CENG 481 GRAF TEORİ VE UYGULAMALARI
Hafta 9

Prof. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

Hafta 9
Konular

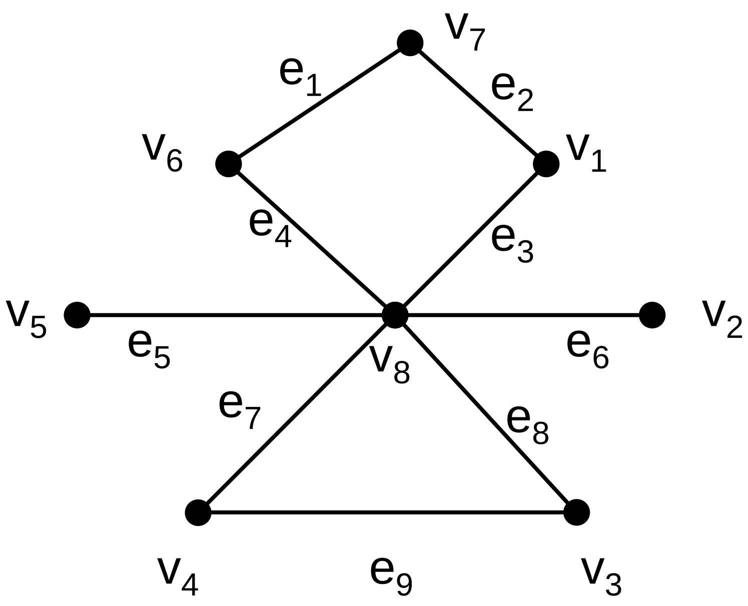
1- Eşlemeler

2- Atama Problemleri

EŞLEMELER (Matchings)

Bir G grafının ayrıtlarının bir alt kümesi M olsun. M deki hiçbir ayrıt çifti ortak bir tepeye sahip değil ise M kümesine, grafın eşleme kümesi denir.

Örnek:



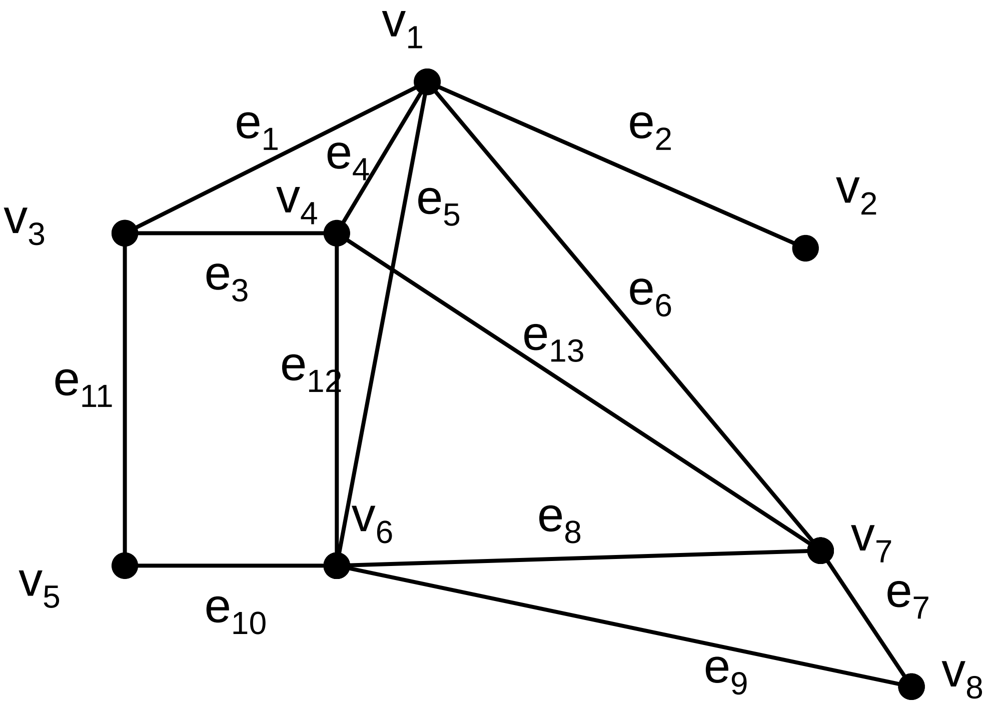
$E(G)=\{e_1,e_2,\ldots,e_9\}$

$M=\{e_1, e_2, e_8\}$ Eşleme değildir.

$M=\{e_1, e_3\}$ Eşleme kümesidir.

$M=\{e_1, e_3, e_9\}$ Eşleme (hiçbir ortak tepe yoktur.)

Örnek:



$E(G)=\{e_1,e_2,\ldots,e_{12}\}$

$M=\{e_2, e_7\}$ Eşlemedir

$M=\{e_2, e_7, e_{11},\}$ Eşlemedir.

$M=\{e_2, e_7, e_{11}, e_{12}\}$ Eşlemedir.

$M=\{e_2, e_7, e_3, e_{10}\}$ Eşlemedir.

Tanım: G grafının herhangi bir v tepesi grafın bir eşlemesindeki ayrıtlarının en az birinin uç noktası ise bu tepeye doyurulmuş tepe denir.

1. örnekteki, $M=\{e_1,e_3,e_9\}$ eşlemesine göre

v_2 tepesi doyurulmamış tepe

v_1 tepesi doyurulmuş tepedir.

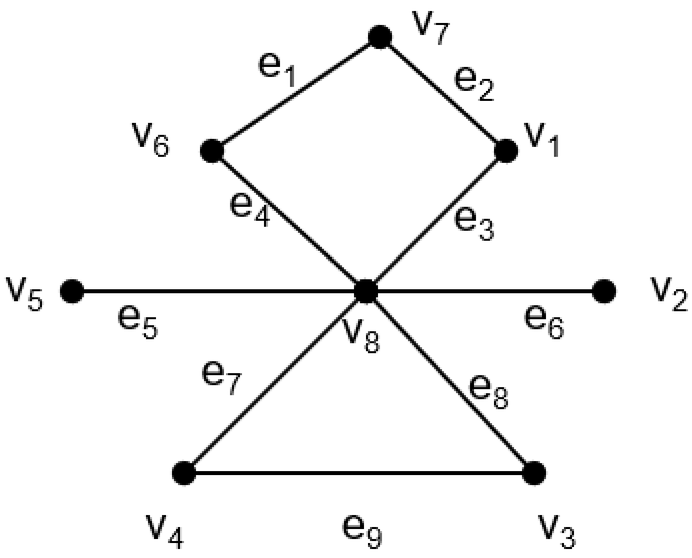
2. örnekteki, $M=\{e_2,e_7,e_3,e_{10}\}$ eşlemesine göre v_1 tepesi doyurulmuştur bu eşlemeye göre G de doyurulmamış tepe yoktur.

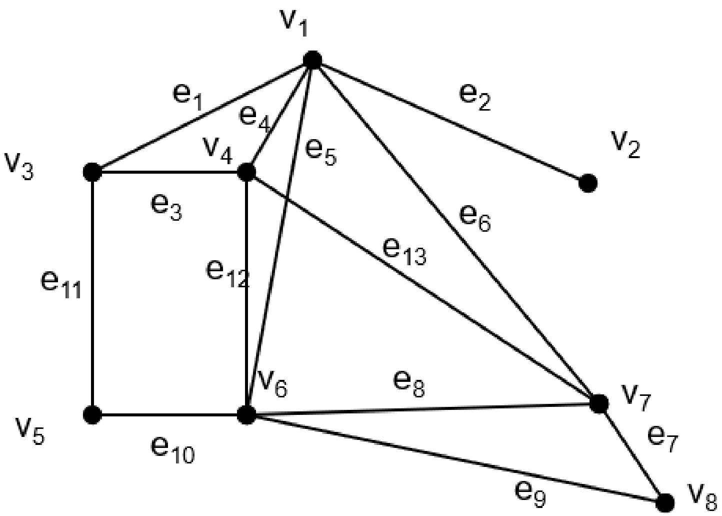
En büyük Eşleme: Bir G grafının eşlemeleri arasından en çok ayrıta sahip olan eşlemeye en büyük eşleme denir.

1. örneğe göre, $M=\{e_1,e_3,e_9\}$ ve 2. örneğe göre $M=\{e_2,e_7,e_3,e_{10}\}$ en büyük eşlemedir

Mükemmel Eşleme: G grafının bir eşlemesine göre tüm tepeleri doyurulmuş ise bu eşlemeye mükemmel eşleme denir.

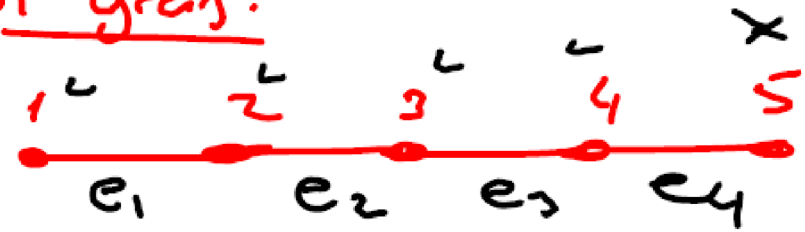
2. örnekteki $M=\{e_2,e_7,e_3,e_{10}\}$ mükemmel eşleme





Örnek

Yol grafı



$\boxed{n \to \text{tek}}$

$M = \{e_1\}$

$M = \{e_1, e_3\}$

$M = \{e_1, e_4\}$

$M = \{e_2, e_4\}$

en büyük eşleme!!

Mükemmel eşleme? ✗

$n \to$ çift

$M = \{e_1\}$

$M = \{e_1, e_3\}$

$M = \{e_1, e_3, e_5\}$ → En büyük eşleme ✓

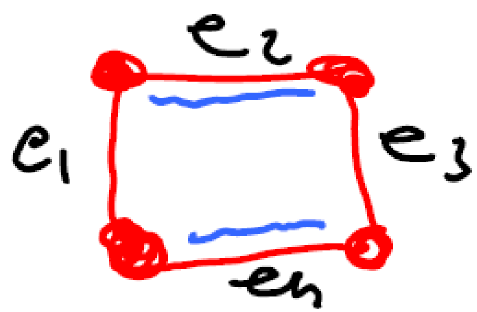
Mükemmel eşleme ✓

3 elemanlı.

$M = \{e_2, e_4\}$

$\vdots$

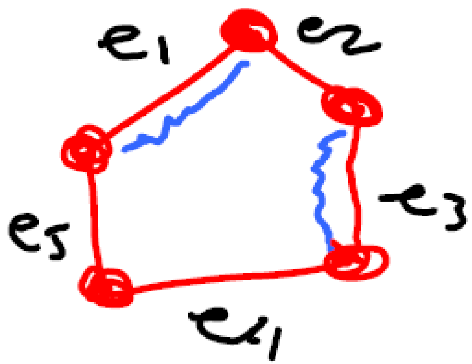
Çevre Graf



$M = \{e_2, e_4\}$

$M = \{e_1, e_3\}$

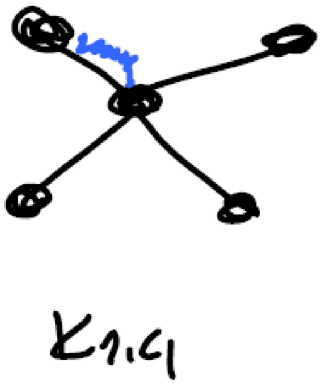
mükemmel eşleme

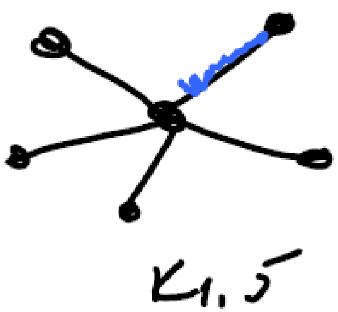


$M = \{e_1, e_3\}$

Mükemmel eşleme yok.

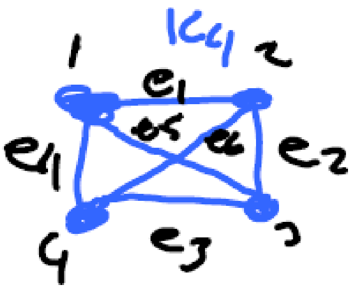
Yıldız Graf





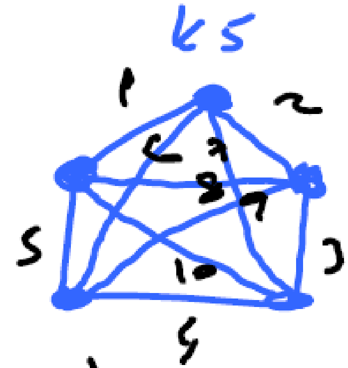
Eşleme hep tek elemanlı..

Tam Graf



$M = \{e_1, e_3\}$
$M = \{e_2, e_4\}$
$M = \{e_5, e_6\}$

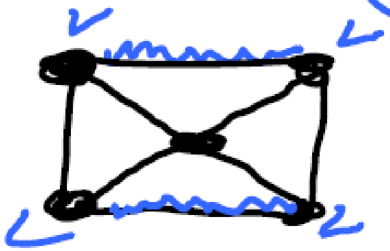
mükemmel eşlemdir



Mükemmel eşleme yok.

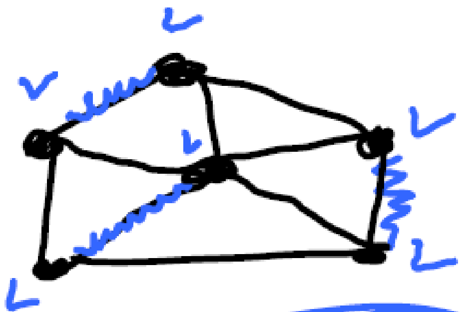
Tekerlekli Graf

$W_{1,4}$ → n çift



→ Mükemmel eşleme yoktur.

n-tek



→ Mükemmel eşleme vardır.

$W_{1,5}$

Not:

n elemanlı bir grafta eşlemenin eleman sayısı $\frac{n}{2}$ ise, bu eşleme aynı zamanda en büyük eşleme ve mükemmel eşlemedir.

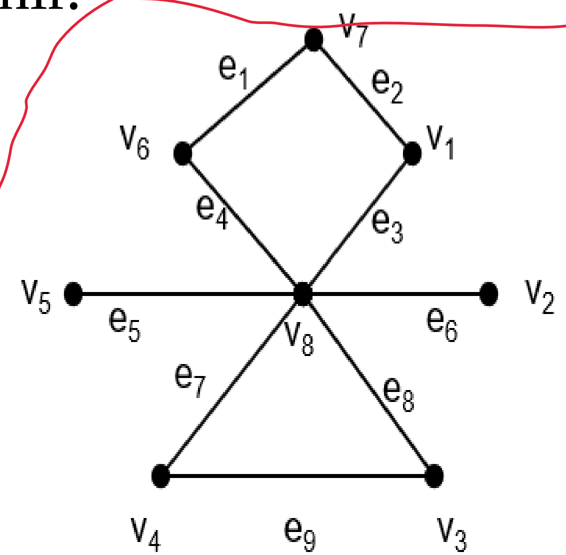
Seçenekli Yol: G grafının herhangi bir eşlemesi M olsun. Ayrıtların E/M ve M kümelerinden sırasıyla seçilerek oluşturulan yola seçenekli yol (yada M-seçenekli yol) denir.

1. örnekte, M={e1,e3} eşlemesine göre v5,v8,v1,v7,v6 bir seçenekli yol oluşturur.

Arttıran yol: Bir M seçenekli yolda başlangıç ve bitiş tepeleri M-doyurulmamış ise bu yola M-arttıran yol denir.

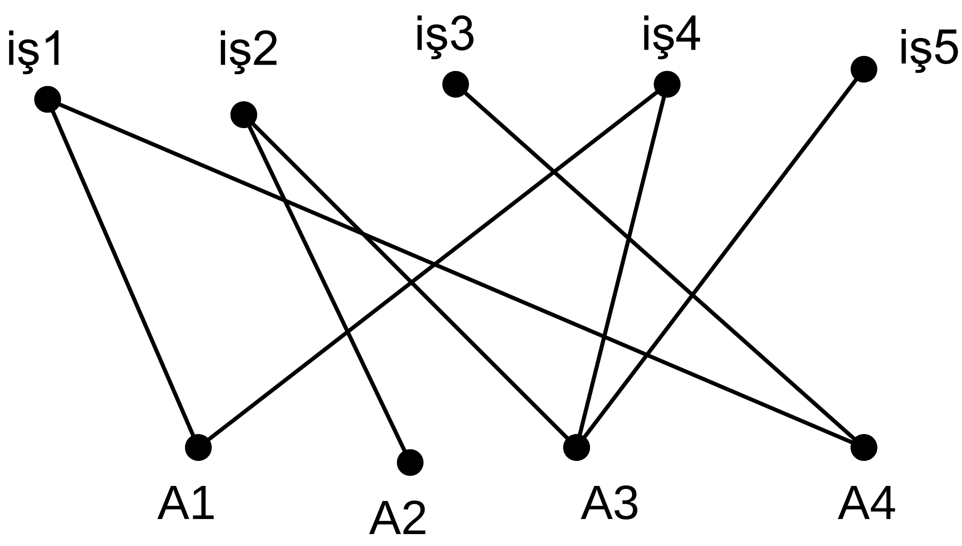
1. örnekte, $M=\{e_1,e_8\}$ eşlemesine göre :

$v_1, v_7, v_6, v_8, v_3, v_4$ bir arttıran yol oluşturur.



Teorem: G grafının, bir M eşlemesinin en büyük eşleme olması için gerek ve yeter koşul G nin bir arttıran yol içermemesidir.

Personel Atama Problemi: Eşlemelerin bir uygulaması olarak personel atama problemi verilebilir. Örneğin, bir şirkette, 5- tane açık pozisyonda iş (boş kadro), var olup bu işlere 4-tane başvuru (aday) var olsun. Bir kişi birden fazla işe başvurabileceğine göre, bu durumu,



grafı ile gösterebiliriz. Bu graf, iki parçalı bir graf olup, A1 ← iş4, A2 ← iş2, A3 ← iş5 ve A4 ← iş3 bir eşleme oluşturur.

Burada problem,

- hangi işe kimin atanacağının araştırılması,
- atama yapılmayan bir işin kalıp kalmayacağının belirlenmesi,

olup,

Bu soruların yanıtlarını bulmak için

eşlemeleri ve Macar algoritmasını kullanmamız gereklidir.

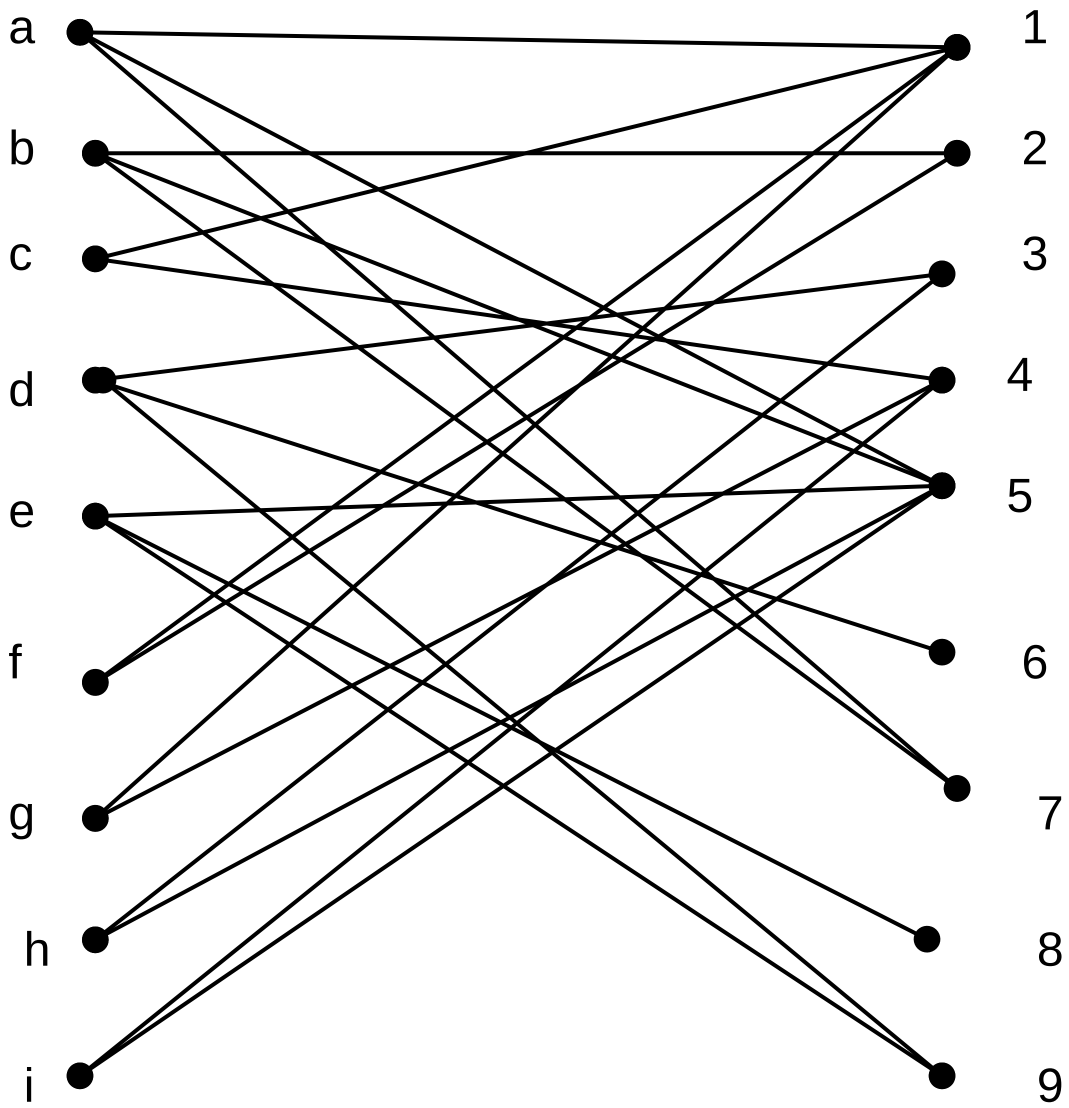
MACAR ALGORİTMASI

Adım1: Herhangi bir eşleme ile başla. Eşlemede var olan tüm tepeleri işaretle.

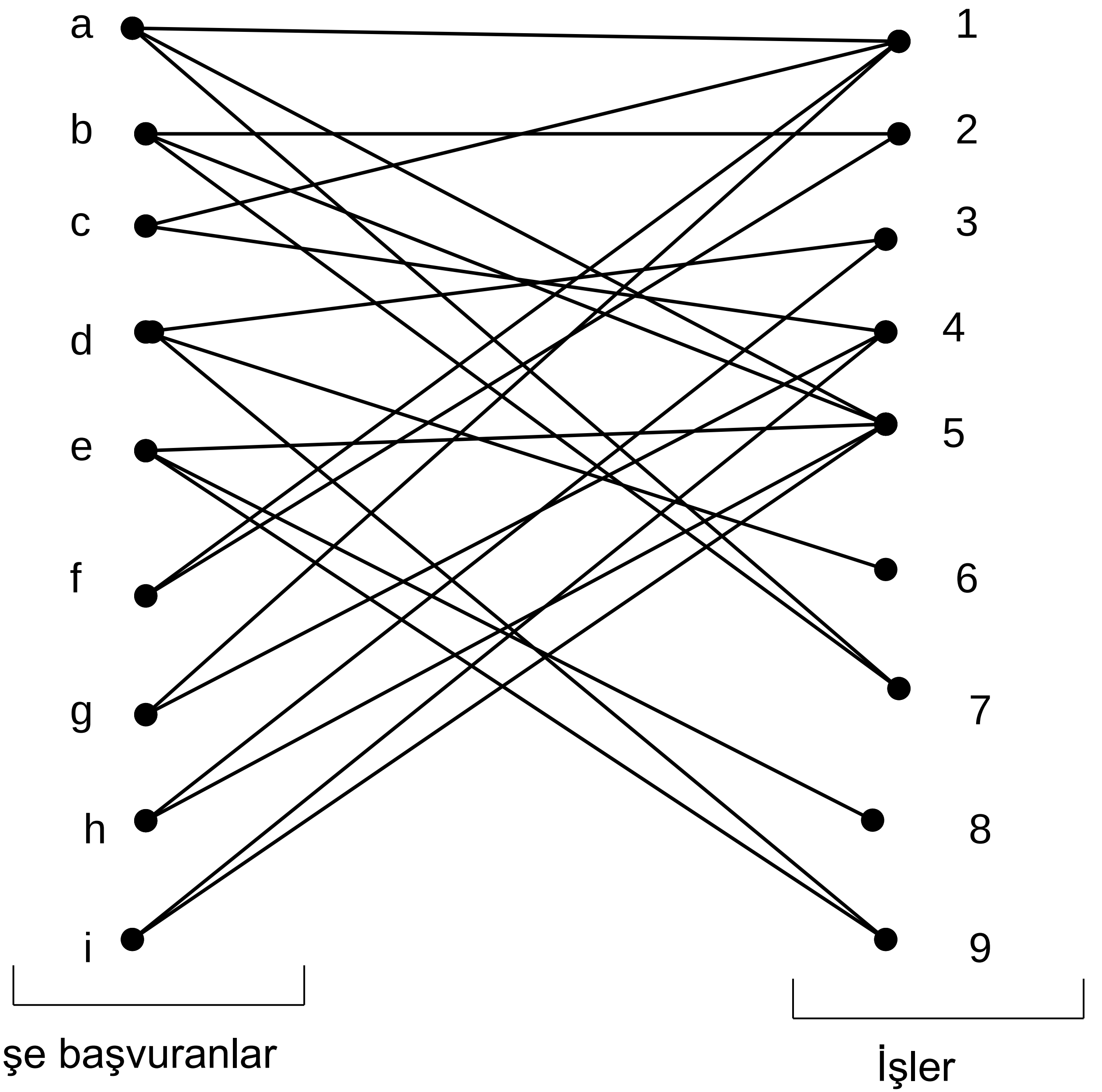
Adım2: Eşleştirilmemiş (işaretlenmemiş) başka tepe var mı? Yok ise DUR. Şu anda eşleme en büyük eşlemedir. Aksi halde Adım 3 e git.

Adım3: Bir a tepesi eşleştirilmemiş ise a tepesinden bir M seçenekli ağaç oluştur.(Büyüt). Eğer ağaç bir M arttıran yol içeriyor ise M eşlemesinden yolun M ayrıtlarını (eşlemedeki ayrıtları) sil ve yolun diğer ayrıtlarını eşlemeye ekle. Tüm seçilebilir uygun tepeleri işaretle ve Adım2 ye git. Eğer ağaç M arttıran yol içermiyor ise a tepesindeki işareti kaldır (seçme) ve Adım2 ye git.

Örnek: Aşağıdaki grafın en büyük eşlemesini Macar algoritması ile bulalım.



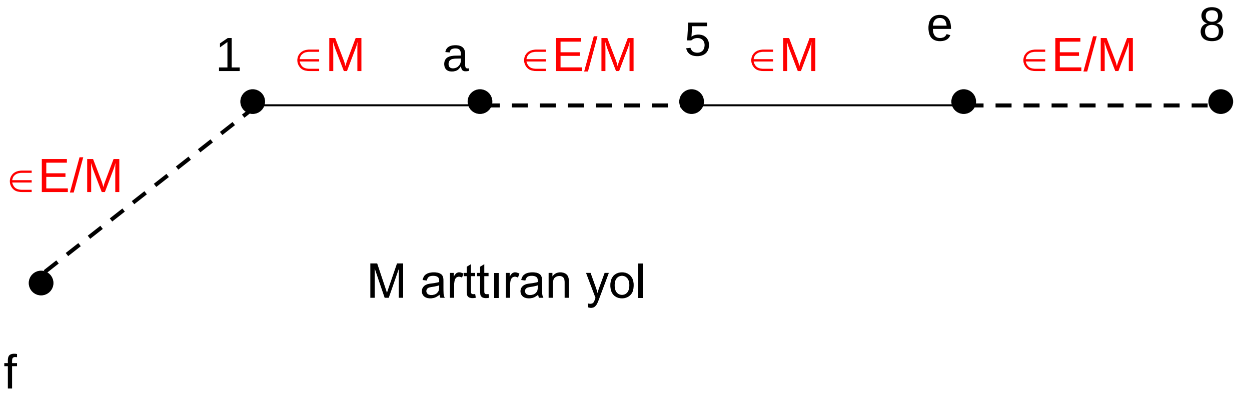
Grafı aşağıdaki gibi de düşünebiliriz.



Adım1: Başlangıç olarak M={a1,b2,c4,d3,e5} eşlemelerini alalım.

Adım2: f, eşleştirilmemiş (doyurulmamış) tepe olup, seçelim.

Adım3: f den ağaç oluşturalım.



M arttıran yol

f den 8 e bir M-arttıran yol var olup,

M eşlemesinden

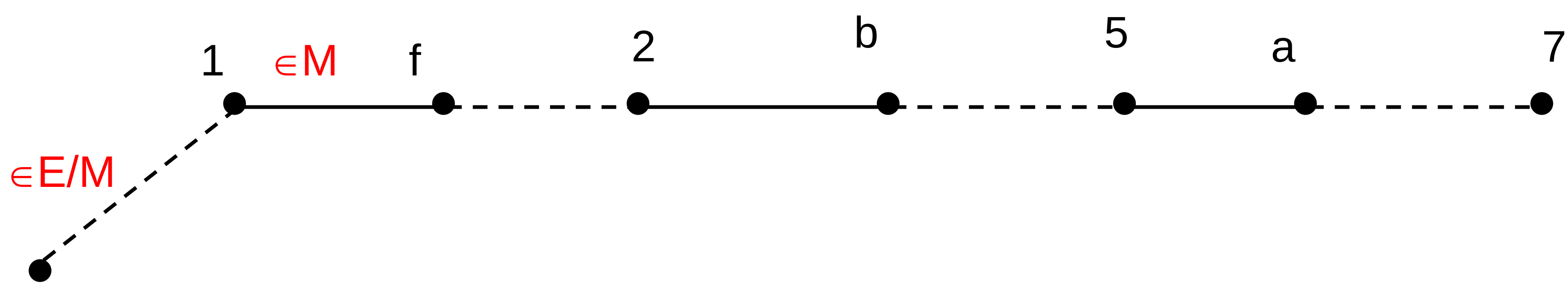
ayrıtlarını çıkaralım.

M={ ~~a1~~, b2, c4, d3, ~~e5~~ }. Böylece yeni eşlememiz,

M={ f1, b2, c4, d3, a5, e8 } olur.

Adım2: Bu kez g tepesini seçelim.

Adım 3: g den ağaç oluşturalım.



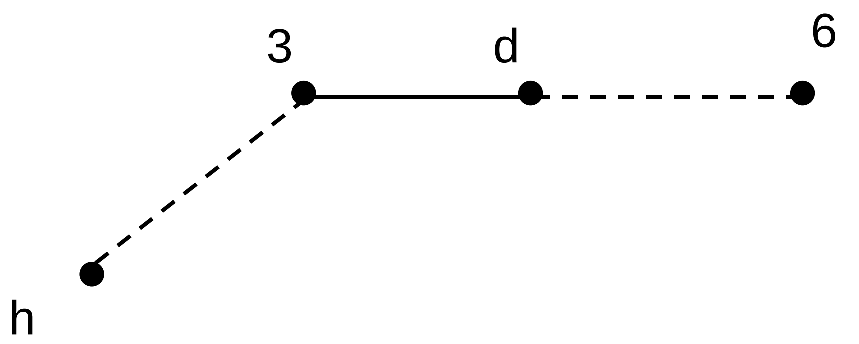
G den 7 ye bir M-arttıran yol var olup,

M={ ~~a5~~, ~~b2~~, c4, d3, e8, ~~f1~~ } olur. Böylece yeni eşleme

M={ g1, f2, b5, a7, c4, d3, e8} olur.

Adım2: bu kez h tepesini alalım.

Adım3: h den ağaç büyütelim.

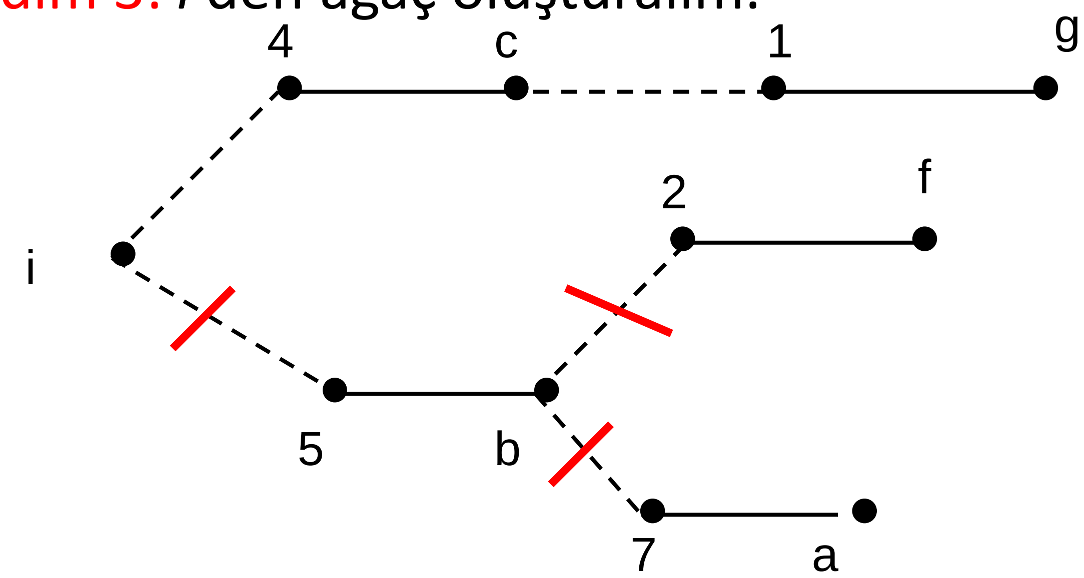


h den 6 ya bir M-arttıran yol var olup, M={ g1, f2, b5, a7, c4, ~~d3~~, e8} yerine yeni eşlememiz

M={ h3, d6, g1, f2, b5, a7, c4, e8} olur.

Adım2: *i* tepesini alalım.

Adım 3: *i* den ağaç oluşturalım.

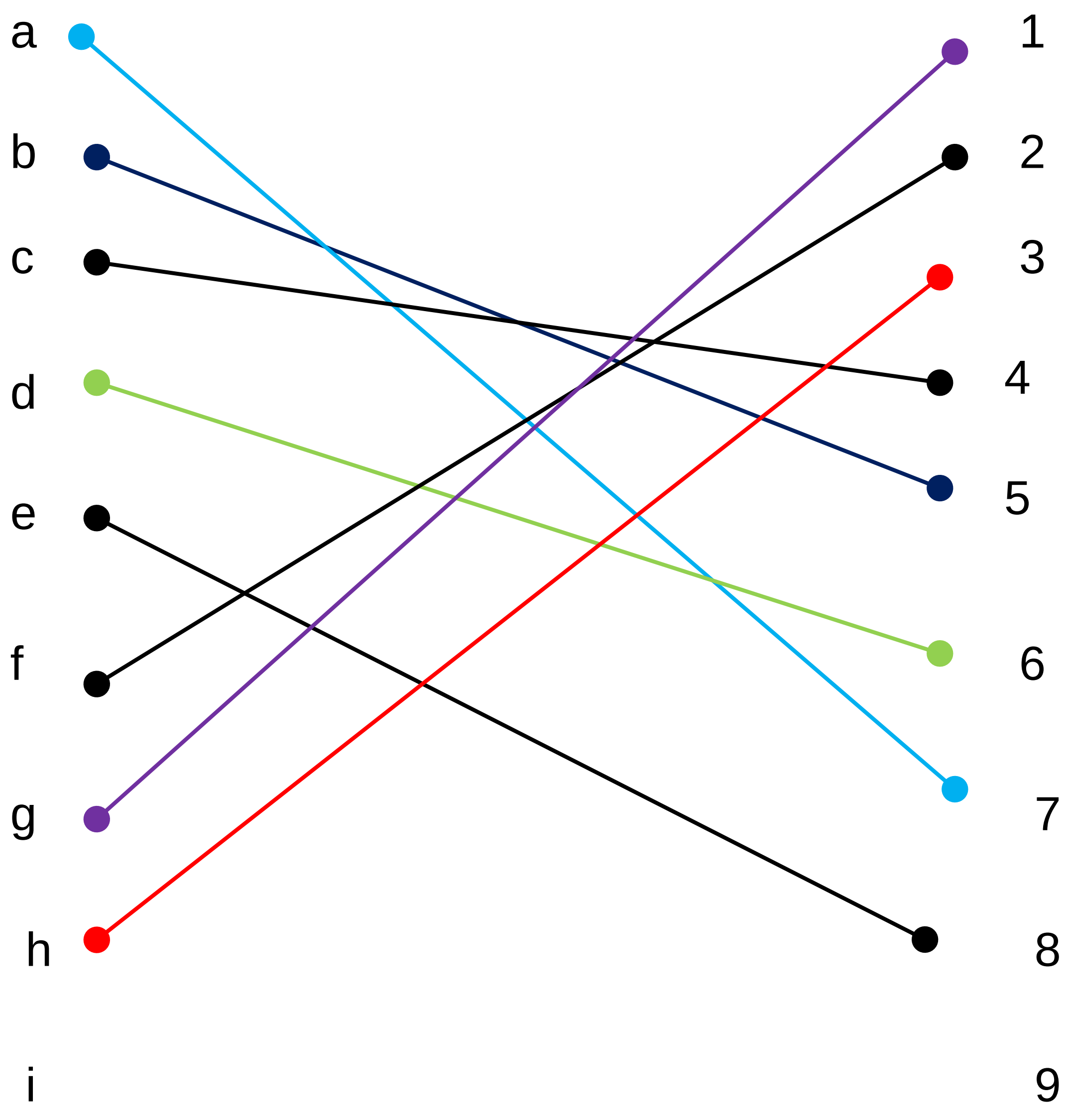


Hiçbir şekilde i den başlayan bir arttıran yol oluşturulamaz. Dolayısıyla, son elde edilen M eşlemesinin eleman sayısı değişmez. Yani M={ h3, d6, g1, f2, b5, a7, c4, e8} eşlemesi, maksimum eşlemedir.

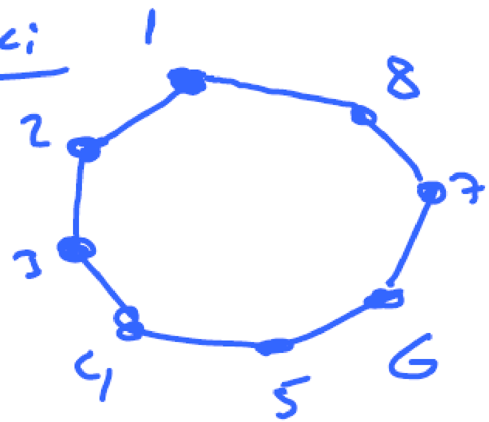
Sonuç: 9 kişiden birisi, bir işe atanamayacaktır.

Örnek çözüm:

M={ h3, d6, g1, f2, b5, a7, c4, e8}



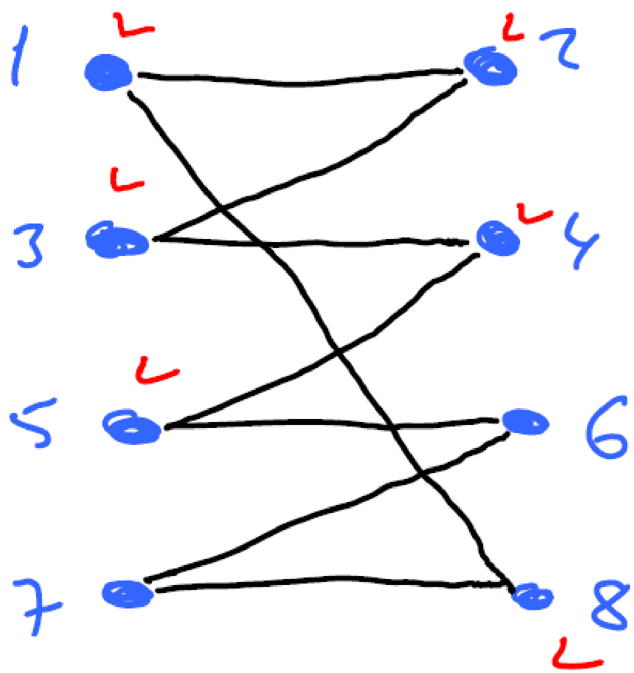
Örnek:



⇒ En büyük eşleşmeyi bulunuz.

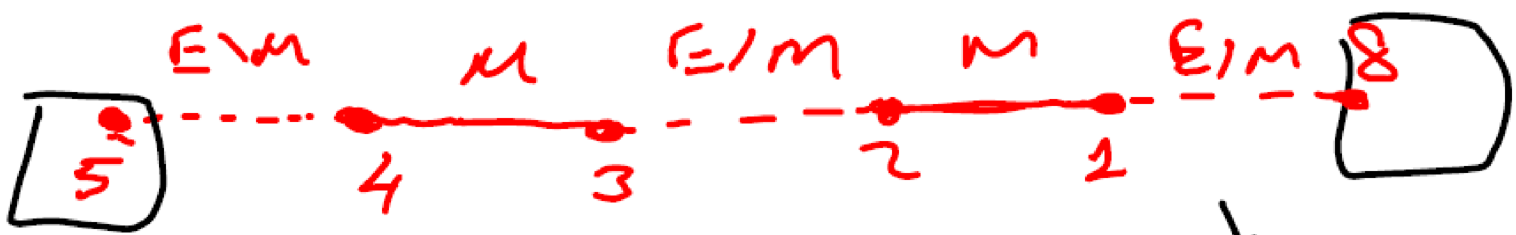
⇓

Macar Algoritması?



Başla: $M = \{12, 34\}$

Adım 2: 5 tepesini seçelim.

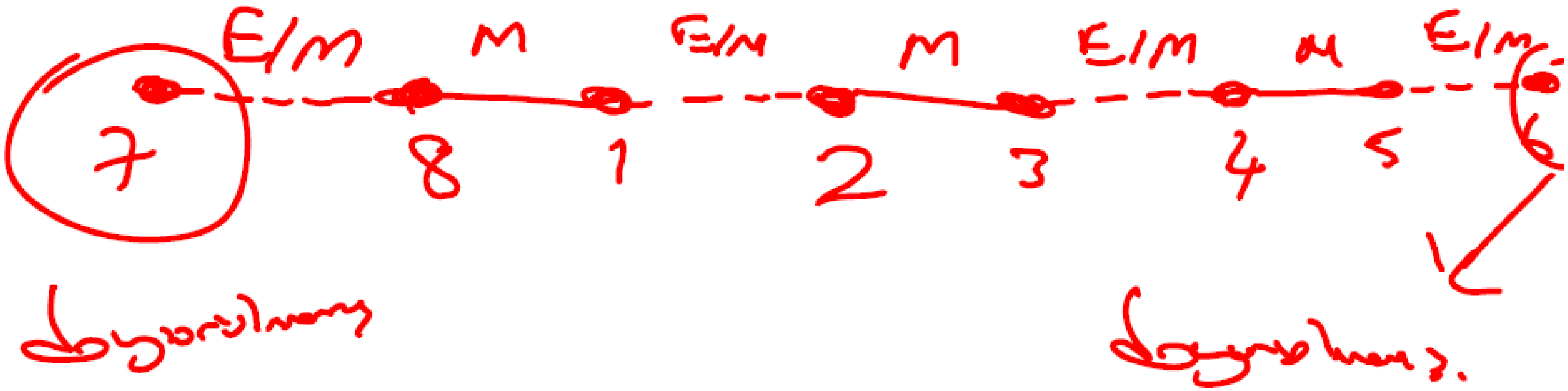


$M = \{\cancel{12}, \cancel{34}\}$

arttıran yol

$M = \{23, 45, 18\}$

7'yi seçelim



$$M = \{\cancel{23}, \cancel{45}, \cancel{18}\}$$

$$M = \{78, 12, 34, 56\}$$

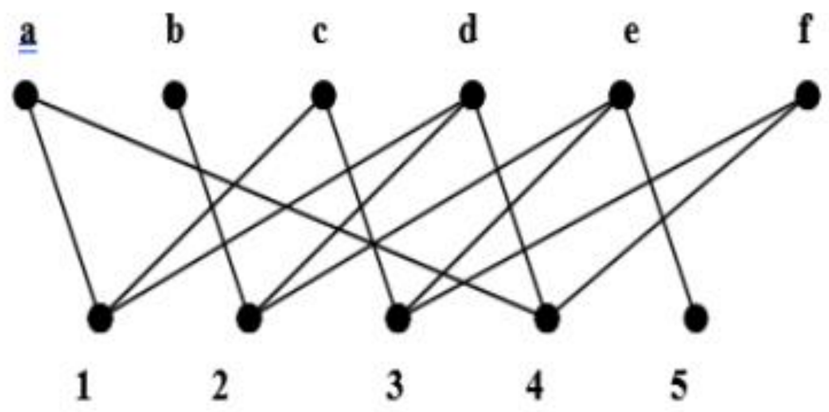
En büyük eşleme!!

Mükemmel eşleme.

Çalışma Soruları:

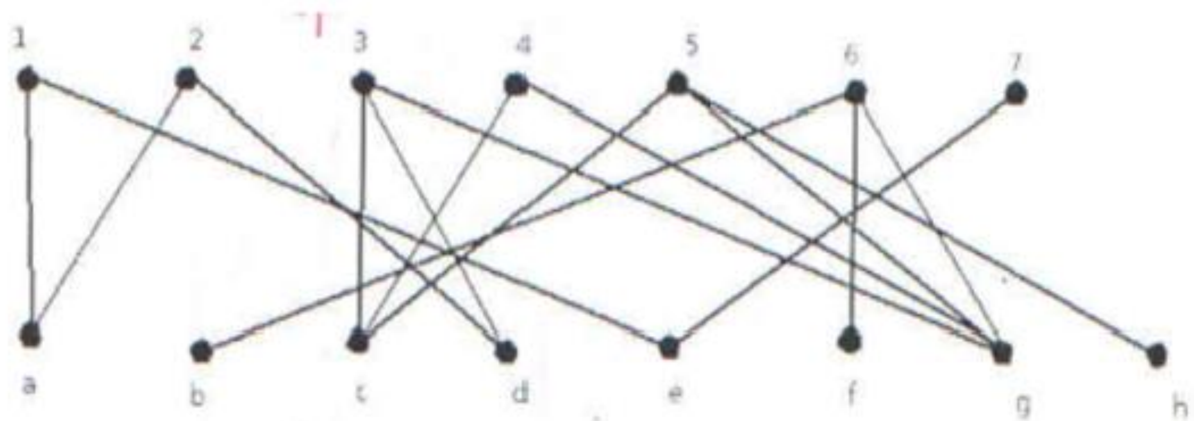
Soru 1:

Aşağıdaki grafın en büyük eşlemesini, Macar algoritmasını kullanarak bulunuz.
(Not: Başlangıç eşlemeniz iki elemanlı olsun)



Soru 2:

Başlangıç eşlemeniz M={1a,2d,3c} olacak şekilde Macar algoritmasını kullanarak aşağıdaki graf için en büyük eşleme bulunuz.



KAYNAKLAR

[1] Chartrand, G.-Lesniak, L., (1986) : *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, California

[2] West D.B. (2001) : *Introduction to Graph Theory*, *Prentice Hall*, USA.

[3] Graf Teoriye Giriş, Şerife Büyükköse ve Gülistan Kaya Gök, Nobel Yayıncılık

[4] Discrete Mathematical Structures for Computer Science, Ronald E. Prather, Houghton Mifflin Company, (1976).

[5] Christofides, N., 1986. Graph Theory an Algorithmic Approach, Academic Press, London

[6] Algoritmalar (Teoriden Uygulamalara), Vasif V. NABİYEV, Seçkin Yayıncılık