Maestría en Ciencia de Datos.

Matemáticas para Ciencia de Datos.

María Elena Martínez Manzanares

Septiembre 2022

Parte 1

Considera la matriz

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea A la matriz formada con las dos primeras columnas de M. Describe:

1. el dominio y el codominio de A como transformación lineal.

2. la imagen de A y el kernel de A.

3. la imagen de A^T y el kernel de A^T.

Respuesta.

(1) El dominio es $\mathbb{R}^2$ y el codominio es $\mathbb{R}^3$.

(2) Dado que $(1,0,1)^T$ y $(1,0,2)^T$ son linealmente independientes, tenemos que la imagen es

$$\operatorname{span}\left\{(1,0,1)^T, (1,0,2)^T\right\}.$$

Por el Teorema del Rango y la Nulidad tenemos que

$$\text{Rango}(A) + \text{Nulidad}(A) = 2,$$

esto implica que $\text{Nulidad}(A) = 0$, por lo que el Kernel consiste solamente del vector cero.

(3) Notemos que $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Esto implica que

$$\text{Im}(A) = \operatorname{span}\left\{(1,1)^T, (1,2)^T\right\}.$$

De nueva cuenta por el Teorema del Rango y la Nulidad, se deduce que $\text{Nulidad}(A^T) = 1$. Analizamos la matriz A^T para buscar el vector que genera el kernel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Por medio de matrices elementales podemos llegar a que (1) es equivalente al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que $x_1 = x_3 = 0$. Esto implica que

$$\text{Kernel}(A) = \text{span}\left\{(0,1,0)^T\right\}.$$

Decide si la transformación A es sobre, uno-a-uno, o ninguna de las dos anteriores. Además, note que claramente la tercera columna de M es una combinación lineal de las dos anteriores

$$\mathbf{col}_3 = 2\mathbf{col}_1 + 0\mathbf{col}_2.$$

Encuentra esa respuesta por medio de la pseudoinversa de A.

Respuesta. Notemos que $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Por lo demostrado anteriormente, sabemos que $\text{Nulidad}(A) = 0$, por lo tanto es 1-1. La matriz no es sobreyectiva ya que $\text{Rango}(A) = 2$

Por otro lado, nos interesa determinar el vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$ tal que

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \text{col}_3.$$

La pseudoinversa por la izquierda de A, $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \alpha &= A^+ \text{col}_3, \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ &= (2,0)^T. \end{aligned}$$

Es decir,

$$2\text{col}_1 + 0\text{col}_2 = \text{col}_3.$$

Sea ahora A la matriz formada con los dos primeros renglones de M. Describe:

1. el dominio y el codominio de A como transformación lineal.

2. la imagen de A y el kernel de A.

3. la imagen de A^T y el kernel de A^T.

Respuesta.

(1) El dominio es $\mathbb{R}^4$ y el codominio es $\mathbb{R}^2$.

(2) La matriz A esta formada por dos columnas linealmente independientes, por lo que la imagen es todo $\mathbb{R}^2$. Analizamos la matriz para determinar el kernel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De este planteamiento se sigue inmediatamente que $x_4 = 0$. Por otro lado, obtenemos que $x_1 = -x_2 - 2x_3$. Esto implica que la solución viene dada por $(-x_2 - 2x_3, x_2, x_3, 0)^T$. Por lo tanto, el kernel es

$$\text{span}\left\{(-1, 1, 0, 0)^T, (-2, 0, 1, 0)^T\right\}.$$

(3) Notemos que A^T es la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene dos columnas linealmente independientes, por lo que su imagen es

$$\text{span}\left\{(-1, 1, 0, 0)^T, (-2, 0, 1, 0)^T\right\}.$$

El kernel consiste solamente del vector cero debido a que del Teorema del Rango y la Nulidad se sigue que

$$2 = \text{Rango}(A^T) + \text{Nulidad}(A^T) = 2 + \text{Nulidad}(A^T).$$

y esto implica que la dimensión del kernel de la matriz A^T es cero.

Decide si la transformación es sobre, uno-a-uno, o ninguna de las dos anteriores. Describe al conjunto de soluciones $Ax = b$ donde $b = (6, 0)^T$. ¿Puedes encontrar una solución específica x^+ por medio de la pseudoinversa? Hint: Las soluciones de $Ax = b$ es el conjunto:

$$x_{\mathbf{esp}} + \mathbf{Ker}A = \{x = x_{\mathbf{esp}} + x_{\mathbf{null}} : x_{\mathbf{null}} \in \mathbf{Ker}(A)\}$$

donde $x_{\mathbf{esp}}$ es una solución específica de $Ax = b$. ¡Este conjunto es independiente de la solución expecífica que se use para la descripción! Respuesta.

La matriz no es uno-a-uno porque su kernel es distinto del vector cero. Por otro lado, la matriz si es sobreyectiva porque su imagen es $\mathbb{R}^2$.

Notemos que

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esto implica que $x_4 = 0$. Por lo tanto, $x_1 = 6 - x_2 - 2x_3$. La solución general es $(6 - x_2 - 2x_3, x_2, x_3, 0)$. Para encontrar una solución específica por medio de la pseudoinversa, considerando que A es sobreyectiva tenemos que la pseudoinversa por la derecha es $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} x &= A^+ b, \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esto significa que

$$\mathrm{col}_1 + \mathrm{col}_2 + 2\mathrm{col}_3 = (6, 0)^T$$

y $x^+ = (1, 1, 2, 0)^T$ es una solución específica.

Parte 2

Demuestra que A es uno-a-uno si y sólo si A^T es sobre.

Demostración. ($\Rightarrow$). Supongamos que $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es uno-a-uno. Eso significa que Kernel$(A) = 0$, lo cual implica por el Teorema del Rango y la Nulidad que Rango$(A) = n$. Por el resultado final de la lista de ejercicios, tenemos que $n =$Rango$(A) =$Rango(A^T), y $A^T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, esto significa que Rango$(A^T) =$ Rango$(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto A^T es sobre.
($\Leftarrow$). Supongamos que $A^T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es sobreyectiva. Esto implica que Rango$(A^T) = n$. Por el resultado final de la lista de ejercicios, tenemos que Rango$(A^T) =$ Rango(A). Por el Teorema del Rango y la Nulidad tenemos que $n =$ Nulidad$(A)+$Rango$(A) =$ Nulidad$(A)+n$, de lo cual se sigue que Nulidad$(A) = 0$ y por lo tanto A es 1-1. $\square$

Prueba en una línea que Ran A es ortogonal a Ker A^T en el sentido de que cada vector en Ran A es ortogonal a cada elemento del Ker A^T.

Demostración. Sea $v \in$ Ran(A). Entonces existe $z \in$ Dom(A) tal que $Az = v$. Sea $w \in$ Ker(A^T). Notemos que

$$< v, w >=< Az, v >=< z, A^T v >=< z, 0 >= 0.$$

$\square$

Prueba que si las columnas de una matriz A forman un conjunto linealmente independiente entonces $A^T A$ es invertible.

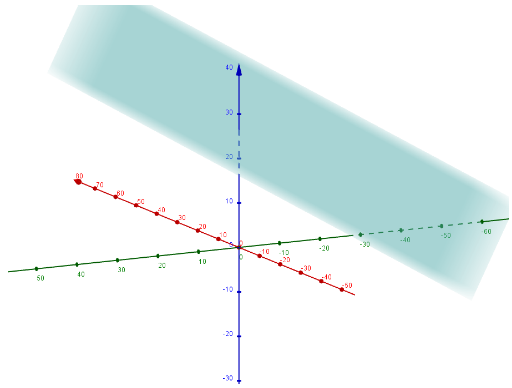
Demostración. Supongamos que $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene columnas linealmente independientes. La matriz $A^T A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, por lo que es un operador de $\mathbb{R}^n$. Para demostrar que es invertible, basta entonces demostrar que es 1-1. Supongamos que $x \in \mathbb{R}^n$ es tal que $A^T Ax = 0$. Por lo demostrado en un ejercicio más adelante, tenemos que A y $A^T A$ tienen el mismo espacio nulo, eso implica que $Ax = 0$. Como A tiene columnas linealmente independientes, $Ax = 0$ implica que $x = 0$. $\square$

Sea w un vector en $\mathbb{R}^n$ para algún n y $b \in \mathbb{R}$. Considere el conjunto de todos x tales que

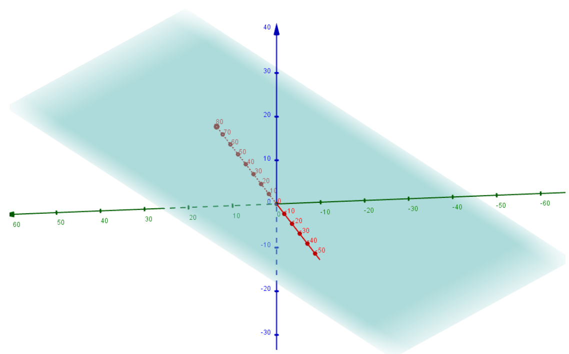
$$< w, x >= b.$$

Da una descripción geométrica de este conjunto en términos de w y b.

Respuesta Podemos considerar la transformación $f(x) =< w, x >$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la cual es lineal debido a la linealidad del producto interior. Si tenemos un escalar b de tal manera que $f(x) = b$, entonces en este caso particular f tendrá la representación de un hiperplano que en el origen toma el valor b y que divide el espacio en dos (por arriba del hiperplano, $f(x) > 0$, y por debajo de el, $f(x) < 0$).



Cuando $b = 0$, el plano en el origen toma el valor 0 y en este caso el hiperplano es un subespacio vectorial que divide el espacio en dos.



$\triangle$

Verifica que Rango$A$ = RangoA^T = Rango$(A^T A)$ = Rango(AA^T).

Demostración. Sea $x \in \text{Dom}(A)$.

Demostraremos que Rango$A$ = Rango$(A^T A)$, si demostramos que Kernel$A$ = Kernel$(A^T A)$ y consideramos el Teorema del Rango y la Nulidad. Notemos que

$$\begin{aligned}
A^TAx &= 0, \text{ multiplicando por } x^T \text{ a ambos lados}\\
x^TA^TAx &= 0,\\
(Ax)^TAx &= 0,\\
< Ax, Ax > &= 0,\\
||Ax||^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Esto implica que $Ax = 0$ y por lo tanto Kernel$(A^TA) \subset$ Kernel$A$. La otra contención es trivial.

Sea $y \in$ Dom(A^T). De manera análoga demostraremos ahora que RangoA^T = Rango(AA^T)

$$\begin{aligned}
AA^Ty &= 0, \text{ multiplicando por } y^T \text{ a ambos lados}\\
y^TAA^Ty &= 0,\\
(A^Ty)A^Ty &= 0\\
< A^Ty, A^Ty > &= 0,\\
||A^Ty||^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Esto implica que $A^Ty = 0$ y por lo tanto Kernel$(AA^T) \subset$ KernelA^T. La otra contención es trivial.

Finalmente, demostraremos que Rango$A$ = RangoA^T. Por lo que demostramos antes, tenemos

$$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^TA) \leq \text{Rango}(A^T)$$

donde la última desigualdad es debido a que A^TA es una combinación lineal de las columnas de A^T. Similarmente, tenemos que

$$\text{Rango}(A^T) = \text{Rango}(AA^T) \leq \text{Rango}(A).$$

Por lo tanto, Rango$A$ = RangoA^T. □