5 ULAŞTIRMA PROBLEMİ

Ulaştırma problemi uygulamada en sık karşılaşılan doğrusal programlama problemlerinden birisidir. Ulaştırma problemini şu şekilde tanımlayabiliriz: m farklı arz merkezinde üretilen ürünler n farklı talep merkezine taşınacaktır. Toplam taşıma maliyetini minimum olması için nasıl bir taşıma yapılmalıdır?

Ulaştırma probleminin doğrusal karar modelini oluşturmak için aşağıdaki problemi ele alım.

Örnek 5.1 *BGS* bilgisayar firması İstanbul, Ankara ve İzmir'deki satış merkezlerinden Eskişehir, Denizli, Antalya, Trabzon ve Van'daki beş farklı bölgedeki bayilerin talebi karşılamak istemektedir. Tablo 5.1'de satış merkezlerinin kapasiteleri, bayilerin talep etikleri miktarlar ve satış merkezlerinden bayilere birim taşıma maliyetleri verilmektedir. Firma toplam taşıma maliyetini minimum yapmak için nasıl bir taşıma yapmalıdır.

Tablo 5.1 Birim taşıma maliyetleri, kapasite ve talep miktarları

	Eskişehir	Denizli	Antalya	Trabzon	Van	Kapasite
İstanbul	2	4	6	10	15	1500
Ankara	1	3	5	8	13	650
İzmir	4	1	2	13	17	1000
Talep	550	825	775	575	425	3150

Çözüm:

Karar Değişkenleri: Problemde hangi satış merkezinden hangi bayiye ne kadar bilgisayar gönderilmesi gerektiği belirlenmek istenmektedir. Bu nedenle karar değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

x_{ij}: *i*. depodan *j*. bayiye gönderilecek bilgisayar sayısı

Kısıtlar: Ulaştırma probleminde iki tip kısıt bulunmaktadır. Birincisi, satış merkezinden bayilere gönderilecek bilgisayar sayısı satış merkezinin kapasitesini geçememelidir. Bu kısıtlar kapasite kısıtları olarak isimlendirilir ve aşağıdaki gibi yazılır.

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 1500$ (İstanbul için kapasite kısıtı)

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 650$ (Ankara için kapasite kısıtı)

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 1000$ (İzmir için kapasite kısıtı)

İkincisi bayilerin talepleri karşılanmalıdır. Bu kısıtlar talep kısıtları olarak isimlendirilir ve aşağıdaki gibi yazılır.

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 550$ (Eskişehir için talep kısıtı)

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 825$ (Denizli için talep kısıtı)

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 775$ (Antalya için talep kısıtı)

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 575$ (Trabzon için talep kısıtı)

$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 425$ (Van için talep kısıtı)

Amaç Fonksiyonu: Amaç toplam taşıma maliyetinin enküçüklenmesidir.

$$Enk\ z = 2x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 10x_{14} + 15x_{15} + x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23} + 8x_{24} + 13x_{25} + 4x_{31} + x_{32} + 2x_{33} + 13x_{34} + 17x_{35}$$

Genel olarak m arz merkezi ve n talep merkezi bulunan ulaştırma probleminin karar modelini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

s_i : i. arz merkezinin kapasitesi (i = 1, …, m)

d_j: j. talep merkezinin talep miktarları (j = 1, …, n)

c_{ij}: i. arz merkezinden j. talep merkezine birim taşıma maliyetleri;

x_{ij}: *i*. arz merkezinden *j*. talep merkezine taşınan miktar

olmak üzere ulaştırma probleminin karar modeli aşağıdaki gibi ifade edilir

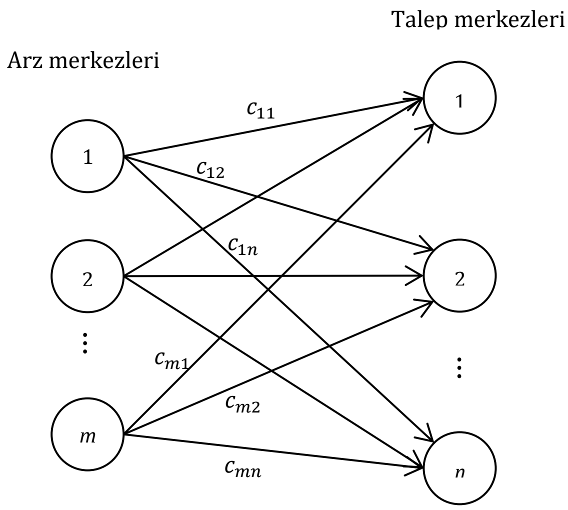
$$Enk\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i \quad \forall i = 1,2,\dots,m \tag{5.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad \forall j = 1,2,\dots,n$$

$$x_{ij} \ge 0$$

Ulaştırma problemi şebeke problemleri arasında yer alan özel problemdir. Arz merkezleri ve talep merkezleri düğüm olmak üzere ulaştırma problemi Şekil 5.1'deki gibi gösterilir.



Şekil 5.1 Ulaştırma problemini

5.1 Dengeli Ulaştırma Problemi

(5.1)'de verilen modelin çözülebilmesi için toplam arzın toplam talepten büyük veya eşit olması gerekir.

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \geq \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Gerçek hayatta bu koşul her zaman sağlanmayabilir. Talebin arzdan fazla olması durumunda bazı talepler karşılanmaz. Bu durumda hayali bir arz kapasitesi yaratılarak toplam kapasite ve toplam talep eşitlenerek bir çözüm elde edilebilir.

Bir ulaştırma probleminde toplam arz toplam talebe eşit ise bu probleme dengeli ulaştırma problemi denir. Dengeli bir ulaştırma probleminde arz merkezlerindeki ürünlerin tamamı talep merkezlerine taşınacağından modelde kapasite kısıtları da eşitlik olarak yazılır.

$$Enk\ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \qquad \forall i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad \forall j = 1,2,\dots,n \qquad (5.2)$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Yukarıda belirtilen gerekçenin dışında, ulaştırma problemlerinin çözümü için geliştirilen yöntemlerinin uygulanabilmesi için de problemin dengeli olmasına ihtiyaç bulunmaktadır. Bu nedenle çözüme başlamadan önce problemin dengeli hale getirilmesi gerekmektedir.

Dengeli olmayan bir ulaştırma probleminde, hayali arz merkezi veya talep merkezi probleme eklenerek, toplam arz toplam talebe eşitlenir. Hayali arz merkezinden veya hayali talep merkezine fiziksel bir taşıma yapılamayacağından birim taşıma maliyetleri sıfır olarak alınır. Fakat, bazı özel kısıtların olduğu problemlerde, kısıtın yapısına bağlı olarak birim taşıma maliyetleri M veya –M olarak da belirlenebilir.

5.2 Ulaştırma Tablosu

Ulaştırma problemlerinin çözümü ulaştırma tablosu olarak isimlendirilen tablolar kullanılmaktadır. Tablo 5.2'de ulaştırma tablosu verilmekedir. Tablonun satırlarında arz merkezleri, sütunlar da ise talep merkezleri yer alır. Tablodaki hücreler arz merkezlerinden talep merkezlerine yapılan taşımaları göstermektedir. Hücrelerin sağ üst köşesinde ise birim taşıma maliyetleri yer alır. Son sütunda arz merkezlerinin kapasiteleri ve en alt satırda ise talep miktarları bulunur.

Tablo 5.2 Ulaştırma tablosu

Arz Merkezleri	Talep Merkezleri				Kapasite
	1	2	…	n	
1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	…	x_{1n} c_{1n}	s_1
2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	…	x_{2n} c_{2n}	s_2
…					…
m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	…	x_{mn} c_{mn}	s_m
Talep miktarları	d_1	d_2	…	d_n	

Ulaştırma tablosu ile en iyi çözüm araştırılırken önce bir başlangıç tablo oluşturulur. Başlangıç tablosu tüm taleplerin karşılandığı uygun bir çözümdür. Başlangıç tablosunu oluşturmak için farklı yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerde bir kısmını izleyen bölümlerde açıklayacağız. Başlangıç tablosu belirlendikten sonra, bu topladaki çözümün en iyi çözüm olup olmadığı belirlenir. Eğer çözüm en iyi değil ise tablodaki bazı hücrelerin değerleri değiştirilerek yeni bir tablo oluşturulur ve tablonun en iyi çözüm olup olmadığı kontrol edilir. En iyi çözüm bulununcaya kadar ulaştırma tablosu güncellenir.

Yukarıda açıklamasını yaptığımız yöntemin adımlarını şu şekilde verebiliriz.

Adım 1: Başlangıç ulaştırma tablosunu oluştur

Adım 2: Tablonun en iyi çözüm olup olmadığını belirle. Eğer en iyi çözüm ise dur değilse 3. adıma git.

Adım 3: Yeni bir ulaştırma tablosu oluştur ve 2. adıma git.

5.3 Başlangıç Ulaştırma Tablosunun Oluşturulması

Başlangıç ulaştırma tablosu oluşturmak için problemin dengeli olması gereklidir. Eğer problem dengeli değil ise ya hayali arz ya da talep merkezi eklenerek problem dengeli hale getirilir. İkinci adımda arz merkezlerinin kapasiteleri ve talep merkezlerinin talep miktarları dikkate alınarak taşımalar belirlenir. Bulunan bu çözüme başlangıç çözüm denir. Bir çözümün başlangıç çözüm olabilmesi için ulaştırma tablosunun $n + m - 1$ hücresinden taşıma yapılmalıdır. Bu durum ulaştırma problemin yapısından kaynaklanmaktadır. Ulaştırma probleminde m adet kapasite ve n adet talep kısıtı olmak üzere toplam $n + m$ kısıt bulunmaktadır. Problem dengeli olduğundan bu kısıtlardan bir tanesi gereksizdir. Bu nedenle herhangi $n + m - 1$ kısıt seçilerek eniyi çözüm bulunabilir. Doğrusal programlamada temel değişken sayısı kısıt sayısına eşit olmak zorunda olduğunda en iyi çözümde temel değişken sayısı $n + m - 1$ tane olmak zorundadır. Ulaştırma tablosundaki her hücre bir karar değişkenlerine karşı geldiğinden ulaştırma tablosunda her zaman $n + m - 1$ hücreden taşıma yapılmalıdır.

Başlangıç çözümün bulunması için çok sayıda yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan en çok bilinen üç yöntem aşağıdaki gibidir.

- Kuzeybatı köşe yöntemi
- En düşük maliyet yöntemi
- Vogel'in yaklaşım yöntemi (Vogel's Approximation Method, VAM)

5.3.1 Kuzeybatı köşe yöntemi

Bu yöntemde ulaştırma tablosunun sol üst köşesinden başlanarak kapasite ve talepler dikkate alınarak yapılabilecek taşımalar belirlenir. Kuzeybatı köşe yönteminin adımları aşağıdaki gibidir.

Adım 1: Tablonun kuzeybatı köşesindeki hücreyi seç

Adım 2: Kapasite ve talep miktarını dikkate alarak bu hücreden yapılabilecek enbüyük taşımayı yap.

Adım 3: Bu taşıma sonucunda, eğer kapasitenin tamamı kullanılmış ise karşı gelen satırı, talebin tamamı karşılanmış ise karşı gelen sütunu sil. Eğer hem kapasite hem de talep aynı anda karşılanmış ise karşı gelen sütunu sil.

Adım 4: Taşıma yapılacak hücreler varsa 1. adıma git. Değilse dur.

BGS problemi için başlangıç tabloyu kuzeybatı köşe yöntemi ile bulalım. Problemde $m = 3$ ve $n = 5$ olduğundan ulaştırma tablosunda $3 + 5 - 1 = 7$ adet taşıma yapılmalıdır. Tablonun kuzeybatı köşesinde İstanbul-Eskişehir hücresi bulunmaktadır. İstanbul'un kapasitesi 1500 ve Eskişehir'in talebi 550 bilgisayar olduğundan, bu hücreden maksimum 550 adet bilgisayar taşınabilir. Eskişehir'in talebi tamamen karşılandığı için birinci sütun silinir. Kalan tabloda kuzeybatı köşesi İstanbul – Denizli hücresidir. İstanbul'un kalan kapasitesi 950 adet ve Denizli'nin bilgisayar talebi 825 adet olduğundan bu hücreden 825 adet bilgisayar taşınabilir. Denizli'nin talebi tamamen karşılandığından ikinci sütun silinir. Kalan tabloda kuzeybatı köşesi İstanbul – Antalya hücresidir. İstanbul'un kalan kapasitesi 125 adet ve Antalya'nın talebi 775 adet olduğundan bu hücreden 125 adet bilgisayar taşınabilir. İstanbul'un kapasitesinin tamamı kullanıldığından birinci satır silinir. Kalan tabloda kuzeybatı köşesi Ankara – Antalya hücresidir. Antalya'nın kalan talebi 650 adet Ankara'nın kapasitesi 650 adet olduğundan bu hücreden 650 adet bilgisayar taşınabilir. Bu taşıma sonucunda hem Antalya'nın talebin tamamı karşıladığından hem de Ankara'nın kapasitesinin tamamı kullanıldığından üçüncü sütun silinir. Kalan tabloda kuzeybatı köşesi Ankara – Trabzon hücresi için Ankara'nın kalan kapasitesi 0 ve Trabzon'un talebi 575 olduğundan bu hücreye 0 ataması yapılarak ikinci satır silinir. Kalan tabloda kuzeybatı köşesi İzmir – Trabzon hücresidir. İzmir'in kapasitesi 1000 ve Trabzon'un ihtiyacı 575 bilgisayar olduğundan bu hücreden 575 adet bilgisayar taşınabilir. Trabzon'un talebi tamamen karşılandığından dördüncü sütun silinir. Kalan tabloda kuzeybatı köşesi İzmir – Van hücresidir. Bu hücreden 425 adet bilgisayar taşınabilir. Tablo 5.3'da BGS problemi için kuzeybatı köşe yöntemine göre bulunan başlangıç tablosu verilmektedir. Bu tabloda sıfır ataması yapılan hücre dahil 7 hücreden taşıma yapılmış ve toplam taşıma maliyeti 23100 TL olarak bulunmuştur.

Tablo 5.3 Kuzeybatı köşe yöntemine göre BGS problemi için başlangıç tablosu

Arz	Talep					
	Esk	Den	Ant	Tra	Van	Kapasite
İstanbul	2 550	4 825	6 125	10	15	1500
Ankara	1	3	5 650	8 0	13	650
İzmir	4	1	2	13 575	17 425	1000
Talep	550	825	775	575	425	

Kuzeybatı köşe yöntemi ile taşımalar belirlenirken birim taşıma maliyetleri dikkate alınmadığından bu yöntem genellikle iyi bir başlangıç çözüm vermemektedir. Diğer taraftan yöntemin basit olması daha hızlı bir şekilde başlangıç çözümün bulunmasını sağlamaktadır.

5.3.2 En düşük maliyet yöntemi

En düşük maliyet yönteminde ulaştırma tablosundaki en düşük maliyetli hücrelere öncelik verilerek taşımalar belirlenmektedir. Yöntemin adımları aşağıdaki gibidir.

Adım 1: Ulaştırma tablosunda minimum maliyete sahip olan hücreyi seç. Eğer birden fazla minimum maliyetli hücre varsa birinci öncelikli olarak en üst satıdaki hücreyi, ikinci öncelikli olarak en sol sütundaki hücreyi seç

Adım 2: Seçilen hücreden maksimum taşımayı yap. Bu taşıma sonucunda eğer kapasitesinin tamamı kullanılmış ise bu satırı, talebinin tamamı karşılanmış ise sütunu sil. Eğer hem satır hem de sütun aynı anda sıfırlanmış ise sadece sütunu sil.

Adım 3: Taşıma yapılacak hücreler varsa 1. adıma git. Değilse dur.

En düşük maliyet yöntemi ile BGS problemi için başlangıç ulaştırma tablosunu bulalım. (Ank, Esk) ve (İzm, Den) hücreleri minimum maliyete sahiptir. (Ank, Esk) hücresi ikinci satırda olduğundan bu hücreyi seçelim. Bu hücreden en fazla 550 adet bilgisayar taşınabilir. Eskişehir'in talebi tamamen karşılandığından birinci sütun silinir. Kalan tabloda (İzm, Den) minimum maliyetli hücredir. Bu hücreden en fazla 825 adet bilgisayar taşınabilir. Denizli'nin talebinin tamamı karşılandığında ikinci sütun silinir. Kalan tabloda (İzm, Ant) en düşük maliyetli hücredir. Bu hücreden en fazla 175 adet taşıma yapılabilir. İzmir'in tüm kapasitesi kullanıldığından üçüncü satır silinir. Kalan tabloda (Ank, Ant) en düşük maliyetli hücredir. Bu hücreden en fazla 100 adet taşıma yapılabilir. Ankara'nın kapasitesinin tamamı kullanıldığından ikinci satır silinir. Kalan tabloda (İst, Tra) en düşük maliyetli hücredir. Bu hücreden en fazla 575 adet taşıma yapılabilir. Trabzon'un talebinin tamamı karşılandığından dördüncü satır silinir. Son olarak (İst, Van) hücresinden 425 adet taşıma yapılarak işlemler sonlandırılır. Tablo 5.4'de BGS problemi için en düşük maliyet yöntemine göre bulunan başlangıç tablosu verilmektedir. Bu çözüm için toplam taşıma maliyeti 17350 TL olarak bulunur.

Tablo 5.4 En düşük maliyet yöntemine ile BGS problemi için başlangıç tablosu

Talep / Arz	Esk		Den		Ant		Tra		Van		Kapasite
İst		2		4	500	6	575	10	425	15	1500
Ank	550	1		3	100	5		8		13	650
İzm		4	825	1	175	2		13		17	1000
Talep	550		825		775		575		425		

5.3.3 Vogel'in Yaklaşım Yöntemi

Vogel'in yaklaşım yöntemi ile (Vogel's Approximation Method, VAM) başlangıç çözüm bulunurken sonraki taşımalarda oluşabilecek ilave taşıma maliyetleri dikkate alınır. Bu ilave maliyetler ceza olarak isimlendirilir. Örneğin BGS probleminde, İstanbul'dan taşıma maliyeti en düşük olan Eskişehir'e bilgisayar gönderilmesi daha avantajlıdır. Fakat Eskişehir yerine en düşük ikinci taşıma maliyetine sahip Denizli'ye bilgisayar gönderilir ise 4-2=2 TL ilave maliyet oluşur. Bu nedenle, İstanbul'dan Eskişehir'e gönderilmeyen her bilgisayar başına en iyi ihtimalle 2 TL ek maliyet oluşacaktır. Benzer şekilde, Eskişehir'e en düşük maliyetle Ankara'dan bilgisayar gönderilebilir. Eğer Ankara yerine ikinci en düşük maliyete sahip İstanbul'dan bilgisayar gönderilir ise 2-1=1 TL ek maliyet oluşur. Benzer şekilde diğer satır ve sütunlar için de cezalar hesaplanarak bu cezalardan kaçınacak şekilde atamalar belirlenebilir. Bunun için ilk önce cezası enbüyük olan satır veya sütunda en düşük maliyetli hücreden mümkün olan en fazla taşıma yapılmalıdır.

Yukarıdaki açıklamalar doğrultusunda VAM yöntemi ile başlangıç ulaştırma tablosu oluşturulurken aşağıdaki adımlar takip edilmelidir.

Adım 1: Her satır ve sütun için en düşük iki maliyet arasındaki farkı hesaplayarak satır ve sütun cezalarını belirle

Adım 2: Enbüyük ceza değerine sahip satır veya sütunu seç. Eğer ceza değerleri eşit ise birinci öncelikli olarak en üst satırı, ikinci öncelikli olarak en sol sütunu seç. Seçilen satır veya sütunda en düşük taşıma maliyetine sahip olan hücreden mümkün olan en büyük taşımayı yap.

Adım 3: Eğer kapasitenin tamamı kullanılmış ise karşı gelen satırı, eğer talebin tamamı karşılanmış ise karşı gelen sütunu çıkar. Eğer hem kapasite hem de talep aynı anda sıfırlanmış ise sadece sütunu çıkar. Yeni ceza değerlerini hesapla.

Adım 4: Tüm atamalar yapılıncaya kadar 1. ve 3. adımları tekrar et

VAM yöntemi genellikle en iyi çözüme oldukça yakın sonuçlar vermektedir. Bu nedenle başlangıç çözüm için çok tercih edilen bir yöntemdir.

BGS problemi için VAM yöntemi ile başlangıç ulaştırma tablosunu bulalım. Satır ve sütunların cezaları Tablo 5.5'de verilmektedir. Üçüncü sütun enbüyük cezaya sahip olduğundan bu sütundaki en düşük maliyetli (İzm, Ant) hücresine maksimum 775 ataması yapılır.

Tablo 5.5 VAM yöntemi ile BGS problemi için başlangıç tablosu

Talep / Arz	Esk	Den	Ant	Tra	Van	Kapasite	Ceza
İst	2	4	6	10	15	1500	4-2=2
Ank	1	3	5	8	13	650	3-1=2
İzm	4	1	2 775	13	17	1000	2-1=1
Talep	550	825	775	575	425		
Ceza	2-1=1	3-1=2	5-2=3	10-8=2	15-13=2		

Antalya'nın talebi tamamen karşılandığı için bu sütun tablodan çıkarabiliriz. Sütunu çıkarmak için üzerini çizebileceğimiz gibi aşağıdaki gibi tablodan tamamen silebiliriz. Tablo 5.6'da yeni atamanın yapılacağı hücreyi bulmak için hesaplanan ceza değerleri verilmektedir. Tablo 5.6'da 3. satır en büyük ceza değerine sahip ve 3. satırdaki (İzm, Den) en düşük maliyetli hücredir. Bu hücreye maksimum 225 ataması yapılır.

Tablo 5.6 VAM yöntemi ile BGS problemi için başlangıç tablosu (devam)

Talep / Arz	Esk	Den	Trab	Van	Kapasite	Ceza
İst	2	4	10	15	1500	4-2=2
Ank	1	3	8	13	650	3-1=2
İzm	4	1 225	13	17	225	4-1=3
Talep	550	825	575	425		
Ceza	2-1=1	3-1=2	10-8=2	15-13=2		

İzmir'in kapasitesi tamamen kullanıldığı için bu satır çıkarılarak yeni ceza değerleri Tablo 5.7'deki gibi bulunur. Bu tabloda maksimum ceza değeri 2 'dir ve birden fazla satır ve sütunda Birinci ve ikinci satırlar ile dördüncü ve beşinci sütunların cezası 2 olduğundan birisi rastgele seçilir. İkinci satırı seçelim, bu durumda en düşük maliyetli (Ank, Esk) hücresine maksimum 550 adet atama yapılır.

Tablo 5.7 VAM yöntemi ile BGS problemi için başlangıç tablosu (devam)

Arz \ Talep	Esk	Den	Tra	Van	Kapasite	Ceza
İst	2 / 550	4	10	15	950	4-2=2
Ank	1	3	8	13	650	3-1=2
Talep	0	600	575	425		
Ceza	2-1=1	4-3=1	10-8=2	15-13=2		

Eskişehir'in talebi tamamen karşılandığından bu sütun çıkarılır. Tablo 5.8'de yeni ceza değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır. Birinci satırın ceza değeri en büyük olduğundan en küçük maliyetli (İst, Den) hücresine maksimum 600 adet atama yapılır.

Tablo 5.8 VAM yöntemi ile BGS problemi için başlangıç tablosu (devam)

Arz \ Talep	Den	Tra	Van	Kapasite	Ceza
İst	4 / 600	10	15	950	10-4=6
Ank	3	8	13	650	8-3=5
Talep	600	575	425		
Ceza	4-3=1	10-8=2	15-13=2		

Denizli'nin talebi tamamen karşılandığı için bu sütun çıkarılır. Tablo 5.9'da yeni ceza değerleri verilmektedir. Enbüyük cezaya sahip birinci ve ikinci satırdan rastgele ikinci satırı seçelim. Bu satırdaki en düşük maliyetli (Ank, Tra) hücresine 100 adet taşıma yapılır.

Tablo 5.9 VAM yöntemi ile BGS problemi için başlangıç tablosu (devam)

Arz \ Talep	Tra	Van	Kapasite	Ceza
İst	10 / 350	15	350	15-10 = 5
Ank	8	13	650	13-8 =5
Talep	575	425		
Ceza	10-8 = 2	15 – 13 = 2		

Ankara'nın kapasitesi tamamen kullanıldığı için bu satır çıkarılır. Yeni ceza değerleri Tablo 5.10'daki gibi bulunur. Geriye kalan (İst, Tra) hücresine 475 ve (İst, Van) hücresine 425 adet atama yapılarak başlangıç tablosu oluşturulur.

Tablo 5.10 VAM yöntemi ile BGS problemi için başlangıç tablosu (devam)

Arz \ Talep	Tra	Van	Kapasite	Ceza
Ank	10 225	15 425	650	15-10 =5
Talep	225	425		
Ceza	10	15		

Buraya kadar yaptığımız atamaları bir tabloda bir araya getirelim. Tablo 5.11'de birleştirirsek BGS probleminin VAM yöntemi ile bulunan başlangıç ulaştırma tablosu verilmektedir. Bu çözüme göre toplam taşıma maliyeti 16650 TL olur.

Tablo 5.11 VAM yöntemi ile BGS problemi için başlangıç tablosu (devam)

Arz \ Talep	Eskişehir	Denizli	Ant	Trabzon	Van
İstanbul	2 550	4 600	6	10 350	15
Ankara	1	3	5	8 225	13 425
İzmir	4	1 225	2 775	13	17

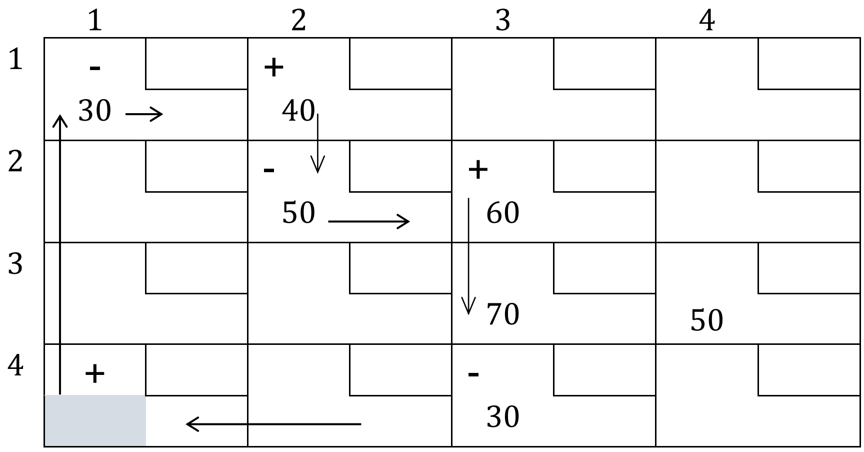
5.4 En İyi Çözümün Bulunması

Ulaştırma probleminde bir başlangıç çözüm bulunduktan sonra ikinci aşamada bu çözümün en iyi çözüm olup olmadığı araştırılır. Eniyi çözümün bulunması için iki farklı yöntem geliştirilmiştir: Atlama Taşı yöntemi (Stepping Stone) ve MODI testi (MOdified DIstribution Test). Her iki yöntemde de ulaştırma tablosundaki boş olan hücrelere bir atama yapıldığında toplam taşıma maliyetinde bir azalma olup olmadığı araştırılmaktadır. Eğer herhangi bir boş hücreye atama yapıldığında toplam maliyette azalma oluyor ise en iyi çözüme ulaşılmamıştır. Bu durumda, bu hücreye atama yapılarak yeni bir çözüm elde edilir. Herhangi bir boş hücrelere atama yapıldığında toplam maliyette bir azalma olmadığında mevcut çözümün en iyi olduğuna karar verilir.

5.4.1 Atlama Taşı Yöntemi

Atlama taşı yöntemini açıklamadan önce bu yöntemde kullanılan bazı kavramları açıklayalım. Bir başlangıç çözüm yöntemi ile elde edilen ulaştırma tablosunda atama yapılan hücreleri **dolu hücre** diğerlerini **boş hücre** olarak tanımlayalım. Ulaştırma tablosundaki bir (i, j) boş hücresine bir birim atama yapıldığında toplam maliyette meydana gelen değişim miktarını d_{ij} olarak tanımlayalım. Ulaştırma tablosunda tüm boş hücreler için hesaplanan d_{ij} değerleri içinde en az birisi negatif ise mevcut çözüm en iyi çözüm değildir. Bu durumda $d_{ij} < 0$ koşulunu sağlayan hücreler içinden mutlak değerce en büyük d_{ij} değerine sahip hücreye atama yapılarak yeni bir çözüm elde edilebilir. Bu işlemlere tüm boş hücreler için $d_{ij} \geq 0$ oluncaya kadar devam edilir.

d_{ij} değerlerini hesaplamak için (i, j) boş hücresine bir atama yapıldığında bu atamadan etkilenen hücrelerin belirlenmesi gerekir. Problem dengeli olduğundan (i, j) boş hücresine bir atama yapıldığında dengenin korunması için i satırındaki ve j sütunundaki dolu hücrelerin değeri yapılan atama miktarı kadar azaltılmalıdır. i. satırda (i, r) hücresinin, j. sütunda ise (q, j) hücresinin azaltıldığını varsayalım. Bu durumda, r sütununda ve q satırındaki denge bozulacağından dengenin yeniden sağlanması için bu satır ve sütunundaki dolu hücreler azaltılan değer kadar arttırılması gerekir. İşlemlere bu şekilde devam edilir ise dengenin korunması için ulaştırma tablosunda bazı hücrelerin değerinin arttığı bazılarının azaldığı bir döngü oluşur. Şekil 5.2'de örnek bir döngü gösterilmektedir. (4,1) boş hücresine bir atama yapıldığında dengenin korunması için (1,1) dolu hücresi azaltılmalı, (1,2) hücresi arttırılmalı, (2,2) hücresi azaltılmalı, (2,3) hücresi arttırılmalı ve (4,3) hücresi azaltılmalıdır. Bu işlemler sonucunda Şekil 5.2’de oklarla gösterilen döngü elde edilir.



(a)

Şekil 5.2 Döngü

Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşıldığı gibi, bir satırda veya sütunda bir hücrenin değeri değiştiğinde aynı satır veya sütundaki bir başka hücrenin değeri ters yönde değiştirilmelidir.

Bir döngüde değeri artan hücreleri (+) ve azalan hücreleri (-) olarak işaretlediğimizde, ilk değer (+) olmak üzere sırasıyla (-) ve (+) şeklinde bir dizi oluşur. Örneğin Şekil 5.2’de (4,1) boş hücresine atama yapıldığında döngü üzerinde artan ve azalan hücreler aşağıdaki gibi olur.

$$(4,1)^{+} \rightarrow (1,1)^{-} \rightarrow (1,2)^{+} \rightarrow (2,2)^{-} \rightarrow (2,3)^{+} \rightarrow (4,3)^{-}$$

Boş bir hücreye atama yapıldığında artan ve azalan hücreleri belirledikten sonra bu boş hücreye bir birim atama yapıldığında toplam maliyette meydana gelecek değişimi hesaplayabiliriz. Örneğin (4,1) boş hücresine bir birim atama yapıldığında toplam maliyetteki değişim döngü üzerinde değişen hücreler dikkate alınarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$d_{41} = c_{41} - c_{11} + c_{12} - c_{22} + c_{23} - c_{43}$$

Eğer $d_{41} < 0$ ise toplam maliyet azalacağından mevcut çözüm eniyi çözüm değildir. Diğer taraftan, tüm boş hücreler için hesaplanan d_{ij} değerleri pozitif ise eldeki çözüm eniyi çözümdür.

Varsayalım ki $d_{14} < 0$, bu durumda (1,4) hücresinden yapılan her taşımada toplam maliyet d_{14} kadar azalacaktır. Bu nedenle, bu hücreden mümkün olduğunca taşıma yapılmalıdır. (1,4) hücresine yapılacak maksimum taşıma miktarını v olarak tanımlayalım. v'nin alabileceği maksimum değer, döngü içinde azalan hücrelerdeki taşıma miktarları içindeki minimum taşıma miktarı kadardır. Azalan hücrelerdeki taşıma miktarları $x_{11} = 30$, $x_{22} = 50$, ve $x_{43} = 30$ olduğundan v aşağıdaki gibi bulunur.

$$v = \min\{30, 50, 30\} = 30$$

$v = 30$ için ulaştırma tablosu yeniden oluşturulur. Bunun için ulaştırma tablosunda artan hücreler 30 birim arttırılırken, azalan hücreler 30 birim azaltılır. Aşağıdaki tabloda

	1	2	3	4
1		70		
2		20	90	
3			70	
4	30		0	50

(a)

Şekil 5.3 Döngü

Bu açıklamalar doğrultusunda atlama taşı yönteminin adımlarını aşağıdaki gibi açıklayabiliriz.

Adım 1: Boş olan (i, j) hücresini seç

Adım 2: Bu hücre için döngüyü oluştur. Döngü üzerinde değeri artan hücreleri (+), azalan hücreleri (-) olarak işaretleyerek d_{ij} değerini hesapla. Tüm boş hücreler için birinci ve ikinci adımları tekrarla.

Adım 4: Eğer tüm boş hücreler için $d_{ij} > 0$ ise en iyi çözüm bulunmuştur, dur. Aksi takdirde $d_{ij} < 0$ olanlar içinden mutlak değerce en büyük olan hücreyi seç.

Adım 5: Bu hücre için oluşturulan döngü üzerinde (-) ile işaretli hücreler içinden en küçük taşıma miktarını bul. Bu değeri, (+) ile işaretlenen hücrelere ekle (-) ile işaretlenen hücrelerden çıkararak yeni bir ulaştırma tablosu oluştur ve birinci adıma git.

BGS problemini atlama taşıma yöntemi kullanarak çözelim. Başlangıç çözüm için Tablo 5.12'de VAM yöntemi ile bulunan çözümü kullanabiliriz.

Tablo 5.12 BGS problemin VAM yöntemi ile başlangıç çözümü

Arz \ Talep	Eskişehir	Denizli	Antalya	Trabzon	Van
İstanbul	[2]	600 [4]	[6]	475 [10]	425 [15]
Ankara	550 [1]	[3]	[5]	100 [8]	[13]
İzmir	[4]	225 [1]	775 [2]	[13]	[17]

Tüm boş hücreler için d_{ij} değerlerini hesaplayalım. (1,1) hücresinden bir birim taşıma yapılır ise (2,1) hücresinin bir birim azaltılmalı, (2,4) hücresi bir birim arttırılmalı ve (1,4) hücresinin bir birim azaltılmalıdır. Böylece (1,1) hücresi için $(1,1)^{+}$, $(2,1)^{-}$, $(2,4)^{+}$ ve $(1,4)^{-}$ döngüsü oluşur.

(1, 1) hücresine bir birim taşıma yapılması durumunda toplam maliyetteki değişim

$$d_{11} = c_{11} - c_{21} + c_{24} - c_{14} = 2 - 1 + 8 - 10 = -1$$

$d_{11} < 0$ olduğundan (1,1) hücresine bir birim taşıma yapıldığında toplam maliyet 1 TL azalır. Diğer boş olan hücreler için d_{ij} değerlerini benzer şekilde bulabiliriz.

$$d_{13} = c_{13} - c_{33} + c_{32} - c_{12} = 6 - 2 + 1 - 4 = 1$$
$$d_{22} = c_{22} - c_{24} + c_{14} - c_{12} = 3 - 8 + 10 - 4 = 1$$
$$d_{23} = c_{23} - c_{24} + c_{14} - c_{12} + c_{32} - c_{33} = 5 - 8 + 10 - 4 + 1 - 2 = 2$$
$$d_{25} = c_{25} - c_{15} + c_{14} - c_{24} = 13 - 15 + 10 - 8 = 0$$
$$d_{31} = c_{31} - c_{21} + c_{24} - c_{14} + c_{12} - c_{32} = 4 - 1 + 8 - 10 + 4 - 1 = 4$$
$$d_{34} = c_{34} - c_{14} + c_{12} - c_{32} = 13 - 10 + 4 - 1 = 6$$
$$d_{35} = c_{35} - c_{15} + c_{12} - c_{32} = 17 - 15 + 4 - 1 = 5$$

d_{11} negatif olduğu için en iyi çözüme ulaşılmamıştır ve (1,1) hücresine taşıma yapılmalıdır. Tablo 5.13'de (1,1) hücresi için oluşturulan döngüde artan hücreler (+) ile azalan hücreler (-) ile gösterelim. Tablo 5.13'de (-) ile işaretli hücrelerdeki taşımalar 475 ve 550 olduğundan (1,1) hücresine en fazla 475 adet taşıma yapılabilir.

Tablo 5.13 BGS problemi için ulaştırma tablosu

Arz \ Talep	Eskişehir	Denizli	Antalya	Trabzon	Van
İstanbul	(+) [2]	600 [4]	[6]	(-) 475 [10]	425 [15]
Ankara	(-) 550 [1]	[3]	[5]	(+) 100 [8]	[13]
İzmir	[4]	225 [1]	775 [2]	[13]	[17]

Yeni çözümü bulmak için (+) ile işaretli hücrelere 475 ekleyelim ve (-) ile işaretlenen hücrelerden 475 çıkaralım. Tablo 5.14'de bu yeni çözüm verilmektedir. Bu çözüm için toplam maliyet 16175 TL'ye düşmüştür.

Tablo 5.14 BGS problemi için ulaştırma tablosu (devam)

Talep / Arz	Eskişehir	Denizli	Antalya	Trabzon	Van
İstanbul	2 475	4 600	6	10	15 425
Ankara	1 75	3	5	8 575	13
İzmir	4	1 225	2 775	13	17

Bu yeni tablonun en iyi çözüm olup olmadığını araştırmak için boş hücreler için d_{ij} değerlerini hesaplayalım.

$$d_{13} = 6 - 4 + 1 - 2 = 1$$

$$d_{14} = 10 - 8 + 1 - 2 = 1$$

$$d_{22} = 3 - 1 + 2 - 4 = 0$$

$$d_{23} = 5 - 2 + 1 - 4 + 2 - 1 = 1$$

$$d_{25} = 13 - 15 + 2 - 1 = -1$$

$$d_{31} = 4 - 1 + 4 - 2 = 5$$

$$d_{34} = 13 - 8 + 1 - 2 + 4 - 1 = 7$$

$$d_{35} = 17 - 15 + 4 - 1 = 5$$

$d_{25} < 0$ olduğu için (2,5) hücresine taşıma yapılmalıdır. Tablo 5.15'de (2,5) hücresi için oluşturulan döngü verilmektedir. Döngü üzerinde (-) işaretli hücreler içinde en küçük taşıma 75 olduğu için (2,5) hücresine en fazla 75 atanabilir.

Tablo 5.15 BGS problemi için ulaştırma tablosu (devam)

Talep / Arz	Eskişehir	Denizli	Antalya	Trabzon	Van
İstanbul	(+) 2 475	4 600	6	10	(-) 15 425
Ankara	(-) 1 75	3	5	8 575	(+) 13
İzmir	4	1 225	2 775	13	17

(2,5) hücresine 75 atanması sonucunda aşağıdaki ulaştırma tablosu elde edilir.

Tablo 5.16 BGS problemi için ulaştırma tablosu (devam)

Arz \ Talep	Eskişehir	Denizli	Antalya	Trabzon	Van
İstanbul	2 550	4 600	6	10	15 350
Ankara	1	3	5	8 575	13 75
İzmir	4	1 225	2 775	13	17

Bu çözüm için boş olan hücreler için d_{ij} değerlerini hesaplayalım.

$$d_{13} = 6 - 2 + 1 - 4 = 1$$

$$d_{14} = 10 - 8 + 13 - 15 = 0$$

$$d_{21} = 1 - 2 + 15 - 13 = 1$$

$$d_{22} = 3 - 4 + 15 - 13 = 1$$

$$d_{23} = 5 - 2 + 1 - 4 + 15 - 13 = 2$$

$$d_{31} = 4 - 1 + 4 - 2 = 5$$

$$d_{34} = 13 - 8 + 13 - 15 + 4 - 1 = 6$$

$$d_{35} = 17 - 15 + 4 - 1 = 5$$

Tüm boş hücreler için d_{ij} değerleri pozitif olduğu için en iyi çözüme ulaşılmıştır. Yukarıdaki çözümde $d_{14} = 0$ değerini almıştır. Bunun anlamı (1,4) hücresine taşıma yapılır ise toplam maliyet değişmeyecek fakat yeni bir çözüm elde edilecektir. Bir başka ifadeyle, problemin alternatif bir çözümü vardır.

Bazı problemlerde atlama taşı yöntemi ile bir hücreye taşıma yapılırken döngü üzerinde birden fazla hücre aynı anda sıfır değerini alabilir. Örneğin aşağıdaki ulaştırma tablosuna dikkate alalım. (3,1) hücresine taşıma yapıldığında döngü üzerindeki (-) işaretli hücreler içinden enküçük değer 100 dür. Bu nedenle (3,1) hücresine en fazla 100 birim atanmalıdır.

	1	2	3	4	5
1		(+) 600		(-) 100	400
2	(-) 100			(+) 200	
3	(+)	(-) 250		400	

Eğer (3,1) hücresine 100 birim atanır ise hem (1,4) hem de (2,1) hücreleri aynı anda sıfır olmaktadır. Ulaştırma tablosunda taşıma yapılan hücre sayısının $n + m - 1$ olması gerektiğinden bu hücrelerden sadece bir tanesi çözümden çıkarılmalı diğer hücrelere ise sıfır değeri atanmalıdır. Örneğin (1,4) hücresi çözümden çıkarılır ise (2,1) hücresine sıfır ataması yapılmalıdır. Bu durumda yeni ulaştırma tablosu aşağıdaki gibi olur.

	1	2	3	4	5
1		700			400
2	0			300	
3	100	150		400	