3 SİMPLEKS ALGORİTMASI

Simpleks algoritması 1949 yılında George Dantzig tarafından DP problemlerinin eniyi çözümünü cebirsel olarak bulmak için geliştirilmiş bir yöntemdir. Algoritmada uygun bir çözümden başlanarak, her ardıştırmada amaç fonksiyonu değeri daha iyi olan bir çözüme gidilmektedir. Simpleks algoritması bu şekilde problemlerin en iyi çözümünü çok hızlı bir şekilde bulabilmektedir.

Simpleks algoritması doğrusal programlamadaki iki temel teoreme dayanmaktadır:

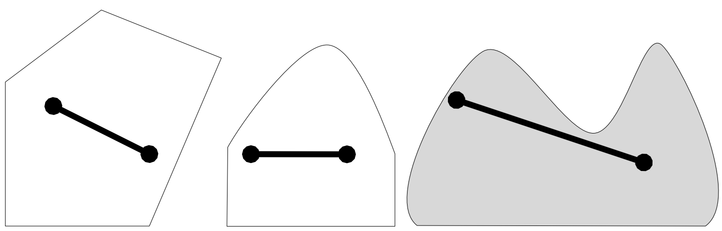
i) en iyi çözümün uç notalardan birisindedir,

ii) DP'de uygun çözüm alanı konvekstir.

Birinci teorem grafik çözüm yönteminde görsel olarak ispatlamıştır. İkinci teorem için önce konveks küme kavramı açıklanmalıdır. Konveks küme iki boyutlu uzayda geometrik olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 3.1 İki boyutlu bir uzayda tanımlı bir küme içindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerindeki tüm noktalar aynı zamanda kümenin elamanı ise bu küme konvekstir.

Şekil 3 .1'de iki boyutlu uzayda konveks ve konveks olmayan kümelere örnek verilmektedir. Şekil 3 .1-(a) ve (b)'deki kümeler konveks iken (c)'deki küme konveks değildir.



(b) (c)

Şekil 3.1 Konveks ve konveks olmayan kümeler

İki boyutlu uzay için verilen bu tanımlama çok boyutlu uzaylar için de geçerlidir.

Bir kümenin konveks olması nasıl bir fayda sağlamaktadır? Bunun için yerel ve global en iyi kavramlarının açıklanmasına ihtiyaç vardır. Bu kavram bir örnek ile açıklanabilir. Örneğin Türkiye'nin en yüksek dağı olan Ağrı dağı ülkemizde yaşayan bireyler için en yüksek dağ iken dünyanın tamamında yaşayan bireyler dikkate alındığında Everest dağı en yüksek dağdır. Bu nedenle dağlar arasında bir değerlendirme yapıldığında Ağrı dağı **yerel en yüksek** Everest dağı ise **global (küresel) en yüksek** olur. Optimizasyon problemleri de bu analojiye üzerinden değerlendirildiğinde yerel en iyiler ve küresel en iyilere sahip olabilirler. Bu nedenle en iyi çözüm araştırılırken bulunan çözümün yerel mi yoksa küresel en iyi mi olduğu belirlenmelidir. Konveks kümelerde belirli koşullar sağlandığında yerel eniyi aynı zamanda küresel eniyi olmaktadır. Bu nedenle bulunan ilk yerel eniyi aynı zamanda global eniyi olmaktadır.

Teorem 3.1 DP'de kısıtlar tarafında belirlenen uygun çözüm alanı konvekstir.

Teorem 3.1'in ispatı iki boyutlu bir doğrusal programlama problemi için geometrik olarak gösterilebilir. İlk adım olarak işaret kısıtları dikkate alınır. Karar değişkenleri negatif değer alamadığından bu kısıtları sağlayan noktalar koordinat sisteminde birinci bölgede yer alır. Birinci bölge bir A4 kâğıdı olarak düşünebilir. Modele eklenen her doğrusal kısıt, kâğıdı her bir kısıt doğrusu ile ikiye böler ve bu doğruların ya altı ya da üstü uygun bölgede yer alır. Bu kısıtları temsil eden doğruları sırasıyla A4 kâğıdı üzerine çizerek bir makas ile doğru boyunca kesip uygun olmayan kısmı attığımızda elde kalan parça konveks bir bölgeyi temsil eder.

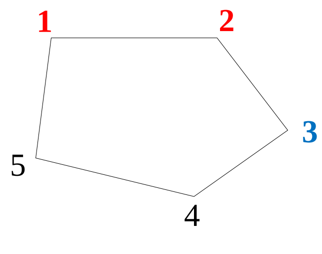
Teorem 3.2 Bir uç noktadaki amaç fonksiyonu komşu uç noktalardan daha iyi ise bu uç nokta aynı zamanda en iyi çözümdür.

Teorem 3.1 ve bu iki özellik birlikte değerlendirildiğinde en iyi çözüm araştırılırken uç noktalar arasında komşu uç noktaları daha kötü olan bir uç noktanın bulunması yeterli olacaktır.

Simpleks algoritmasını daha detaylı açıklamadan önce **komşu uç nokta** kavramı tanımlanmalıdır.

Tanım 3.2. İki uç nokta uygun çözüm alanın bir kenarını paylaşıyor ise birbirine komşudur.

Şekil 3 .2'de iki boyutlu bir DP probleminde olası bir uygun çözüm alanı verilmektedir. Bu uygun çözüm alanında **1** ve **2** uç noktaları birbirine komşu iken, **1** ve **3** uç noktaları birbirine komşu değildir.



Şekil 3.2 Komşuluklar

Simpleks algoritmasında çözüme bir uç noktandan başlanır ve her adımda amaç fonksiyon değerini daha iyiye götüren bir komşu uç nokta ziyaret edilir. Bulunan en iyi uç noktadan sonra amaç fonksiyonu değeri sonraki komşu uç noktada daha kötü bir değere ulaşır. Bu uç nokta bir önceki uç noktanın eniyi çözüm olduğunu konvekslik özelliği nedeniyle garanti eder. Bu durumda simpleks algoritması sonlandırılır. Simpleks algoritmasının adımları aşağıdaki gibidir:

Adım 1: Uygun çözüm alanında bir uç nokta seç

Adım 2: Eğer bu uç noktadaki amaç fonksiyonu komşu uç noktalardan daha iyi ise en iyi çözüm bulunmuştur. Dur. Değilse 3. adıma git

Adım 3: Amaç fonksiyonu daha iyi olan bir uç noktayı seç ve 2. adıma git.

Simpleks algoritmasının adımlarını iki değişkenli bir enbüyükleme problemi üzerinde örneklendirilebilir. Probleme ait UÇA'nın Şekil 3 .3'deki gibi olduğu varsayılsın. Bu problem için simpleks algoritmasının adımları aşağıdaki gibidir:

Adım 1: Başlangıç uç noktası olarak A seçilsin. Bu uç noktada amaç fonksiyonu z=0 değerlerini almaktadır.

Adım 2: B ve F uç noktaları A uç noktasına komşudur. B uç noktasında amaç fonksiyonu (z=60) daha büyük olduğundan A uç noktası en iyi çözüm değildir.

Adım 3: B uç noktasını seç ve 2. adıma git.

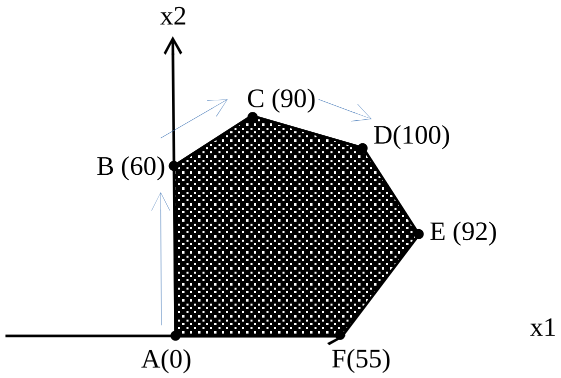
Adım 2: C uç noktası B uç noktasına komşudur. C uç noktasında amaç fonksiyonu z=90 olduğundan B uç noktası en iyi çözüm değildir.

Adım 3: C uç noktasını seç ve 2. adıma git.

Adım 2: D uç noktası C noktasına komşudur. D noktasında amaç fonksiyonu z=100 olduğundan C noktası en iyi çözüm değildir.

Adım 3: D uç noktasını seç ve 2. adıma git.

Adım 2: E uç noktası D uç noktasına komşudur. E uç noktasında amaç fonksiyonu (z=92) D uç noktasından daha küçük olduğundan D uç noktası en iyi çözümdür.



Şekil 3.3 Komşu uç noktalar

Görüldüğü gibi simpleks algoritması her defasında sadece daha iyi olan bir uç noktaya giderek en iyi çözüme ulaşmaktadır. Büyük problemlerde uygun çözüm alanındaki uç nokta sayısı hızlı bir şekilde artmaktadır. Buna rağmen simpleks algoritması bu uç noktaların büyük bir kısmını eleyerek çözüme daha hızlı bir şekilde ulaşmaktadır.

3.1 Standart Biçim

Simpleks algoritması ile en iyi çözümün nasıl bulduğunu geometrik olarak açıkladıktan sonra bu bölümde algoritmanın adımlarında gerekli cebirsel işlemleri açıklanacaktır.

Simpleks algoritması ile problem çözülürken DP modellerinin **standart biçim** olarak isimlendirilen özel bir yapıya dönüştürülmesi gerekmektedir. Standart biçimde DP modelindeki **tüm kısıtlar eşitlik** ve **karar değişkenleri negatif değer almayacak** şekilde düzenlenir. Standart biçimde DP modeli aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} Enb\left(Enk\right) z &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad &\quad \vdots \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Uygulamada karşılaşılan pek çok problemde kısıtlar (≤) veya (≥) şeklindedir. Fakat bu modeller uygun işlemlerle standart biçime dönüştürülebilir.

Eğer bir modeldeki *i*. kısıt (≤) şeklinde ise $s_i \geq 0$ olacak şekilde bu kısıta yeni bir değişken ilave edilir. İlave edilen bu yeni değişkene **aylak değişken** denir.

Örneğin BNR probleminde $3x_1+x_2 \le 75$ şeklindeki ağaç kısıtını eşitlik olarak ifade etmek için s_1 aylak değişkeni ilave edilir.

$$3x_1+x_2+s_1=75$$

Bu eşitlikte $3x_1+x_2$ kullanılan ağaç miktarını, s_1 kullanılmayan ağaç miktarını temsil etmektedir.

Benzer şekilde, $4x_1+3x_2 \le 120$ şeklindeki işçilik kısıtına s_2 aylak değişkeni ilave edilir.

$$4x_1+3x_2+s_2=120$$

Bu eşitlikte $4x_1+3x_2$ kullanılan işçilik saatini, s_2 kullanılmayan işçilik saatini temsil etmektedir.

Genel olarak, $\le$ şeklindeki kısıtlara ilave edilen aylak değişkenler kullanılmayan kaynak miktarlarını temsil etmektedir. Bu nedenle, aylak değişkenler negatif değer alamazlar.

$x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$

Aylak değişkenler kullanılmayan kaynak miktarlarını temsil ettiğinden amaç fonksiyonuna bir katkı sağlamazlar. Bu nedenle aylak değişkenlerin amaç fonksiyonundaki katsayıları sıfırdır. BNR probleminin amaç fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$Enb\ z=12x_1+8x_2+0s_1+0s_2$

Bu açıklamalar doğrultusunda BNR problemi standart biçimde aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} &Enb\ z=12x_1+8x_2\\ &3x_1+x_2+s_1=75\\ &4x_1+3x_2+s_2=120\\ &x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Eğer bir modeldeki *i.* kısıt (≥) şeklinde ise bu kısıttan $s_i \ge 0$ olmak üzere bir **artık değişken** çıkartılır.

Örneğin OMP problemindeki $0.4x_1+0.4x_2 \ge 4000$ şeklindeki benzin kısıtını eşitlik olarak ifade etmek için s_1 artık değişkeni çıkartılarak eşitlik elde edilir.

$$0.4x_1+0.4x_2-s_1=4000$$

Bu eşitlikte $0.4x_1+0.4x_2$ üreitilen toplam benzin miktarı iken s_1 üretilen fazla benzin miktarını temsil etmektedir. $0.1x_1+0.2x_2 \ge 1500$ şeklindeki jet yakıtı kısıtını eşitlik olarak ifade etmek için s_2 artık değişkeni çıkartılır.

$$0.1x_1+0.2x_2-s_2=1500$$

Bu eşitlikte s_2 üretilen fazla jet yakıtı miktarını temsil etmektedir. $0.4x_1+0.3x_2\geq 2400$ şeklinde fuel-oil (yağ yakıt) kısıtını eşitlik olarak ifade etmek için s_3 artık değişkeni çıkartılır.

$$0.4x_1+0.3x_2-s_3=2400$$

Bu eşitlikte s_3 üretilen fazla fuel-oil (yağ -yakıt) miktarını temsil etmektedir. Bu örnekte olduğu gibi artık değişkenler sağ taraf sabitini aşan miktarları temsil ettiğinden negatif değerler alamazlar.

$$s_1, s_2, s_3\geq 0$$

Son olarak, $x_1\leq 10000$ ve $x_2\leq 8000$ kısıtlarını eşitlik olarak ifade etmek için bu kısıtlara s_4 ve s_5 aylak değişkenleri ilave edilir.

$$x_1+s_4=10000$$

$$x_2+s_5=8000$$

Artık değişkenler fazlalıkları temsil ettiği için amaç fonksiyonuna katkı sağlamazlar. Bu nedenle OMP problemin amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$Enk\, z=45x_1+40x_2$

OMP problemini standart biçimde bir bütün olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$Enk\, z=45x_1+40x_2$	
$0.4x_1+0.4x_2-s_1=4000$	(Benzin kısıtı)
$0.1x_1+0.2x_2-s_2=1500$	(Jet yakıtı kısıtı)
$0.4x_1+0.3x_2-s_3=2400$	(Fuel-oil kısıtı)
$x_1+s_4=10000$	(A ülkesi için ham petrol kısıtı)
$x_2+s_5=8000$	(B ülkesi için ham petrol kısıtı)
$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\geq 0$	

3.2 Standart Biçimde Çözümler

Standart biçime dönüştürülmüş DP modelinde aylak ve artık değişkenler dahil olmak üzere toplam n değişken ve işaret kısıtları hariç olmak üzere toplam m kısıt bulunur. İşaret kısıtları dikkate alınmadan model çözüldüğünde aşağıdaki durumlardan birisi ile karşılaşılabilir.

- Eğer $n<m$ ise problemin ya bir çözümü vardır ya da çözümü yoktur

- Eğer $n \geq m$ ise problemin çözümü için üç farklı durum söz konusu olabilir:
    - Problemin çözümü yoktur,
    - Çözüm tektir,
    - Sonsuz sayıda çözüm vardır.

DP'de modele ilave edilen aylak ve/veya artık değişkenler sebebiyle standart biçimde genellikle $n \geq m$ koşulu sağlanmaktadır.

Standart biçimde $n \geq m$ ve sonsuz sayıda çözüm olduğu varsayılsın. Bu çözümleri ilk olarak **uygun** ve **uygun olmayan çözümler** olarak ikiye ayırılabilir. Standart biçimde tüm kısıtlar eşitlik olarak ifade edildiği için bir çözümün uygun olup olmadığını belirlemek için işaret kısıtlarına bakılır. Eğer herhangi bir çözümde değişkenlerin tümü **pozitif ve/veya sıfır** (negatif değil) ise bu çözüme **uygun çözüm**, aksi durumda **uygun olmayan çözüm** denir. Uygun çözümlerin aynı zamanda problemdeki tüm kısıtları sağlayan çözümler olduğu hatırlanmalıdır.

Simpleks algoritması uygun çözümler arasından sadece uç noktalara karşı gelen çözümlerle ilgilenmektedir. Bu nedenle hem uygun hem de uç noktalara karşı gelen çözümler için bir sınıflandırmaya daha ihtiyaç bulunmaktadır. Bunun için önce Tanım 3.3 deki **temel çözüm** kavramı ortaya konulmalıdır.

Tanım 3.3 Standart biçimde $n \geq m$ olmak üzere $n - m$ değişkene sıfır değeri verilerek bulunan çözüme **temel çözüm** denir.

Temel çözümde yer alan değişkenler **temel değişkenler** ve yer almayan değişkenler **temel dışı değişkenler** olmak üzere ikiye ayırılır (Tanım 3.4).

Tanım 3.4 Temel çözümde sıfır ataması yapılan değişkenlere **temel dışı,** diğer değişkenlere ise **temel değişken** denir.

Temel çözümler ve uygun çözümler birlikte değerlendirildiğinde, negatif olmayan tüm temel çözümler **temel uygun çözüm** olarak tanımlanır. Temel uygun çözümler simpleks algoritmasında önemlidir çünkü uç noktalar ile temel uygun çözümler arasında Teorem 3.2'de belirtilen ilişki bulunur.

Tanım 3.5 Eğer bir temel çözümde karar değişkenleri pozitif ve/veya sıfır (negatif değil) ise bu çözüme **temel uygun çözüm denir**.

Temel uygun çözümler Teorem 3.2 nedeniyle çözüm süreci için oldukça önemlidir.

Teorem 3.2 Standart biçimde bir DP modeli için her temel uygun çözüme bir uç nokta, her uç noktaya da bir temel uygun çözüm karşı gelir.

Bu teoremin ispatına burada yer verilmemiştir. Teorem 3.2'de belirtildiği gibi temel uygun çözümler aynı zamanda bir uç nokta olduğundan en iyi çözüm bir temel uygun çözüm olmak zorundadır.

BNR problemi için tüm temel çözümleri ve temel uygun çözümleri hesaplamak mümkündür. Standart biçimde problemde $n=4$ değişken ve $m=2$ kısıt bulunmaktadır. Herhangi bir temel çözümde $m=2$ adet temel değişken ve $n-m=2$ adet temel dışı değişken bulunur. Tablo 3 .1'de farklı temel ve temel dışı değişken kombinasyonları için Model 3.2'nin çözümünden elde edilen temel çözümler, bu çözümlerin uygun olup olmadığı ve bu çözümlere karşı gelen amaç fonksiyonu değerleri verilmektedir. Tablo 3 .1'de A, B, C ve D olarak isimlendirilen temel çözümlerde hiç negatif değer alan karar değişkeni olmadığı için bu çözümler aynı zamanda temel uygun çözümlerdir.

Tablo 3.1 BNR problemi için temel ve temel uygun çözümler

Temel çözüm	Temel dışı değişkenler	Temel değişkenler	Uygun çözüm?	Amaç fonksiyonu
A	$x_1=x_2=0$	$s_1=75, s_2=120$	Evet	0
B	$x_1=s_2=0$	$x_2=40, s_1=35$	Evet	320
C	$s_1=s_2=0$	$x_1=21, x_2=12$	Evet	348
D	$x_2=s_1=0$	$x_1=25, s_2=20$	Evet	300
E	$x_2=s_2=0$	$x_1=30, s_1=-15$	Hayır	- - -
F	$x_1=s_1=0$	$x_2=75, s_2=-105$	Hayır	- - -

Tablo 3 .1'deki temel uygun çözümlerin her birisinin Error: Reference source not found'daki UÇA'nın bir uç noktasına karşı geldiğine dikkat edilmelidir.

Bir doğrusal karar probleminin en iyi çözümü araştırılırken tüm temel uygun çözümler tespit edilerek bunlar içinden amaç fonksiyonunun en iyi değerini veren çözüm bulunabilir. Bu yöntem **tam sayım** yöntemi olarak isimlendirilir. Tam sayım yöntemi dikkate alındığında, "Bir DP probleminde kaç tane temel uygun çözüm vardır?" sorusu araştırılmalıdır. Değişken (n) ve kısıt sayısına (m) bağlı olarak temel çözüm sayısını aşağıdaki formülle hesaplamak mümkündür:

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Örneğin kısıt sayısı m = 30 ve karar değişkeni sayısı n = 100 olan bir modelde, $2{,}937\times10^{23}$ temel çözüm vardır. Bu çözümlerin bir kısmının temel uygun çözüm olmadığı düşünülse bile bu büyüklükte bir problemi tam sayım yöntemi kullanarak çözmek mevcut bilgisayar teknolojisi ile imkânsızdır. Kaldı ki uygulamada karşılaşılan problemler çok daha büyüktür. Bu nedenle problemin çözümünde genellikle simpleks algoritması kullanılmaktadır. Doğrusal programlama problemlerini çözmek için **iç nokta algoritması** olarak isimlendirilen bir başka algoritma daha mevcuttur.

Simpleks algoritması sadece belli sayıdaki temel uygun çözümü dikkate alarak çok hızlı bir şekilde en iyi çözümü bulmaktadır. Yapılan çalışmalar simpleks algoritmasının ortalama olarak kısıt sayısının 3 katı kadar bir yineleme sonucunda en iyi çözüme ulaştığını göstermektedir (Winston, 1991).

3.3 Simpleks Algoritması

Simpleks algoritması ile en iyi çözüm araştırılırken bir temel uygun çözümden başlanır ve komşu bir temel uygun çözüme gidilir. DP'de uygun çözüm alanının konveks ve amaç fonksiyonunun doğrusal olmasından dolayı herhangi bir uç noktada ulaşılan çözüm ile komşu temel uygun çözümler karşılaştırıldığında, amaç fonksiyonu bu komşu çözümlerde daha kötü ise mevcut çözüm aynı zamanda en iyi çözümdür. Bu nedenle, simpleks algoritması ile daha iyi bir komşu temel uygun çözüm bulanamayıncaya kadar komşu uç noktalar araştırılmaya devam edilir. Algoritmanın adımları aşağıdaki şekilde verilebilir:

Adım 0: Modeli standart biçime dönüştür

Adım 1: Bir uç nokta seç

Adım 2: Bu uç noktadaki amaç fonksiyonu değerini hesapla

Adım 3: Eğer en az bir komşu uç noktanın amaç fonksiyonu değeri daha iyi ise 4. Adıma git değilse en iyi çözüm bulunmuştur.

Adım 4: Amaç fonksiyonu daha iyi olan bir komşu uç noktayı seç ve 2. Adıma git

Tanım 3.5'de iki temel uygun çözümün birbirine komşu olması için gerekli şart verilmektedir.

Tanım 3.5 İki temel uygun çözümde $m-1$ temel değişken ortak ise bu iki çözümü sağlayan uç noktalar birbirine komşudur.

Bir başka ifade ile iki temel uygun çözümde sadece bir temel değişken farklılık gösteriyorsa bu iki çözümü sağlayan uç noktalar birbirine komşudur. Tablo 3 .1'de BNR probleminde, A temel uygun çözümünde temel değişkenler s_1 ve s_2, B temel uygun çözümünde temel değişkenler x_2 ve s_1 olarak belirlenmiştir. Her iki çözümde s_1 temel değişkeni ortak olduğundan A ve B çözümleri birbirine komşudur. A çözümünden B çözümüne geçmek için s_2'nin temelden çıkarılıp x_2'in temel değişken olarak çözüme alınması gerekir. Genel olarak bir temel uygun çözümden komşu bir temel uygun çözüme gitmek için mevcut çözümdeki bir değişkenin sıfır değerini alarak çözümden çıkması yerine bir değişkenin çözüme girmesi gerekir.

BNR problemine simpleks algoritmasını uygulamak için adımları takip ediniz. İlk adım olarak problem standart biçime dönüştürülür. Standart biçimde problem aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$Enb\, z = 12x_1 + 8x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

$$3x_1 + x_2 + s_1 = 75$$

$$4x_1 + 3x_2 + s_2 = 120$$

$$x_1, x_2, s_2, s_2 \geq 0$$

Burada z toplam kârı temsil etmektedir. Simpleks çözümünü geliştirmek için z 'de bir karar değişkeni olarak ele alınmalıdır ve böylece amaç fonksiyonunu aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$z - 12x_1 - 8x_2 + 0s_1 + 0s_2 = 0$$

Bu düzenleme sonucunda aşağıdaki denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde amaç fonksiyonunu R0 ve kısıtlara karşı gelen denklemler R1 ve R2 olarak isimlendirmek süreci izlemeyi kolaylaştırır.

$$z - 12x_1 - 8x_2 + 0s_1 + 0s_2 = 0 \qquad \text{(R0)}$$

$$3x_1 + x_2 + s_1 = 75 \qquad \text{(R1)}$$

$$4x_1 + 3x_2 + s_2 = 120 \qquad \text{(R2)}$$

Problem standart biçime dönüştürüldükten sonra ikinci adımda bir temel uygun çözümün bulunması gerekir. Standart biçimde n=4 değişken ve m=2 denklem olduğundan, temel değişken sayısı $m=2$ ve temel dışı değişken sayısı $n-m=2$ olarak hesaplanır. Bu nedenle 2 değişkene sıfır ataması yapılarak kalan iki değişken için çözüm aranmalıdır. Ayrıca bu çözümün temel uygun çözüm olması için temel değişkenlerin negatif olması engellenmelidir. Örneğin yukarıdaki modelde s_1 ve s_2 temel değişkenler olarak kullanıldığında $x_1 = x_2 = 0$ için R1'den, $s_1=75$ ve R2'den $s_2=120$ olarak hesaplanır. s_1 ve s_2 pozitif değerler aldığı için bu bir temel uygun çözümdür. Bu örnekte olduğu gibi genel olarak standart biçimde $(\leq)$ şeklindeki kısıtlara eklenen aylak değişkenleri başlangıç çözümde temel değişken olarak kullanılır. Eğer modelde (>=) veya (=) şeklinde kısıtlar var ise başlangıç çözümün bulunması için yapay değişken kullanmak zorunda kalınır.

Şimdi bu çözümün en iyi çözüm olup olmadığını belirlenmelidir. R0'da $x_1 = x_2 = 0$ ve $s_1 = 75$ ve $s_2 = 120$ için $z = 0$ değerini almaktadır. Acaba z'yi daha büyük yapan bir başka çözüm var mıdır? Bunu anlamak için çözümde yer almayan x_1 ve x_2'nin pozitif değerler alarak çözüme girmesi durumunda amaç fonksiyonun nasıl değiştiğine bakarak karar veribilir. R0'da x_1'in alacağı pozitif değerler için amaç fonksiyonunun değeri 12 birim artmaktadır. Benzer şekilde x_2'nin alacağı pozitif değerler için amaç fonksiyonun değeri 8 birim artmaktadır. Amaç fonksiyonunun enbüyük değeri araştırıldığından mevcut çözüm en iyi çözüm değildir. Komşu bir temel uygun çözüme gitmek için x_1 veya x_2 değişkenlerinden birisinin çözüme alınması $s_1$veya s_2 değişkenlerinden birisinin çözümden çıkması gerekir. İncelenen örnekte x_1 amaç fonksiyonunda daha fazla artış sağladığı için önce x_1'i çözüme alınmalıdır.

Genel olarak amaç fonksiyonuna karşı gelen R0'daki karar değişkenlerin katsayılarına ***indirgenmiş maliyet*** denir. İndirgenmiş maliyetler bir değişkenin çözüme alınması durumunda amaç fonksiyonun nasıl değişeceğini gösterir. Eğer bir değişkenin indirgenmiş maliyeti negatif ise bu değişkenin çözüme alınması durumunda amaç fonksiyonun değeri artar, pozitif ise amaç fonksiyonun değeri azalır. Bu nedenle enbüyükleme problemlerinde bütün indirgenmiş maliyetler pozitif ise mevcut çözüm en iyi çözümdür. Enküçükleme problemlerinde ise bütün indirgenmiş maliyetler negatif ise mevcut çözüm en iyi çözümdür. Simpleks algoritmasında bu durum ***en iyilik koşulu*** olarak adlandırılır. Bir tabloda eğer en iyilik koşulu sağlanmıyor ise mutlak değerce enbüyük indirgenmiş maliyete sahip değişken çözüme alınır.

Çözüme girecek değişken belirlendikten sonra hangi temel değişkenin çözümden çıkağının belirlenmesi gerekir. x_1 çözüme girerken mevcut durumda s_1 ve s_2 temel değişkenlerinden birisinin sıfır değerini alarak çözümden çıkması ve çözümde kalan diğer değişkenin ise negatif değer almaması gerekir. Çözümden hangi değişkenin çıkacağını belirlemek için Denklem 1 ve 2 kullanılabilir. $x_2 = 0$ olduğunda bu denklemler aşağıdaki gibi yazıbilir.

$$3\,x_1 + s_1 = 75$$

$$4\,x_1 + s_2 = 120$$

Birinci denklemden eğer $s_1 = 0$ değerini alarak çözümden çıkar ise $x_1 = \frac{75}{3} = 25$ değerini alır. İkinci denklemden $s_2 = 0$ değerini alarak çözümden çıkar ise $x_1 = \frac{120}{4} = 30$ değerini alır. Bu iki sonuç birlikte değerlendirildiğinde x_1 en fazla 25 değerini alır ve böylece $s_1 = 0$ değerini alarak çözümden çıkar.

DP'de çözümden çıkacak değişkeni belirlemek için yapılan bu işlemlere

uygunluk testi denir. Uygunluk testi ile diğer temel değişkenlerin negatif değer almadan çözüme girecek değişkene verilebilecek maksimum değer ve çözümden hangi değişkenin çıkacağı tespit edilir.

Şimdi x_1'in çözüme girmesi ile yeni temel uygun çözüm hesaplanabilir. Bunun için Gauss yok etme yöntemi kullanılabilir. Bunun için x_1 sadece Denklem 1'de bırakılır, diğerlerinde yok edilir. İlk olarak Denklem 1, 3 ile bölünerek Denklem 1'e ait yeni şekil elde edilir.

$$x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}s_1+0s_2=25 \qquad (1')$$

Denklem 0'daki x_1'i yok etmek için Denklem $1'$, 12 ile çarpılır ve Denklem 0 ile toplanır.

$$z-0x_1-4x_2+4s_1+0s_2=300 \qquad (0')$$

Denklem 2'deki x_1'i yok etmek için Denklem $1'$, (-4) ile çarpılır ve Denklem 2 ile toplanır.

$$0x_1+\frac{5}{3}x_2-\frac{4}{3}s_1+s_2=20 \qquad (2')$$

Denklem $0'$, $1'$ ve $2'$ den temel uygun çözüm $x_2=s_1=0$ için $x_1=25$, $s_2=20$ ve amaç fonksiyonu $z=300$ olarak hesaplanır.

Elde edilen yeni çözüm en iyi çözüm olup olmadığını belirleyelim. $(0')$ denkleminde x_2'nin katsayısı -4 olduğundan x_2'nin pozitif değerleri için amaç fonksiyonu arttığından mevcut çözüm en iyi çözüm değildir ve x_2'nin çözüme girmesi gerekir. Bu durumda x_1 veya s_2 değişkenlerinden birisinin sıfır değerini alarak çözümden çıkması gerekir. $s_1=0$ olduğundan $(1')$ ve $(2')$ denklemleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$x_1+\frac{1}{3}x_2=25$$

$$\frac{5}{3}x_2+s_2=20$$

Birinci denklemden $x_1=0$ için $x_2=\frac{25}{1/3}=75$ veya ikinci denklemden $s_2=0$ için $x_2=\frac{20}{5/3}=12$ olur. Bu nedenle $x_2=12$ değerini alarak çözüme girerken $s_2=0$ değerini alarak çözümden çıkar. Şimdi x_2'in çözüme girmesi ile yeni temel uygun çözümü bulalım. Bunun için ilk olarak $(2')$ denklemini 5/3'e bölelim. Bu durumda $(2'')$ denklemi elde edilir.

$$0x_1+x_2-\frac{4}{5}s_1+\frac{3}{5}s_2=12 \qquad (2'')$$

$(0')$ denkleminden x_2'i yok etmek için $(2'')$ denklemini 4 ile çarpıp $(0')$ denklemi ile toplayalım. Bu durumda aşağıdaki $(0'')$ denklemi elde edilir.

$$z+0x_1+0x_2+\frac{4}{5}s_1+\frac{12}{5}s_2=348 \qquad (0'')$$

$(1')$ denkleminden x_2'i yok etmek için $(2'')$ denklemini -1/3 ile çarpıp $(1')$ denklemi ile toplayalım. Bu durumda aşağıdaki $(1'')$ denklemi elde edilir.

$$x_1+0x_2+\frac{3}{5}s_1-\frac{1}{5}s_2=21 \qquad (1'')$$

$(0'')$, $(1'')$ ve $(2'')$ denklemlerinden temel uygun çözüm $s_1=s_2=0$ için $x_1=21$, $x_2=12$ ve amaç fonksiyonu $z=348$ olarak bulunur. Şimdi bu çözümün en iyi çözüm olup olmadığını belirleyelim. $(0'')$ denkleminde s_1 ve s_2 temeldışı değişkenlerin katsayıları pozitif olduğundan bulunan çözüm aynı zamanda en iyi çözümdür. Bu nedenle simpleks algoritması sonlandırılır.

3.4 Simpleks Tablosu

Simpleks algoritmasının adımlarını daha kolay bir şekilde yapılabilmek için Tablo 3 .2'de verilen simpleks tablosu kullanılır. Simpleks tablosunda amaç fonksiyonu ve kısıtlardaki katsayılar yer alır. Tablonun ilk satırında amaç fonksiyonundaki katsayılar bulunmaktadır ve bu satır z satırı olarak isimlendirilir. Tablonun diğer satırları bir temel değişken karşı gelir ve mevcut çözümde kısıtların katsayılarını içerir.

Tablo 3.2 Simpleks Tablosu

Temel değişkenler (TD)	**Karar Değişkenleri Listesi**	**Sağ taraf (ST)**
z	Amaç fonksiyonu katsayıları	Amaç fonksiyonun değeri
Temel değişkenler listesi	Kısıtlardaki katsayılar	Temel değişkenlerin değerleri

Simpleks algoritması ile çözüm araştırılırken önce bir başlangıç simpleks tablosu oluşturulur ve daha sonra en iyi çözüm bulununcaya kadar bu tablolar güncellenir.

3.4.1 Başlangıç Simpleks Tablosunun Oluşturulması

Simpleks algoritması ile DP problemini çözmek için önce bir başlangıç simpleks tablosunun oluşturulması gerekmektedir. Başlangıç simpleks tablosundaki çözümün bir temel uygun çözüm olması gerekmektedir.

Başlangıç uygun çözüm tüm kısıtları (≤) ve amaç fonksiyonu enbüyükleme olan problemlerde direkt olarak elde edilebilmektedir. Diğer problemlerde başlangıç uygun çözümü elde etmek için bazı düzenlemeler yapılması gerekmektedir. Bu düzenlemeler izleyen bölümlerde açıklanacaktır.

Başlangıç simpleks tablosunun oluşturulmasını tüm kısıtları (≤) ve amaç fonksiyonu enbüyükleme olan bir problem için açıklayalım. BNR probleminde kısıtları eşitlik olarak ifade etmek için s_1 ve s_2 aylak değişkenleri modele ilave edilmişti. Eğer s_1 ve s_2 temel değişken olarak alınır ise $s_1=75$ ve $s_2=120$ olur. Her iki değişken pozitif olduğundan bu çözüm aynı zamanda bir temel uygun çözümdür. Bu nedenle başlangıç simpleks tablosunu s_1 ve s_2 değişkenlerini temel değişken alarak oluşturabiliriz. Tablo 3 .3'te BNR probleminin başlangıç simpleks tablosu verilmektedir.

Tablo 3.3 Başlangıç simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	ST
z	-12	-8	0	0	0
s_1	3	1	1	0	75
s_2	4	3	0	1	120

Tablo 3 .3'te ilk satırda amaç fonksiyonundaki katsayıları yer almaktadır. Bu satır z satırı olarak isimlendirilir. z satırı oluşturulurken amaç fonksiyonun aşağıdaki gibi ifade edildiğine dikkat edin.

$$z-12x_1-8x_2+0s_1+0s_2=0$$

Tablo 3 .3'te ikinci ve üçüncü satırlarda sırasıyla ağaç ve işçilik kısıtına ait katsayılar bulunmaktadır. ST sütununda temel değişkenlerinin ve amaç fonksiyonunun mevcut değerleri yer almaktadır. Başlangıç simpleks tablosu için bu değerler $s_1=75$, $s_2=120$ ve amaç fonksiyonu $z=0$ olarak bulunmuştur. Tüm temel değişkenler pozitif olduğundan temel uygun çözüm şartı sağlanmaktadır. Bu tabloda dikkat edilmesi gereken diğer bir husus z satırında temel değişkenlerin katsayılarının sıfır olması ve kısıtlarda temel değişkenlere karşı gelen sütunların birim matris oluşturmasıdır.

Yukarıda BNR problemi için açıklanan bu özellikler aslında tüm başlangıç simpleks tabloları için geçerlidir. Genel olarak, bir problemin başlangıç simpleks tablosunun oluşturulabilmesi için aşağıdaki koşulların sağlanması gereklidir.

- Temel değişkenler sadece bir kısıtta yer almalı ve katsayısı (+1) olmalı
- z satırında temel değişkenlerin katsayısı sıfır olmalı
- Çözümde temel değişkenler negatif değer almamalı.

3.4.2 En iyilik Koşulu

Başlangıç simpleks tablosu oluşturulduktan sonra bu tablodaki çözümün en iyi olup olmadığının belirlenmesi gerekir. Bunun için simpleks tablosunda z satırındaki değerlere bakılır. z satırındaki bu değerler daha önce açıklandığı gibi indirgenmiş maliyetleri göstermektedir. Enbüyükleme probleminde eğer z satırındaki tüm temeldışı değişkenlerin indirgenmiş maliyetleri pozitif ise mevcut tablodaki çözüm aynı zamanda en iyi çözümdür. Enküçükleme probleminde ise temeldışı değişkenlerin indirgenmiş maliyetleri negatif ise mevcut tablodaki çözüm en iyi çözümdür. Simpleks algoritmasında bu özellik ***en iyilik koşulu*** olarak isimlendirilir. Bir tabloda en iyilik koşulu sağlanmıyor ise bu koşulu sağlamayan temel dışı değişkenler içinden mutlak değerce en büyük indirgenmiş maliyete sahip olan değişken temele girecek değişken olarak belirlenir ve temele girecek değişkenin bulunduğu sütun ***anahtar sütun*** olarak isimlendirilir.

Tablo 3 .4'te z satırındaki x_1 ve x_2'ye ait indirgenmiş maliyetler -12 ve -8 olduğundan en iyilik koşulu sağlanmamaktadır. Bu nedenle mutlak değerce en büyük değere sahip olan x_1 temele girecek değişken olarak belirlenir ve x_1 sütunu anahtar sütun olarak işaretlenir.

Tablo 3.4 Başlangıç simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	ST
Z	-12	-8	0	0	0
s_1	3	1	1	0	75
s_2	4	3	0	1	120

3.4.3 Uygunluk Testi

Çözüme girecek değişken belirlendikten sonra çözümden çıkacak değişkenin belirlenmesi gerekmektedir. Bu amaçla simpleks tablosunda sağ taraf (ST) sütunundaki değerler anahtar sütundaki değerlere bölünerek temelden çıkacak değişkenler için oranlar belirlenir. Bu oranlar aslında temel girecek değişkenin alabileceği maksimum değerleri göstermektedir. Temele girecek değişkenin pozitif olması gerektiğinden anahtar sütunda sadece **pozitif** değerler için oranlar hesaplanmalıdır. Bir değişken çözüme girerken, temeldeki bir değişkenin de sıfır değerini alarak çözümden çıkması ve temelde kalan diğer değişkenlerin negatif olmaması gerektiğinden için en küçük orana sahip satırdaki temel değişken çözümden çıkarılır ve bu değişkenin bulunduğu satır **anahtar satır** olarak isimlendirilir. Simpleks algoritmasında çözümden çıkacak değişkenin belirlenmesi amacıyla yapılan bu işlemlere **uygunluk** veya **minimum oran testi** denir. Uygunluk testi matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}}, a_{ij} > 0 \right\}$$

Burada θ: çözüme girecek değişkenin alacağı değer, b_i: tablonun i. satırındaki sağ taraf sabiti, a_{ij}: j anahtar sütununun i. satırındaki katsayıdır.

BNR probleminde x_1 temele girecek değişken olarak belirlendiğinden anahtar sütundaki katsayılar a_{11}=3 ve a_{21}=4, sağ taraf sabitleri b_1=75 ve b_2=120 dir. Bu değerler yukarıda yerine konulur ise minimum oran aşağıdaki gibi bulunur

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{75}{3}, \frac{120}{4} \right\} = 25$$

Tablo 3 .5'de bu oran birinci satıra karşı geldiğinden s_1 çözümden çıkacak değişken olarak belirlenir ve birinci satır anahtar satır olarak işaretlenir.

Tablo 3.5 Temelden çıkacak değişkenin belirlenmesi

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	ST	Oran
Z	-12	-8	0	0	0	---
s_1	3	1	1	0	75	75/3=25
s_2	4	3	0	1	120	120/4=30

3.4.4 Yeni simpleks tablosunun oluşturulması

Temele girecek ve çıkacak değişken belirlendikten sonra bu yeni temel değişkenler için tablonun yeniden güncellenmesi gerekmektedir. Bunun için anahtar sütundaki değerler **temel satır işlemleri** ile birim vektöre dönüştürülür. Böylece temel değişkenlerin ve amaç fonksiyonunun alacağı değerleri hesaplanmış olur. Temel satır işlemleri yapılırken aşağıdaki adımlar takip edilir.

Adım 1: Anahtar sütun ve anahtar satırın kesişimindeki değeri **anahtar eleman (pivot)** olarak belirle. Anahtar satırı anahtar elemana bölerek yeni anahtar satırı oluştur.

$$Yeni\, anahtar\, satır = \frac{Anahtar\, satır}{Anahtar\, eleman}$$

Adım 2: Diğer satırlar için aşağıdaki işlemleri yap.

$$yeni\, i.\, satır = -a_{ij}\, yeni\, anahtar\, satır + eski\, i.\, satır$$

Burada a_{ij}: anahtar sütundaki i. değerdir.

Şimdi BNR problemi için temel satır işlemlerini yaparak yeni bir simpleks tablosu oluşturalım. Tablo 3 .5'de birinci satır anahtar satır ve birinci sütun anahtar sütun olduğundan anahtar eleman 3 olur. Bu nedenle anahtar satırı 3'e bölerek yeni anahtar satırı oluşturalım.

	x_1	x_2	s_1	s_2	ST
Eski anahtar satır	3	1	1	0	75
Yeni anahtar (birinci) satır	1	1/3	1/3	0	25

Yeni tablonun z satırı için aşağıdaki satır işlemi yapılır.

$$\text{yeni } z \text{ satırı} = (12) \times \text{yeni anahtar satır} + \text{eski } z \text{ satırı}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	ST
Yeni anahtar (birinci) satır	1	1/3	1/3	0	25
Eski z satırı	-12	-8	0	0	0
Yeni z satırı	0	-4	4	0	300

Son olarak yeni tablonun ikinci satırı için aşağıdaki satır işlemi yapılır.

$$\text{yeni ikinci satır} = (-\ 4) \times \text{yeni anahtar satır} + \text{eski ikinci satır}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	ST
Yeni anahtar satır	1	1/3	1/3	0	25
Eski ikinci satır	4	3	0	1	120
Yeni ikinci satır	0	5/3	-4/3	1	20

Temel satır işlemleri sonucunda Tablo 3 .6'daki simpleks tablosu elde edilir. Tabloda temel değişkenler $x_1=25$ ve $s_2=20$ değerlerini almış ve amaç fonksiyonu $z=300$ olarak bulunmuştur. z satırında x_2'nin indirgenmiş maliyeti (-4) olduğundan en iyilik şartı sağlanmamaktadır. Bu nedenle x_2 çözüme girecek değişken ve oran testi sonucunda s_2 temelden çıkacak değişken olarak belirlenir.

Tablo 3.6 Yeni simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	ST	
Z	0	-4	4	0	300	Oran
x_1	1	1/3	1/3	0	25	25/(1/3)=75
s_2	0	5/3	-4/3	1	20	120/(5/3)=12

x_2'nin çözüme girmesi durumu için yen simpleks tablosunu oluşturmak için Tablo 3 .6'daki anahtar satırı anahtar eleman 5/3'e bölerek yeni anahtar satırı oluşturalım.

	x_1	x_2	s_1	s_2	ST
Eski anahtar (ikinci) satır	0	5/3	-4/3	1	20
Yeni anahtar (ikinci) satır	0	1	-4/5	3/5	12

Daha sonra yeni tablonun z satırını belirleyelim. Tablo 3 .6'da anahtar sütunda z satırındaki (-4)’ü sıfır yapmak için aşağıdaki satır işlemi yapılır.

Yeni z satırı = (4) × yeni anahtar satır + eski z satırı

	x_1	x_2	s_1	s_2	ST
Yeni anahtar satır	0	1	-4/5	3/5	12
Eski z satırı	0	-4	4	0	300
Yeni z satırı	0	0	4/5	12/5	348

Birinci satır için aşağıdaki satır işlemi yapılır.

Yeni birinci satır = (- 1/3) × yeni ikinci satır + eski birinci satır

	x_1	x_2	s_1	s_2	ST
Yeni anahtar satır	0	1	-4/5	3/5	12
Eski birinci satır	1	1/3	1/3	0	25
Yeni birinci satır	1	0	3/5	-1/5	21

Temel satır işlemleri sonucunda Tablo 3 .7’deki simpleks tablosu elde edilir. Bu tabloda z satırındaki tüm indirgenmiş maliyetler pozitif olduğundan en iyilik şartı sağlanmaktadır. Bu nedenle işlemlere son verilir. En iyi çözümde $x_1^{¿}=21$, $x_2^{¿}=12$ ve $z^{¿}=348$ olarak bulunur.

Tablo 3.7 Son simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	ST
Z	**0**	**0**	**4/5**	**12/5**	**348**
x_1	1	0	3/5	-1/5	21
x_2	0	1	-4/5	3/5	12

Yukarıdaki açıklamalar doğrultusunda **enbüyükleme problemi** için simpleks algoritmasının adımları aşağıdaki açıklayabiliriz:

Adım 0: Modeli standart biçime dönüştür

Adım 1: Başlangıç simpleks tablosunu oluştur

Adım 2: **(En iyilik şartı)** Eğer z satırında temeldışı değişkenlerin indirgenmiş maliyetleri pozitif ise mevcut çözüm en iyi çözümdür dur, değilse negatifler içinden indirgenmiş maliyeti mutlak değerce en büyük olan değişkeni temele girecek değişken olarak ve karşı gelen sütunu anahtar sütun olarak belirle

Adım 3: **(Uygunluk testi)** Sağ taraftaki değerleri anahtar sütundaki pozitif değerlere böl, en küçük orana sahip olan değişkeni temelden çıkacak değişken olarak belirle

Adım 4: Satır işlemleri yaparak yeni simpleks tablosunu oluştur ve 2. adıma git

3.5 Genel Modelin Simpleks Algoritması ile Çözümü

Bir önceki bölümde açıklandığı gibi bir modeldeki tüm kısıtlar $(\leq)$ şeklinde ise standart biçimde bu kısıtlara ilave edilen aylak değişkenler temel değişken olarak kullanılmaktadır. Fakat bir modelde bazı kısıtlar $(\geq)$ veya $(=)$ şeklinde olabilir. Örneğin i. kısıt $(\geq)$ şeklinde ise kısıtı eşitlik olarak ifade etmek için s_i artık değişkeni bu kısıttan çıkarılır. Artık değişkenin katsayısı (-1) olduğundan başlangıç simpleks tablosunda temel değişken olarak kullanılamaz. Bu nedenle bu kısıda $y_i \geq 0$ olacak şekilde bir yapay değişken ilave edilir. Bu değişken başlangıç simpleks tablosunda temel değişken olarak kullanılır. Benzer şekilde eğer herhangi bir kısıt $(=)$ şeklinde ise bu kısıda ilave edilen yapay değişken başlangıç simpleks tablosunda temel değişken olarak kullanılır. Böylece genel bir modelde başlangıç simpleks tablosunda aylak ve yapay değişkenler temel değişkenler olur. Yapay değişkenlerin yer aldığı bu tablo uygun bir çözüm değildir. Bu nedenle yapay değişkenlerin sıfır değerini alarak çözümden çıkmaları gerekmektedir. Bu amaçla iki fakl yöntem kullanılmaktadır: Büyük M yöntemi ve iki evreli simpleks yöntemi.

3.5.1 Büyük M Yöntemi

Büyük M yönteminde amaç fonksiyonu yapay değişkenlerin sıfır değerini alması içi yeniden düzenlenir. Örneğin amaç fonksiyonu enbüyükleme olan bir problemde kısıtlara p tane yapay değişken ilave edilmiş olsun. Amaç fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazalım.

$$Enb\, z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n - M\, y_1 - \ldots - M\, y_p \qquad (3.3)$$

Burada M çok büyük pozitif bir sayıdır $(M \gg 0)$. (3.3)'te yapay değişkenlerin katsayısı $(-M)$ olduğundan bu değişkenler pozitif değer aldığında amaç fonksiyonu azalmaktadır. Bu nedenle, en iyi çözümde yapay değişkenler sıfır değerini alarak çözümden çıkmak zorundadır.

Benzer şekilde enküçükleme problemi için amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$Enk\, z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + M\, y_1 + \ldots + M\, y_p \qquad (3.4)$$

(3.4)'te yapay değişkenlerin katsayısı $(+M)$ olduğundan bu değişkenlerin pozitif değerleri için amaç fonksiyonu çok büyük olacaktır. Bu nedenle en iyi çözümde yapay değişkenler sıfır değerini alarak çözümden çıkacaktır.

Amaç fonksiyonu yukarıda açıklandığı gibi düzenlendikten sonra simpleks algoritmasının adımlar aynen uygulanır. Aşağıdaki örnek üzerinde büyük M yöntemini açıklayalım.

Örnek 3.1 CSK kimya fabrikası iki farklı kimyasal üretmektedir. Bu kimyasalların üretiminde A ve B gibi iki farklı hammadde kullanılmaktadır. Tablo 3 .8'de bir kilogram kimyasal üretmek için gerekli olan hammadde miktarları ve fiyatları verilmektedir.

Tablo 3.8 CSK problemi için gerekli parametreler

	Hammadde miktarları (kg)	
Kimyasallar	*A*	*B*
1. Kimyasal	0.3	0.2
2. Kimyasal	0.2	0.4
Hammadde fiyatları	30	20
Mevcut hammadde miktarlar (kg)	100	70

Birinci kimyasal için minimum 30 kg, ikinci kimyasal için ise minimum 50 kg talep bulunmaktadır. Firma birinci kimyasalı 20 TL/kg, ikinci kimyasalı ise 25 TL/kg satmaktadır. Buna göre toplam kârı maksimum yapacak şekilde firma kimyasallardan kaç kilogram üretmelidir? DP modelini yazınız ve en iyi çözümü bulunuz.

Çözüm: Problemde karar değişkenlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım

x_1: Birinci kimyasaldan üretilecek miktar

x_2: İkinci kimyasaldan üretilecek miktar

Firma kârını maksimum yapmak istemektedir. Bunun için kimyasallardan elde edilecek birim kârların bulalım. Birinci kimyasaldan 20-(0.3)(30)-(0.2)(20)=7 TL/kg, ikinci kimyasaldan ise 25-(0.2)(30)-(0.4)(20)=11 TL/kg kâr elde etmektedir. Bu nedenle amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$Enb\, z = 7x_1 + 11x_2$$

CSK bu kimyasalları üretmek için iki farklı hammadde kullanmaktadır. Hammaddelere ait kısıtlar aşağıdaki gibi yazılır.

$0.3x_1 + 0.2x_2 \leq 100$ (A hammaddesi kısıtı)

$0.2x_1 + 0.4x_2 \leq 70$ (B hammaddesi kısıtı)

CSK talepleri karşılamak zorundadır. Bu kısıtlar aşağıdaki gibi yazılır.

$x_1 \geq 30$ (Birinci kimyasalın talebi)

$x_2 \geq 50$ (İkinci kimyasalın talebi)

Bu modeli simpleks algoritması ile çözmek için ilk önce problemi standart biçime dönüştürelim.

$$Enb\, z=7x_1+11x_2$$

$$0.3x_1+0.2x_2+s_1=100 \qquad (1)$$

$$0.2x_1+0.4x_2+s_2=70 \qquad (2)$$

$$x_1-s_3=30 \qquad (3)$$

$$x_2-s_4=50 \qquad (4)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

Standart biçimde üçüncü ve dördüncü kısıtlardaki artık değişkenlerin katsayısı -1 olduğundan bu kısıtlara y_3 ve y_4 yapay değişkenleri ilave edilelim. Bu durumda model kısıtları aşağıdaki gibi olur.

$$0.3x_1+0.2x_2+s_1=100 \qquad (1)$$

$$0.2x_1+0.4x_2+s_2=70 \qquad (2)$$

$$x_1-s_3+y_3=30 \qquad (3)$$

$$x_2-s_4+y_4=50 \qquad (4)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, y_3, y_4 \geq 0$$

Böylece başlangıç simpleks tablosu için s_1, s_2, y_3, y_4 temel değişkenler olarak alını ise $s_1=100$, $s_2=70$, $y_3=30$ ve $y_4=50$ olarak bulunur. Fakat bu çözümde $x_1=x_2=0$ olduğundan orijinal modeldeki talep kısıtları sağlanmamaktadır. Bu nedenle bu uygun bir çözüm değildir. Genel olarak, eğer bir çözümde bir yapay değişken pozitif ise bu yapay değişkenin bulunduğu kısıt sağlanmıyor demektir. Yapay değişkenleri sıfır yapmak için amaç fonksiyonunu aşağıdaki gibi düzenleyelim.

$$Enb\, z=7x_1+11x_2-My_3-My_4$$

Tablo 3 .9'da bu yeni amaç fonksiyonu ve kısıtları dikkate alarak oluşturulan simpleks tablosu verilmektedir.

Tablo 3.9 Büyük M yöntemi için ilk simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	y_3	y_4	ST
Z	**- 7**	**- 11**	**0**	**0**	**0**	**0**	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{M}$	**0**
s_1	0.3	0.2	1	0	0	0	0	0	100
s_2	0.2	0.4	0	1	0	0	0	0	70
y_3	1	0	0	0	- 1	0	1	0	30
y_4	0	1	0	0	0	- 1	0	1	50

Tablo 3 .9'da z satırında temel değişkenlerin indirgenmiş maliyeti sıfır olması gerekirken y_3 ve y_4 temel değişkenlerinin indirgenmiş maliyetleri $(+M)$ dir. Bu değerleri sıfır yapmak için üçüncü ve dördüncü satırı $(-M)$ ile çarparak z satırı ile toplayalım. Bu işlemler sonucunda Tablo 3 .10'daki simpleks tablosu elde edilir. Bu tabloda x_1 ve x_2'nin indirgenmiş maliyetleri negatif olduğundan en iyilik şartı sağlanmamaktadır. Bu nedenle mutlak değerce en büyük indirgenmiş maliyete sahip olan x_2 temele girecek değişken olarak belirlenir. Oran testi sonucunda y_4 temelden çıkacak değişken olur.

Tablo 3.10 Büyük M yöntemi için ikinci simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	y_3	y_4	ST	
Z	**-7-*M***	**-11-*M***	**0**	**0**	***M***	***M***	**0**	**0**	**-80*M***	**Oran**
s_1	0.3	0.2	1	0	0	0	0	0	100	100/0.2 = 500
s_2	0.2	0.4	0	1	0	0	0	0	70	70/0.4 = 175
y_3	1	0	0	0	-1	0	1	0	30	- - -
y_4	0	1	0	0	0	-1	0	1	50	50/1 = 50

Gerekli satır işlemlerinden sonra Tablo 3 .11'deki simpleks tablosu elde edilir. Bu tabloda x_1 ve s_4'ün indirgenmiş maliyetleri negatif olduğundan en iyilik şartı sağlanmamaktadır. Mutlak değerce en büyük olan x_1 temele girecek değişken olarak belirlenir. Oran testi sonucunda en küçük orana sahip y_3 temelden çıkacak değişken olur.

Tablo 3.11 Büyük M yöntemi için üçüncü simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	y_3	y_4	ST	
Z	**- 7 - *M***	**0**	**0**	**0**	***M***	**-11**	**0**	**11 + *M***	**550 - 30*M***	**Oran**
s_1	0.3	0	1	0	0	0.2	0	- 0.2	90	90/0.3 = 300
s_2	0.2	0	0	1	0	0.4	0	- 0.4	50	50/0.2 = 250
y_3	1	0	0	0	- 1	0	1	0	30	30
x_2	0	1	0	0	0	- 1	0	1	50	- - -

Gerekli satır işlemlerinden sonra Tablo 3 .12'deki simpleks tablosu elde edilir. Bu tabloda yapay değişkenler sıfır değerini alarak çözümden çıkmıştır. z satırında s_3 ve s_4'ün indirgenmiş maliyeti negatif olduğundan en iyilik şartı sağlanmamaktadır. Mutlak değerce en büyük indirgenmiş maliyete sahip olan s_4 temele girerken, oran testi sonucunda s_2 temelden çıkar. Yapay değişkenlerin görevi bittiği için istenirse simpleks tablosundan bu değişkenlere karşı gelen sütunlar silinebilir.

Tablo 3.12 Büyük *M* yöntemi için dördüncü simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	y_3	y_4	ST	Oran
Z	**0**	**0**	**0**	**0**	**-7**	**-11**	**7+M**	**11+M**	**760**	**---**
s_1	0	0	1	0	0.3	0.2	-0.3	- 0.2	81	81/0.2 = 405
s_2	0	0	0	1	0.2	0.4	-0.2	- 0.4	44	44/0.4 = 110
x_1	1	0	0	0	- 1	0	1	0	30	- - -
x_2	0	1	0	0	0	- 1	0	1	50	- - -

Gerekli satır işlemlerinden sonra Tablo 3 .13'teki simpleks tablosu elde edilir. z satırında s_3'ün indirgenmiş maliyeti negatif olduğundan en iyilik şartı sağlanmamaktadır. s_3 temele girerken oran testi sonucunda s_4 temelden çıkacak değişken olarak bulunur.

Tablo 3.13 Büyük *M* yöntemi için beşinci simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	
Z	**0**	**0**	**0**	**27.5**	**-1.5**	**0**	**1970**	**Oran**
s_1	0	0	1	-0.5	0.2	0	59	295
s_4	0	0	0	2.5	0.5	1	110	220
x_1	1	0	0	0	-1	0	30	--
x_2	0	1	0	2.5	0.5	0	160	320

Gerekli satır işlemlerinden sonra Tablo 3 .14'teki simpleks tablosu elde edilir. Bu tabloda z satırındaki temeldışı değişkenlerin indirgenmiş maliyetleri pozitif olduğundan bu aynı zamanda en iyi çözümdür. Bu çözüme göre, birinci kimyasaldan $x_1^{¿}=250$ kg ve ikinci kimyasaldan $x_2^{¿}=50$ kg üretilmekte ve firmanın maksimum kârı $z^{¿}=2300$ TL olmaktadır.

Tablo 3.14 Büyük *M* yöntemi için son simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	ST
Z	**0**	**0**	**0**	**35**	**0**	**3**	**2300**
s_1	0	0	1	-1.5	0	-0.4	15
s_3	0	0	0	5	1	2	220
x_1	1	0	0	5	0	2	250
x_2	0	1	0	0	0	-1	50

3.5.2 İki Evreli Simpleks Yöntemi

Bu yöntemde en iyi çözüm iki evrede bulunur. Birinci evrenin amacı bir başlangıç çözümü elde etmektir. Bunun için sadece yapay değişkenlerden oluşan bir amaç fonksiyonu tanımlanır ve bu amaç fonksiyonunun değeri sıfır oluncaya kadar (yapay değişkenler çözümden çıkıncaya kadar) birinci evre devam ettirilir. İkinci evrede yapay değişkenlere ait sütunlar silinir ve orijinal amaç fonksiyonu için en iyi çözüm bulunur.

Birinci evre

Bir modelde p tane yapay değişken bulunduğunu varsayalım. Birinci evrede bu yapay değişkenleri sıfır yapmak için aşağıdaki amaç fonksiyonunu kullanılır.

$$Enk\, z = y_1 + y_2 + \ldots + y_p \qquad (3.5)$$

Yapay değişkenler negatif olamayacağından (3.5)'teki amaç fonksiyonu tüm yapay değişkenlerin sıfır olduğunda minimum değere sahip olur. Eğer birinci evrede amaç fonksiyonu sıfır değerini alıyorsa, bu çözüm aynı zamanda bir temel uygun çözümdür.

İkinci evre

Birinci evrede bir temel uygun çözüm bulunduktan sonra ikinci evrede orijinal amaç fonksiyonu için problemin en iyi çözümü araştırılır. Bunun için orijinal amaç fonksiyonundaki katsayılar simpleks tablosunda yerine yazılır ve işlemlere kaldığı yerden devam edilir.

İki evreli simpleks algoritmasını aşağıdaki örnek üzerinde açıklayalım.

$$Enb\, z = 3x_1 + 7x_2$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 40 \qquad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \geq 8 \qquad (2)$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 10 \qquad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Önce bu modeli standart biçime dönüştürelim, ikinci ve üçüncü kısıda y_2 ve y_3 yapay değişkenleri ilave edelim.

$$5x_1 + 4x_2 + s_1 = 40 \qquad (1)$$

$$2x_1 + x_2 - s_2 + y_2 = 8 \qquad (2)$$

$$x_1 + 2x_2 - s_3 + y_3 = 10 \qquad (3)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, y_2, y_3, \geq 0$$

Birinci evre için amaç fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$Enk\, z = y_2 + y_3$$

Tablo 3 .15'te birinci evre için ilk simpleks tablosu verilmektedir. z satırında y_2 ve y_3 değişkenlerinin indirgenmiş maliyetleri (-1) olduğundan bu değerleri sıfır yapmak için ikinci ve üçüncü satırları (+1) ile çarparak z satırı ile toplayalım.

Tablo 3.15 Birinci evre için ilk simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	y_2	y_3	ST
z	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**-1**	**0**
s_1	5	4	1	0	0	0	0	40
y_2	2	1	0	-1	0	1	0	8
y_3	1	2	0	0	-1	0	1	10

Bu işlemler sonucunda Tablo 3 .16’daki başlangıç simpleks tablosu elde edilir. Bu tabloda z satırında x_1 ve x_2’nin indirgenmiş maliyetleri (3, 3) pozitif olduğu için en iyi çözüme ulaşılmamıştır. İndirgenmiş maliyetler eşit olduğundan x_1’i temele girecek değişken olarak seçelim. Oran testi sonucunda y_2 temelden çıkacak değişken olarak belirlenir.

Tablo 3.16 Birinci evre için ikinci simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	y_2	y_3	ST	
z	**3**	**3**	**0**	**-1**	**-1**	**0**	**0**	**18**	**Oran**
s_1	5	4	1	0	0	0	0	40	8
y_2	2	1	0	-1	0	1	0	8	4
y_3	1	2	0	0	-1	0	1	10	10

Satır işlemleri sonucunda Tablo 3 .17’deki simpleks tablosu elde edilir. z satırında x_2’in indirgenmiş maliyeti pozitif olduğu için en iyi çözüme ulaşılmamıştır. x_2 temele girerken oran testi sonucunda y_3 temelden çıkacak değişken olarak belirlenir.

Tablo 3.17 Birinci evre için üçüncü simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	y_2	y_3	ST	
z	**0**	**3/2**	**0**	**1/2**	**-1**	**-3/2**	**0**	**6**	**Oran**
s_1	0	3/2	1	5/2	0	-5/2	0	20	40/3
				-					8
x_1	1	1/2	0	1/2	0	1/2	0	4	
y_3	0	3/2	0	1/2	-1	-1/2	1	6	4

Satır işlemleri sonucunda Tablo 3 .18’deki simpleks tablosu elde edilir. z satırında temeldışı değişkenlerin indirgenmiş maliyetleri pozitif olmadığından en iyi çözüme ulaşılmıştır. Ayrıca yapay değişkenler sıfır değerini alarak çözümden çıktığından birinci evre sonlanmıştır.

Tablo 3.18 Birinci evre için son simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	y_2	y_3	ST
z	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**-1**	**0**
s_1	0	0	1	2	1	-2	-1	14
x_1	1	0	0	-2/3	1/3	2/3	-1/3	2
x_2	0	1	0	1/3	-2/3	-1/3	2/3	4

Birinci evre sonunda x_1, x_2 ve s_1 temel değişkenlerdir. Yapay değişkenler görevini tamamladıkları için simpleks tablosundan bu yapay değişkenlere karşı gelen sütunları çıkarabiliriz. İkinci evreye başlamak için problemdeki amaç fonksiyonunun katsayılarını simpleks tablosunda yerine yazalım. Tablo 3 .19'da ikinci evre için ilk simpleks tablosu verilmektedir.

Tablo 3.19 İkinci evre için ilk simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ST
z	**- 3**	**- 7**	**0**	**0**	**0**	**0**
s_1	0	0	1	2	1	14
x_1	1	0	0	-2/3	1/3	2
x_2	0	1	0	1/3	-2/3	4

Bu tabloda x_1 ve x_2 temel değişken olduğundan z satırındaki indirgenmiş maliyetinin sıfır olması gerekir. Bunu sağlamak için ikinci satırı (3) ile üçüncü satırı (7) ile çarparak *z* satırı ile toplayalım. Bu işlemler sonunda Tablo 3 .20'deki simpleks tablosu elde edilir. z satırında s_3'nin indirgenmiş maliyeti negatif olduğundan bu çözüm en iyi çözüm değildir. s_3 temele girerken oran testi sonucunda s_1 temelden çıkar.

Tablo 3.20 İkinci evre için ikinci simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ST	
Z	**0**	**0**	**0**	**1/3**	**-11/3**	**34**	**Oran**
s_1	0	0	1	2	1	14	14
x_1	1	0	0	-2/3	1/3	2	6
x_2	0	1	0	1/3	-2/3	4	--

Satır işlemleri sonucunda Tablo 3 .21'deki simpleks tablosu elde edilir. z satırında s_2'nin indirgenmiş maliyeti negatif olduğundan bu çözüm en iyi çözüm değildir. s_2 temele girerken oran testi sonucunda s_1 temelden çıkar.

Tablo 3.21 İkinci evre için üçüncü simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ST	
z	**11**	**0**	**0**	**-7**	**0**	**56**	**Oran**
s_1	-3	0	1	4	0	8	2
s_3	3	0	0	-2	1	6	---
x_2	2	1	0	-1	0	8	---

Bu tabloda temeldışı değişkenlerin indirgenmiş maliyetler pozitif olduğu için en iyi çözüme ulaşılmıştır. En iyi çözümde $x_2^{¿}=10$, $s_2^{¿}=2$, $s_3^{¿}=10$ ve $z^{¿}=70$ olarak bulunur.k

Tablo 3.22 İkinci evre için dördüncü simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ST
z	**23/4**	**0**	**7/4**	**0**	**0**	**70**
s_2	-3/4	0	¼	1	0	2
s_3	3/2	0	½	0	1	10
x_2	5/4	1	¼	0	0	10

3.6 Doğrusal Programlama Problemlerinde Karşılaşabilecek Özel Durumlar

DP problemlerinde aşağıdaki dört özel durum ile karşılaşılabilir:

- Çözüm yok
- Sınırlandırılmamış çözüm
- Alternatif çözümler
- Bozulmuş çözüm

3.6.1 Çözüm Yok

Bazı DP problemlerinde tüm kısıtları aynı anda sağlayan bir çözüm yoktur. Bir başka ifade ile bu problemlerin UÇA boş kümedir. Simpleks algoritması ile çözüm araştırılıyorken eğer yapay değişkenlerden en az birisi pozitif değer alarak çözümde kalıyor ise problemin çözümü yoktur.

Aşağıdaki örnek üzerinde bu durumu açıklayalım.

$Enk\ z=10x_1+20x_2$

$$x_1+2x_2\geq 20 \qquad (1)$$

$$6x_1 + 15x_2 \leq 100 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Bu modelin UÇA boş kümedir. Çünkü birinci kısıt için $x_1 = 0$ olduğunda x_2'nin en az 10 olması gerekir fakat bu durumda ikinci kısıt sağlanmamaktadır. Eğer birinci kısıt için $x_2 = 0$ alınırsa x_1'in en az 20 olması gerekir yine ikinci kısıt sağlanmaz. Şimdi bu problemin çözümünün olmadığını simpleks algoritmasını kullanarak gösterelim. Önce modeli standart biçime dönüştürerek ve birinci kısıda y_1 yapay değişkenini ilave edelim.

$$x_1 + 2x_2 - s_1 + y_1 = 20 \quad (1)$$

$$6x_1 + 15x_2 + s_2 = 100 \quad (2)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, y_1 \geq 0$$

Bu modelin en iyi çözümünü iki evreli simpleks yöntemi ile bulalım. Birinci evre için amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazalım.

$$Enk\, z = y_1$$

Tablo 3 .23'de birinci evre için ilk simpleks tablosu verilmektedir. z satırındaki y_1'in katsayısını 0 yapmak için y_1 satırı ile z satırı ile toplayalım.

Tablo 3.23 Birinci evre için ilk simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	y_1	ST
z	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**
y_1	1	2	-1	0	1	20
s_2	6	15	0	1	0	100

Bu işlem sonucunda Tablo 3 .24 elde edilir. z satırında x_1 ve x_2'nin katsayıları pozitif olduğundan en iyi çözüme ulaşılmamıştır. Bu nedenle indirgenmiş maliyeti en büyük olan x_2 temele girer ve oran testi sonucunda s_2 temelden çıkar.

Tablo 3.24 Birinci evre için ikinici simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	y_1	ST	
z	**1**	**2**	**-1**	**0**	**0**	**20**	**Oran**
y_1	1	2	- 1	0	1	20	10
s_2	6	15	0	1	0	100	20/3

Satır işlemleri sonucunda Tablo 3 .25 elde edilir. z satırında x_1'in indirgenmiş maliyeti pozitif olduğundan en iyi çözüme ulaşılmamıştır. Bu nedenle x_1 temele girerken oran testi sonucunda x_2 temelden çıkar.

Tablo 3.25 Birinci evre için üçüncü simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	y_1	ST	
z	**1/5**	**0**	**-1**	**-2/15**	**0**	**20/3**	**Oran**
y_1	1/5	0	-1	-2/15	1	20/3	100/3
x_2	2/5	1	0	1/15	0	20/3	50/3

Satır işlemleri sonucunda Tablo 3 .26 elde edilir. z satırında temeldışı değişkenlerin indirgenmiş maliyetleri negatif olduğundan en iyilik koşulu sağlanmaktadır. Bu nedenle ikinci evre sonlandırılır. Fakat en iyi çözümde yapay değişken $y_1=10/3$ değerini alarak çözümde kaldığı için bu uygun bir çözüm değildir.

Tablo 3.26 Birinci evre için dördüncü simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	y_1	ST
Z	**0**	**-1/2**	**-1**	**-1/6**	**0**	**10/3**
y_1	0	-1/2	-1	-1/6	1	10/3
x_1	1	5/2	0	1/6	0	50/3

Eğer bir problemde çözüm yok ise modelin doğru olup olmadığı araştırılmalıdır. Örneğin (≤) olması gereken bir kısıt yanlışlıkla (≥) şeklinde yazılmış olabilir.

3.6.2 Sınırlandırılmamış Çözüm

Bir DP probleminin en iyi çözümünde en az bir karar değişkeni **sonsuz** değer alıyor ise bu problem sınırlandırılmamış çözümü vardır. Uygulamada böyle bir durumla karşılaşmak imkânsız olduğundan modelde bir hata söz konusudur.

Simpleks algoritmasında en iyilik koşulları sağlanmadığı halde çözümden çıkacak bir değişken bulunamıyor ise bu problemin sınırlandırılmamış çözüm vardır.

Simpleks algoritmasının bir problemin sınırsız çözüme sahip olduğunu nasıl tespit ettiğini göstermek için aşağıdaki DP modelini dikkate alalım.

$Enb\ z=2x_1+3x_2$

$$x_1+x_2\geq 3 \qquad (1)$$

$$x_1-2x_2\leq 4 \qquad (2)$$

$$x_1, x_2\geq 0$$

Önce problemi standart biçime dönüştürelim ve birinci kısıda y_1 yapay değişkeni ilave edelim.

$$x_1 + x_2 - s_1 + y_1 = 3 \quad (1)$$

$$x_1 - 2x_2 + s_2 = 4 \quad (2)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, y_1 \geq 0$$

En iyi çözümünü iki evreli simpleks yöntemi ile bulalım. Tablo 3 .27’da birinci evre için ilk simpleks tablosu verilmektedir.

$$Enk\, z = y_1$$

Tablo 3.27 Birinci evre için ilk simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	y_1	ST
z	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**
y_1	1	1	- 1	0	1	3
s_2	1	- 2	0	1	0	4

y_1 temel değişken olduğu için z satırında y_1’in katsayısını 0 yapmak için y_1 satırı ile z satırını toplayalım. Bu işlem sonunda Tablo 3 .28’deki simpleks tablosu elde edilir. z satırında x_1 ve x_2’nin indirgenmiş maliyetleri pozitif olduğundan en iyi çözüme ulaşılmamıştır. Her iki değişkenin de indirgenmiş maliyetleri eşit olduğundan x_1’i temel değişken olarak alalım. Temelden çıkacak değişken için oran testinde *Enk* {3/1, 4/1} değerine karşı gelen y_1 temelden çıkar.

Tablo 3.28 Birinci evre için ikinci simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	y_1	ST
z	**1**	**1**	**-1**	**0**	**0**	**3**
y_1	1	1	- 1	0	1	3
s_2	1	- 2	0	1	0	4

Gerekli satır işlemlerinden sonra Tablo 3 .29’deki simpleks tablosu elde edilir. Bu tabloda yapay değişken $y_1 = 0$ değerini alarak çözümden çıktığı için birinci evre sonlanmıştır.

Tablo 3.29 Birinci evre için son simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	y_1	ST
z	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**
x_1	1	1	- 1	0	1	3
s_2	0	- 3	1	1	- 1	1

İkinci evre için orijinal amaç fonksiyonundaki katsayıları tablodaki yerlerine yazalım ve y_1 sütunu simpleks tablosunda silelim. Bu durumda Tablo 3 .30’daki simpleks tablosu elde edilir.

$Enb\, z = 2x_1 + 3x_2$

Tablo 3.30 İkinci evre için ilk simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	ST
z	**- 2**	**- 3**	**0**	**0**	**0**
x_1	1	1	- 1	0	3
s_2	0	- 3	1	1	1

x_1 temel değişkeninin z satırındaki indirgenmiş maliyetini sıfır yapmak için birinci satırı (2) ile çarparak z satırı ile toplayalım. Bu durumda Tablo 3 .31'daki simpleks tablosu elde edilir. Bu tabloda z satırındaki x_2 ve s_1'in indirgenmiş maliyetleri negatif olduğundan mutlak değerce enbüyük katsayıya sahip s_1 değişkeni temele girer. s_2 ise temelden çıkacak tek değişkendir.

Tablo 3.31 İkinci evre için ikinci simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	ST
z	**0**	**- 1**	**- 2**	**0**	**6**
x_1	1	1	- 1	0	3
s_2	0	- 3	1	1	1

Gerekli satır işlemlerinden sonra Tablo 3 .32'deki simpleks tablosu elde edilir. Bu tabloda z satırında x_2'in indirgenmiş maliyeti negatif olduğundan x_2 değişkeninin temele girmesi gerekir. Ancak x_2 sütunundaki tüm değerler negatif olduğundan oran testi yapılamamaktadır. Bunun anlamı x_2'ye ne kadar büyük değer verilir ise verilsin hem x_1 hem de s_1 pozitif değer almaya devam edecektir. Bu nedenle problem sınırlandırılmamış bir çözüme sahiptir.

Tablo 3.32 İkinci evre için üçüncü simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	ST
z	0	- 7	0	2	8
x_1	1	- 2	0	1	4
s_1	0	- 3	1	1	1

3.6.3 Alternatif Çözümler

Bazı DP problemlerinde birden fazla noktada en iyi çözüm bulunabilir. Bunlar alternatif çözümler olarak isimlendirilmektedir. Geometrik olarak alternatif çözümlerin ne anlama geldiğini iki karar değişkenli bir problem üzerinde açıklayabiliriz. Eğer amaç fonksiyonu doğrusu uygun çözüm alanını aynı anda iki uç noktadan terk ediyorsa bu problem alternatif çözümlere sahiptir. Bir başka ifade ile amaç fonksiyonu doğrusu ile en iyi çözümde aktif olan bir kısıt birbirine paralel ise alternatif çözümler söz konusudur.

Problemin alternatif çözümlerinin olması karar vericilere esneklik sağlamaktadır. Karar verici modelde kullanılamayan özellikle sayısallaştırılamayan bazı kriterlere göre alternatif çözümler arasından daha iyi olan birisini seçebilir. Örneğin önemli bir hammaddeyi daha az kullanan bir alternatif gelecek dönemlerdeki üretimler için bu hammaddenin daha fazla kullanılmasına imkân sağlayacaktır.

Şimdi simpleks algoritması ile alternatif çözümleri nasıl tespit edildiğini açıklayalım. Bunun için aşağıdaki örnek problemi dikkate alalım.

$Enb\ z=10x_1+20x_2$

$$-x_1+2x_2\leq 10 \quad (1)$$

$$2x_1+4x_2\leq 50 \quad (2)$$

$$x_1, x_2\geq 0$$

Problemi standart biçime dönüştürdükten sonra Tablo 3 .33’deki başlangıç simpleks tablosu elde ederiz. z satırında x_1 ve x_2’nin katsayıları negatif olduğundan, mutlak değerce en büyük olan x_2 temel girecek değişken olarak seçelim ve oran testi sonucunda s_1’i temelden çıkaralım.

Tablo 3.33 Başlangıç simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	ST	
Z	- 10	- 20	0	0	0	Oran
s_1	- 1	2	1	0	10	5
s_2	2	4	0	1	50	50/4

Gerekli satır işlemlerinden sonra Tablo 3 .34’deki simpleks tablosu elde edilir. $z$satırında indirgenmiş maliyeti negatif olan x_1 temele girerken ve s_2 temelden çıkacak değişken olarak belirlenir.

Tablo 3.34 İkinci simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	ST	
z	- 20	0	10	0	100	Oran
x_2	- 1/2	1	1/2	0	5	---
s_2	4	0	- 2	1	30	30/4

Gerekli satır işlemlerinden sonra Tablo 3 .35’deki simpleks tablosu elde edilir. $z$satırındaki temeldışı değişkenlerin indirgenmiş maliyetleri negatif olmadığından en iyi çözüme ulaşılmıştır. En iyi çözümde temel değişkenler $x_1^{¿}=7,5$, $x_2^{¿}=8,75$ ve amaç fonksiyonu $z^{¿}=250$ olarak bulunmuştur. Fakat bu tabloda özel bir durum bulunmaktadır. z satırında s_1 temeldışı değişkenin indirgenmiş maliyeti sıfırdır. Bunun anlamı eğer s_1 çözüme girerse amaç fonksiyonunda bir değişme olamayacak fakat yeni bir çözüm elde edilecektir. Şimdi bu yeni çözümü bulmak için s_1’i çözüme sokalım. Oran testi sonucunda x_2 temelden çıkar.

Tablo 3.35 Üçüncü simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	ST	
Z	0	0	0	5	250	Oran
x_2	0	1	¼	1/8	35/4	(35/4)/(1/4)
x_1	1	0	- ½	1/4	15/2	---

Gerekli satır işlemlerinden sonra Tablo 3 .36'deki simpleks tablosu elde edilir. Bu tabloda en iyi çözümdür. En iyi çözümdeki temel değişkenler $x_1^{¿}=25$, $s_1^{¿}=835$ amaç fonksiyonu $z=250$ değeri ile değişmemiştir.

Tablo 3.36 Dördüncü simpleks tablosu

TD	x_1	x_2	s_1	s_2	ST
Z	0	0	0	5	250
s_1	0	4	1	1/2	35
x_1	1	2	0	1/2	25

Genel olarak, simpleks algoritmasında en iyi çözüme erişilen bir tabloda en az bir temeldışı değişkenin indirgenmiş maliyeti sıfır ise problemin alternatif çözümleri vardır.

Eğer bir DP probleminde bir den fazla uç noktada alternatif çözüm var ise bu alternatif çözümlerin doğrusal birleşimleri ile bulunan noktalar da alternatif çözümlerdir, dolayısıyla sonsuz sayıda alternatif çözüm söz konusudur. İki noktanın doğrusal birleşimi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır

Tanım 3.6 x ve y iki farklı nokta ve $0 \le \lambda \le 1$ olmak üzere

$$\lambda x + (1-\lambda) y$$

şeklinde bulunan çözümlere x ve y'nin doğrusal birleşimi denir. Bu tanımdan hareketle yukarıdaki örnekteki alternatif çözümleri bulalım. Bu örnekte alternatif çözümleri (35/4, 15/2, 0, 0) ve (25, 0, 35, 0) olarak bulmuştuk. Bu noktaların doğrusal birleşimi aşağıdaki yazılır.

$$\lambda \begin{pmatrix} 35/4 \\ 15/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 - \frac{65}{4}\lambda \\ \frac{15}{2}\lambda \\ 35 - 35\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Örneğin $\lambda = \frac{1}{5}$ için alternatif çözüm aşağıdaki bulunur.

$$\begin{pmatrix} 25-\frac{65}{4}\left(\frac{1}{5}\right) \\ \frac{15}{2}\left(\frac{1}{5}\right) \\ 35-35\left(\frac{1}{5}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87/4 \\ 3/2 \\ 28 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.6.4 Bozulmuş Çözüm

En iyi çözümde temelde yer alan değişkenlerden en az bir tanesi sıfır değerini alıyor ise bu çözüme bozulmuş çözüm denir. En iyi çözümün bozulmuş olması çoğu zaman bir sorun teşkil etmemektedir. Fakat çok nadiren de olsa simpleks algoritması döngüye girebilmektedir. Burada döngüden kastımız, algoritmanın belli bir yinelemeden sonra yine aynı çözüme gelmesi ve bu nedenle en iyi çözüme hiçbir zaman ulaşamamasıdır. Fakat simpleks algoritmasının döngüye girmesini engelleyen yöntemler mevcuttur, dolaysıyla döngü bir sorun değildir.