CENG 481 GRAF TEORİ VE UYGULAMALARI
Hafta 13

Prof. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

Hafta 13
Konular

1-Graflarda Zedelenebilirlik Kavramı

2-Graflarda Zedelenebilirlik Parametreleri

- Kimyasal sistemler, sinir ağları, sosyal ağlar ya da internet gibi farklı sistemleri modellemek için iletişim ağları ve karmaşık sistemler kullanılır. Fizik bilimleri, biyoloji bilimleri, bilgisayar bilimleri ve matematik gibi çeşitli araştırma alanlarında iletişim ağlarının topolojisini çalışma giderek artmaktadır ve büyük bir ilgi görmektedir.

- Çizge Teorisi, bir iletişim ağının mimarisinin analizi ve çalışmasında en güçlü matematiksel araçlardan biri haline gelmiştir. Bir iletişim ağının altında yatan topoloji bir $G(V(G), E(G))$ çizgesi ile modellenir. Bu G çizgesinin $V(G)$ tepeler kümesi iletişim ağındaki işlemciler kümesidir, $E(G)$ ayrıtlar kümesi ise iletişim ağındaki iletişim hatlarının bir kümesidir.

- Karmaşık sistemlerindeki ana konu, onun zedelenebilirlik ve dayanıklılığının değerlendirilmesidir. Zedelenebilirlik iletişim ağının analizinde önemli bir kavramdır. Bir iletişim ağının zedelenebilirliği o iletişim ağının altında yatan çizgenin global gücünün ölçümü olarak tanımlanmaktadır.

- Bir iletişim ağında bazı merkezlerin veya bağlantı hatlarının bozulmasıyla iletişim kesilene kadar ağın gösterdiği dayanma gücünün ölçümüne "ağın zedelenebilirlik sayısı " denir.

- İletişim sistemleri, genellikle kopmalara ve saldırılara maruz kalırlar. İletişim ağının dayanıklılığını ölçmek için literatürde çeşitli ölçümler varken iletişim ağının güvenirliliğini hesaplayacak formülleri türetmek için de birçok çizge teorik parametreleri kullanılmaktadır.

- Çizgelerdeki ilk zedelenebilirlik parametresi Bağlantılılık sayısı (Connectivity)' dır. Daha sonra birçok zedelenebilirlik parametresi tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları; dayanıklılık (toughness), saçılma sayısı (scattering number), bütünlük (integrity), baskınlık sayısı (domination number), bağımlılık sayısı (bondage number)' dır.

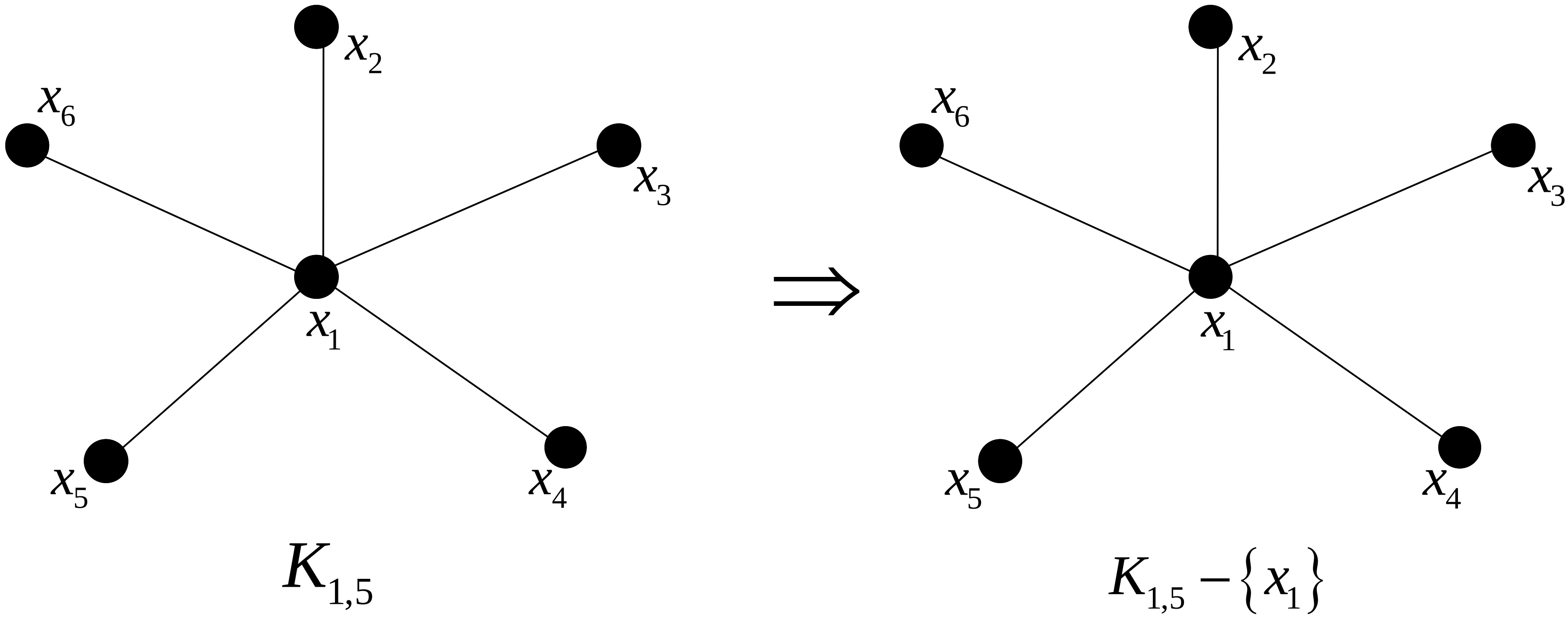
2. BAZI ÖNEMLİ ZEDELENEBİLİRLİK PARAMETRELERİ

Tanım 2.1: [14] Bir G çizgesini bağlantısız veya sadece izole tepelerden oluşan bir çizge haline getirmek için çizgeden çıkarılması gereken en az tepe sayısına çizgenin ***tepe bağlantılılık sayısı*** ***(****connectivity****)*** denir ve $k(G)$ ile gösterilir. Bir G çizgesinin bileşenlerinin sayısı $w(G)$ olmak üzere, connectivity tanımı;

$$k(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| : w(G-S) \geq 2\}$$

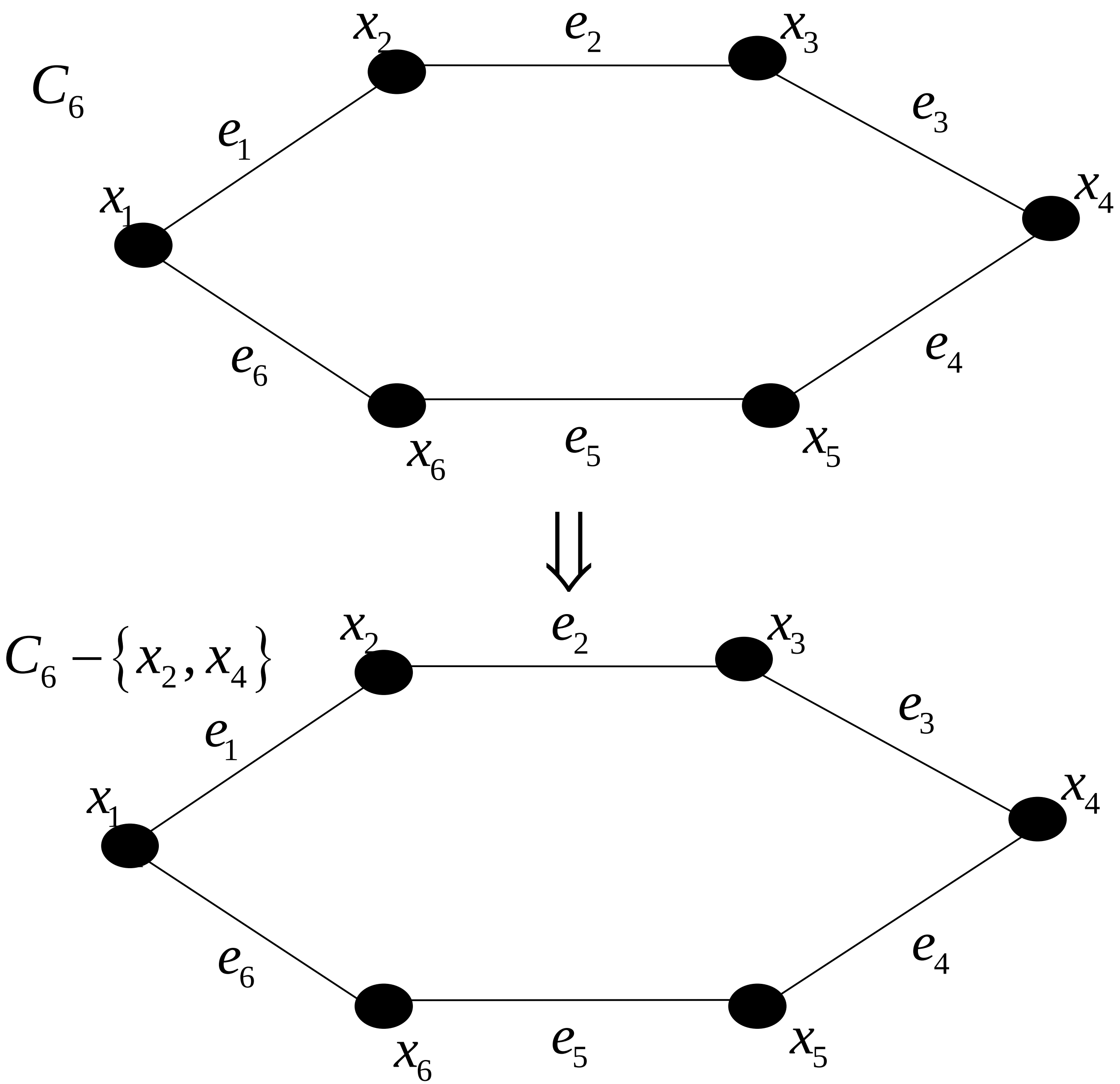
şeklinde de yazılır.

Örnek 1:



$$k(K_{1,5})=1$$

Örnek 2:

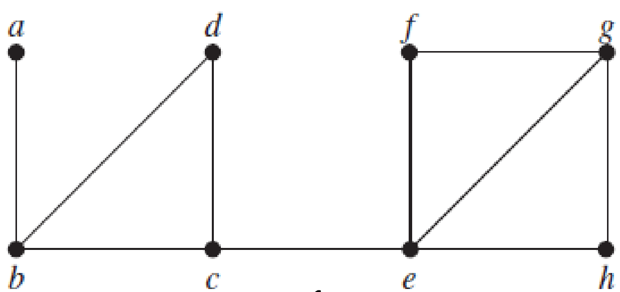


C_6
x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6
e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6
$C_6 - \{x_2, x_4\}$
x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6
e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6

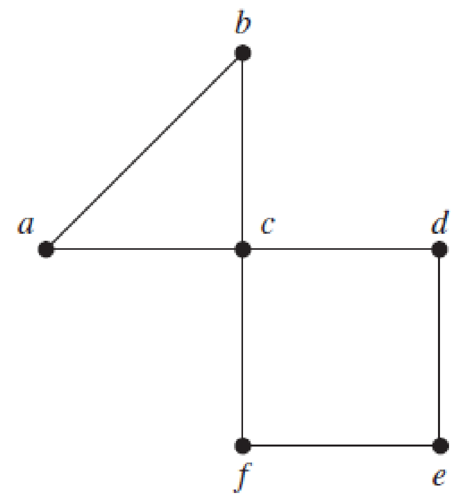
$$k(C_6) = 2$$

Örnek 3:

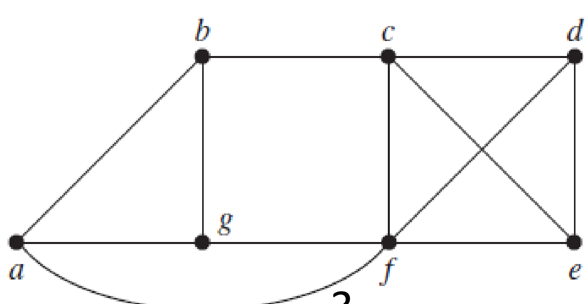
-- Aşağıdaki grafları bağlantısız yapmak için graftan atılması gerekli tepele



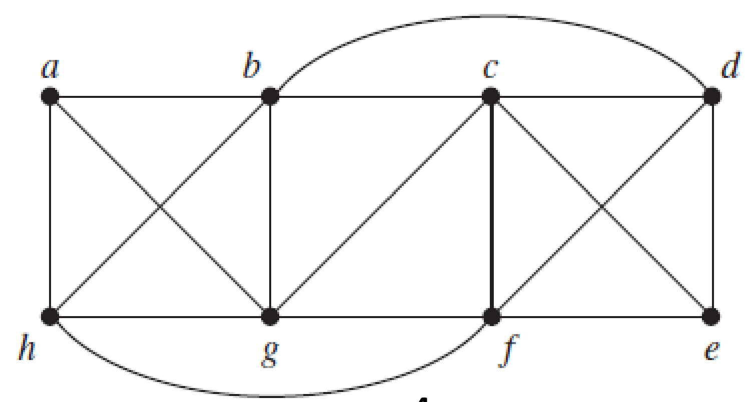
1



2



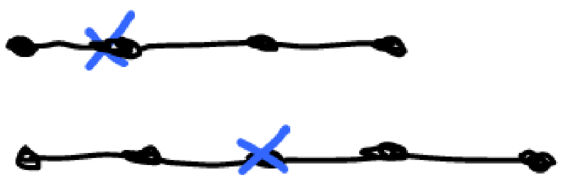
3



4

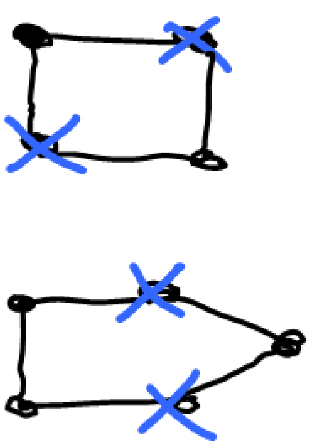
Tanım 1: Bağlantılı bir *G* grafını bağlantısız yapmak veya tek izole tepe elde etmek için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına grafın **bağlantılılığı (connectivity)** denir ve *k(G)* ile gösterilir. Önemli grafların connectivity değerleri aşağıdadır.

1) Yol Graf



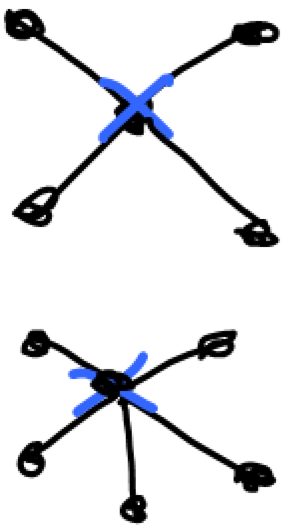
$k(P_n) = 1$

2) Çevre Graf



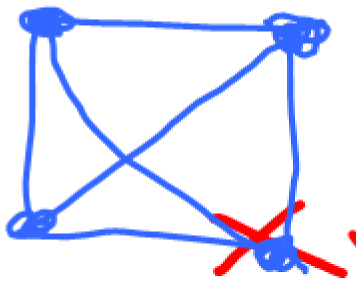
$k(C_n) = 2$

3) Yıldız Graf



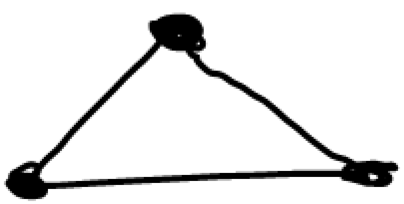
$k(K_{1,n}) = 1$

4) Tam Graf



K_4

dur

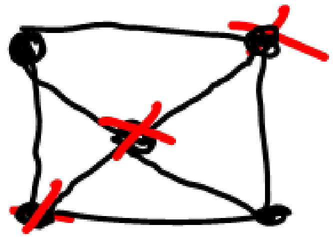


K_3

$k(K_n) = n-1$

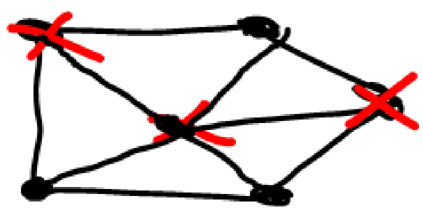
izole tepe kalmayana kadar tepe atılır.

5) Tekerlek Graf



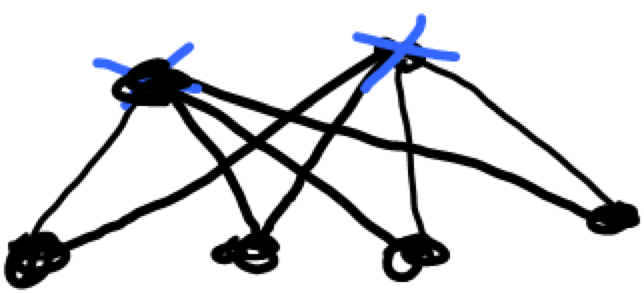
$W_{1,4}$

$\Big\} \; k(W_{1,n}) = 3$



$W_{1,5}$

6) iki parçalı tam graf



$\Rightarrow \; k(K_{m,n}) = \min\{n, m\}$

Tanım: G grafı eğer $\kappa(G) = n$ n-bağlı graftır denir.

Teorem: G, 2-bağlı bir graf ve u ve v bu grafın 2 tepesi olsun. Bu durumda G'de bir C çevrimi vardır öyleki u ve v bu döngüde yer alırlar.

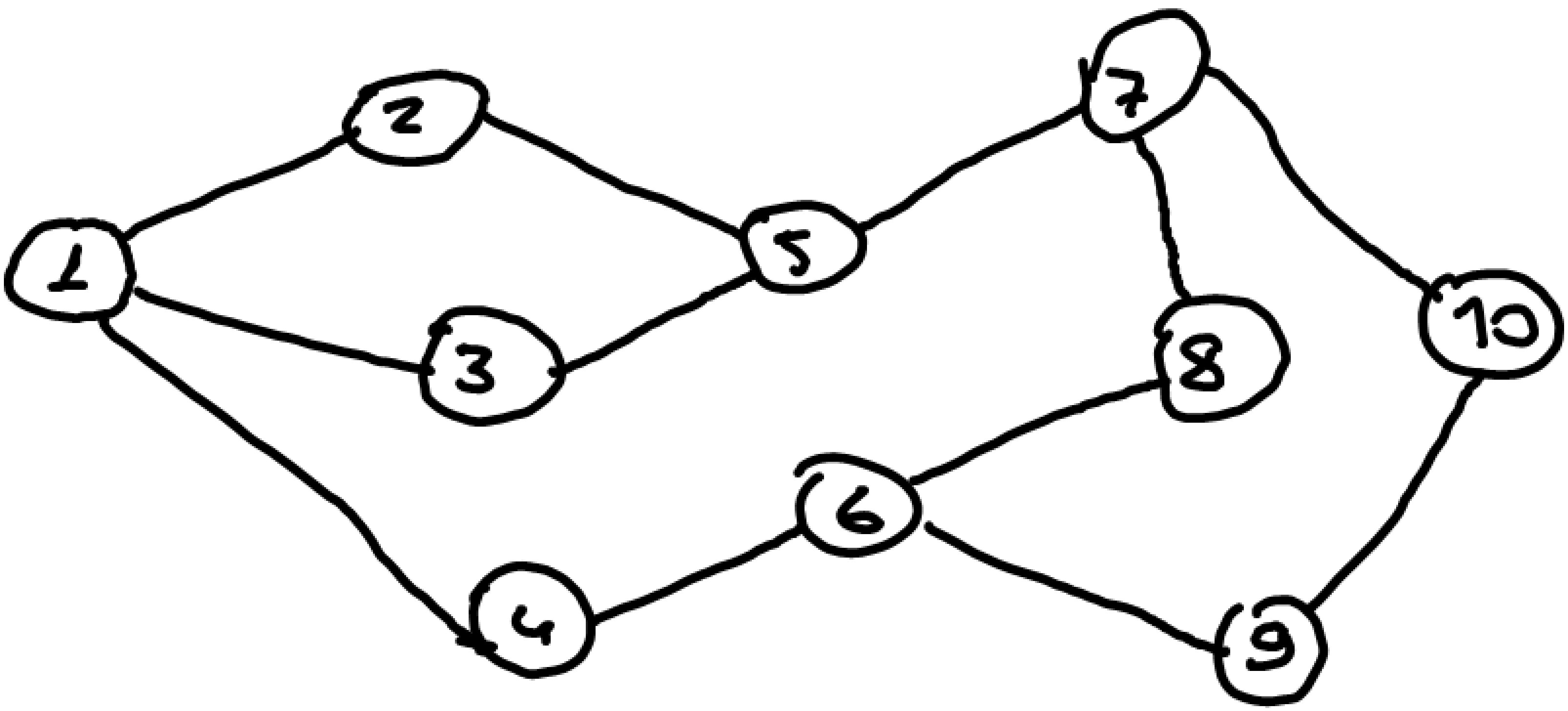
- K_n den bir tepe çıkarılır ise K_{n-1} elde edilir.
  Öyleyse $\kappa(K_n) = n-1$

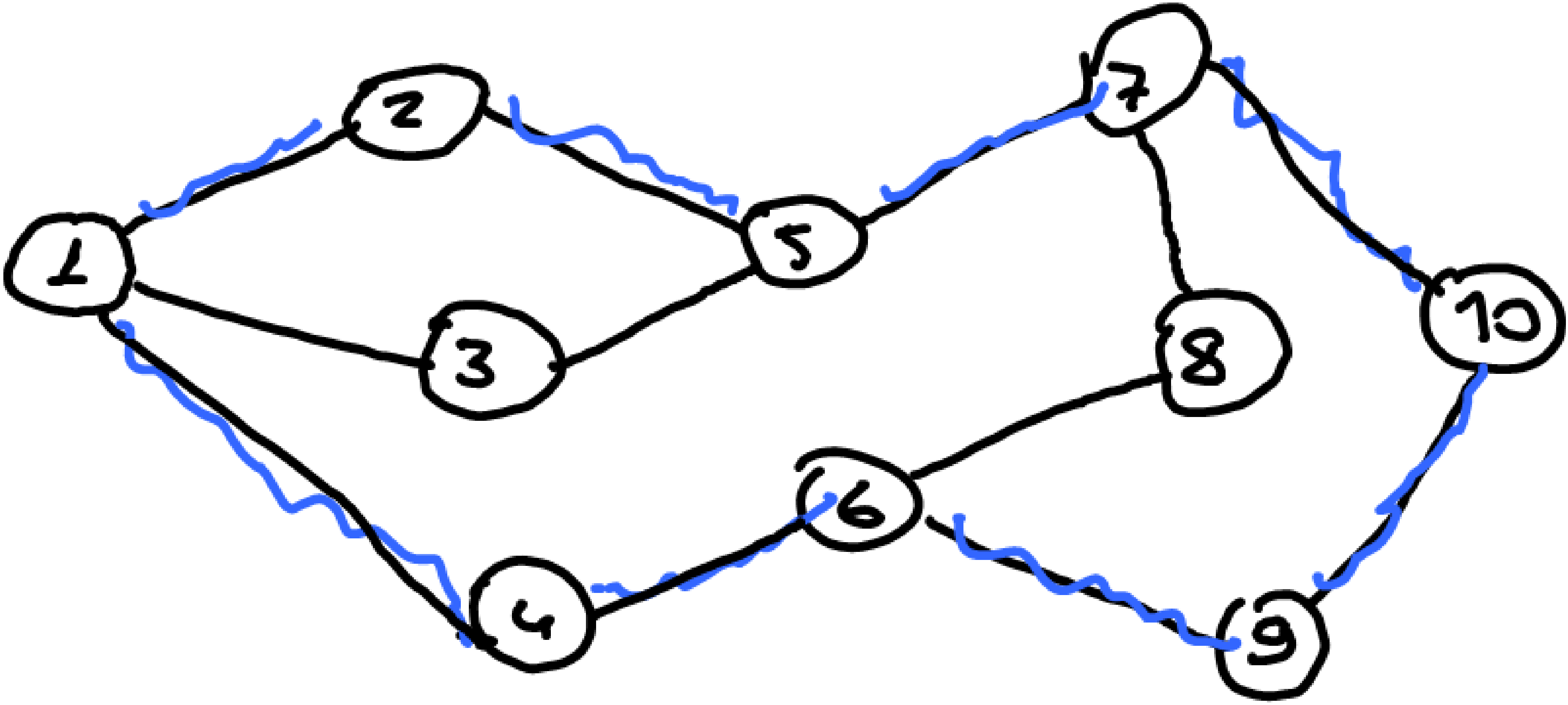
Bir Grafın Connectivity Değerlerinin Bulunması

Ağlardaki maksimum akış minimum kesme ye dayanan Menger'in teoremi birleştirilmişlik konusundaki en temel teoremdir ve bu teoreme göre bir grafta bitişik olmayan *u* ve *v* tepeleri arasındaki tepe tekrarsız yolların maksimum sayısı *u* ve *v* yi bağlantısız yapmak için çizgeden atılması gereken minimum tepe sayısına eşittir. Tepe birleştirilmişlik için ifade edilen bu teorem ayrıt tekrarsız yollar kullanılarak ayrıt birleştirilmişlik için de geçerlidir. Bu haliyle teorem grafın bağlantısız olmasını sağlayan tepelerin hangileri olduğu ile ilgili bir bilgi vermemektedir.

Teorem . *Bağlantılı bir G grafında ayrık ve komşu olmayan iki tepe u ve v olsun. Buna göre, G'deki içten ayrık u − v yollarının maksimum sayısı, u'yu v'den ayırmak için atılması gerekli tepelerin minimum sayısına eşittir.*

ÖRNEK: Aşağıda 10 tepeli bir G grafı verilmiştir. İçten ayrık yolların sayısı nedir?





1,2,5,7,10
1,4,6,9,10

} yolları 5 ve 6 tepelerini kullanan içten ayrık yollardır.

5 ve 6 tepelerini kullanan farklı

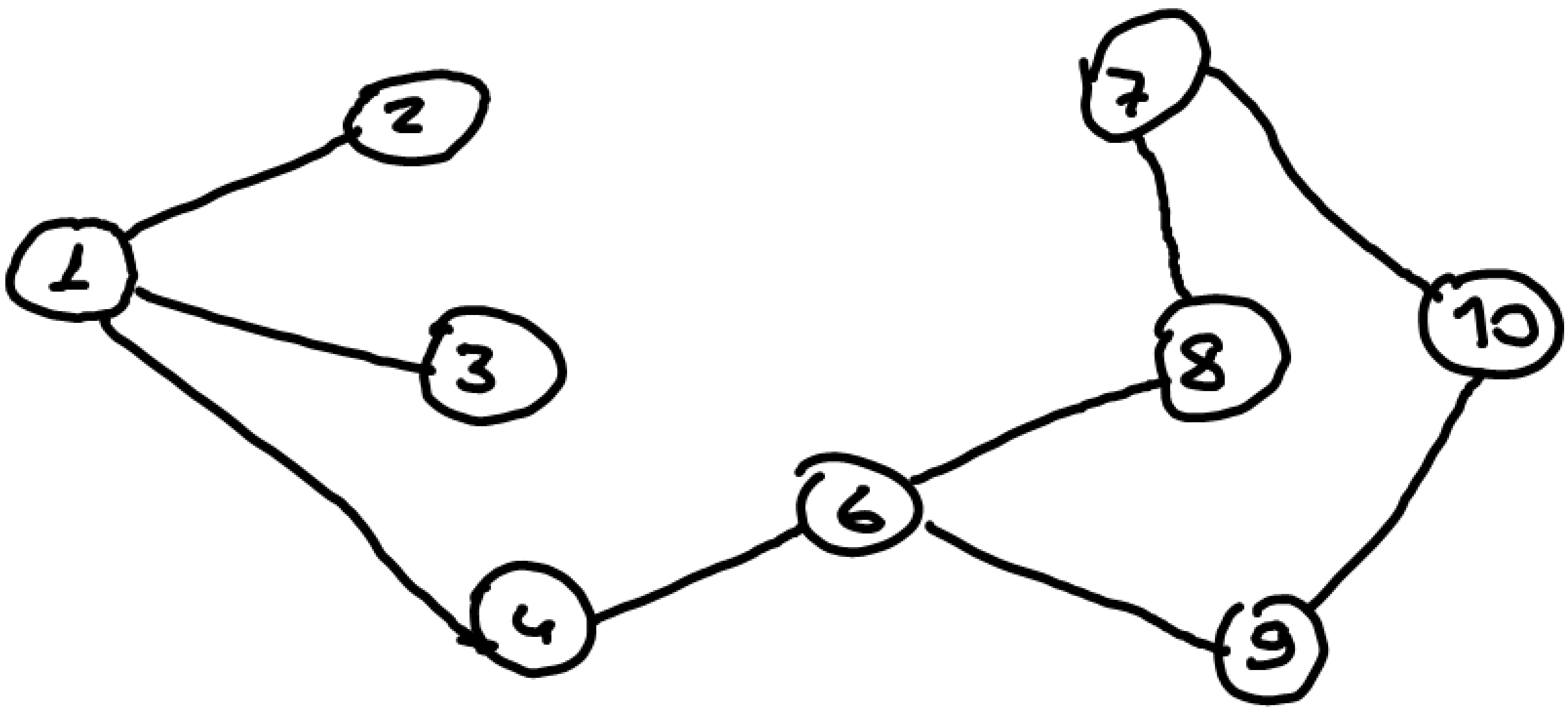
içten ayrık yollarda bulunabilir.

Fakat bunların sayısı maksimum

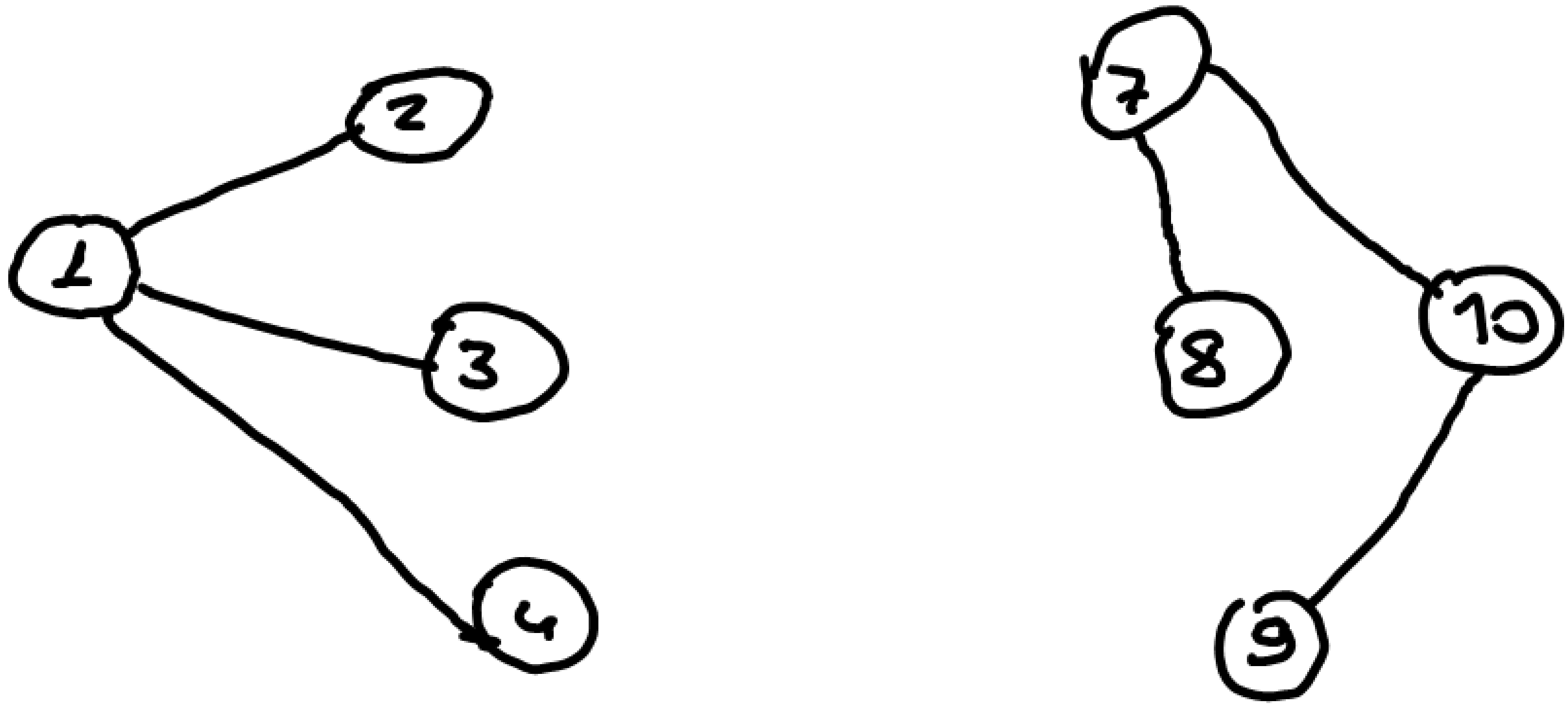
2'dir.

Böylece $k(G) = 2$ elde edilir.

5 tepesi silindiğinde



5 ve 6 tepeleri silindiğinde:



~~*~~ isten ayrık yolları sayısı

Ford-Fulkerson (en büyük akış)

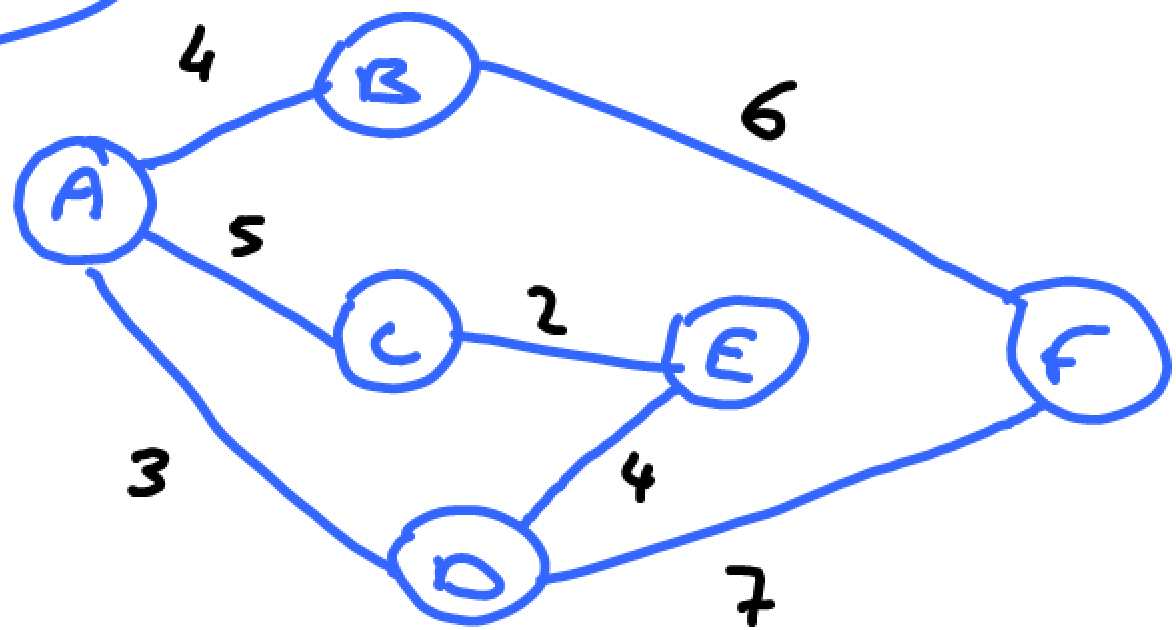
algoritması yardımıyla bulunabilir.

Ford-Fulkerson Sözde Kodu

```
ford-fulkerson (G, s, t)
for each edge (u, v) ∈ E(G)
    f[u,v] = 0
    f[v,u] = 0
end

while (s'den t'ye p yolu var ise)
    c_f(p) = min{ c_f(u,v) | (u,v) ∈ p }
    for each edge (u,v) in p
        f(u,v) = f(u,v) + c_f(p)
        f(v,u) = - f(u,v)
    end
end
```

Örnek)

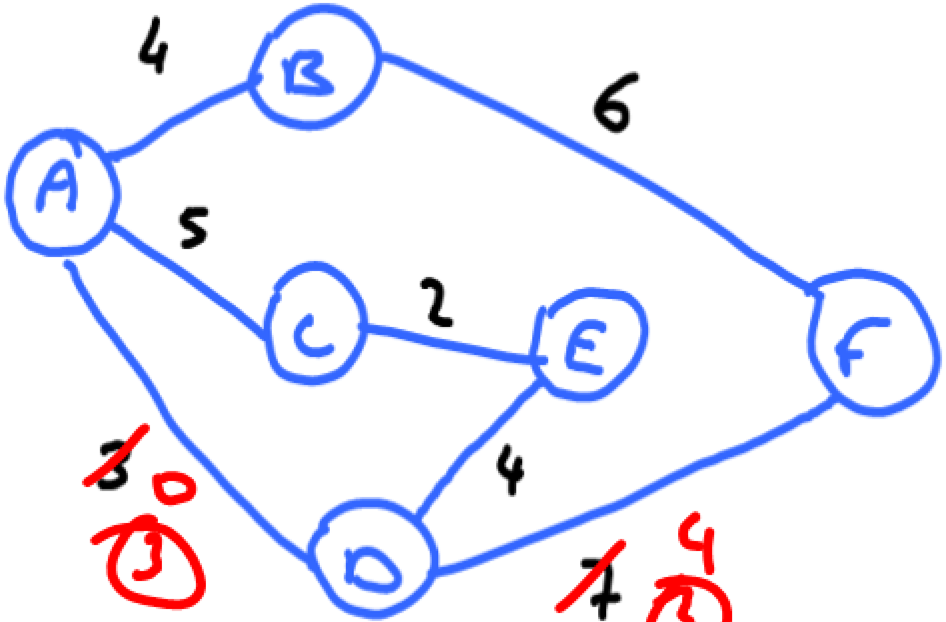


A→F'ye en büyük akış?

1. adım : DFS ile A→F ye yollar bulunur.

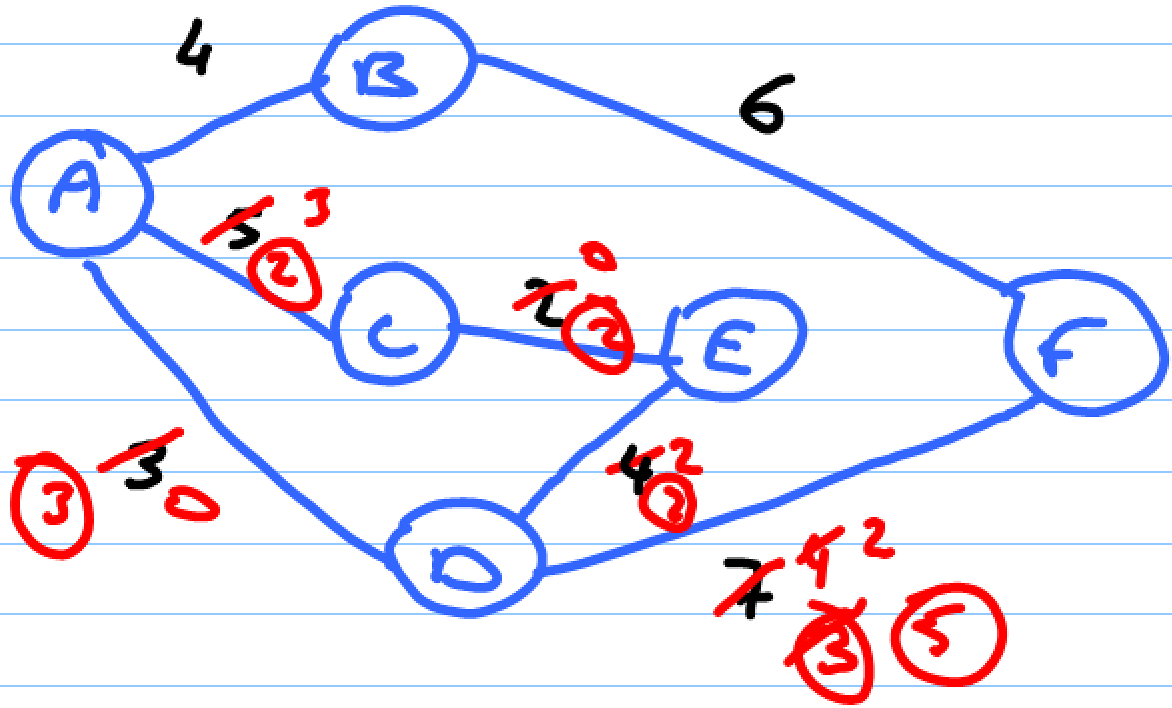
ADF yolu

$$\min\{\underset{3}{A-D}, \underset{7}{D-F}\} = 3 \,//$$



2. adım: A C E D F yolu

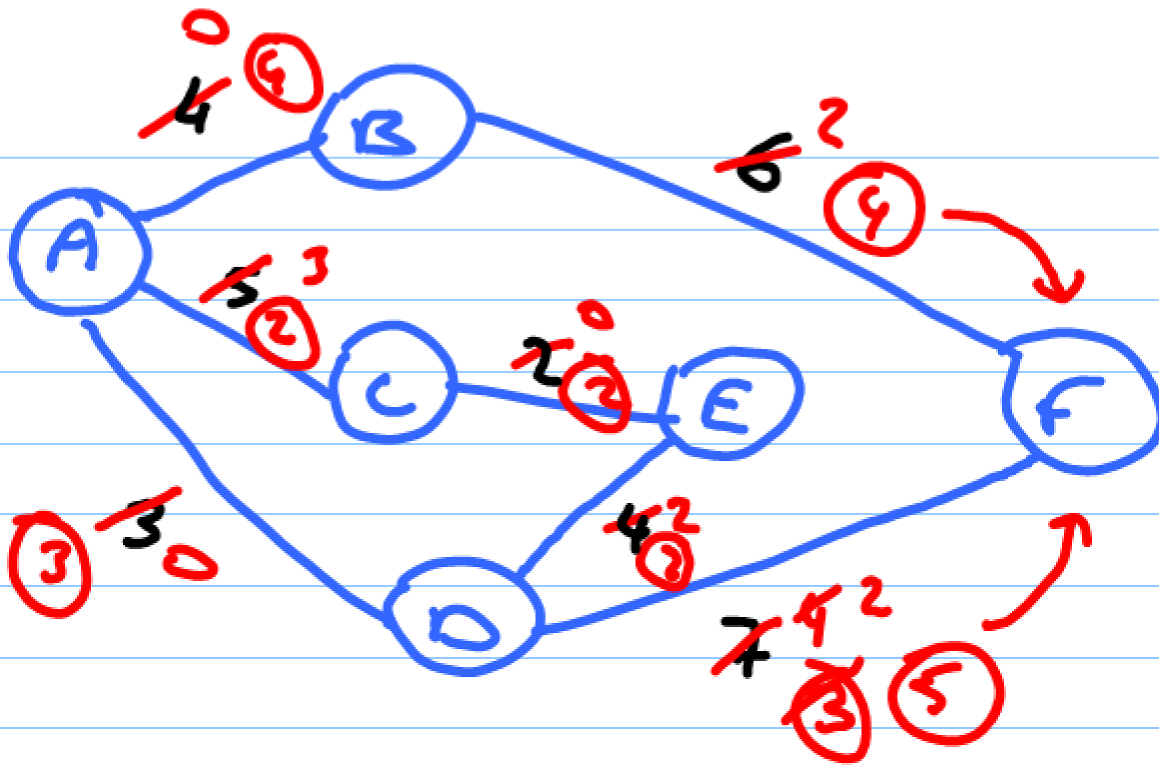
$\min\{\underset{5}{A-C},\ \underset{2}{C-E},\ \underset{4}{E-D},\ \underset{3}{D-F}\} = 2$



3. adım

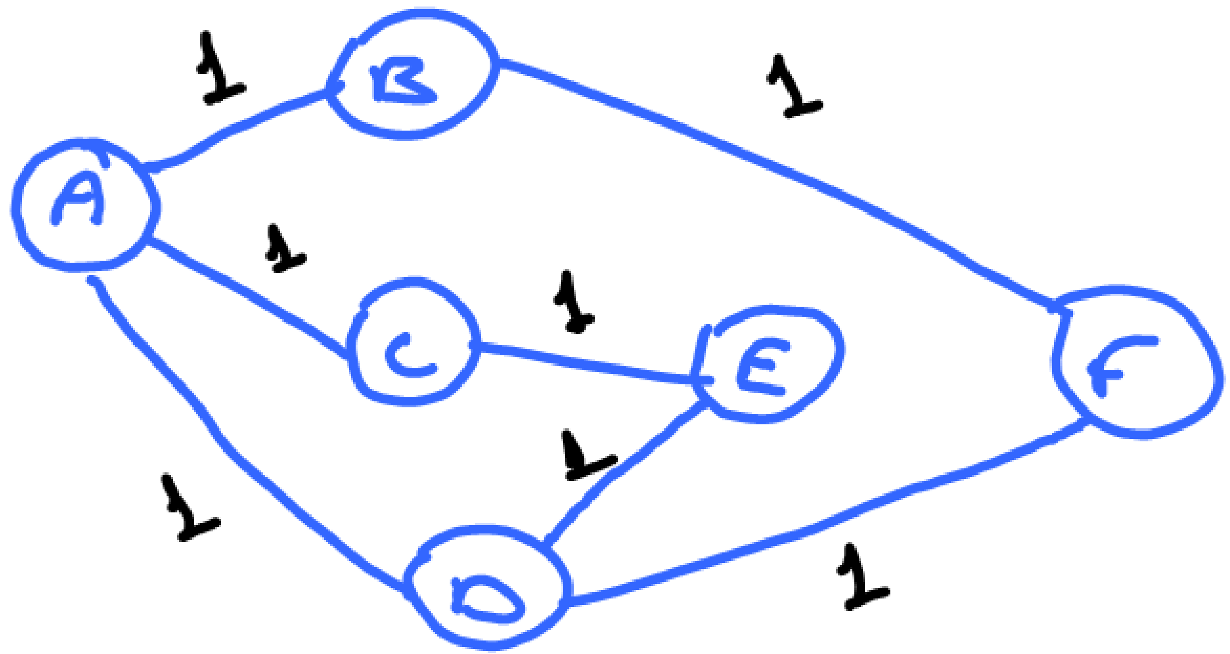
ABF yolu $\min\{A\text{–}B,\ B\text{–}F\} = 4$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 4 \qquad\quad 6$



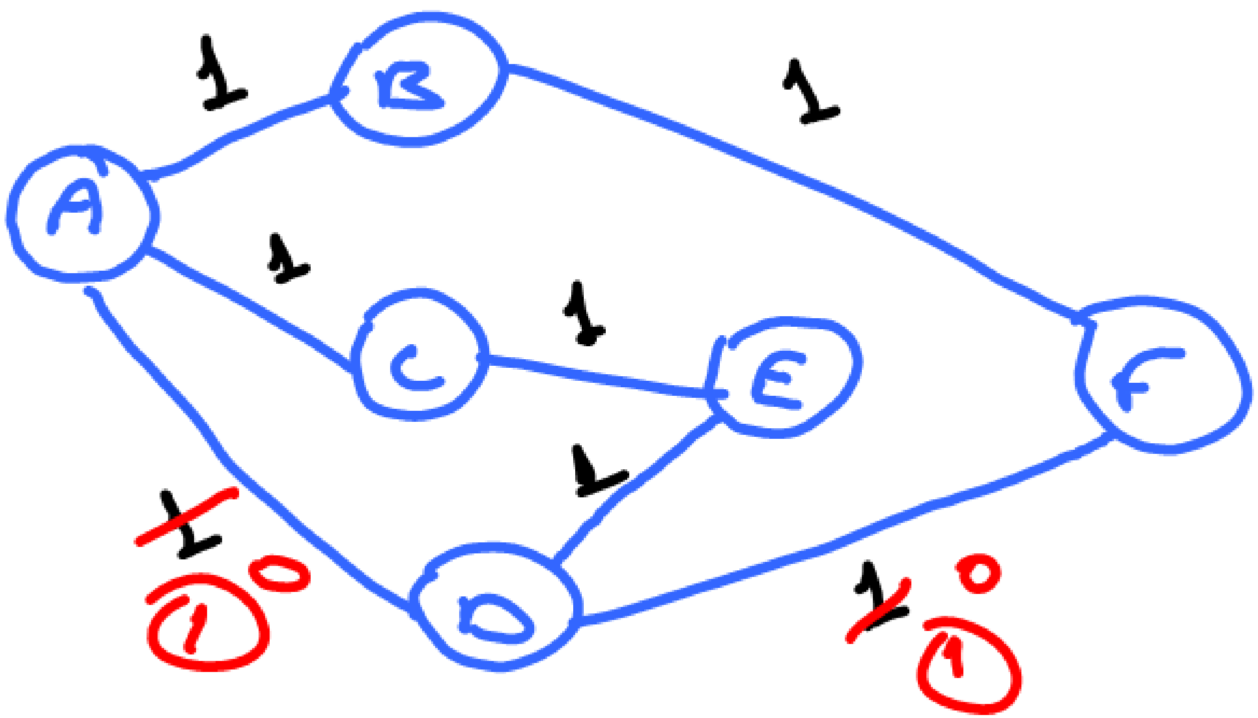
A'dan F'ye 4+5 = 9 birim akış oldu.

* Tüm akış değerlerine 1 verdiğimizde, aşağıdaki graf elde edilir.



1. adım: ADF yolu

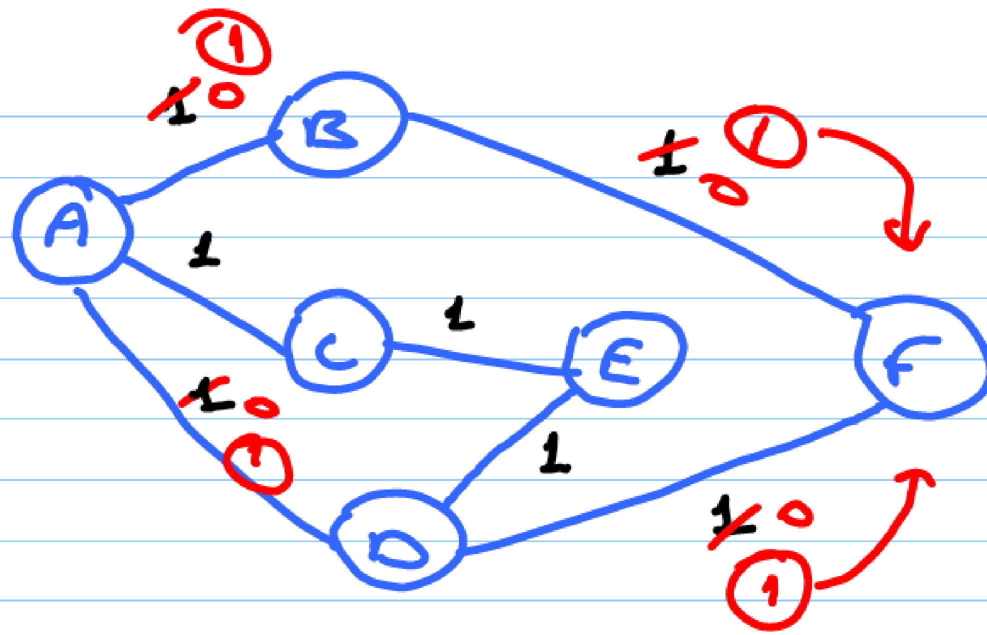
$$\min\{\underset{1}{A-D}, \underset{1}{D-F}\} = 1$$



2. adım: ACEDF yolu

$$\min\{\underset{1}{A-C},\ \underset{1}{C-E},\ \underset{1}{E-D},\ \underset{0}{D-F}\} = 0$$

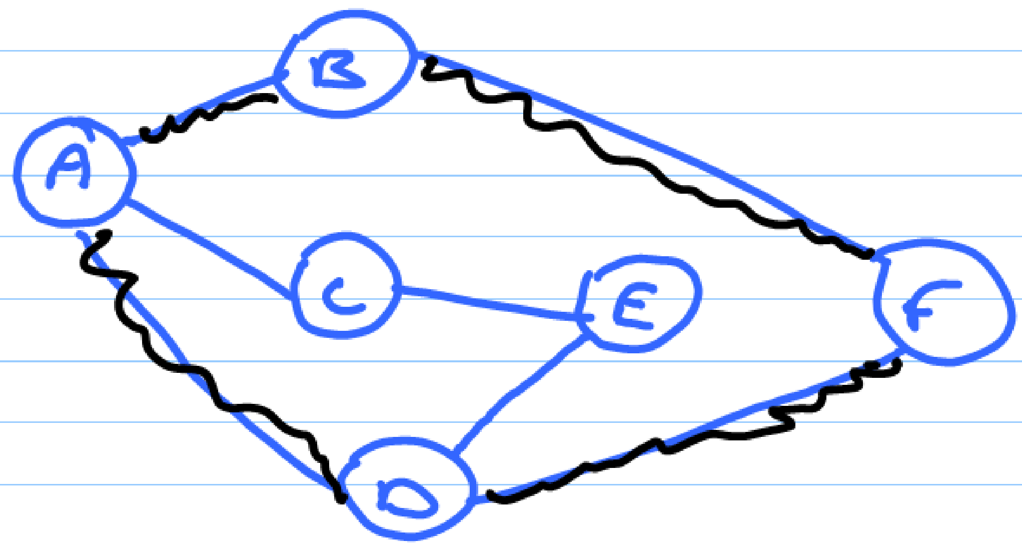
3. adım) ABF yolu $\min\{\underset{1}{A-B},\ \underset{1}{B-F}\} = 1$



$1+1=2$ mak. akış

içten ayrık yolların sayısı

Sonuç olarak: içten ayrık yolların sayısı 2'dir.



Böylece $k(G) = 2$ 'dir.

içten ayrık yollarda ortak ayrıt yoktur!!!

-- Connectivity değeri polinom zamanda hesaplanır…

-- Connectivity değeri tanımlandıktan sonra connectivity değerine bağlı bir çok Zedelenebilirlik parametresi tanımlanmıştır.

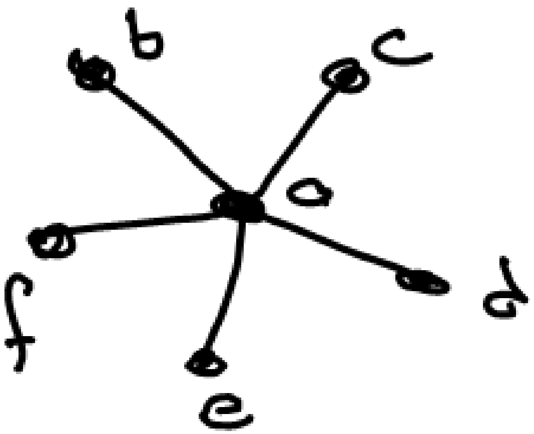
-- Ortalama Alt Connectivity (Average Lower Connectivity) değeri bu parametrelerin önemlilerinden biridir.

Ortalama Alt Connectivity Değeri

$$k_{av}(G) = \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} S_v(G)$$

$S_v(G)$: v tepesini içeren minimum elemanlı kümedir. Bu kümeyi graftan attığımızda graf ya bağlantısız kalır ya da izole tepe kalır.

Örnek: $k_{au}(K_{1,5}) = ?$



$S_a(K_{1,5}) = 1$ $\{a\}$

$S_b(K_{1,5}) = 2$ $\{a,b\}$

$S_c(K_{1,5}) = 2$ $\{a,c\}$

$S_d(K_{1,5}) = 2$ $\{a,d\}$

$S_e(K_{1,5}) = 2$ $\{a,e\}$

$S_f(K_{1,5}) = 2$ $\{a,f\}$

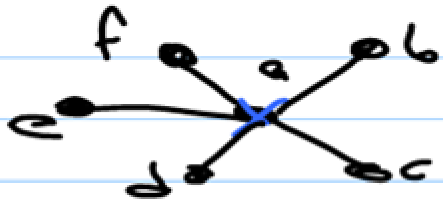
Böylece: $t_{av}(K_{1,5}) = \dfrac{1+2+2+2+2+2}{6}$

$= \dfrac{11}{6} \cong 1.83$

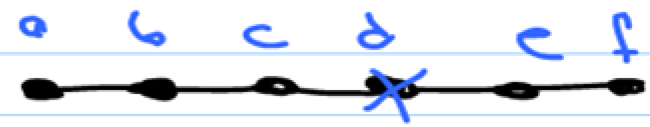
$$\boxed{t(K_{1,5}) = 1}$$

★) $t_{av}(K_{1,5}) > t(K_{1,5})$

Örnek:



$K_{1,5}$



P_6

$\boxed{\text{6 tepeli, 5 ayrıtlı}}$

$\boxed{k(K_{1,5}) = 1}$

$k_{av}(K_{1,5}) = ?$

$\cong 1.83$

$\boxed{\text{6 tepeli, 5 ayrıtlı}}$

$\boxed{k(P_6) = 1}$

$k_{av}(P_6) = ?$

$$k_{av}(P_6) = \frac{2+1+1+1+1+2}{6}$$

$$= \frac{8}{6} \cong 1.33$$

hangisi daha dayanıklı? P_6

Örnek: Önemli grafların ortalama alt connectivity değerlerini bulunuz.

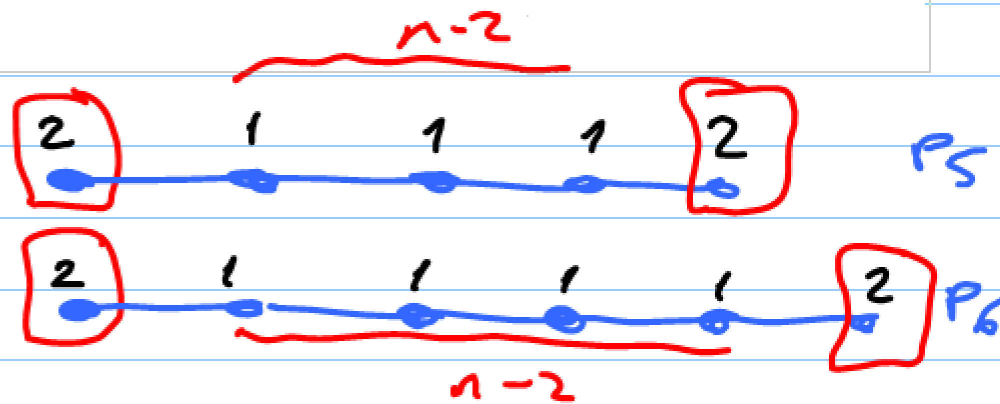
$\kappa_{av}(P_n) = ?$ $\kappa_{av}(C_n) = ?$ $\kappa_{av}(K_n) = ?$

$\kappa_{av}(W_{1,n}) = ?$ $\kappa_{av}(K_{1,n}) = ?$

n tepeli Yol graf:

$k_{av}(P_n) = ?$

n tepeli

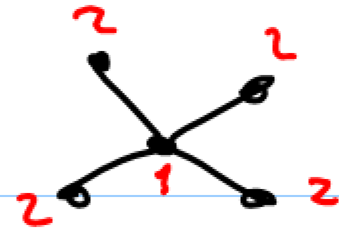


$$k_{av}(P_n) = \frac{2.2 + (n-2).1}{n} = \boxed{\frac{n+2}{n}}$$

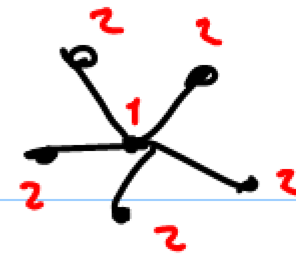
$$\boxed{k_{av}(P_6) = \frac{8}{6}}$$

n+1 tepeli Yıldız graf:

$tav(K_{1,n}) = ?$



$K_{1,4}$



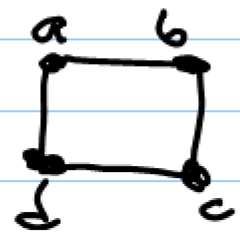
$K_{1,5}$

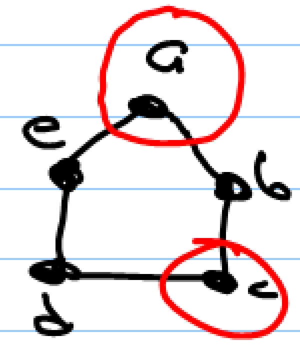
$$tav(K_{1,n}) = \frac{1.1 + n.2}{n+1} = \boxed{\frac{2n+1}{n+1}}$$

$$tav(\underbrace{K_{1,5}}_{n=5}) = \frac{11}{6} \cong \underline{\underline{1.83}}$$

n tepeli Çevre graf:

$k_{av}(C_n) = ?$





$\forall v \in V(G)$ için $\varsigma_v(G) = 2$

$\boxed{k_{av}(C_n) = 2}$

n **tepeli Tam graf için nedir?**

***n*+1 tepeli Tekerlek graf için nedir?**

Önemli Graf Parametre Değerleri

1- Integrity (Bütünlük) değeri

2- Toughness (Dayanıklılık) değeri

3- Tenacity (Kararlılık) değeri

4- Scattering (Saçılım) değeri

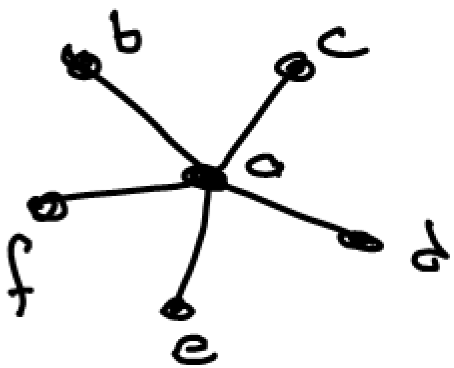
5- Rupture Degree (Parçalanma derecesi) değeri

Tanım: G bir çizge ve G çizgesinin tepelerinin herhangi bir kümesi S olsun. $G-S$ çizgesinin en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı $m(G-S)$ olmak üzere, G çizgesinin ***tepe bütünlük değeri*** *(integrity)* denir.

$$I(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| + m(G-S)\} \text{ 'dir.}$$

Örnek:

$$I(K_{1,5}) = ?$$



S	$\|S\|$	$m(G-S)$	I^*
$\{a\}$	1	1	2
$\{a,b\}$	2	1	3
$\{a,b,c\}$	3	1	4
$\{b,c\}$	2	4	6

$\vdots$

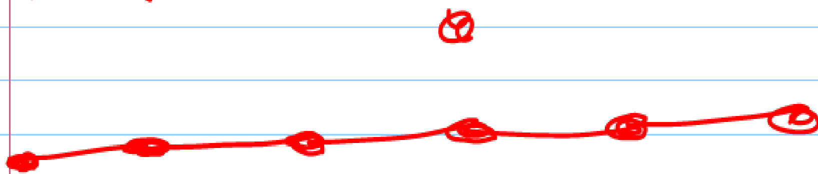
$$\boxed{I(K_{1,5}) = 2}$$

Tüm alt kümeler bakılırsa: $O(2^n)$

* polinom zamanda hesaplanamaz.

* Sezgisel yaklaşımlar ile hesaplanabilir.

$I(P_n) = ?$



$\lvert S \rvert$	$V - S$
1	2
2	3
$\vdots$	
$\lvert r$	$\lvert r+1$ parça

en çok.

*) Teorem:) G grafı n tepeli bir graf olsun.

Bu durumda $m(G-S) \geq \dfrac{n-|S|}{w(G-S)}$

grafdan atılan min tepe.

parça sayısı

S, atıldıktan sonra geriye kalan grafdaki en büyük parçanın eleman sayısı.

yol graf için $\boxed{m(G-S) \geq \frac{n-r}{r+1}}$ ★

$$\boxed{I(P_n) \geq \min_{r} \left\{ r + \frac{n-r}{r+1} \right\}}$$

$f(r)$

fonk Sign

$$f'(r) = 1 + \frac{-1.(r+1) - 1.(n-r)}{(r+1)^2}$$

$$\frac{r^2+2r+\cancel{1}-\cancel{r}-\cancel{1}-n+\cancel{r}}{(r+1)^2}$$

$$f(r)\Big| = 2\sqrt{n+1} - 2$$

min

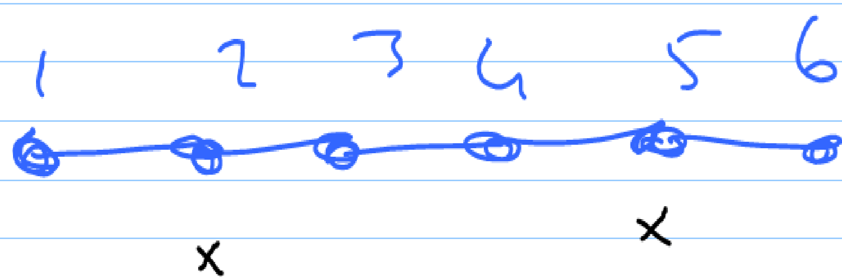
$$\boxed{I(P_n) = \lceil 2\sqrt{n+1} \rceil - 2.}$$

P6 için:

$$I(P6) = \left\lceil 2\underbrace{\sqrt{7}}_{2.6} \right\rceil - 2$$

$$= \lceil 2.(2{,}6) \rceil - 2$$

$$= 6 - 2 = \boxed{4}$$



S	$\lvert S\rvert$	$m(G-S)$	I^*
$\{2\}$	1	4	5
$\{2,5\}$	2	2	4

$\Downarrow$

S	$\lvert S\rvert$	$m(G-S)$	I^*
$\{2,4\}$	2	2	4

$\{2,4,5\} \qquad 3 \qquad 1 \qquad 4$

$$\boxed{I(P_6) = 4}$$

$$\boxed{I(P_n) = \lceil 2\sqrt{n+1}\rceil - 2}$$

Çalışma Sorusu:

$$I(n) = ?$$

Yanıt: $I(n) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1$.

KAYNAKLAR

[1] Chartrand, G.-Lesniak, L., (1986) : *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, California

[2] West D.B. (2001) : *Introduction to Graph Theory, Prentice Hall*, USA.

[3] Graf Teoriye Giriş, Şerife Büyükköse ve Gülistan Kaya Gök, Nobel Yayıncılık

[4] Discrete Mathematical Structures for Computer Science, Ronald E. Prather, Houghton Mifflin Company, (1976).

[5] Christofides, N., 1986. Graph Theory an Algorithmic Approach, Academic Press, London

[6] Algoritmalar (Teoriden Uygulamalara), Vasif V. NABİYEV, Seçkin Yayıncılık