CENG 481 GRAF TEORİ VE UYGULAMALARI
Hafta 1

Prof. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

GRAF TEORİ VE UYGULAMALARI

HAFTALIK KONU DAĞILIMLARI

Hafta 1: Graf kavramı ve Graf Teorinin Önemi

Hafta 2: Grafların oluşturulması. Havel Hakimi Teoremi. Tümleyen graf, Düzenli Graflar. Yıldız Graflar. İki Parçalı (Tam) Graflar. Etkilenmiş Alt Graf. İzomorfik Graflar.

Hafta 3: Graflarda Birleştirilmişlik Kavramı ve bazı Teoremler. Graf İşlemleri (Birleşim, Toplama ve Çarpım). Ağaç tanımı ve bazı Teoremler. Grafların Ortalama Derecesi. Dallanmış alt graf.

Hafta 4: Graflarda boyama işlemi. Tepe boyama. Ayrıt Boyama. Boyamayla ilgili bazı teoremler. Bazı problemlerin boyama yardımıyla çözülmesi.

Hafta 5: Graflarda büzülme işlemi. Kromatik polinomlar. Büzülme yardımıyla kromotik polinamların bulunması. Dallanmış ağaçların sayısını bulma.

Hafta 6: Grafların bilgisayarlarda gösteri şekilleri. Grafların tepe tepe ve tepe ayrıt bağlantı matrisleri. Bu matrislerin rankları ve matrislerin bazı özellikleri.

Hafta 7: Graflarda kesim küme. Kesim Küme Matrisi. Temel kesim küme ve matrisi.

Hafta 8: Eşlemeler. En büyük eşleme. Mükemmel Eşleme. Seçenekli ve arttıran yol. Personel atama problemi. Problemin graflar ile modellenmesi ve Macar algoritması ile çözümü.

Hafta 9: Graflarda Birleştirilmişlik Sayısı ve Algoritmaları.

Hafta 10: Graflarda uzaklık ve algoritmaları

Hafta 11: Graf algoritmaları ve Analizleri

Hafta 12: Graf algoritmaları ve Analizleri

Hafta 13: İletişim ağlarının modellenmesi ve zedelenebilirlik.

Hafta 14: İletişim ağlarının modellenmesi ve zedelenebilirlik.

DERS DEĞERLENDİRMESİ

%20 Ödev

%30 Arasınav

%50 Final

KAYNAKLAR

[1] Chartrand, G.-Lesniak, L., (1986) : *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, California

[2] West D.B. (2001) : *Introduction to Graph Theory*, *Prentice Hall*, USA.

[3] Graf Teoriye Giriş, Şerife Büyükköse ve Gülistan Kaya Gök, Nobel Yayıncılık

[4] Discrete Mathematical Structures for Computer Science, Ronald E. Prather, Houghton Mifflin Company, (1976).

[5] Christofides, N., 1986. Graph Theory an Algorithmic Approach, Academic Press, London

[6] Algoritmalar (Teoriden Uygulamalara), Vasif V. NABİYEV, Seçkin Yayıncılık

1.GRAF NEDİR?

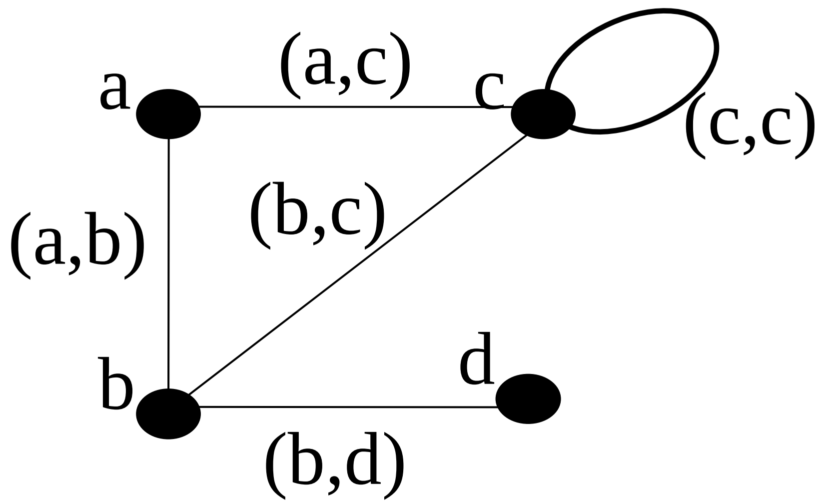
Tanım 1.1 (Fonksiyon Tanımı):$V=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_n\}$ ve $\Gamma:V\rightarrow V$ bir dönüşüm olsun. Bir G grafı $\Gamma(V)\subset V$ olmak üzere, $G=(V,\Gamma(V))$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.2 (Bağıntı Tanımı): Bir G grafı, sayılabilir bir küme üzerinde tanımlanmış ikili bir bağıntının gösterimidir. Nesneler kümesi grafın $V=V(G)$ tepeler kümesini, bağıntının ikilileri de $E=E(G)$ ayrıtlar kümesini tanımlar. Başka bir deyişle G grafı $G=(V,E)$ ikilisinden oluşur.

Tanım 1.3 (Genel Tanım): Bir G grafı, tepe(vertex) olarak adlandırılan noktalar ve her biri bu noktaları veya noktanın kendisini birleştiren ve ayrıt(edge) olarak adlandırılan çizgiler topluluğudur. $V = V(G)$ kümesi grafın tepeler kümesi ve $E = E(G)$ kümesi grafın ayrıtlar kümesi olmak üzere, G grafı $G = (V, E)$ şeklinde gösterilir.

Örnek1.1:

V={a,b,c,d} ve E={(a,b),(a,c),(b,c),(b,d),(c,c)} olmak üzere, $G=(V,E)$ grafı aşağıdaki şekilde çizilir.



Örnek 1.2:

Ali, Burak, Cemre, Deniz bir sınıftaki 4 öğrencidir. Bu sınıfta öğrencilerin hangi meyveleri sevdiği ile ilgili bir anket yapılıyor. Ankette, Ali; portakal ve elmayı sevdiğini, Burak; elma, ayva ve çileği sevdiğini, Cemre; sadece ayvayı sevdiğini, Deniz ise portakal ve çileği sevdiğini söylüyor.

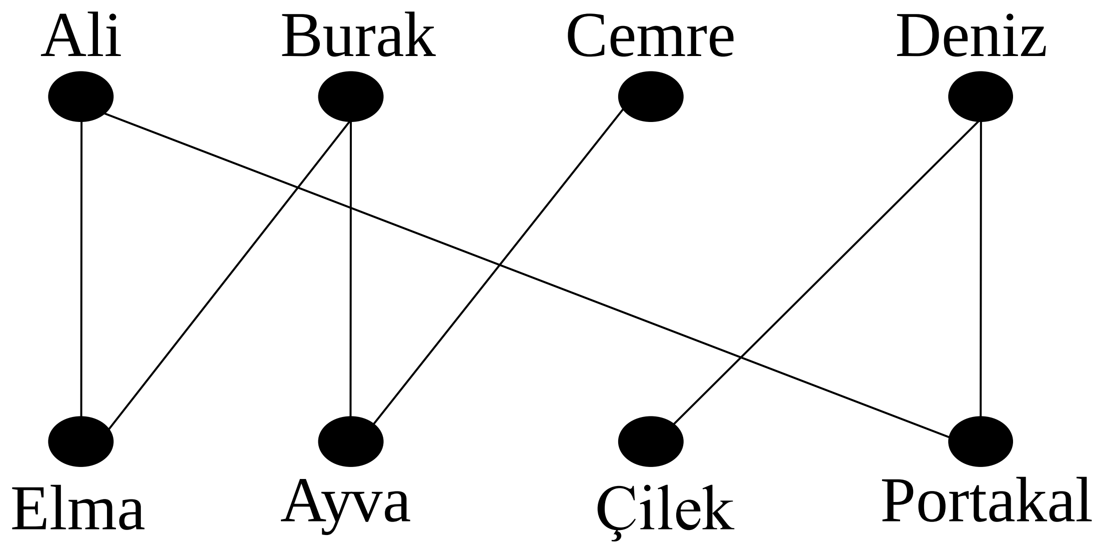
A={Ali, Burak, Cemre, Deniz}
B={Elma, Ayva, Çilek, Portakal}

A x B={ (Ali,Elma), (Ali,Ayva), (Ali,Çilek), (Ali,Portakal), (Burak,Elma),(Burak,Ayva),(Burak,Çilek), (Burak,Portakal), (Cemre,Elma),(Cemre,Ayva),(Cemre,Çilek), (Cemre,Portakal), (Deniz,Elma), (Deniz,Ayva),(Deniz,Çilek),(Deniz,Portakal)}

Öğrencilerin oluşturduğu küme:

G={(Ali,Elma), (Ali,Portakal),(Burak,Elma), (Burak,Ayva), (Cemre,Ayva),(Deniz,Çilek), (Deniz,Portakal)}

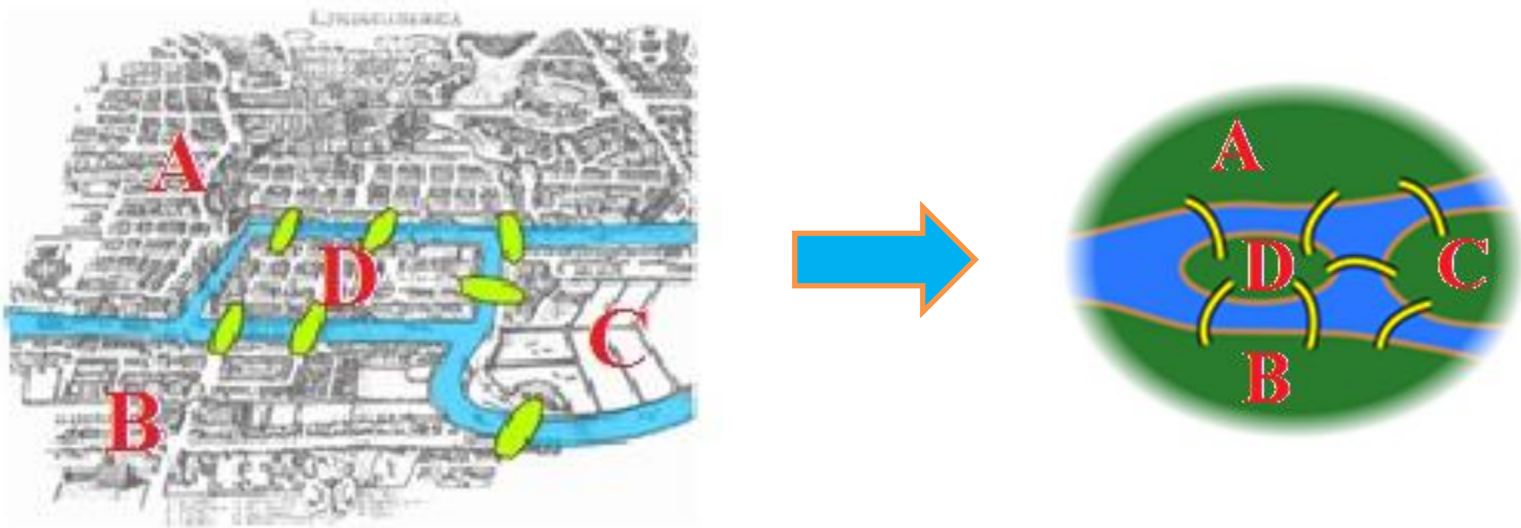
Bu *G* kümesini aşağıdaki şekille(grafla) modelleyebiliriz.



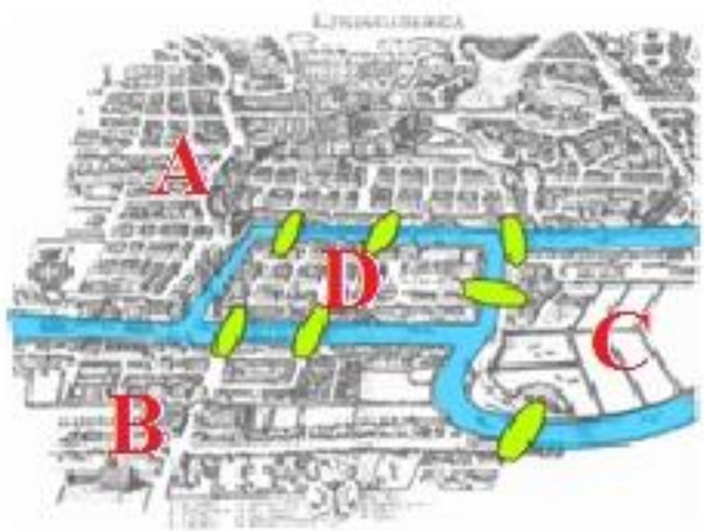
G Grafı

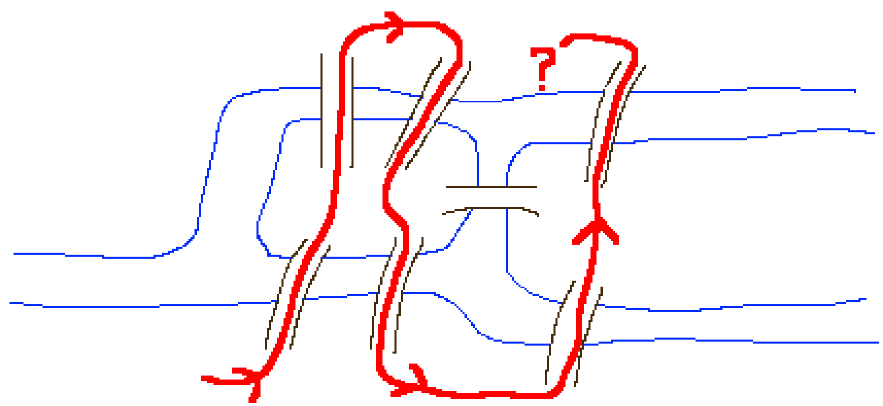
GRAF TEORİ TARİHİ

KONIGSBERG KÖPRÜ PROBLEMİ

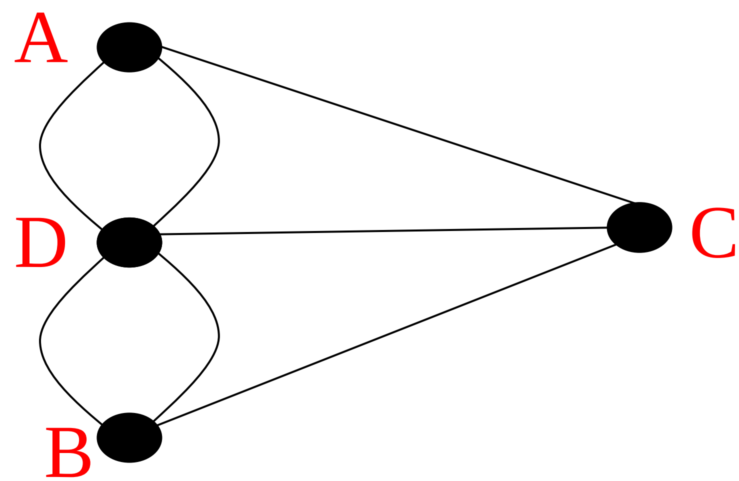


Problem: Yedi köprünün her birinden yalnız bir kere geçmek kaydıyla başladığımız yere tekrar gelebilir miyiz?


A
D
C
B


?

1736 yılında ortaya atılan‘Konisberg Köprü Peblemi’ ni, ünlü matematikçi Leonhard EULERçözmüştür. Problemi aşağıdaki graf ile modellemiştir.



Problemin çözümünün olması için, modellenen grafın bir Euler katarı içermesi gerektiğini göstermiştir.

Teorem : Bir *G* grafı bir Euler katara sahiptir ancak ve ancak *G* grafı birleştirilmiş ve tüm tepe dereceleri çift veya tek dereceli tepelerin sayısı iki olmalıdır. (Leonhard Euler, 1736)

Teorem : Bir *G* grafı bir Euler devreye sahipse *G* grafı birleştirilmiş ve her tepe derecesinin çift olması gerekir. (Leonhard Euler, 1736)

Teorem : Bir G grafı birleştirilmiş ve her tepesinin derecesi çift ise G grafı Euler devreye sahiptir. (Carl Hierholzer, 1840)

Tanım : Euler devresi içeren bir grafa **Euler grafı** denir.

2.
GRAF TEORİDEKİ ÖNEMLİ TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1: Bir graftaki başlangıç ve bitiş tepeleri aynı olan ayrıta **bukle** (loop) denir.

Tanım 2.2: Bir grafta en az bir ayrıt yönlü ise, bu grafa **yönlü** (directed) aksi halde **yönsüz** veya **yönlendirilmemiş** (undirected) **graf** denir.

Tanım 2.3: Bir grafının herhangi iki tepesi arasında birden fazla ayrıt varsa bu ayrıtlara **katlı ayrıt**, bu tür graflara ise **katlı** (multiple) **graflar** denir.

Tanım 2.4: Katlı ayrıt ve bukle içermeyen graflara **basit** (simple) **graf** denir.

Tanım 2.5: Bir G grafında *e* ayrıtı *u* ve *v* tepelerini birleştiriyorsa, *e*=(*u*,*v*) biçiminde gösterilir. *u* ve *v* tepelerine **bitişik tepeler** (adjacent vertices) denir.

Tanım 2.6: Bir grafının her tepe çifti arasında en az bir tane yol varsa G grafına **bağlantılı** (connected) graf denir.

Tanım 2.7: *v* tepesi, *G* grafındaki herhangi bir tepe olsun.*v*' ye bitişik ayrıtların sayısına *v* tepesinin **derecesi** denir ve *deg(v)* ile gösterilir. Bir *G* grafında en az ayrıtla bitişik olan tepenin derecesine **minimum tepe derecesi** denir ve $\delta(G)$ ile gösterilir. Benzer şekilde en çok ayrıtla bitişik olan tepenin derecesine **maksimum tepe derecesi** denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1. Bir G grafının tepeleri $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ ve bu tepelerin dereceleri sırasıyla $\deg(v_1), \deg(v_2), ..., \deg(v_n)$ olsun. Bu grafın ayrıtlarının sayısı m olmak üzere,

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) + ... + \deg(v_n) = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_n) = 2m \text{ dir.}$$

Teorem bize gösterir ki, grafın tepe dereceleri toplamı çifttir.

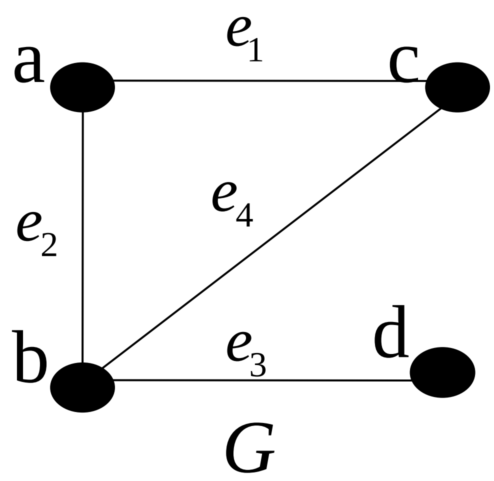
Örnek 2.1: 7 makineden oluşan ve her bir makinenin diğer makinelerden 3 tanesiyle bağlantılı olduğu bir bilgisayar laboratuarı oluşturunuz.

Böyle bir laboratuar oluşturulamaz!!!

Tanım 2.8: ***Komşuluk Matrisi,*** *n* tepeli bir $G = (V, E)$ grafının komşuluk matrisi *A(G)* ile gösterilir. Bu matris $n \; x \; n$ tipinde olup, grafın tepeleri matrisin satırlarını ve sütunlarını oluşturur. Bir *A(G)* matrisinin elemanları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , v_i v_j \in E(G) \ ise, \\ 0 & , v_i v_j \notin E(G) \ ise. \end{cases}$$

Örnek 2.2:



deg(a)=2
deg(b)=3
deg(c)=2
deg(d)=1

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tanım 2.9: Bir *G* grafında tepelerin ve ayrıtların rasgele dizilişine bir **yürüyüş(**walk**)** denir.

Tanım 2.10: Bir yürüyüşte hiçbir ayrıt tekrarlanmıyorsa bu yürüyüşe **katar(**trail**)** denir.

Tanım 2.11: Bir tepeden farklı bir tepeye varışta kullanılan her tepe ve ayrıt bir kez kullanılıyorsa bu yürüyüşe **yol** (path) denir.

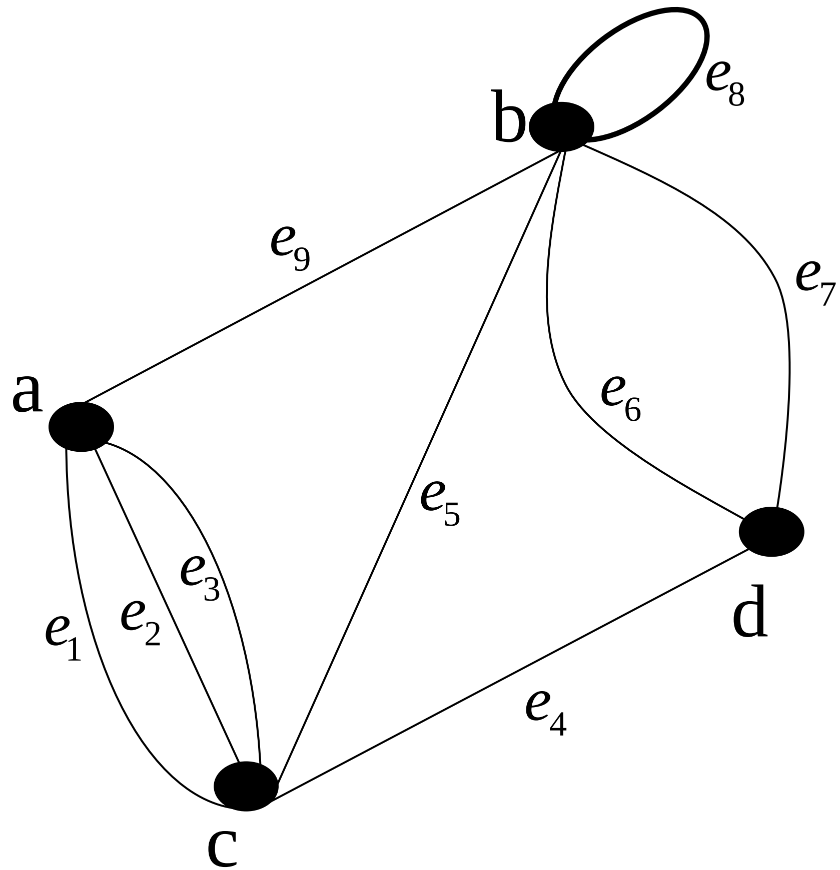
Tanım 2.12: Başlangıç ve bitişi aynı olan katara **devre**(circuit) denir.

Tanım 2.13: Başlangıç ve bitişi aynı olan yola **çevre**(cycle) denir.

Tanım 2.14: Bir G grafında, bir tepeden başka bir tepeye gidilen bir katarda tüm ayrıtlar bir kez kullanılıyorsa bu katara **Euler katarı** denir.

Tanım 2.15: Bir G grafında, bir Euler katarının başlangıç ve bitiş tepeleri aynı ise bu katara **Euler devresi** denir.

Örnek 2.3:



a’ dan d’ ye bir yürüyüş: $a e_3 c e_5 b e_8 b e_9 a e_3 c e_1 a e_9 b e_6 d$

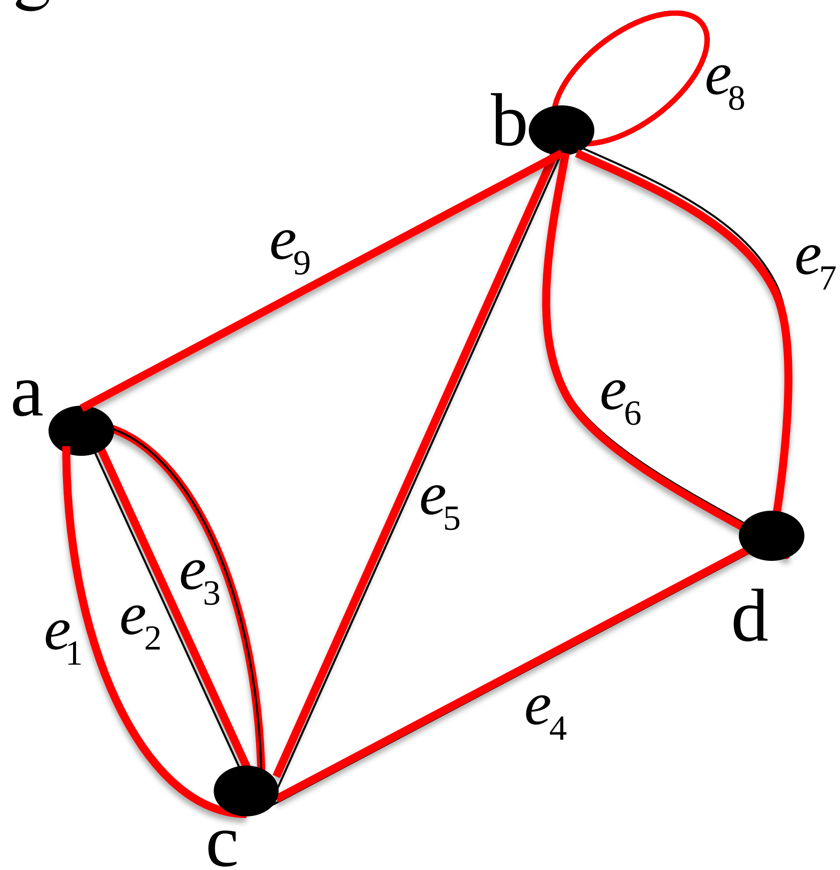
a’ dan d’ ye bir katar: $a e_3 c e_2 a e_1 c e_5 b e_7 d$

a’ dan d’ ye bir yol: $a e_3 c e_5 b e_6 d$

a’ dan a’ ye bir devre: $a e_3 c e_4 d e_6 b e_8 b e_9 a$

a’ dan a’ ye bir çevre: $a e_9 b e_6 d e_4 c e_2 a$

Örnek 2.3’ deki graf bir Euler katarı ve Euler devresi içerir mi?



Euler katarı: d e_4 c e_5 b e_7 d e_6 b e_8 b e_9 a e_3 c e_2 a e_1 c

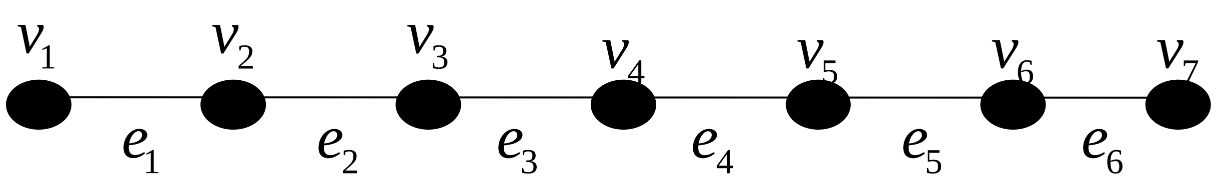
Euler devresi içermez!!!

Neden Euler katarı içerdi, fakat Euler devresi içermedi?

2.1. Özel Graflar

2.1.1. Yol Graf

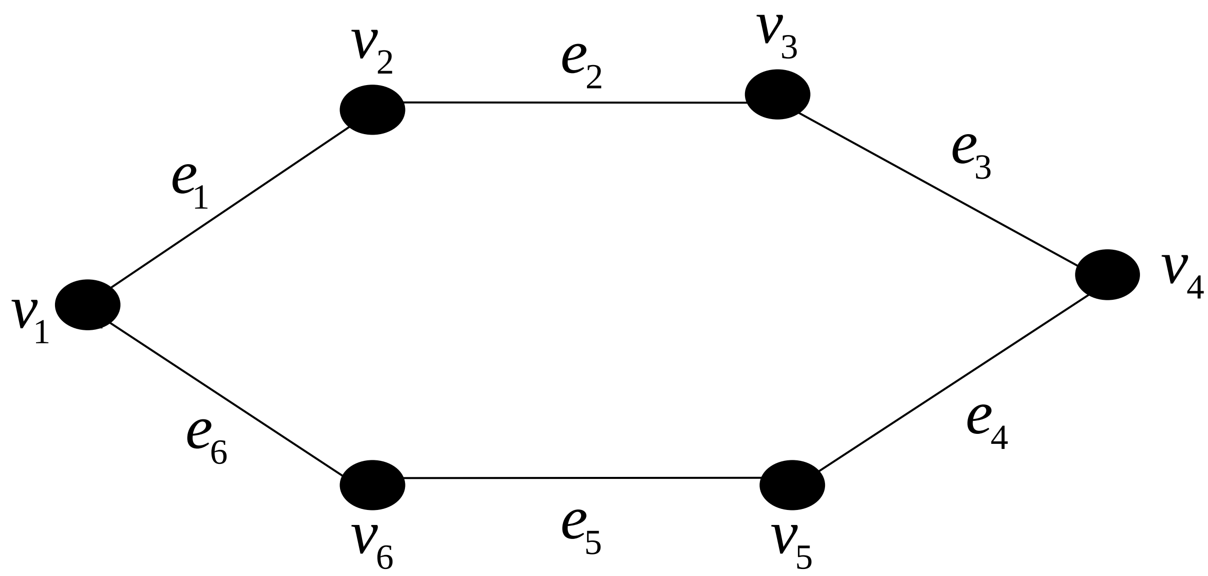
Uç tepeleri 1 dereceli, iç tepelerinin dereceleri 2 olan grafa **yol**(path) graf denir. n tepeli bir yol graf *n-1* ayrıta sahiptir ve P_n ile gösterilir.



P_7 Grafı

2.1.2. Çevre Graf

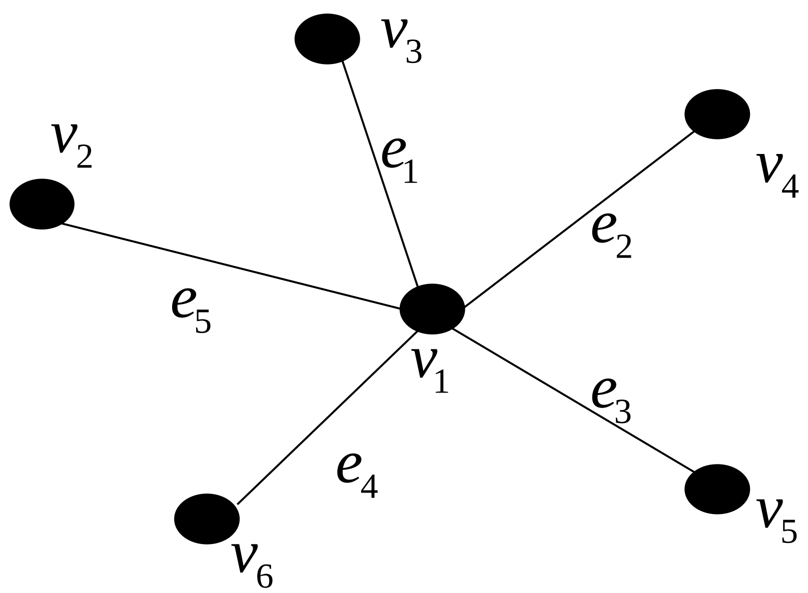
Tüm tepelerinin dereceleri 2 olan grafa **çevre**(cycle) graf denir. *n* tepeli bir çevre graf *n* ayrıta sahiptir ve C_n ile gösterilir.



C_6 Grafı

2.1.3. Yıldız Graf

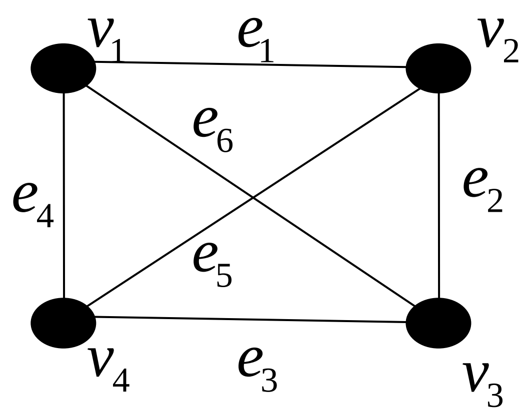
n tepeli bir *G* grafının ,bir tepesi *n-1* dereceli diğer tepeleri 1 dereceli ise bu grafa **yıldız**(star) graf denir ve $K_{1,n-1}$ ile gösterilir. Ayrıtlarını sayısı *n-1*' dir.



$K_{1,5}$ Grafı

2.1.4. Tam Graf

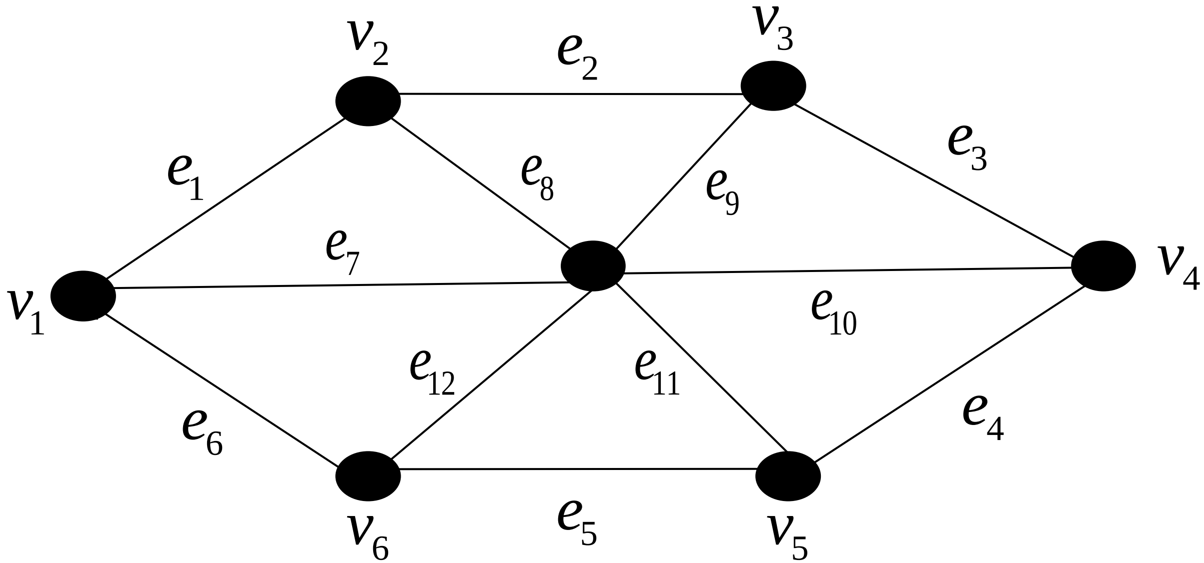
n tepeli bir G grafının ,her tepesinin derecesi *n-1* ise bu grafa **tam**(complete) graf denir ve K_n ile gösterilir. Ayrıtlarının sayısı, $\frac{n.(n-1)}{2}$ dir.



K_4 Grafi

2.1.5. Tekerlek Graf

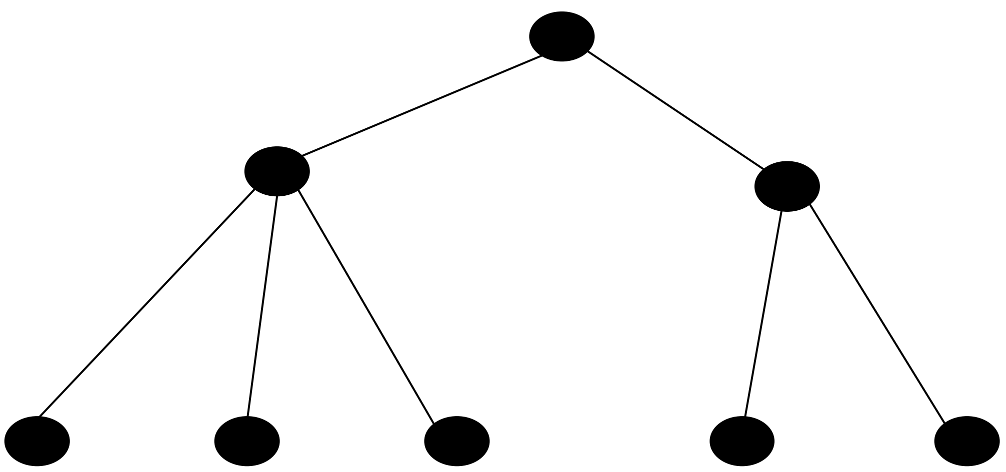
n tepeli bir çevre grafının, her bir tepesinin bir tek noktadan ayrıt eklenmesiyle oluşan grafa **tekerlek**(whell) graf denir ve W_n ile gösterilir. Ayrıtlarının sayısı $2n$' dir.



W_6 Grafı

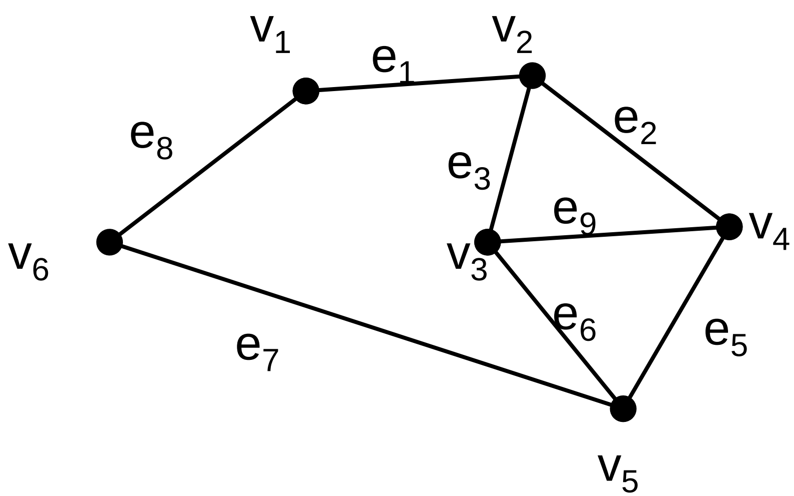
2.1.6. Ağaç Graf

n tepeli bir *G* grafı çevre içermiyorsa, bu grafa ağaç graf denir ve genellikle *T* ile gösterilir. Yol graf, star graf aynı zaman da bir ağaç graftır.



T Ağacı

Alt graf :G=(V,E) bir graf olsun. V'$\subseteq$V, E'$\subseteq$E olmak üzere G'=(V',E') grafına G nin bir altgrafı denir.



G

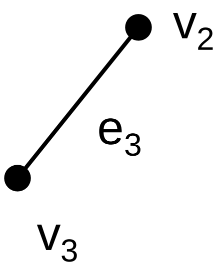
Alt graf örneği(1)

G'

$V'=\{v_1\}$

$E'=\varnothing$

Alt graf örneği(2):



G'

$V'=\{v_2,v_3\}$

$E'=\{e_3\}$

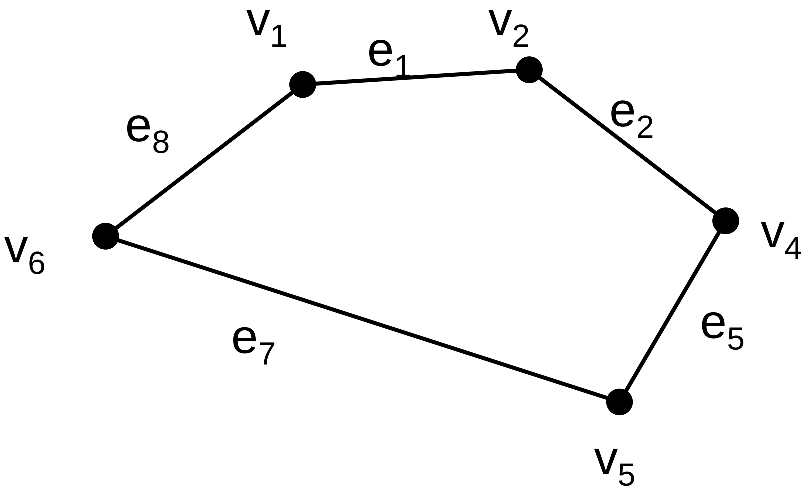
Alt graf örneği(3):

G'

$V'=\{v_1,v_4\}$

$E'=\emptyset$

Alt graf örneği(4):



G'

$V' = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6\}$

$E' = \{e_1, e_2, e_5, e_7, e_8\}$

Tanım: Bir grafın tepe derecelerinin oluşturduğu diziye Grafik denir.

Teorem(Havel-Hakimi) Aşağıdaki iki diziyi ele alalım ve 1 nolu dizinin azalan bir dizi olduğunu kabul edelim.

1) $s, t_1, t_2,\dots,t_s, d_1,\dots,d_n$

2) $t_1-1, t_2-1,\dots,t_s-1, d_1,\dots,d_n$

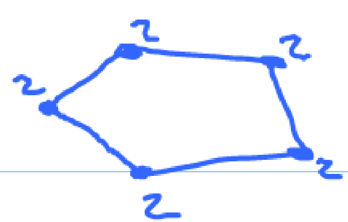
(1) dizisinin grafik olması (graf göstermesi) için gerek ve yeter koşul (2) dizisinin de grafik olmasıdır.

Tanım: (Grafik)

Pozitif tamsayıların bir dizisini ele alalım. Bu dizinin her elemanı bir grafın bir tepesinin derecesine karşılık geliyorsa bu diziye grafik adı verilir.

2 2 2 2 2 → bir grafik belirtir mi?

5 tepeli, 2 dereceden



2, 2, 2, 2, 2 → grafiktir.

(1) (n)

5 5 5 5 5 → bir grafik belirtir mi?

5 tepeli, tüm tepe dereceleri 5 olan bir graf? HAYIR.

max 4 olur.

Grafik belirtmez!!

6 tepeli bir grafı gösterebilir mi?

(1) (n) 5, 4, 3, 2, 2, 1 bir grafik belirtir mi?

$5+4+3+2+2+1 = 2.m$ → ayrıt sayısı

$17 = 2m$ 8,5 ayrıt X

grafik belirtmez.

izole tepe: Tepe derecesi 0 olan tepeye izole tepe denir.

izole tepe: Tepe derecesi 0 olan tepeye izole tepe denir.

G_1

G_2

2 parça (birleştirilmemiş graf)

(i) n

6, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2

dizisi bir grafik belirtir mi?

9 tepeli ✓

(i) max ✓

(ii) tek mi? çift mi?

$\boxed{32 ✓}$

Graf belirtebilir ?

- Çizmek

- Havel - Hakimi teoremi

Havel - Hakimi Teoremi

Aşağıdaki iki diziyi ele alalım.

(1) dizisinin azalan bir dizi old. kabul edelim.

(1) $s, t_1, t_2, \ldots, t_s, d_1, d_2, \ldots, d_n$

(2) $t_1-1, t_2-1, \ldots, t_s-1, d_1, d_2, \ldots, d_n$

(1) dizisinin grafik olması için $\Leftrightarrow$ (2) dizisinin de grafik olmasıdır

Soru) $s \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5 \quad t_6 \quad d_1 \quad d_2$

(1) 6, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2 bir grafik belirtir mi?

(2) 4, 4, 3, 2, 2, 1, 2, 2 → çift

yeniden uygula

$s \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3$

4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 1

3, 2, 1, 1, 2, 2, 1 → çift

uygula

$s \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3$

3, 2, 2, 2, 1, 1, 1

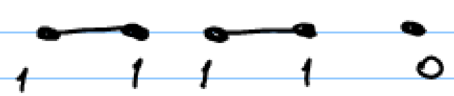
1, 1, 1, 1, 1, 1 → çift

$s \quad t_1 \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4$

1, 1, 1, 1, 1, 1

0, 1, 1, 1, 1

1, 1, 1, 1, 0 → graf çizilebilir.



Ödev:

Verilen tamsayılar dizisinin graf gösterip göstermediğini hesaplayan veya belirten bir C programını veya algoritmayı yazınız.

Program:

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>

int main()
{ int A[1000],i,j,n,m,s,k, t=0,top2,
top;

printf ("Dizinin eleman sayisini giriniz: ");
scanf ("%d", &n);

for (i=0;i<n;i++)
{
printf ("Dizinin %d. elemanini giriniz: ", i+1);
scanf ("%d", &k);
if (k>=n) {printf ("n den kucuk yeni bir sayi giriniz");
          scanf ("%d", &k);}
 A[i]=k;
}
```

```
bas:
top=0;
for (i=0;i<n-t;i++)
{ top=top+A[i];}
if (top %2 == 1) { printf ("graf belirtmez"); goto son;}


for (i=0;i<n-t-1;i++)
{
  for (j=i+1;j<n-t;j++)
  {         if (A[i]<=A[j]) { m=A[j];  A[j]=A[i];   A[i]=m;}
}}

s=A[0];
for (i=1;i<=s;i++)
{A[i-1]=A[i]-1;}
```

```
for (i=s+1;i<n-t;i++)
{A[i-1]=A[i];}

t++;
top2=0;
for (i=0;i<n-t;i++)
if(A[i]==0) top2++;
//for (i=0;i<n-t;i++)
//printf ("%d\n", A[i]);
//printf ("\n\n");
if (top2==0) goto bas;

top=0;
for (i=0;i<n-t;i++)
{ top=top+A[i];}
if (top %2 == 0) { printf ("graf belirtir..."); }

son:
return 0;
getch();
}
```

Örnek: **2,2,2,2,2 dizisi bir grafik belirtir mi?**

Derece dizisi 2,2,2,2,2 olan 5 tepeli bir graf çizilebilir mi?

```
Dizinin eleman sayisini giriniz: 5
Dizinin 1. elemanini giriniz: 2
Dizinin 2. elemanini giriniz: 2
Dizinin 3. elemanini giriniz: 2
Dizinin 4. elemanini giriniz: 2
Dizinin 5. elemanini giriniz: 2
graf belirtir...
--------------------------------
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```

Örnek: **5,5,5,5,5 dizisi bir grafik belirtir mi?**

Derece dizisi 5,5,5,5,5 olan 5 tepeli bir graf çizilebilir mi?

```
Dizinin eleman sayisini giriniz: 5
Dizinin 1. elemanini giriniz: 5
n den kucuk yeni bir sayi giriniz5
Dizinin 2. elemanini giriniz: 5
n den kucuk yeni bir sayi giriniz5
Dizinin 3. elemanini giriniz: 5
n den kucuk yeni bir sayi giriniz5
Dizinin 4. elemanini giriniz: 5
n den kucuk yeni bir sayi giriniz5
Dizinin 5. elemanini giriniz: 5
n den kucuk yeni bir sayi giriniz5
graf belirtmez
--------------------------------
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```

Örnek: **5,4,3,2,2,1 dizisi bir grafik belirtir mi?**

Derece dizisi 5,4,3,2,2,1 olan 6 tepeli bir graf çizilebilir mi?

```
Dizinin eleman sayisini giriniz: 6
Dizinin 1. elemanini giriniz: 5
Dizinin 2. elemanini giriniz: 4
Dizinin 3. elemanini giriniz: 3
Dizinin 4. elemanini giriniz: 2
Dizinin 5. elemanini giriniz: 2
Dizinin 6. elemanini giriniz: 1
graf belirtmez
--------------------------------
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```

Örnek: **6,5,5,4,3,3,2,2,2 dizisi bir grafik belirtir mi?**

Derece dizisi 6,5,5,4,3,3,2,2,2 olan 9 tepeli bir graf çizilebilir mi?

```
Dizinin eleman sayisini giriniz: 9
Dizinin 1. elemanini giriniz: 6
Dizinin 2. elemanini giriniz: 5
Dizinin 3. elemanini giriniz: 5
Dizinin 4. elemanini giriniz: 4
Dizinin 5. elemanini giriniz: 3
Dizinin 6. elemanini giriniz: 3
Dizinin 7. elemanini giriniz: 2
Dizinin 8. elemanini giriniz: 2
Dizinin 9. elemanini giriniz: 2
graf belirtir...
--------------------------------
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```

KAYNAKLAR

[1] Chartrand, G.-Lesniak, L., (1986) : *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, California

[2] West D.B. (2001) : *Introduction to Graph Theory*, *Prentice Hall*, USA.

[3] Graf Teoriye Giriş, Şerife Büyükköse ve Gülistan Kaya Gök, Nobel Yayıncılık

[4] Discrete Mathematical Structures for Computer Science, Ronald E. Prather, Houghton Mifflin Company, (1976).

[5] Christofides, N., 1986. Graph Theory an Algorithmic Approach, Academic Press, London

[6] Algoritmalar (Teoriden Uygulamalara), Vasif V. NABİYEV, Seçkin Yayıncılık