CENG 481 GRAF TEORİ VE UYGULAMALARI
Hafta 14

Prof. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

Hafta 14
Konular

1- Graflarda Zedelenebilirlik Kavramı (devam)

--- Toughness (Dayanıklılık) değeri

--- Tenacity (Kararlılık) değeri

--- Scattering (Saçılım) değeri

--- Rupture Degree (Parçalanma derecesi) değeri

- Kimyasal sistemler, sinir ağları, sosyal ağlar ya da internet gibi farklı sistemleri modellemek için iletişim ağları ve karmaşık sistemler kullanılır. Fizik bilimleri, biyoloji bilimleri, bilgisayar bilimleri ve matematik gibi çeşitli araştırma alanlarında iletişim ağlarının topolojisini çalışma giderek artmaktadır ve büyük bir ilgi görmektedir.

- Çizge Teorisi, bir iletişim ağının mimarisinin analizi ve çalışmasında en güçlü matematiksel araçlardan biri haline gelmiştir. Bir iletişim ağının altında yatan topoloji bir $G(V(G),E(G))$ çizgesi ile modellenir. Bu G çizgesinin $V(G)$ tepeler kümesi iletişim ağındaki işlemciler kümesidir, $E(G)$ ayrıtlar kümesi ise iletişim ağındaki iletişim hatlarının bir kümesidir.

- Karmaşık sistemlerindeki ana konu, onun zedelenebilirlik ve dayanıklılığının değerlendirilmesidir. Zedelenebilirlik iletişim ağının analizinde önemli bir kavramdır. Bir iletişim ağının zedelenebilirliği o iletişim ağının altında yatan çizgenin global gücünün ölçümü olarak tanımlanmaktadır.

- Bir iletişim ağında bazı merkezlerin veya bağlantı hatlarının bozulmasıyla iletişim kesilene kadar ağın gösterdiği dayanma gücünün ölçümüne "ağın zedelenebilirlik sayısı " denir.

- İletişim sistemleri, genellikle kopmalara ve saldırılara maruz kalırlar. İletişim ağının dayanıklılığını ölçmek için literatürde çeşitli ölçümler varken iletişim ağının güvenirliliğini hesaplayacak formülleri türetmek için de birçok çizge teorik parametreleri kullanılmaktadır.

- Çizgelerdeki ilk zedelenebilirlik parametresi Bağlantılılık sayısı (Connectivity)' dır. Daha sonra birçok zedelenebilirlik parametresi tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları; dayanıklılık (toughness), saçılma sayısı (scattering number), bütünlük (integrity), baskınlık sayısı (domination number), bağımlılık sayısı (bondage number)' dır.

Önemli Graf Parametre Değerleri

1- Integrity (Bütünlük) değeri

2- Toughness (Dayanıklılık) değeri

3- Tenacity (Kararlılık) değeri

4- Scattering (Saçılım) değeri

5- Rupture Degree (Parçalanma derecesi) değeri

Toughness (Dayanıklılık) değeri

Tanım: Bir G grafının dayanıklılık (toughness) değeri; w(G-S), G-S grafındaki geriye kalan bileşen sayısı ve w(G-S)>1 olmak üzere

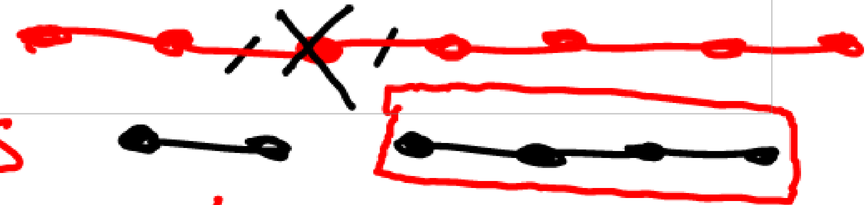
$$t(G) = \min_{S \subseteq V} \left\{ \frac{|S|}{\mathbf{W}(G-S)} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek

$t(K_{1,5}) = ?$

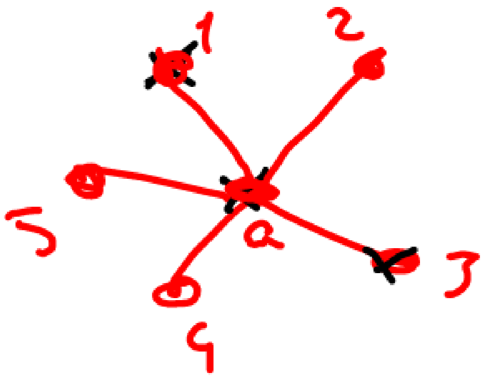
G



G−S

$m(G-S) = 4 \qquad w(G-S) = 2$

Kesim küme



S	$\lvert S \rvert$	$w(G-S)$	$\frac{\lvert S \rvert}{w(G-S)}$
$\{a\}$	1	5	$\frac{1}{5}$
$\{1\}$	×	×	×
$\{1,a\}$	2	4	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
$\{1,a,3\}$	3	3	$\frac{3}{3} = 1$

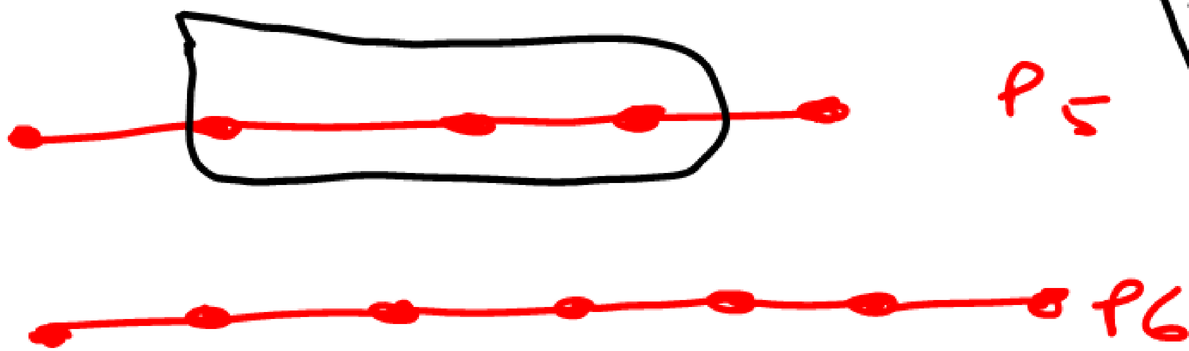
$$I(G) = \min\{|S| + m(G-S)\}$$

Geriye kalan graftaki en büyük bileşenin tepe sayısı

$$t(G) = \min\left\{\frac{|S|}{\omega(G-S)}\right\}$$

Geriye kalan graftaki bileşen sayısı

$t(P_n) = ?$?



min $S = 2$

$w(G-S) = 3$

$$\frac{|S|}{w(G-S)} = \frac{2}{3}$$

$\frac{2}{3}$, $\boxed{\frac{1}{2}}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$

1 tae $\frac{1}{2}$

2 tae $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{2}$

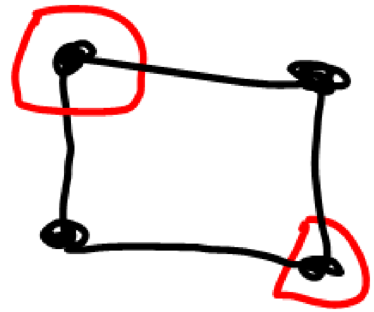
3 tae $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{3}$

⋮

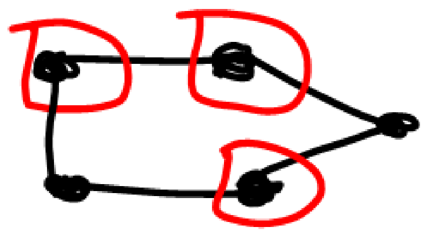
$\frac{1}{2}$ olur!!

$$\boxed{t(C_n) = ?}$$

1

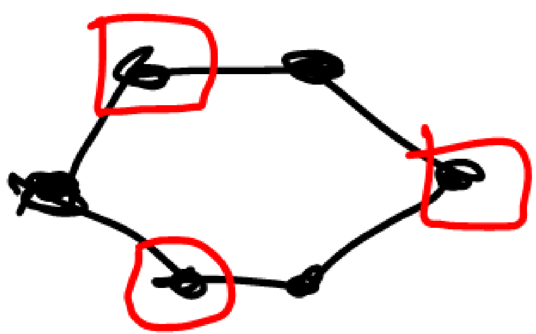


$$\frac{2}{2} = 1$$



$$\frac{2}{2} = 1$$

$$\boxed{\frac{3}{2}}$$



$$\frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{3}{3} = 1$$

$$t(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \left\{ \frac{|S|}{w(G-S)} \right\}$$

→ S, kesim küme

graf parçalanacak!!!

$w(G-S) \Rightarrow$ bileşen sayısı

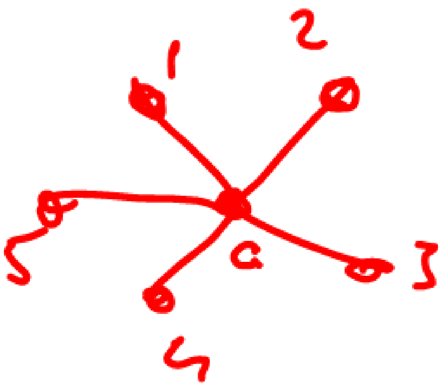
Tenacity (Kararlılık) değeri

Tanım: Bir G çizgesi için $S \subseteq V$ ve $w(G\text{-}S)$, $G\text{-}S$ çizgesinin bileşen sayısı olmak üzere, bir çizgenin ***kararlılık (tenacity) değeri*** aşağıdaki biçimde tanımlıdır:

$$T(G) = \min_{S \subseteq V} \left\{ \frac{|S| + m(G-S)}{w(G-S)} \right\}$$

S, kesen küme ☆

$$T(K_{1,5}) = \frac{2}{5}$$



S	$\lvert S\rvert$	$m(G-S)$	$w(G-S)$	$\frac{\lvert S\rvert + m(G-S)}{w(G-S)}$
$\{a\}$	1	1	5	$\frac{2}{5}$
$\{a,1\}$	2	1	4	$\frac{3}{4}$
$\{a,1,3\}$	3	1	3	$\frac{4}{3}$

⋮

Scattering (Saçılım) değeri

Scattering Sayısı:

G bir graf ve G nin herhangi bir alt kümesi S kesim küme olsun. G-S grafındaki kalan bileşen sayısı, ω(G-S) olmak üzere G grafının scattering sayısı,

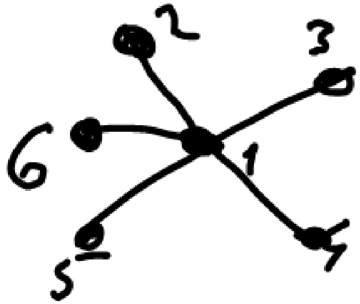
$$sc(G)= \max\{\omega(G\text{-}S) - |S| : S \subseteq V(G) \text{ ve } \underline{\omega(G\text{-}S) > 1}\}$$

$sc_{\omega}(G)$

şeklinde tanımlanır.

S, kesim küme

Örnek:



kesim kümesi değil

$\max\ w(G-S) - |S|$

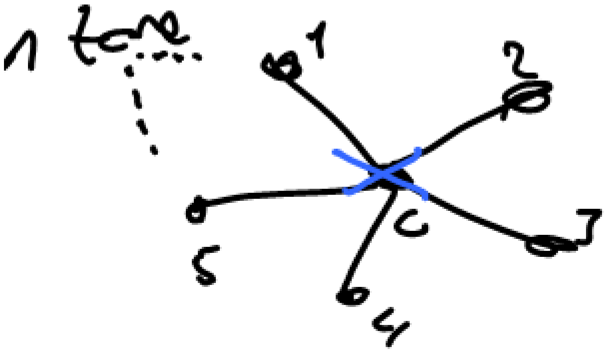
S	$w(G-S)$	$\lvert S\rvert$	$sc(G)$
$\{1\}$	5	1	$\boxed{4}$
$\{2\}$	1	1	X
$\{1,2\}$	4	2	2
$\{2,3\}$	1	2	X
$\{4,1,3\}$	3	3	0

⋮

$$\boxed{sc(K_{1,5}) = 4}$$

n) m)

$$sc(K_{1,n}) = ?$$



$\rightsquigarrow$ n parça!!

$$w(G-S) = n$$

$$|S| = 1$$

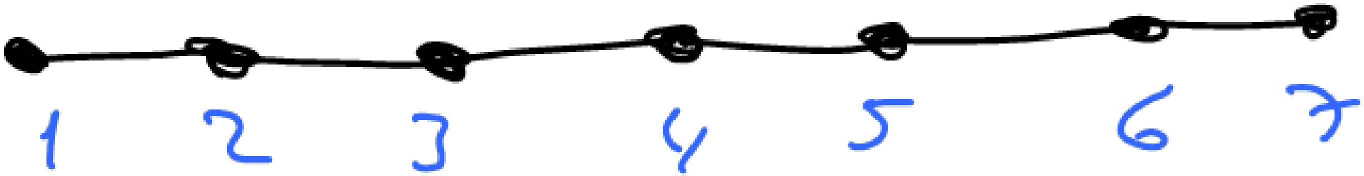
$$\boxed{sc(K_{1,n}) = n-1}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \underline{n=5}}}{sc(K_{1,5})} = 4$$

$$sc(G) = \max\{w(G-S) - |S|,\ w(G-S) > 1\}$$

kesim küme

$$sc(P_7) = ?$$



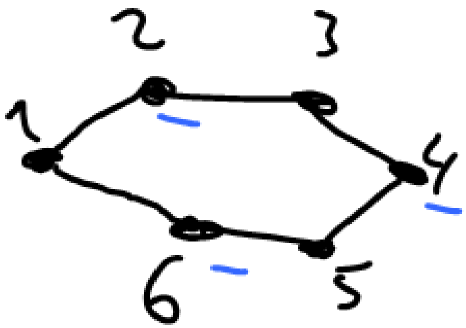
S	$w(G-S)$	$\lvert S\rvert$	$w(G-S)-\lvert S\rvert$
$\{1\}$	1	1	kesme kümesi değildir
$\{2\}$	2	1	1
$\{3\}$	2	1	1^*
$\{2,3\}$	2	2	0
$\{2,4\}$	3	2	1

$$\boxed{SC(P_7) = 1} \Rightarrow \boxed{SC(P_n) = 1}$$

İspat:

Bir yol grafta r tepe zarar görürse geriye en fazla $r+1$ parça kalır.

$sc(C_6)=?$ $\qquad$ $sc(C_n)=?$



$\underline{\underline{0}}$

* Bir C_n grafında r tane tepe zarar görürse geriye en fazla r tane parça kalır.

Çalışma Sorusu :

$sc(W_{1,6})=?$ tekerlek graf

$sc(K_{2,5})=?$ iki parçalı tam graf

Rupture Degree (Parçalanma derecesi) değeri

Tanım: Bir G çizgesi için ***parçalanma derecesi (rupture degree)***: $S \subseteq V$ olsun. *w(G-S)*, *G-S* çizgesinin bileşen sayısı ve $m(G-S)$, *G-S* çizgesindeki en büyük bileşenin tepe sayısı olmak üzere, bir çizgesinin dayanıklılık sayısı aşağıdaki biçimde tanımlıdır:

$$r(G) = \max_{S \subset V(G)} \{ w(G-S) - |S| - m(G-S) \mid w(G-S) > 1 \}.$$

Tanım: Bir G çizgesi için ***parçalanma derecesi (rupture degree)***: $S \subseteq V$ olsun. $w(G\text{-}S)$, $G\text{-}S$ çizgesinin bileşen sayısı ve $m(G-S)$, $G\text{-}S$ çizgesindeki en büyük bileşenin tepe sayısı olmak üzere, bir çizgesinin dayanıklılık sayısı aşağıdaki biçimde tanımlıdır:

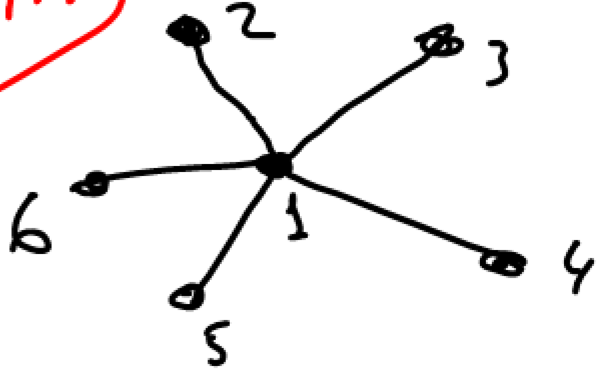
kalan en büyük bileşenin tepe sayısı

scattering [illegible]

$$r(G) = \max_{S \subset V(G)} \{ w(G-S) - |S| - m(G-S) \mid w(G-S) \geq 1 \}.$$

S'ler kesim küme olabilir.

Örn



$r(K_{1,5}) = ?$

$K_{1,5}$ grafı

MAX

S	$w(G-S)$	$m(G-S)$	$\lvert S\rvert$	$w(G-S) - \lvert S\rvert - m(G-S)$
$\{1\}$	5	1	1	$\boxed{3}$ *
$\{2\}$	1 graf parçalanmaz	5	1	X kesim küme değil

$\{1,2\}$	4	1	2	1
$\{1,2,3\}$	3	1	3	-1
		$\vdots$		

$$\boxed{r(K_{1,5}) = 3}$$

$$\boxed{r(\underbrace{K_{2,n}}_{n+1 \text{ dpc}}) = ? \quad n-2}$$

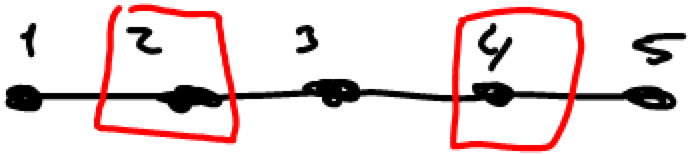
Örnek:

$r(P_5) = ?$

$r(P_n) = ?$

$r(P_6) = ?$

P5

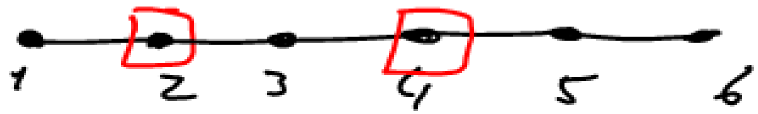


$\max\{w - |S| - m\}$

S	$w(G-S)$	$m(G-S)$	$\|S\|$	MAX $w-\|S\|-m$
$\{2\}$	2	3	1	-2
$\{2,3\}$	2	2	2	-2
$\{2,4\}$	3	1	2	*$\underline{\underline{0}}$

$\boxed{r(P_5) = 0}$

$\underline{P_6:}$



S	$w(G-S)$	$m(G-S)$	$\lvert S\rvert$	MAX $w-\lvert S\rvert-m$
$\{2\}$	2	4	1	-3
$\{3\}$	2	3	1	-2
$\{2,3\}$	2	3	2	-3
$\{2,4\}$	3	2	2	MAX -1
$\{2,5\}$	3	2	2	-1
$\{2,4,5\}$	3	1	3	-1

$$\boxed{r(P_6) = -1}$$

THEOREM *The rupture degree of the path P_n $(n \geq 3)$ is*

$$r(P_n) = \begin{cases} -1 & \text{if } n \text{ is even} \\ 0 & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

çift

tek

THEOREM 2 *The rupture degree of the cycle C_n is*

$$r(C_n) = \begin{cases} -1 & \text{if } n \text{ is even} \\ -2 & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

çift

tek

r tepe zarar görürse r tane bileşen olur.

THEOREM *The rupture degree of the star $\underbrace{K_{1,n-1}}_{n \text{ tepe}}$ $(n \geq 3)$ is $n-3$.*

$r(K_{1,5}) = ?$

$n-1=5$

$\boxed{n=6}$

$n-3 \Rightarrow \boxed{r(K_{1,5})=3}$

n çift

C_n'nin ispatı: X bir kesim kümesi olsun.

$|X| = x$.

Eğer $x \leq \frac{n}{2}$, $w(C_n - X) \leq x$

Şu andan

$$w(c_n x) - |x| - m(c_n x) \le -\left\lceil \frac{1-x}{x} \right\rceil \le -1$$

$$\boxed{\cancel{r(c_n) \le -1}}$$

$x \geq \frac{1}{2}$

$$\boxed{\cancel{r(c_n) \geq -1}}\ ?$$

ispat bulmalıyız.

x^*, C_n'nin bir komşuluk kümesi olsun.

$$\max |x^*| = \frac{n}{2}, \quad w(C_n - x^*) = \frac{n}{2}$$

(maks)

$$m(C_n - x^*) = 1$$

$*$ tek olduğu olsun.

$$w - |x^*| - m \geq \frac{n}{2} - \frac{n}{2} - 1 = -1$$

$$\boxed{r(C_n) \geq -1}$$

<u>Sonra olacak:</u>

$$\left.\begin{array}{l} r(C_n) \leq -1 \\ r(C_n) \geq -1 \end{array}\right\} \boxed{r(C_n) = -1}$$

n çift ise

n tek ise aynı biçimde gösteriliyor.

* NP-sınıfındadır.

integrity, toughness, tenacity,
scattering number, rupture degree

sezgisel algoritmalar

polinom zamanda çözüm yok.

Connectivity polinom zamanda çözülür.

KAYNAKLAR

[1] Chartrand, G.-Lesniak, L., (1986) : *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, California

[2] West D.B. (2001) : *Introduction to Graph Theory, Prentice Hall*, USA.

[3] Graf Teoriye Giriş, Şerife Büyükköse ve Gülistan Kaya Gök, Nobel Yayıncılık

[4] Discrete Mathematical Structures for Computer Science, Ronald E. Prather, Houghton Mifflin Company, (1976).

[5] Christofides, N., 1986. Graph Theory an Algorithmic Approach, Academic Press, London

[6] Algoritmalar (Teoriden Uygulamalara), Vasif V. NABİYEV, Seçkin Yayıncılık