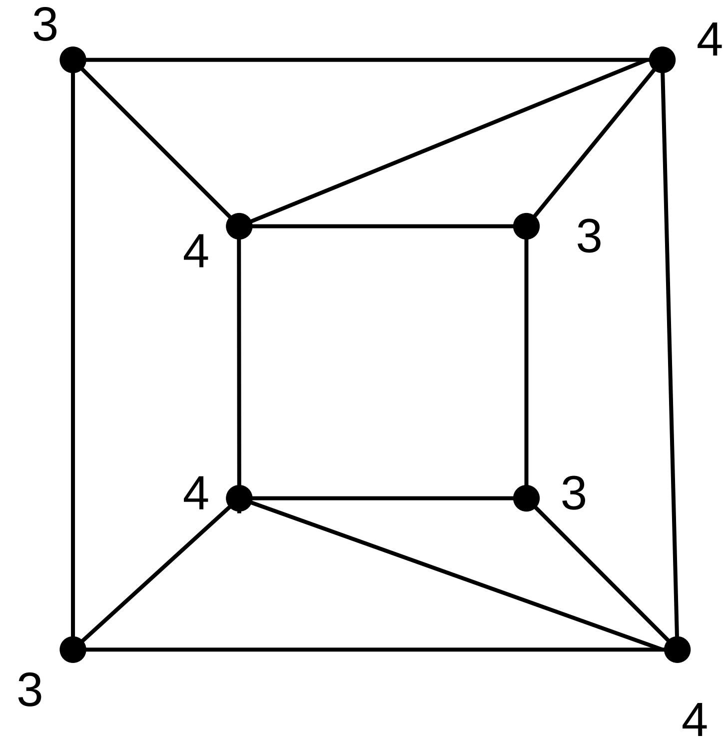
izomorfizma

(A, *) ve (A,$\circ$) iki cebirsel yapı ve f:A$\rightarrow$B bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall$a, b$\in$A için f(a*b)=f(a)$\circ$f(b) ise f ye * ve $\circ$ işlemlerine göre A dan B ye bir homomorfizma veya yapı koruyan fonk. denir.f homomorfizması örten ve 1-1 ise bu taktirde f ye izomorfizma (eş yapı fonk.nu) denir.

1-1 ve örten fonksiyon

- Tanım= $f:A \rightarrow B$ bir fonksiyon ve f altında A nın görüntüler kümesi $f(A)=B$ ise f ye örten fonksiyon denir.
- Tanım= $f:A \rightarrow B$ bir fonksiyon. $\forall a, b \in A$ için $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ ise f ye 1-1 fonksiyon denir.





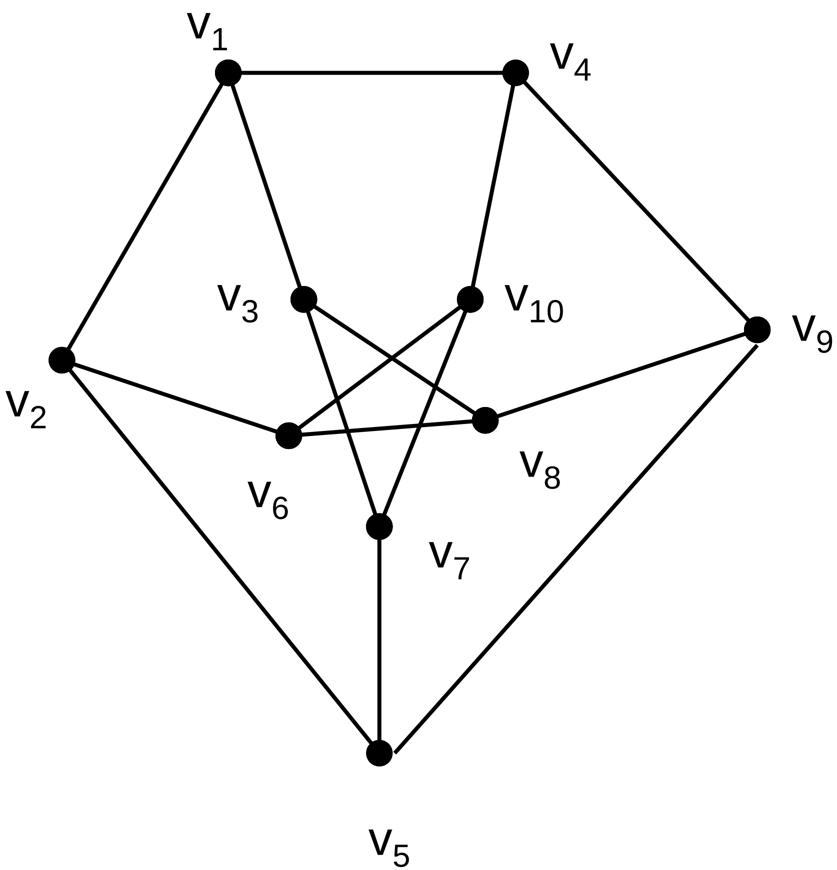
4,4,4,4,3,3,3,3

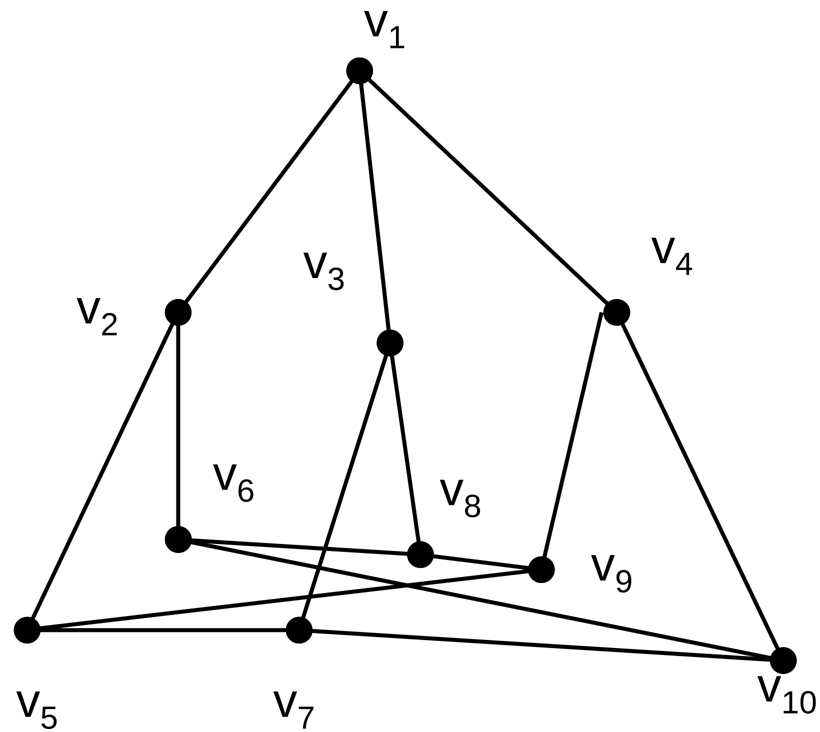
4,4,4,4,3,3,3,3

4 dereceli her bir tepe 4 dereceli bir tek tepe ile birleştirilmiştir.

4 dereceli her bir tepe 4 dereceli 2 tepe ile birleştirilmiştir.

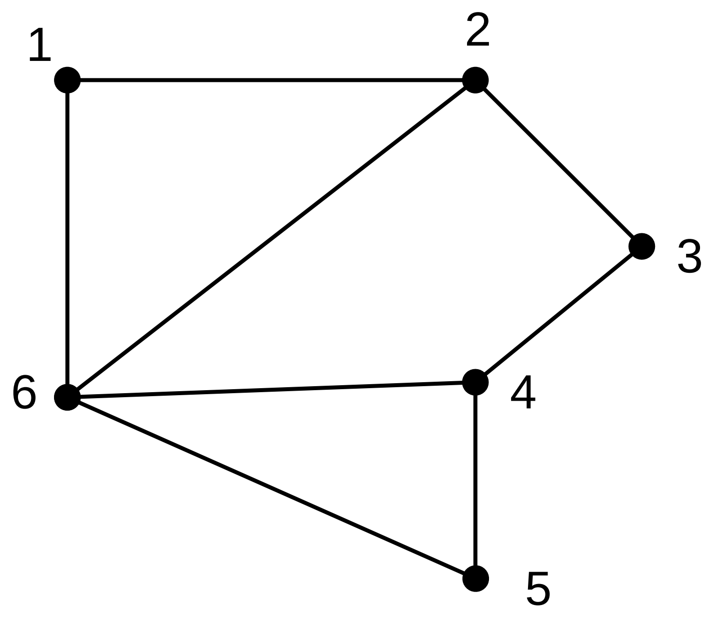
$\Rightarrow$ İzomorf değildirler.



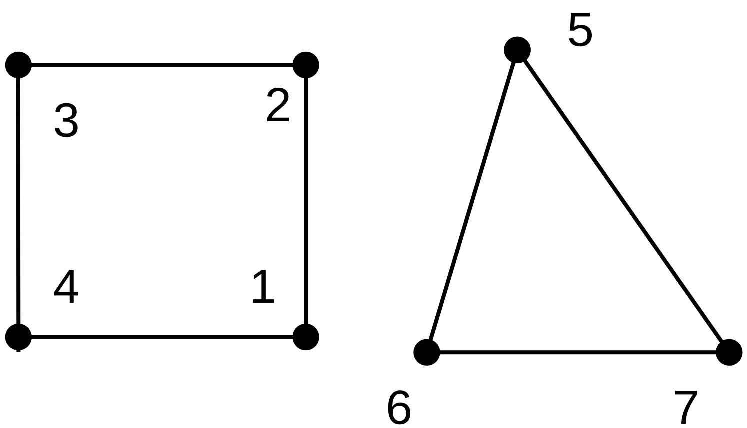


Petersen Graf

Birleştirilmiş Graf: Bir G grafında herhangi iki tepe arasında en az bir tane yol varsa (grafın herhangi bir tepesinden diğer tüm tepelere gidilebiliyorsa) bu grafa birleştirilmiş graf denir.



Birleştirilmiş Graf



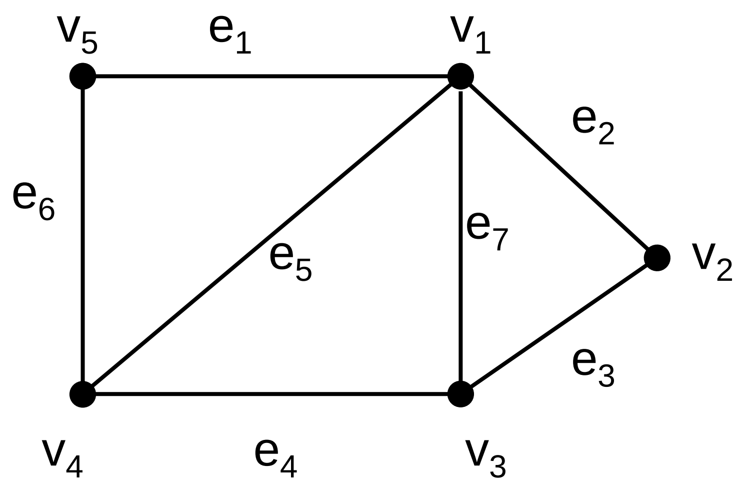
Birleştirilmemiş Graf

Birleştirilmemiş bir graftaki her bir parçaya grafın bileşeni adı verilir(component).

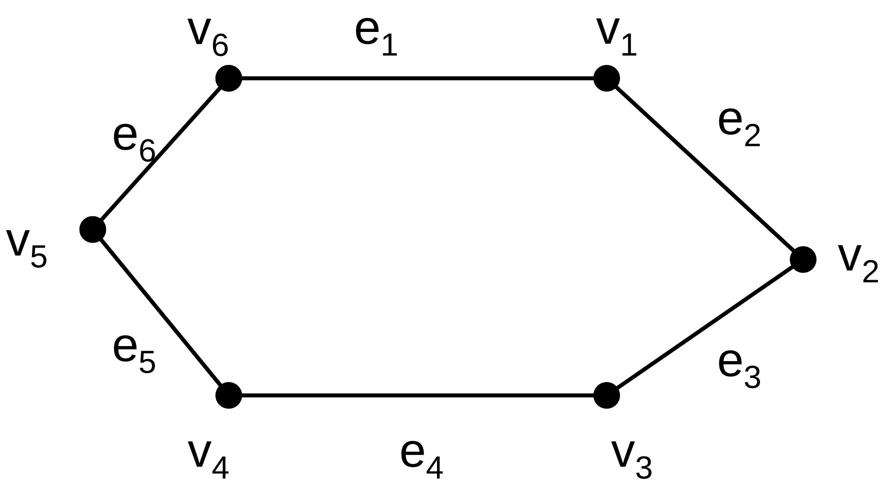
Teorem: G, p tepeli ve q ayrıtlı birleştirilmiş bir graf ise daima $p \leq q+1$ dir.

Teorem: G, p-tepeli ve q- ayrıtlı birleştirilmiş bir graf ise daima $p \leq q+1$

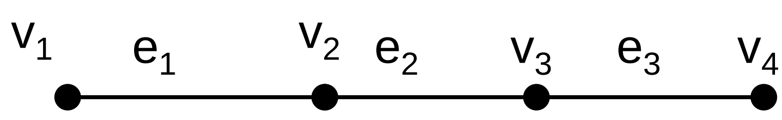
Örnek:



$5 \leq 7+1$

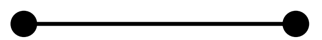


$6 \leq 6+1$

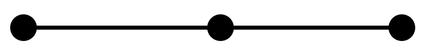


$4 \leq 3+1$

Kanıt: G, nın ayrıtlarının sayısı üzerinde tümevarım ile bulunur.G grafı 1 yada 2 ayrıta sahip ise teorem doğrudur.

$q=1 \Rightarrow$  $\Rightarrow 2 \leq 1+1$

G

$q=2 \Rightarrow$  $\Rightarrow 3 \leq 2+1$

G

Kabul edelim ki n den daha az ayrıt için q<n için teorem doğru olsun. q=n için de doğruluğunu gösterelim. G nin çevre içerip içermemesine bağlı olarak yapalım.

Durum1: G grafı çevre içeriyor ise çevrenin bir ayrıtını kaldıralım ve yeni grafa P adını verelim. Geriye kalan P grafı hala birleştirilmiş olup, n-1 tane ayrıta sahiptir. P grafının tepe sayısı ise p dir. Böylece tümevarım hipotezinden

$p \leq (n-1)+1$

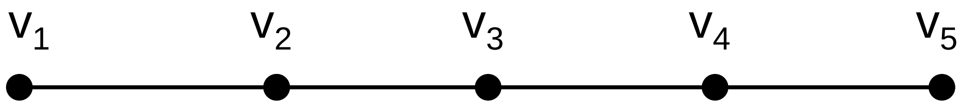
$p \leq n \qquad \Rightarrow p \leq n+1$

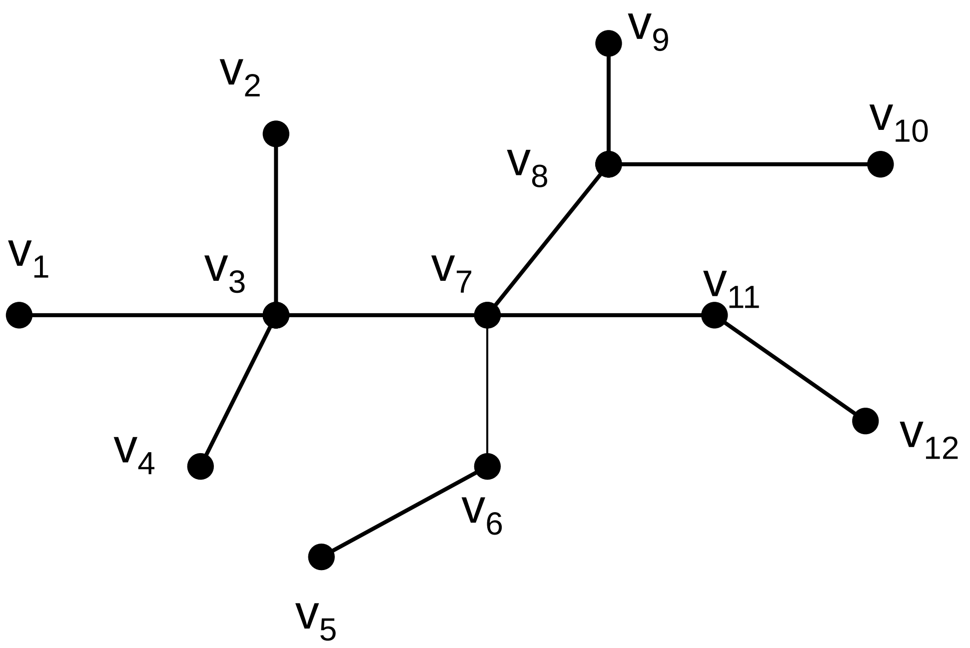
Birleştirilmiş graf

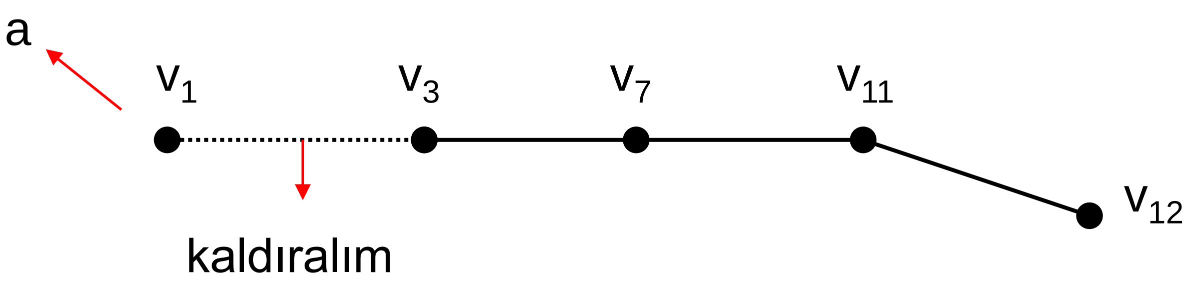
- çevre içeren
- çevre içermeyen

Bir çevre üzerinden ayrıt kaldırılır.

Durum2: G grafı bir çevre içermiyor ise graftaki en uzun yolu düşünelim. Bu yolun uç noktalarından birisi a olsun







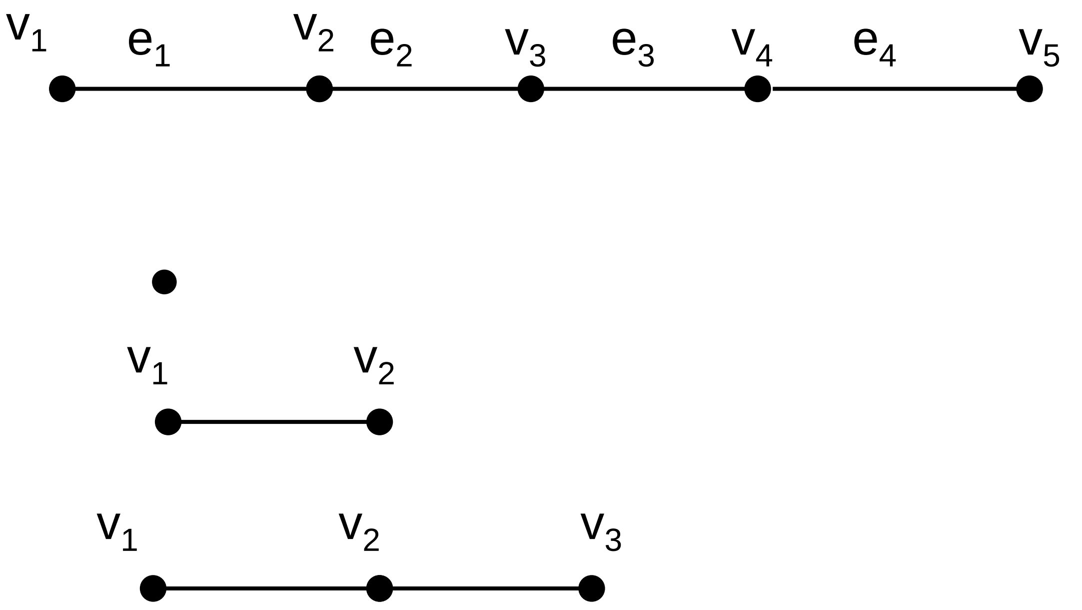
- Bu yolda a tepesini silelim. Kalan grafın tepe sayısı p-1ve ayırt sayısı ise n-1 olur. Tümevarım hipotezinden

  $p-1 \leq (n-1)+1$

  $p \leq n+1$

İspat biter.

Tanım(Ağaç): Hiçbir alt grafı bir çevreye veya bir çevre grafa izomorfik olmayan birleştirilmiş bir grafa ağaç denir. (Çevre içermeyen her bir grafa ağaç denir)



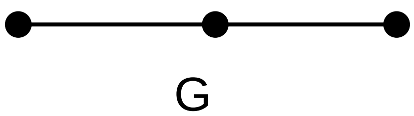
Teorem 1: G, p tepeli q-ayrıtlı bir ağaç ise $p=q+1$

Kanıt: Ayrıtlar üzerinden tümevarım ile yaparız. Kanıt önceki teoremin durum2 sine benzer şekilde yapılır.

$q=1 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 2= 1+1$

$q=2 \quad \Rightarrow$



$\Rightarrow \quad 3= 2+1$

Kabul edelim ki $q<n$ doğru olsun.

.

.

.

Bu şekilde devam eder ispat.

Teorem: G grafı birleştirilmiş ve $p=q+1$ ise G bir ağaçtır.

Kanıt: Olmayana ergi yöntemiyle G bir ağaç graf olmasın. Bu durumda G en az bir tane çevre içerir. Bu çevreden herhangi bir ayrıtı silelim. Elde edilen yeni graf p tepeli ve q-1 ayrıtlı birleştirilmiş bir grafdır. Birinci teoremden dolayı $p \leq q-1+1$ yazabiliriz.

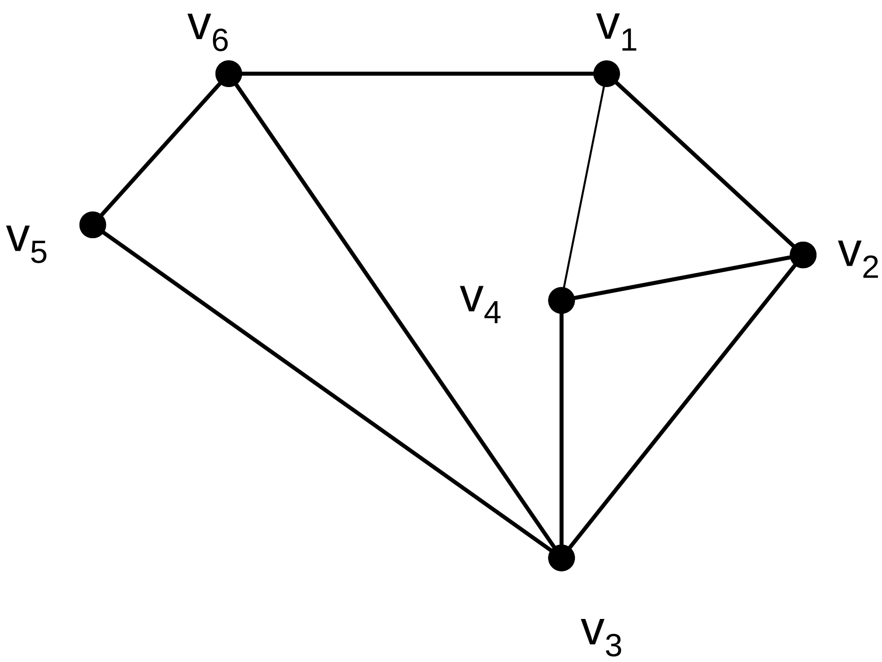
$\Rightarrow$ $p \leq q$ çelişkidir, $p=q+1$ ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır.

Tanım (ortalama derece): Birleştirilmiş bir G grafında tepe dereceleri $d_1, d_2, \ldots, d_p$ ise

$$\frac{d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_p}{p}$$

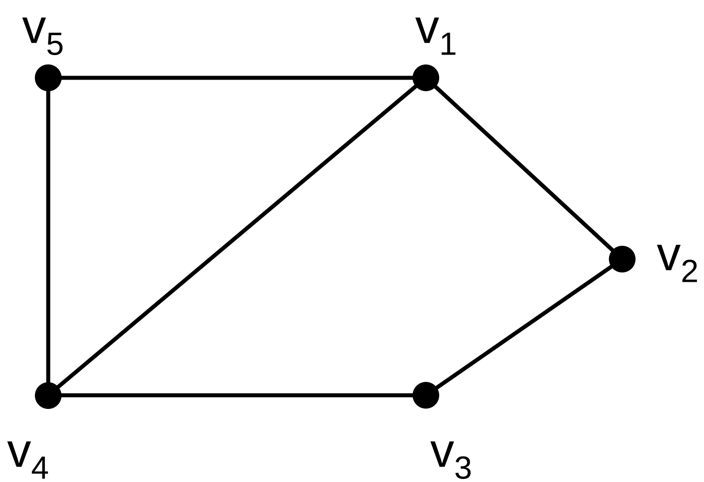
,grafın ortalama derecesi olarak adlandırılır.

Soru: Birleştirilmiş bir G grafının ortalama dereceleri 2'den büyük ise bu grafın en az 2 tane çevreye sahip olduğunu gösteriniz

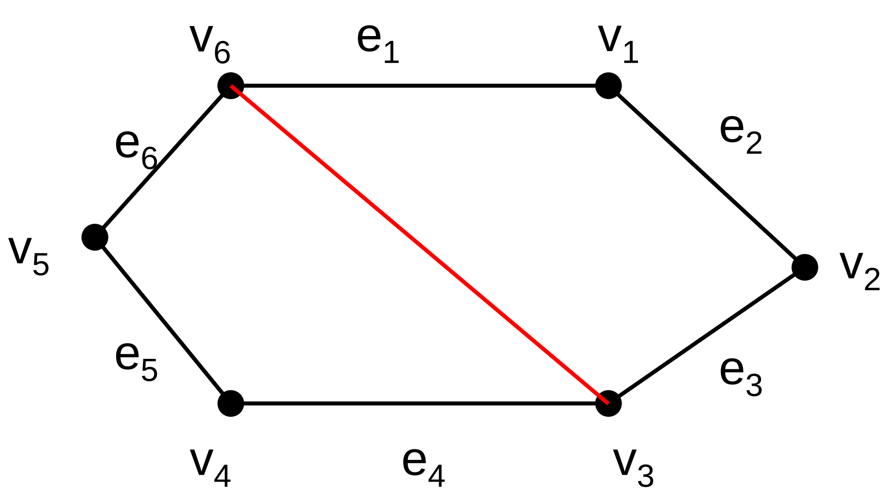


$$\frac{3+3+3+3+4+2}{6} = \frac{18}{6} = 3 > 2$$

Örnek:



$$\frac{12}{5} > 2$$



2 yol var

3 yol olur

Ne kadar çok çevre varsa, o kadar iyi bir graf, o kadar iyi bir modeldir diyebiliriz.

Hipotezden $\dfrac{d_1+d_2+d_3+...+d_p}{p} > 2$

$\Rightarrow$ 2q/p>2 ya da 2p<2q ya da p < q

böylece Teorem 1 den G grafı bir ağaç değildir deriz. Ve buradan G nin en az bir çevreye sahip olduğunu söyleriz. G den çevrenin bir ayrını çıkarırsak geriye birleştirilmiş bir H grafı elde ederiz. H grafının tepe sayısı p` ile ayrıt sayısı q` ile gösterilirse p`=p ve q`=q-1 olur.

(Bir çevreye sahipse ve 1 ayrıtı silinirse ağaç olur.)

$$p<q \quad \Rightarrow \quad p` < q` +1$$

$$p` \leq q`$$

$p` \leq q`$ve Teorem 1 den dolayı H grafı bir ağaç değildir. Böylece H grafı bir çevre içerir. H grafını elde etmek için bir ayrıtı çıkararak G grafındaki bir çevreyi yok ettiğimiz için G grafı en az 2 çevre içermek zorundadır.

Soru: Birleştirilmiş bir G grafında ortalama derece 2'den daha küçük ise G grafının çevre sayısı hakkında ne söyleyebilirsiniz?

Soru: Birleştirilmiş G grafı ortalama derecesi 2 ye eşit ise G grafının çevre sayısı hakkında ne söyleyebilirsiniz?

Soru: G grafı bir ağaç graf ise ve G deki tüm tepelerin dereceleri tek ise G deki ayrıtların sayısının da tek olduğunu gösteriniz.

KAYNAKLAR

[1] Chartrand, G.-Lesniak, L., (1986) : *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, California

[2] West D.B. (2001) : *Introduction to Graph Theory*, *Prentice Hall*, USA.

[3] Graf Teoriye Giriş, Şerife Büyükköse ve Gülistan Kaya Gök, Nobel Yayıncılık

[4] Discrete Mathematical Structures for Computer Science, Ronald E. Prather, Houghton Mifflin Company, (1976).

[5] Christofides, N., 1986. Graph Theory an Algorithmic Approach, Academic Press, London

[6] Algoritmalar (Teoriden Uygulamalara), Vasif V. NABİYEV, Seçkin Yayıncılık