FUNCIONES LÓGICAS. SIMPLIFICACIÓN Y MINIMIZACIÓN

FUNCTIONES LÓGICAS. SIMPLIFICACIÓN Y MINIMIZACIÓN.

1.- Representación de funciones lógicas.

2.- Minterms y maxterms.

Especificación de las funciones en forma canónica.

Paso de una expresión con minterm a maxterm.

Conversión de una expresión no canónica en canónica.

3.- Diagramas de Karnaugh.

Representación de los diagramas de Karnaugh.

4.- Simplificación de una suma de productos mediante diagramas de Karnaugh.

5.- Simplificación de un producto de sumas mediante diagramas de Karnaugh.

6.- Obtención de funciones canónicas utilizando diagramas de karnaugh.

7.- Funciones incompletas.

8.- Implementación de circuitos lógicos.

9.- Análisis de circuitos lógicos.

Representación de funciones lógicas.

1.- TABLA DE VERDAD.

$$f_1 = f(a,b,c)$$

a	b	c	f_1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

2.- EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

$$f_1 = \mathbf{a\,b\,c} + \mathbf{a\,b\,\overline{c}} + \mathbf{\overline{a}\,b\,c} + \mathbf{a\,\overline{b}\,\overline{c}}$$

$$f_1 = (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\overline{\mathbf{c}})(\mathbf{a}+\overline{\mathbf{b}}+\mathbf{c})(\overline{\mathbf{a}}+\mathbf{b}+\overline{\mathbf{c}})$$

***Formas canónicas*.**

Minterms y maxterms.

MINTERM: Producto lógico de todas las variables negadas o sin negar (*Producto canónico*).

Variable negada $\Rightarrow$ "0"

Variable sin negar $\Rightarrow$ "1"

MAXTERM: Suma lógica de todas las variables negadas o sin negar (*Suma canónica*).

Variable negada $\Rightarrow$ "1"

Variable sin negar $\Rightarrow$ "0"

a b	orden	minterm	Maxterm
0 0	0	$m_0 = \overline{a} \cdot \overline{b}$	$M_0 = a + b$
0 1	1	$m_1 = \overline{a} \cdot b$	$M_1 = a + \overline{b}$
1 0	2	$m_2 = a \cdot \overline{b}$	$M_2 = \overline{a} + b$
1 1	3	$m_3 = a \cdot b$	$M_3 = \overline{a} + \overline{b}$

El número de términos canónicos, MINTERM O MAXTERM, es 2^N.

Para N =2 $\quad 2^2 = 4$ términos

N = 4 $\quad 2^4 = 16$ términos.

a b c	orden	minterm	Maxterm
0 0 0	0	$m_0 = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$	$M_0 = a + b + c$
0 0 1	1	$m_1 = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c$	$M_1 = a + b + \overline{c}$
0 1 0	2	$m_2 = \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c}$	$M_2 = a + \overline{b} + c$
0 1 1	3	$m_3 = \overline{a} \cdot b \cdot c$	$M_3 = a + \overline{b} + \overline{c}$
1 0 0	4	$m_4 = a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$	$M_4 = \overline{a} + b + c$
1 0 1	5	$m_5 = a \cdot \overline{b} \cdot c$	$M_5 = \overline{a} + b + \overline{c}$
1 1 0	6	$m_6 = a \cdot b \cdot \overline{c}$	$M_6 = \overline{a} + \overline{b} + c$
1 1 1	7	$m_7 = a \cdot b \cdot c$	$M_7 = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$

Especificación de las funciones en forma canónica.

Cualquier función puede expresarse como:

- **Suma de productos** (suma de minterm):

$$f = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,b\,c + a\,\bar{b}\,\bar{c} + a\,\bar{b}\,c$$

$$f = m_0 + m_3 + m_4 + m_5$$

$$f(a,b,c) = \Sigma_3(0, 3, 4, 5)$$

- **Producto de sumas** (producto de maxterm):

$$f = (a + b + \bar{c})(a + \bar{b} + c)(\bar{a} + \bar{b} + c)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$$

$$f = M_1 \cdot M_2 \cdot M_6 \cdot M_7$$

$$f(a,b,c) = \Pi_3(1, 2, 6, 7)$$

MSB LSB

Orden	a b c	f
0	0 0 0	1
1	0 0 1	0
2	0 1 0	0
3	0 1 1	1
4	1 0 0	1
5	1 0 1	1
6	1 1 0	0
7	1 1 1	0

MSB (**M**ost **S**ignificant **B**it) **bit más significativo**

LSB (**L**east **S**ignificant **B**it) **bit menos significativo**

Función canónica con minterms

a	b	c	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$	$\bar{a}\,b\,c$	$a\,\bar{b}\,\bar{c}$	$a\,\bar{b}\,c$	$f = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,b\,c + a\,\bar{b}\,\bar{c} + a\,\bar{b}\,c$
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1 m0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1 m3
1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1 m4
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1 m5
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

$$f(a,b,c) = \sum_{3}(0,3,4,5) = m0 + m3 + m4 + m5 = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,b\,c + a\,\bar{b}\,\bar{c} + a\,\bar{b}\,c$$

a(MSB) ; c(LSB)

ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES

UVa

Función canónica con Maxterms

a	b	c	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$a+b+\overline{c}$	$a+\overline{b}+c$	$\overline{a}+\overline{b}+c$	$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$	$f=(a+b+\overline{c})(a+\overline{b}+c)(\overline{a}+\overline{b}+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})$	
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	M1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	M2
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	M6
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	M7

$$f(a,b,c)=\prod_3(1,2,6,7)=M1\cdot M2\cdot M6\cdot M7=(a+b+\overline{c})(a+\overline{b}+c)(\overline{a}+\overline{b}+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})$$

a(MSB) ; c(LSB)

Paso de una expresión con minterm a maxterm.

$$\mathbf{f(a,b,c)} = \Sigma_3(0\,,3\,,4\,,5\,) \qquad \mathbf{f} = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,b\,c + a\,\bar{b}\,\bar{c} + a\,\bar{b}\,c$$

Orden	a b c	f
0	0 0 0	1
1	0 0 1	0
2	0 1 0	0
3	0 1 1	1
4	1 0 0	1
5	1 0 1	1
6	1 1 0	0
7	1 1 1	0

1º Se obtiene la función complementaria como suma de productos:

$$\bar{f} = \Sigma_3(1\,,2\,,6\,,7\,)$$

2º La función primitiva es el complemento de la función complementaria:

$$f = \bar{\bar{f}} = \overline{\Sigma_3(1\,,2\,,6\,,7\,)}$$

$$\bar{f} = \Sigma_3(1\,,2\,,6\,,7\,) = m_1 + m_2 + m_6 + m_7$$

$$f = \bar{\bar{f}} = \overline{\Sigma_3(1\,,2\,,6\,,7\,)} = \overline{m_1 + m_2 + m_6 + m_7} = \overline{m_1}\cdot\overline{m_2}\cdot\overline{m_6}\cdot\overline{m_7}$$

$$\bar{f} = \bar{a}\,\bar{b}\,c + \bar{a}\,b\,\bar{c} + a\,b\,\bar{c} + a\,b\,c$$

$$f = \bar{\bar{f}} = \overline{\bar{a}\,\bar{b}\,c + \bar{a}\,b\,\bar{c} + a\,b\,\bar{c} + a\,b\,c} = \left(\overline{\bar{a}\,\bar{b}\,c}\right)\cdot\left(\overline{\bar{a}\,b\,\bar{c}}\right)\cdot\left(\overline{a\,b\,\bar{c}}\right)\cdot\left(\overline{a\,b\,c}\right)$$

$$f = \left(a + b + \bar{c}\right)\left(a + \bar{b} + c\right)\left(\bar{a} + \bar{b} + c\right)\left(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}\right) = M_1 \cdot M_2 \cdot M_6 \cdot M_7 = \Pi_3(1\,,2\,,6\,,7\,)$$

$$\boxed{\mathbf{f(a,b,c)} = \Sigma_3(0\,,3\,,4\,,5\,) = \Pi_3(1\,,2\,,6\,,7\,)}$$

Conversión de una expresión no canónica en canónica.

Expresión con minterm. Pasar la función $f = a + b\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ a forma canónica.

$$f = a + b\cdot\overline{c} + \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = \underbrace{a\cdot\left(b+\overline{b}\right)\cdot\left(c+\overline{c}\right)}_{(1)} + \underbrace{b\cdot\overline{c}\cdot\left(a+\overline{a}\right)}_{(2)} + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$$

$$(1) = a\cdot\left(b+\overline{b}\right)\cdot\left(c+\overline{c}\right) = \left(a\cdot b + a\cdot\overline{b}\right)\cdot\left(c+\overline{c}\right) = a\cdot b\cdot c + a\cdot b\cdot\overline{c} + a\cdot\overline{b}\cdot c + a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$$

$$(2) = b\cdot\overline{c}\cdot\left(a+\overline{a}\right) = a\cdot b\cdot\overline{c} + \overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}$$

$$f = (1) + (2) + \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = a\cdot b\cdot c + a\cdot b\cdot\overline{c} + a\cdot\overline{b}\cdot c + a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} + a\cdot b\cdot\overline{c} + \overline{a}\cdot b\cdot\overline{c} + \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$$

$$f = a\cdot b\cdot c + a\cdot b\cdot\overline{c} + a\cdot\overline{b}\cdot c + a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} + \overline{a}\cdot b\cdot\overline{c} + \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = m_7 + m_6 + m_5 + m_4 + m_2 + m_0$$

$$f = \Sigma_3(0\,,2\,,4\,,5\,,6\,,7\;)$$

Expresión con maxterm. Pasar la función $f = \left(\overline{a} + b\right)\cdot\left(a + b + \overline{c}\right)$ a forma canónica.

$$f = \left(\overline{a} + b + c\cdot\overline{c}\right)\cdot\left(a + b + \overline{c}\right) = \left(\overline{a} + b + c\right)\cdot\left(\overline{a} + b + \overline{c}\right)\cdot\left(a + b + \overline{c}\right) = \Pi_3(1\,,4\,,5\;)$$

Diagramas de Karnaugh.

Un diagrama de Karnaugh es una representación de la tabla de verdad de una función basada en la "*ADYACENCIA*" de dos minterm (o dos maxterm)**.**

Dos minterm (o dos maxterm) son **adyacentes** cuando <u>únicamente</u> se diferencian en una variable, que en uno de ellos está complementada y en el otro no.

Ejemplo: Minterm adyacentes: $\mathbf{a \cdot b \cdot \overline{c}}$ y $\mathbf{\overline{a} \cdot b \cdot \overline{c}}$

Maxterm adyacentes. $\mathbf{a + b + \overline{c}}$ y $\mathbf{a + b + c}$

El diagrama de Karnaugh se realiza formando un grupo de cuadros en número igual al de combinaciones de las variables:

Nº de cuadros = 2^N donde N es el número de variables.

Cada cuadro (o celda) representa cada uno de los términos canónicos de la función.

En los diagramas de Karnaugh dos minterm o dos maxterm adyacentes tienen en común un lado de la celda.

Representación de los diagramas de Karnaugh.

Funciones de dos variables.

Nº de cuadros = $2^{2} = 4$

$b \backslash a$	0	1
0	$\bar{a} \cdot \bar{b}$ ₀	$a \cdot \bar{b}$ ₂
1	$\bar{a} \cdot b$ ₁	$a \cdot b$ ₃

$b \backslash a$	0	1
0	$a + b$ (0)	$\bar{a} + b$ (2)
1	$a + \bar{b}$ (1)	$\bar{a} + \bar{b}$ (3)

a b	orden	minterm	Maxterm
0 0	0	$m_0 = \bar{a} \cdot \bar{b}$	$M_0 = a + b$
0 1	1	$m_1 = \bar{a} \cdot b$	$M_1 = a + \bar{b}$
1 0	2	$m_2 = a \cdot \bar{b}$	$M_2 = \bar{a} + b$
1 1	3	$m_3 = a \cdot b$	$M_3 = \bar{a} + \bar{b}$

Ejemplo:

orden	a b	f
0	0 0	0
1	0 1	1
2	1 0	1
3	1 1	0

Tabla de verdad

Diagrama de Karnaugh →

$b \backslash a$	0	1
0	0 (0)	1 (2)
1	1 (1)	0 (3)

$$f(a,b) = \Sigma_2(1,2) = m_1 + m_2 = \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b} = a \oplus b$$

$$f(a,b) = \Pi_2(0,3) = M_0 \cdot M_3 = (a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = a \oplus b$$

Representación de los diagramas de Karnaugh.

Funciones de tres variables.

Nº de cuadros = $2^3 = 8$

bc \ a	0	1
00	$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$ $_0$	$a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$ $_4$
01	$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c$ $_1$	$a\cdot\bar{b}\cdot c$ $_5$
11	$\bar{a}\cdot b\cdot c$ $_3$	$a\cdot b\cdot c$ $_7$
10	$\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}$ $_2$	$a\cdot b\cdot\bar{c}$ $_6$

a b c	orden	minterm	Maxterm
0 0 0	0	$m_0 = \bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$	$M_0 = a+b+c$
0 0 1	1	$m_1 = \bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c$	$M_1 = a+b+\bar{c}$
0 1 0	2	$m_2 = \bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}$	$M_2 = a+\bar{b}+c$
0 1 1	3	$m_3 = \bar{a}\cdot b\cdot c$	$M_3 = a+\bar{b}+\bar{c}$
1 0 0	4	$m_4 = a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$	$M_4 = \bar{a}+b+c$
1 0 1	5	$m_5 = a\cdot\bar{b}\cdot c$	$M_5 = \bar{a}+b+\bar{c}$
1 1 0	6	$m_6 = a\cdot b\cdot\bar{c}$	$M_6 = \bar{a}+\bar{b}+c$
1 1 1	7	$m_7 = a\cdot b\cdot c$	$M_7 = \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$

c \ ab	00	01	11	10
0	$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$ $_0$	$\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}$ $_2$	$a\cdot b\cdot\bar{c}$ $_6$	$a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$ $_4$
1	$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c$ $_1$	$\bar{a}\cdot b\cdot c$ $_3$	$a\cdot b\cdot c$ $_7$	$a\cdot\bar{b}\cdot c$ $_5$

Minterm

c \ ab	00	01	11	10
0	$a+b+c$ $_0$	$a+\bar{b}+c$ $_2$	$\bar{a}+\bar{b}+c$ $_6$	$\bar{a}+b+c$ $_4$
1	$a+b+\bar{c}$ $_1$	$a+\bar{b}+\bar{c}$ $_3$	$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ $_7$	$\bar{a}+b+\bar{c}$ $_5$

Maxterm

Representación de los diagramas de Karnaugh.

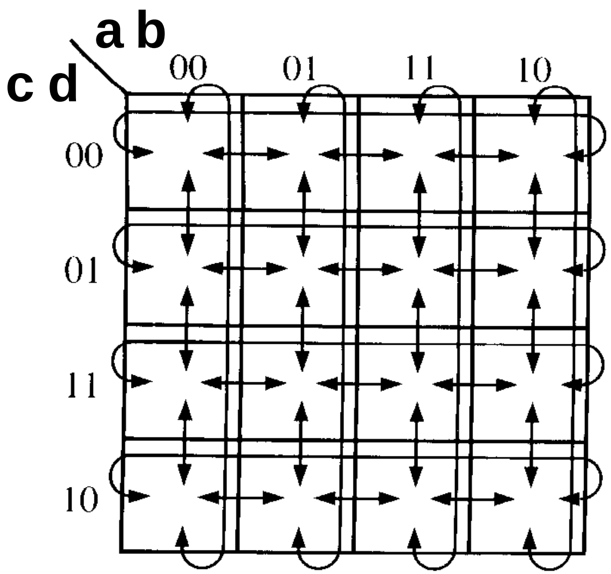
Funciones de cuatro variables. Nº de cuadros = $2^4 = 16$

cd \ ab	00	01	11	10
00	$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{d}$ 0	$\overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}\cdot\overline{d}$ 4	$a\cdot b\cdot\overline{c}\cdot\overline{d}$ 12	$a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{d}$ 8
01	$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot d$ 1	$\overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}\cdot d$ 5	$a\cdot b\cdot\overline{c}\cdot d$ 13	$a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot d$ 9
11	$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot d$ 3	$\overline{a}\cdot b\cdot c\cdot d$ 7	$a\cdot b\cdot c\cdot d$ 15	$a\cdot\overline{b}\cdot c\cdot d$ 11
10	$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d}$ 2	$\overline{a}\cdot b\cdot c\cdot\overline{d}$ 6	$a\cdot b\cdot c\cdot\overline{d}$ 14	$a\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d}$ 10

Tabla de minterm

Orden	a b c d
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1
10	1 0 1 0
11	1 0 1 1
12	1 1 0 0
13	1 1 0 1
14	1 1 1 0
15	1 1 1 1

Adyacencia de celdas en un mapa de Karnaugh



Ejemplos de adyacencia de celdas:
La celda 3 es adyacente con la 1, 2, 7, 11.
La celda 5 lo es con la 1, 4, 7 y 13.
La celda 8 lo es con la 0, 9, 10 y 12.

Representación de los diagramas de Karnaugh.

Funciones de cinco variables. Nº de celdas = $2^5 = 32$

a = 0

de \ bc	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

a = 1

de \ bc	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

a = 0	
orden	**b c d e**
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1
10	1 0 1 0
11	1 0 1 1
12	1 1 0 0
13	1 1 0 1
14	1 1 1 0
15	1 1 1 1

a = 1	
orden	**b c d e**
16	0 0 0 0
17	0 0 0 1
18	0 0 1 0
19	0 0 1 1
20	0 1 0 0
21	0 1 0 1
22	0 1 1 0
23	0 1 1 1
24	1 0 0 0
25	1 0 0 1
26	1 0 1 0
27	1 0 1 1
28	1 1 0 0
29	1 1 0 1
30	1 1 1 0
31	1 1 1 1

Ejemplos de adyacencia de celdas:

La celda 3 es adyacente con la 1, 2, 7, 11 y 19.

La celda 5 lo es con la 1, 4, 7 ,13 y 21.

La celda 10 lo es con la 2, 8, 11, 14 y 26.

Simplificación de una suma de productos mediante diagramas de Karnaugh.

Ejemplo: $\mathbf{f(a,b,c)} = \Sigma_3(\mathbf{0\,,1\,,2\,,4\,,5\,,6})$

Diagrama de Karnaugh :

c \ ab	00	01	11	10
0	1 (0)	1 (2)	1 (6)	1 (4)
1	1 (1)	0 (3)	0 (7)	1 (5)

Tabla de verdad :

Orden	a b c	f
0	0 0 0	1
1	0 0 1	1
2	0 1 0	1
3	0 1 1	0
4	1 0 0	1
5	1 0 1	1
6	1 1 0	1
7	1 1 1	0

c \ ab	00	01	11	10
0	1 (0)	1 (2)	1 (6)	1 (4)
1	1 (1)	0 (3)	0 (7)	1 (5)

Los minterm 2 y 6 son adyacentes, ⇒ su suma es simplificable:

$$\Sigma_3(2\,,6) = \bar{a}\,b\,\bar{c} + a\,b\,\bar{c} = b\,\bar{c}\,(\bar{a} + a) = b\,\bar{c}$$

Lo mismo sucede con los minterm 0 -1 y 4 - 5 :

$$\Sigma_3(0\,,1) = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,\bar{b}\,c = \bar{a}\,\bar{b}\,(\bar{c} + c) = \bar{a}\,\bar{b}$$

$$\Sigma_3(4\,,5) = a\,\bar{b}\,\bar{c} + a\,\bar{b}\,c = a\,\bar{b}\,(\bar{c} + c) = a\,\bar{b}$$

$$\boxed{\mathbf{f(a,b,c)} = \Sigma_3(\mathbf{2\,,6}) + \Sigma_3(\mathbf{0\,,1}) + \Sigma_3(\mathbf{4\,,5}) = \mathbf{b\,\bar{c} + \bar{a}\,\bar{b} + a\,\bar{b}}}$$

c \ ab	00	01	11	10
0	1 (0)	1 (2)	1 (6)	1 (4)
1	1 (1)	0 (3)	0 (7)	1 (5)

Del mismo modo se pueden realizar agrupaciones de mayor número de minters adyacentes :

$$\Sigma_3(0\,,2\,,4\,,6) = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,b\,\bar{c} + a\,\bar{b}\,\bar{c} + a\,b\,\bar{c} = \bar{c}$$

$$\Sigma_3(0\,,1\,,4\,,5) = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,\bar{b}\,c + a\,\bar{b}\,\bar{c} + a\,\bar{b}\,c = \bar{b}$$

$$\boxed{\mathbf{f(a,b,c)} = \Sigma_3(\mathbf{0\,,2\,,4\,,6}) + \Sigma_3(\mathbf{0\,,1\,,4\,,5}) = \mathbf{\bar{c} + \bar{b}}}$$

ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES

UVa

Simplificación de una suma de productos mediante diagramas de Karnaugh.

Reglas para simplificar funciones en los diagramas de Karnaugh.

- Mínimo número de agrupaciones.
- Agrupaciones del mayor número de minterm posible (2^m minterm).
- Todo “1” debe estar agrupado al menos una vez.
- Si es necesario, para agrandar el tamaño de una agrupación, un mismo “1” puede pertenecer a dos grupos distintos.
- Recomendable empezar agrupando celdas con menos adyacencias (casos más desfavorables).

cd \ ab	00	01	11	10
00	1 (0)	1 (4)	1 (12)	1 (8)
01	1 (1)	1 (5)	(13)	1 (9)
11	(3)	(7)	(15)	(11)
10	(2)	(6)	1 (14)	(10)

$$\Sigma_4(0,1,4,5) = \overline{a}\,\overline{c}$$

$$\Sigma_4(0,1,8,9) = \overline{b}\,\overline{c}$$

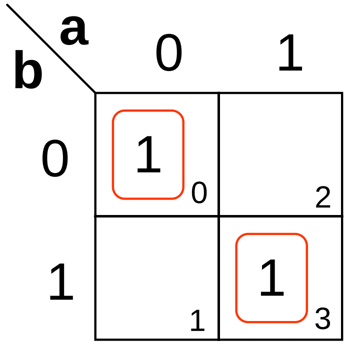
$$\Sigma_4(12,14) = a\,b\,\overline{d}$$

$$\mathbf{f(a,b,c,d)} = \Sigma_4(0,1,4,5) + \Sigma_4(0,1,8,9) + \Sigma_4(12,14) = \overline{a}\,\overline{c} + \overline{b}\,\overline{c} + a\,b\,\overline{d}$$

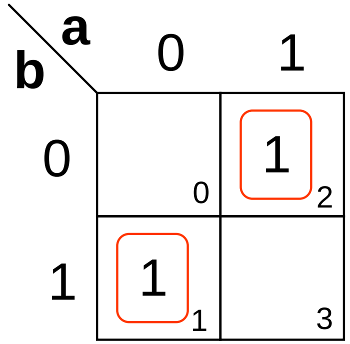
Simplificación de una suma de productos mediante diagramas de Karnaugh.

Formas que pueden tener las agrupaciones.

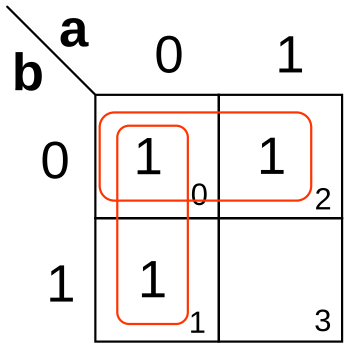
Con dos variables:



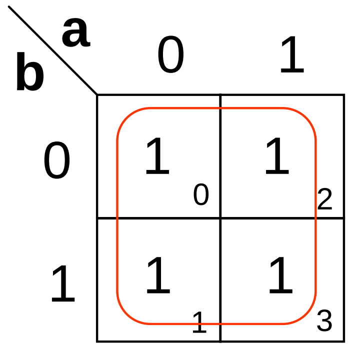
$$f_1 = \bar{a}\,\bar{b} + a\,b = \overline{a \oplus b}$$



$$f_2 = \bar{a}\,b + a\,\bar{b} = a \oplus b$$



$$f_3 = \bar{a} + \bar{b}$$



$$f_4 = 1$$

Simplificación de una suma de productos mediante diagramas de Karnaugh.

Formas que pueden tener las agrupaciones.

<u>**Con tres variables:**</u>

c \ ab	00	01	11	10
0	1 $_{0}$	1 $_{2}$	$_{6}$	$_{4}$
1	1 $_{1}$	$_{3}$	1 $_{7}$	1 $_{5}$

$$f_1 = \bar{a}\,\bar{b} + \bar{a}\,\bar{c} + a\,c$$

c \ ab	00	01	11	10
0	$_{0}$	1 $_{2}$	1 $_{6}$	$_{4}$
1	1 $_{1}$	1 $_{3}$	1 $_{7}$	1 $_{5}$

$$f_2 = b + c$$

c \ ab	00	01	11	10
0	1 $_{0}$	0 $_{2}$	1 $_{6}$	1 $_{4}$
1	1 $_{1}$	0 $_{3}$	1 $_{7}$	1 $_{5}$

$$f_3 = a + \bar{b}$$

Simplificación de una suma de productos mediante diagramas de Karnaugh.

Formas que pueden tener las agrupaciones.

<u>Con cuatro variables:</u>

cd \ ab	00	01	11	10
00	$_{0}$	1 $_{4}$	$_{12}$	$_{8}$
01	$_{1}$	$_{5}$	1 $_{13}$	$_{9}$
11	1 $_{3}$	$_{7}$	1 $_{15}$	1 $_{11}$
10	$_{2}$	1 $_{6}$	$_{14}$	$_{10}$

$$f_1 = \overline{a}\, b\, \overline{d} + a\, b\, d + \overline{b}\, c\, d$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	1 $_{0}$	$_{4}$	$_{12}$	1 $_{8}$
01	$_{1}$	1 $_{5}$	1 $_{13}$	$_{9}$
11	$_{3}$	1 $_{7}$	1 $_{15}$	$_{11}$
10	1 $_{2}$	$_{6}$	$_{14}$	1 $_{10}$

$$f_2 = \overline{b}\, \overline{d} + b\, d$$

ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES

UVa

Simplificación de una suma de productos mediante diagramas de Karnaugh.

Con cinco variables:

$$f_1 = \overline{b} + \overline{c}\,d$$

a = 0

de \ bc	00	01	11	10
00	1 (0)	1 (4)	(12)	(8)
01	1 (1)	1 (5)	(13)	(9)
11	1 (3)	1 (7)	(15)	1 (11)
10	1 (2)	1 (6)	(14)	1 (10)

a = 1

de \ bc	00	01	11	10
00	1 (16)	1 (20)	(28)	(24)
01	1 (17)	1 (21)	(29)	(25)
11	1 (19)	1 (23)	(31)	1 (27)
10	1 (18)	1 (22)	(30)	1 (26)

$$f_2 = \overline{a}\,b\,\overline{e} + b\,\overline{d}\,e + \overline{b}\,d\,\overline{e}$$

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	(0)	(4)	1 (12)	1 (8)	(24)	(28)	(20)	(16)
01	(1)	(5)	1 (13)	1 (9)	1 (25)	1 (29)	(21)	(17)
11	(3)	(7)	(15)	(11)	(27)	(31)	(23)	(19)
10	1 (2)	1 (6)	1 (14)	1 (10)	(26)	(30)	1 (22)	1 (18)

Simplificación de un producto de sumas mediante diagramas de Karnaugh.

Ejemplos con cuatro variables:

Maxterm:

Variable negada $\Rightarrow$ “1”

Variable sin negar $\Rightarrow$ “0”

cd \ ab	00	01	11	10
00	0 (0)	1 (4)	0 (12)	0 (8)
01	0 (1)	0 (5)	1 (13)	0 (9)
11	1 (3)	0 (7)	1 (15)	1 (11)
10	0 (2)	1 (6)	1 (14)	0 (10)

$$f_1 = \left(a + \overline{b} + \overline{d}\right)\left(b + d\right)\left(b + c\right)\left(\overline{a} + c + d\right)$$

$$f_1 = \overline{a}\,b\,\overline{d} + a\,b\,d + \overline{b}\,c\,d + b\,c\,\overline{d}$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	1 (0)	0 (4)	0 (12)	1 (8)
01	0 (1)	1 (5)	1 (13)	0 (9)
11	0 (3)	1 (7)	1 (15)	0 (11)
10	1 (2)	0 (6)	0 (14)	1 (10)

$$f_2 = \left(\overline{b} + d\right)\left(b + \overline{d}\right)$$

$$f_2 = \overline{b}\,\overline{d} + b\,d$$

Obtención de funciones canónicas utilizando diagramas de Karnaugh.

Utilizando los diagramas de Karnaugh se puede obtener la función *canónica* de una *no canónica*.

Ejemplo: Función no canónica:

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \left(\mathbf{c} + \overline{\mathbf{d}}\right)\mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{c}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \overline{\mathbf{d}} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{c}$$

Pasándola al diagrama de Karnaugh $\Rightarrow$

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	4	1 (12)	1 (8)
01	1	5	1 (13)	9
11	3	7	1 (15)	1 (11)
10	2	6	1 (14)	1 (10)

En forma canónica la función queda:

$$\mathbf{f(a,b,c,d)} = \Sigma_4 (\, \mathbf{8}, \mathbf{10}, \mathbf{11}, \mathbf{12}, \mathbf{13}, \mathbf{14}, \mathbf{15} \,)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{a}\,\overline{\mathbf{b}}\,\overline{\mathbf{c}}\,\overline{\mathbf{d}} + \mathbf{a}\,\overline{\mathbf{b}}\,\mathbf{c}\,\overline{\mathbf{d}} + \mathbf{a}\,\overline{\mathbf{b}}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d} + \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\overline{\mathbf{c}}\,\overline{\mathbf{d}} + \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\overline{\mathbf{c}}\,\mathbf{d} + \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\overline{\mathbf{d}} + \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}$$

Funciones incompletas.

Hay casos en los que una o varias combinaciones de las variables, no influyen en el valor de la función.

- Porque la combinación de variables de entrada no puede darse físicamente.
- Porque para una combinación concreta de las variables (entradas) no importa el resultado de la función (salida).

Estas combinaciones se denominan *irrelevantes*. El valor de la función se representa mediante **X**. Esta **X** puede tomar el valor **0** o **1** indistintamente, según convenga para la simplificación.

orden	**a b c**	**f**
0	0 0 0	0
1	0 0 1	X
2	0 1 0	1
3	0 1 1	1
4	1 0 0	0
5	1 0 1	0
6	1 1 0	X
7	1 1 1	1

Ejemplo: Dada la función f a partir de su tabla de verdad, obtener su expresión algebraica simplificada.

$$\mathbf{f(a,b,c)} = \Sigma_3(\mathbf{2,3,7}) + \Sigma_{3(X)}(\mathbf{1,6})$$

c \ **a b**	0 0	0 1	1 1	1 0
0	$_{0}$	1_{2}	$\mathbf{X}_{6}$	$_{4}$
1	$\mathbf{X}_{1}$	1_{3}	1_{7}	$_{5}$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{f} = \mathbf{b}$$

ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES

UVa

Implementación de circuitos lógicos (1).

Para implementar un circuito lógico es necesario determinar el circuito eléctrico que realiza la función lógica inicial. Para ello se utilizarán puertas lógicas conectadas adecuadamente. Cualquier función lógica puede ser implementada utilizando únicamente puertas NAND o puertas NOR.

Ejemplo: Se quiere implementar con puertas NAND la función f obtenida a partir de su tabla de verdad.

$$\mathbf{f(a,b,c,d)} = \Sigma_{\mathbf{4}}(\mathbf{1,2,4,7,8}) + \Sigma_{\mathbf{4(X)}}(\mathbf{10,11,12,13,14,15})$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	 0	1 4	X 12	1 8
01	1 1	 5	X 13	 9
11	 3	1 7	X 15	X 11
10	1 2	 6	X 14	X 10

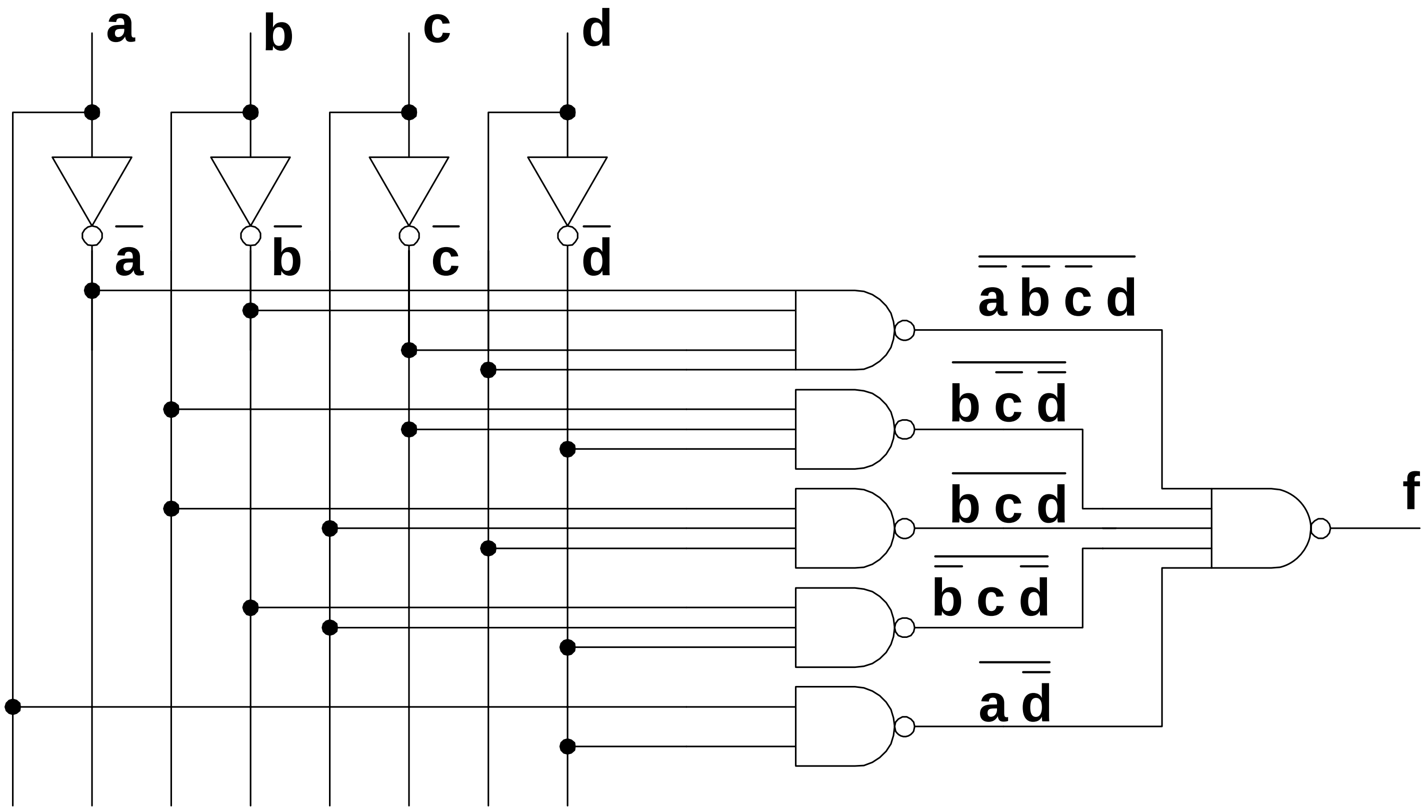
$$f = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,d + b\,\bar{c}\,\bar{d} + b\,c\,d + \bar{b}\,c\,\bar{d} + a\,\bar{d}$$

$$f = \overline{\overline{\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,d + b\,\bar{c}\,\bar{d} + b\,c\,d + \bar{b}\,c\,\bar{d} + a\,\bar{d}}}$$

$$f = \overline{\overline{\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,d} \cdot \overline{b\,\bar{c}\,\bar{d}} \cdot \overline{b\,c\,d} \cdot \overline{\bar{b}\,c\,\bar{d}} \cdot \overline{a\,\bar{d}}}$$

Implementación de circuitos lógicos (2).

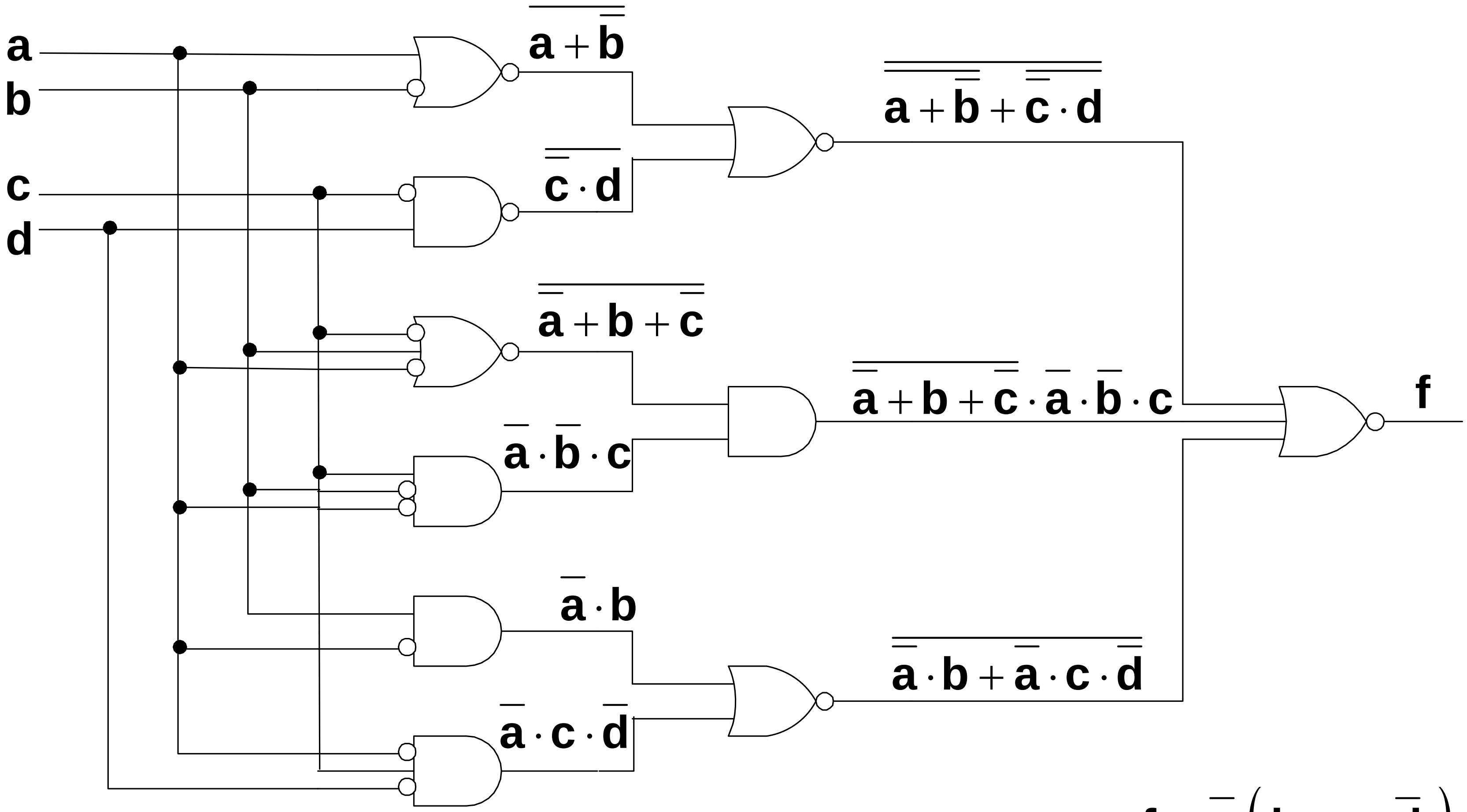
$$f = \overline{\overline{\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,d} \cdot \overline{b\,\bar{c}\,\bar{d}} \cdot \overline{b\,c\,d} \cdot \overline{\bar{b}\,c\,\bar{d}} \cdot \overline{a\,\bar{d}}}$$



Análisis de circuitos lógicos.

El análisis de circuitos consiste en obtener la función lógica que realiza un circuito eléctrico.

Ejemplo:



$$f=\overline{a}\left(b+c\cdot\overline{d}\right)$$