INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA DIGITAL

ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES

UVa

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA DIGITAL.

1.- El sistema digital.

2.- Álgebra de Boole.

- **Álgebra de conmutación.**
- **Variables y funciones lógicas.**
- **Teoremas del álgebra de Boole.**
- **Simplificación algebraica de funciones booleanas.**

3.- Funciones y puertas lógicas.

4.- Expresiones con puertas NAND/NOR.

5.- Implementación de funciones lógicas.

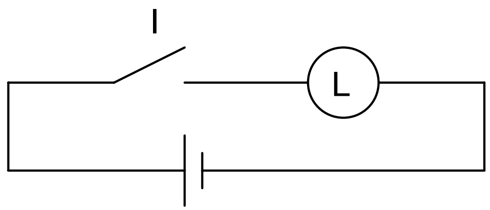
El sistema digital.

Las magnitudes se definen por el estado en que se encuentran.

Estado lógico: → 0 / → 1

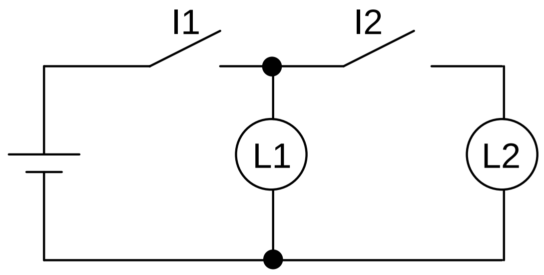
Variable lógica:

- Dependiente.
- Independiente.



I	L
0	0
1	1

Sistema digital eléctrico $\Rightarrow$ Niveles de tensión.



Valores lógicos $\rightarrow$	Tensiones
"1"	$4V < V \leq 5V$
"0"	$1V > V \geq 0V$

I1	I2	L1	L2
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Tensiones altas $\Rightarrow$ "1"
Tensiones bajas $\Rightarrow$ "0"
LÓGICA POSITIVA

Tensiones altas $\Rightarrow$ "0"
Tensiones bajas $\Rightarrow$ "1"
LÓGICA NEGATIVA

Álgebra de Boole.

Un conjunto **B** dotado con dos operaciones algebraicas **+** y **·** es un ***álgebra de Boole*** si y sólo si se verifican los siguientes postulados:

- *P1* : Las operaciones + y · son conmutativas:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \quad ; \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \quad \forall\ \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{B}$$

- *P2* : Existen en **B** dos elementos representados por los símbolos 0 y 1, tal que:

$$\mathbf{a}+0=0+\mathbf{a}=\mathbf{a} \qquad \forall\ \mathbf{a}\in\mathbf{B}$$

$$\mathbf{a}\cdot 1=1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a} \qquad \forall\ \mathbf{a}\in\mathbf{B}$$

0 y 1 son los elementos identidad para + y · respectivamente.

- *P3* : Cada operación es distributiva con respecto a la otra.

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{c})$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) \qquad \forall\ \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbf{B}$$

- *P4* : Para cada **a** ∈ **B**, existe un elemento $\overline{\mathbf{a}}$ en **B** tal que :

$$\mathbf{a}+\overline{\mathbf{a}}=1$$

$$\mathbf{a}\cdot\overline{\mathbf{a}}=0 \qquad \forall\ \mathbf{a}\in\mathbf{B}$$

El elemento $\overline{\mathbf{a}}$ es el *complementario* de **a** .

Álgebra de conmutación.

En muchos sistemas físicos y eléctricos sólo dos situaciones son de interés: La conducción o no conducción de un transistor, la apertura o cierre de un contacto, etc. Esto lleva a considerar un conjunto **B** con dos elementos:

$$\mathbf{B} = \{0\,,1\}$$

El conjunto **B** con las operaciones **+ (OR)** y **· (AND)** definidas en las tablas

$\boxed{\mathbf{a + b}}$

b \ a	0	1
0	0	1
1	1	1

$\boxed{\mathbf{a \cdot b}}$

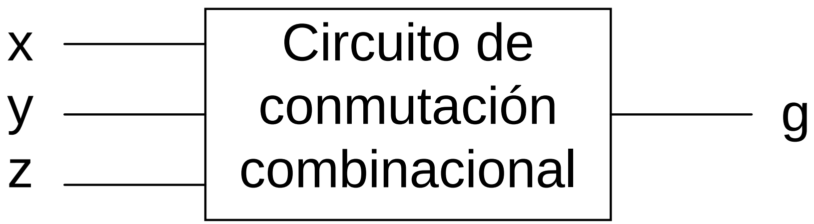
b \ a	0	1
0	0	0
1	0	1

forman un álgebra de Boole denominado ***álgebra de conmutación***.

Este álgebra de Boole es una parte indispensable en el análisis y diseño de circuitos lógicos o de conmutación.

Variables y funciones lógicas.

- Un símbolo x, es una variable si representa cualquier elemento de un álgebra de Boole B.
- En el álgebra de conmutación la variable x puede tomar el valor 1 ó 0.
- Una expresión booleana puede utilizarse para describir una correspondencia, aplicación o función de conmutación (función lógica).



$$\underbrace{\mathbf{g}}_{\text{Variable dependiente}} = \mathbf{f}\,(\underbrace{\mathbf{x}\,,\mathbf{y}\,,\mathbf{z}}_{\text{Variables independientes}})$$

x	y	z	g = f (x ,y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Teoremas del álgebra de Boole.

Propiedad asociativa: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ $\quad$ $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$

Ley de involución: $\overline{\overline{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}$

Axiomas del álgebra de Boole.

$\mathbf{a} = 1$ si $\mathbf{a} \neq 0$ $\qquad$ $\mathbf{a} = 0$ si $\mathbf{a} \neq 1$

$\mathbf{a} + 1 = 1$	$\mathbf{a} \cdot 0 = 0$	$1 + 1 = 1$	$0 \cdot 0 = 0$
$\mathbf{a} + 0 = \mathbf{a}$	$\mathbf{a} \cdot 1 = \mathbf{a}$	$0 + 0 = 0$	$1 \cdot 1 = 1$
$\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$	$1 + 0 = 1$	$1 \cdot 0 = 0$
$\mathbf{a} + \overline{\mathbf{a}} = 1$	$\mathbf{a} \cdot \overline{\mathbf{a}} = 0$	$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$

Principio de DUALIDAD: Intercambio de + y · y de los ceros y los unos.

$$\mathbf{a} + \overline{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \qquad \mathbf{a}\left(\overline{\mathbf{a}} + \mathbf{b}\right) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\leftarrow \text{DUAL} \rightarrow$$

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} + \overline{\mathbf{a}}\,\mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{c})(\overline{\mathbf{a}} + \mathbf{b}) \qquad (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\overline{\mathbf{a}} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\,\mathbf{c} + \overline{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$$

Teoremas del álgebra de Boole.

Teorema de ABSORCIÓN: En una función lógica si un termino incluye todas las variables de otro, se puede eliminar.

$$f_1 = a + a \cdot b = a \qquad f_1 = a + a\,b = a\,(1 + b) = a \cdot 1 = a$$

$$f_2 = a\,c + a\,d\,c + a\,b\,c = a\,c \qquad f_2 = a\,c\,(1 + d + b) = a\,c\,(1) = a\,c$$

$$f_3 = a + a\,b\,c + c\,d = a + c\,d \qquad f_3 = a\,(1 + bc) + cd = a + c\,d$$

$$f'_1 = a \cdot (a + b) = a$$

$$f'_1 = a\,(a + b) = (a + 0) \cdot (a + b) = a + (0 \cdot b) = a + 0 = a$$

$$f'_2 = (a + c) \cdot (a + d + c) \cdot (a + b + c) = a + c$$

$$f'_2 = (a + c + 0)(a + c + d)(a + c + b) = (a + c) + (0 \cdot d \cdot b) = a + c$$

$$f'_3 = a \cdot (a + b + c) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d)$$

$$f'_3 = (a\,a + a\,b + a\,c)(c + d) = (a + a\,b + a\,c)(c + d) = a(1 + b + c)(c + d) = a\,(c + d)$$

ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES

UVa

Teoremas del álgebra de Boole.

Teorema de SHANNON (función inversa o complementaria):

La función inversa o complementaria ($\overline{f}$) de una dada (**f**) se obtiene reemplazando cada variable por su complementaria y, al mismo tiempo, intercambiando las operaciones **+** y **·**.

$$f = a + \overline{b} \cdot c$$

$$f_{dual} = a \cdot \left(\overline{b} + c \right)$$

$$\overline{f} = \overline{a} \cdot \left(b + \overline{c} \right)$$

Teorema de DE MORGAN :

$$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b} \qquad f = a + b \quad \left\{ \begin{array}{ll} & \overline{f} = \overline{a + b} \\ f_{Dual} = a \cdot b & \overline{f} = \overline{a} \cdot \overline{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b} \qquad f = a \cdot b \quad \left\{ \begin{array}{ll} & \overline{f} = \overline{a \cdot b} \\ f_{Dual} = a + b & \overline{f} = \overline{a} + \overline{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$

$$\overline{a \cdot b \cdot c \cdot \ldots} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \ldots \qquad \overline{a + b + c + \ldots} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \ldots$$

Teoremas del álgebra de Boole.

Teorema del TÉRMINO OPCIONAL :

En una función de, al menos, dos términos suma de productos y que en uno de ellos exista una variable y en otro su complemento (por ejemplo: $\mathbf{f = b\,c + a\,\bar{c}}$) se puede añadir a la función, un término formado por el producto de las restantes variables, sin que ésta varíe.

$$\mathbf{f = b\,c + a\,\bar{c}} \qquad \mathbf{f' = b\,c + a\,\bar{c} + ab} \qquad \mathbf{f = f'}$$

Término Opcional

$$\mathbf{f' = b\,c + a\,\bar{c} + a\,b\underbrace{\left(c + \bar{c}\right)}_{1} = b\,c + a\,\bar{c} + a\,b\,c + a\,b\,\bar{c} =}$$

$$\mathbf{= b\,c\underbrace{\left(1 + a\right)}_{1} + a\,\bar{c}\underbrace{\left(1 + b\right)}_{1} = b\,c + a\,\bar{c}}$$

El término opcional puede ayudar a simplificar la función original :

Ejemplo:

$$\mathbf{f = a + \bar{a}\,b\,c = a + \bar{a}\,b\,c + b\,c = a + b\,c\underbrace{(\bar{a} + 1)}_{1} = a + b\,c}$$

Simplificación algebraica de funciones booleanas.

- Aplicación de los teoremas y postulados del álgebra de Boole.
- Comprobación mediante la tabla de verdad correspondiente.

Ejemplo 1.

$$\mathbf{f = a + \overline{a}\,b}$$

$$\mathbf{f = a + \overline{a}\,b = a + \overline{a}\,b + b = a + b\,\underbrace{\left(\overline{a} + 1\right)}_{1} = a + b}$$

Término Opcional

Tabla de verdad

$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{\overline{a}}$	$\mathbf{\overline{a}\,b}$	$\mathbf{a + \overline{a}\,b}$	$\mathbf{a + b}$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

Simplificación algebraica de funciones booleanas.

***Ejemplo 2*.**

$$f = a\,b + \bar{a}\,c + b\,c$$

$$f = a\,b + \bar{a}\,c + b\,c = a\,b + \bar{a}\,c$$

Término Opcional

$$f = a\,b + \bar{a}\,c + b\,c\,\underbrace{(a + \bar{a})}_{1} = ab + \bar{a}c + bca + bc\bar{a} = a\,b\,\underbrace{(1 + c)}_{1} + \bar{a}\,c\,\underbrace{(1 + b)}_{1} = a\,b + \bar{a}\,c$$

Tabla de verdad

a	b	c	$\bar{a}$	$a\,b$	$\bar{a}\,c$	$b\,c$	$a\,b + \bar{a}\,c + b\,c$	$a\,b + \bar{a}\,c$
0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1

Funciones y puertas lógicas.

FUNCIONES BÁSICAS que definen el álgebra de Boole.

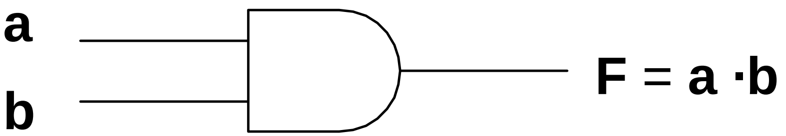
- Función **AND** o **Y** (producto lógico).
- Función **OR** o **O** (suma lógica).
- Función **NOT** o **NO** (negación).

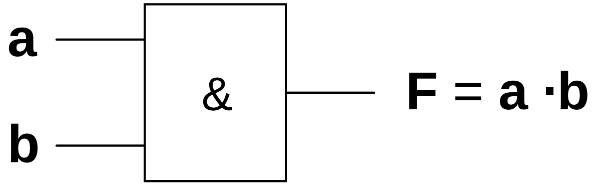
OTRAS FUNCIONES LÓGICAS:

- Función **NAND** (negación de la función **AND**).
- Función **NOR** (negación de la función **OR**).
- Función **EXOR** o **OR-Exclusiva** (función diferencia).
- Función **EXNOR** o **OR-No exclusiva** (función no diferencia).

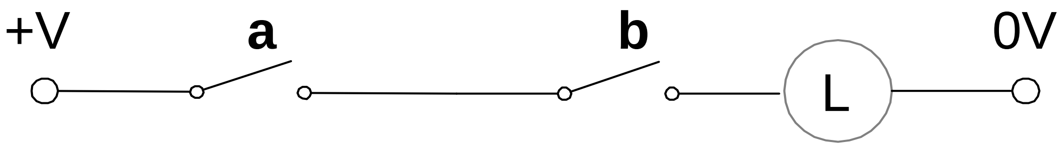
Funciones y puertas lógicas.

Función AND o Y. Producto lógico.

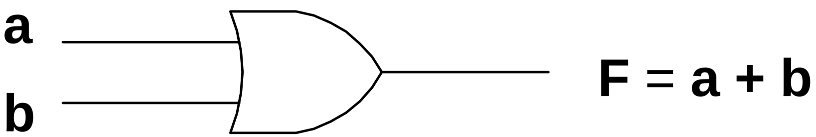


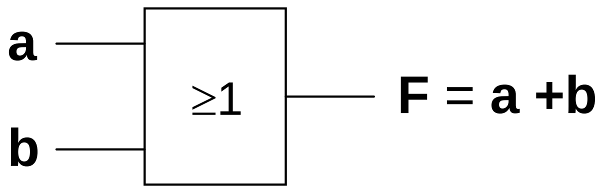


a	b	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

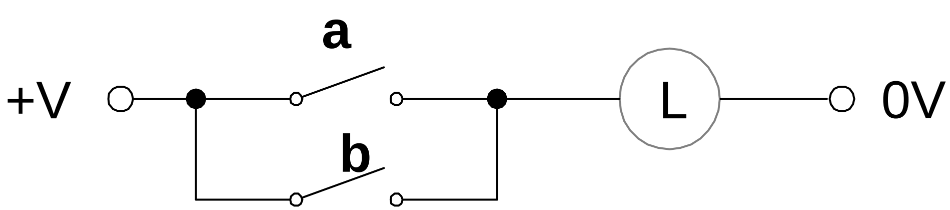


Función OR o O. Suma lógica.



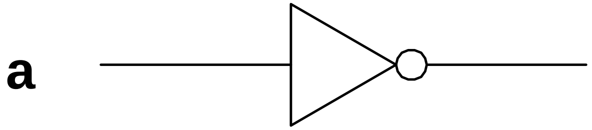


a	b	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

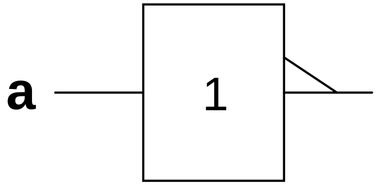


Funciones y puertas lógicas.

Función NOT o NO. Negación. INVERSOR.



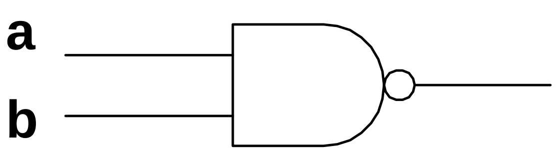
$F = \overline{a}$



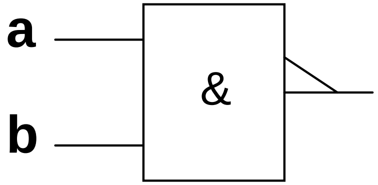
$F = \overline{a}$

a	F
0	1
1	0

Función NAND (NO-AND).



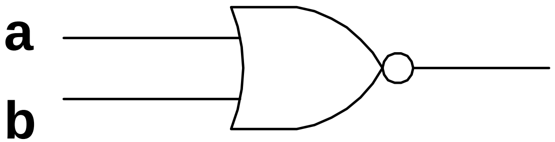
$F = \overline{a \cdot b}$



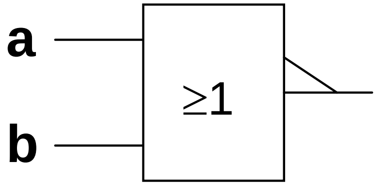
$F = \overline{a \cdot b}$

a	b	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Función NOR (NO-OR).



$F = \overline{a + b}$

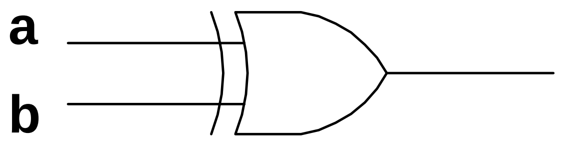


$F = \overline{a + b}$

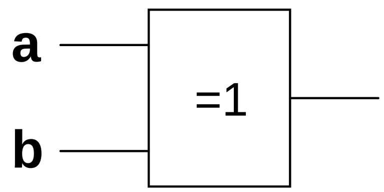
a	b	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Funciones y puertas lógicas.

Función EXOR. OR-Exclusiva.



$F = a \oplus b$

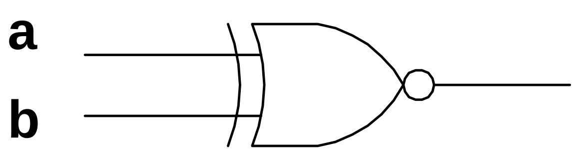


$F = a \oplus b$

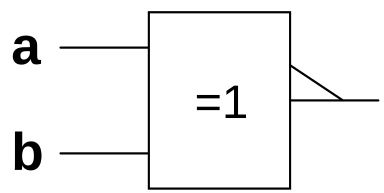
a	b	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$F = a \oplus b = a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b$$

Función EXNOR. OR-No Exclusiva.



$F = \overline{a \oplus b}$



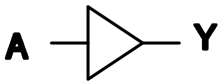
$F = \overline{a \oplus b}$

a	b	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$F = \overline{a \oplus b} = a \cdot b + \overline{a} \cdot \overline{b}$$

Funciones y puertas lógicas (Resumen).

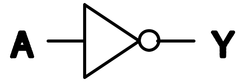
BUFFER



$Y = A$

A	Y
0	0
1	1

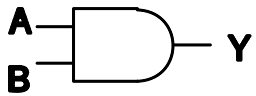
INVERSOR



$Y = \overline{A}$

A	Y
0	1
1	0

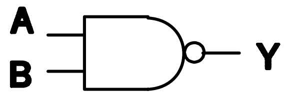
AND



$Y = A \cdot B$

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

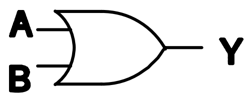
NAND



$Y = \overline{A \cdot B}$

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

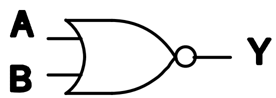
OR



$Y = A + B$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

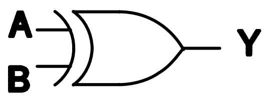
NOR



$Y = \overline{A + B}$

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

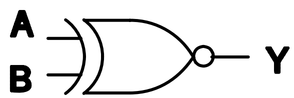
XOR



$Y = A \oplus B$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XNOR



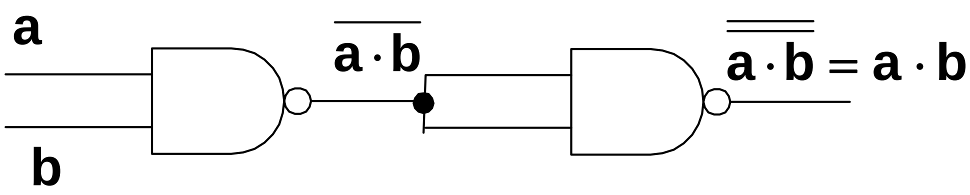
$Y = \overline{A \oplus B}$

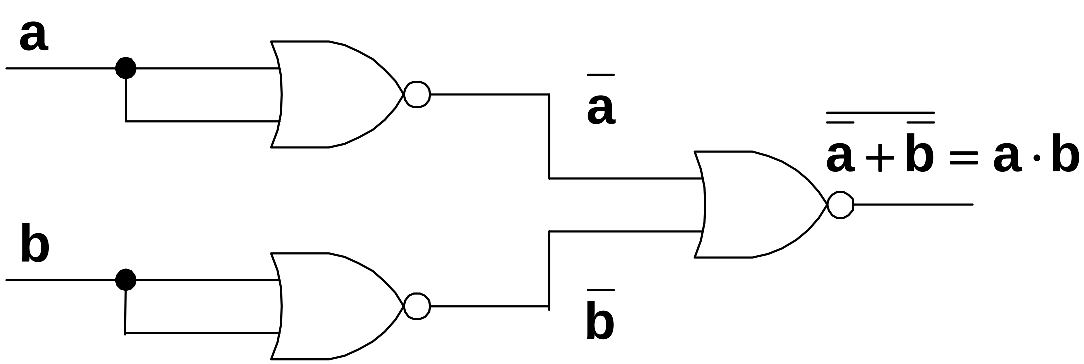
A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

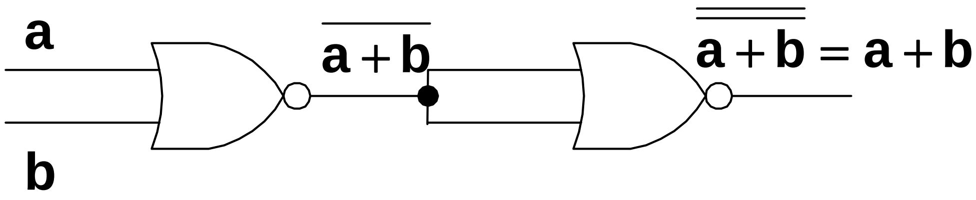
Expresiones con puertas NAND y NOR.

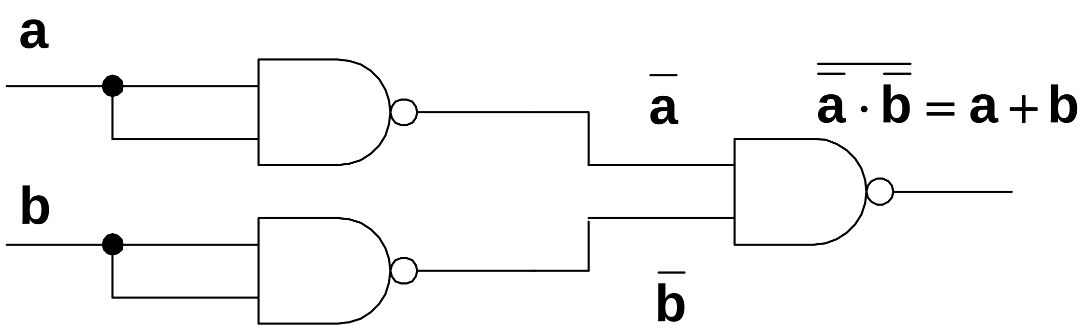
Las tres funciones elementales AND, OR y NOT pueden realizarse mediante funciones NAND y NOR.

$$a \cdot b = \overline{\overline{a \cdot b}} = \overline{\overline{a} + \overline{b}} \qquad a + b = \overline{\overline{a + b}} = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}$$





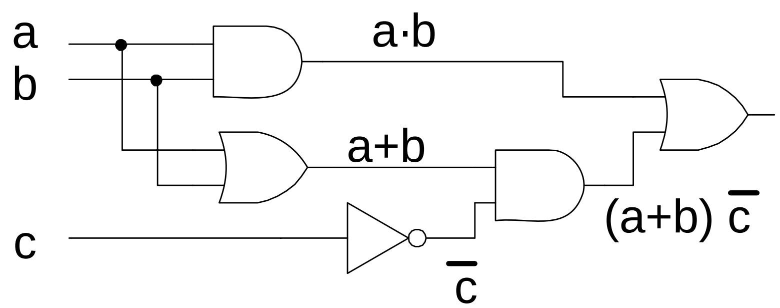




Implementación de funciones lógicas.

- Implementar una función es realizar el circuito digital de puertas lógicas que cumple la ecuación de dicha función.

Ejemplo: $\mathbf{f = a\,b + (a+b)\,\bar{c}}$



- Cualquier función puede implementarse utilizando únicamente puertas NAND o puertas NOR.

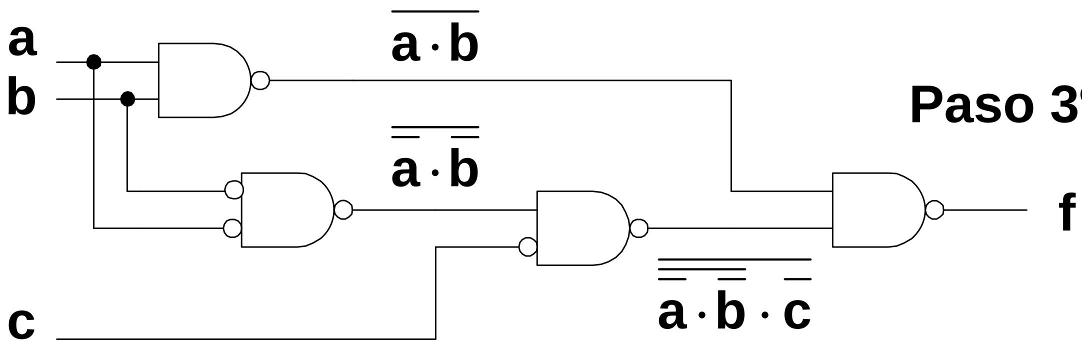
Ejemplo. Implementar utilizando únicamente puertas **NAND** la función:

$$\mathbf{f = a\,b + (a+b)\,\bar{c}}$$

Paso 1º : $\mathbf{f = \overline{\overline{a\,b + (a+b)\,\bar{c}}}}$

Paso 2º : $\mathbf{f = \overline{\overline{a\,b} \cdot \overline{(a+b)\,\bar{c}}}}$

Paso 3º : $\mathbf{f = \overline{\overline{a\,b} \cdot \overline{\overline{\overline{(a+b)}} \cdot \bar{c}}} = \overline{\overline{a\,b} \cdot \overline{\overline{(\bar{a} \cdot \bar{b})} \cdot \bar{c}}}}$



Implementación de funciones lógicas.

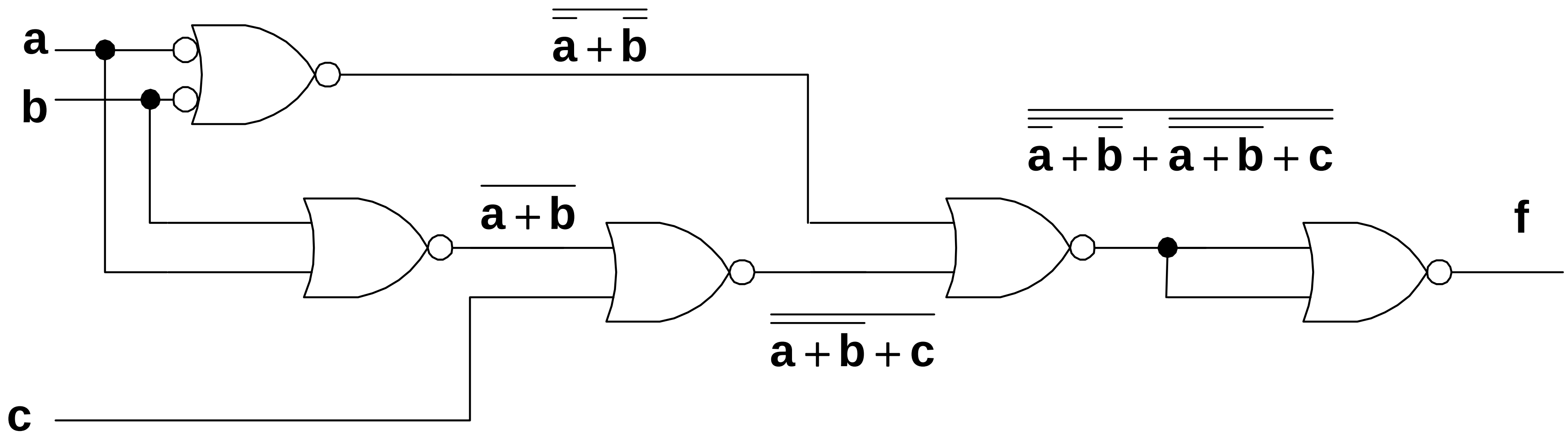
Ejemplo. Implementar utilizando únicamente puertas **NOR** la función:

$$f = a\,b + (a+b)\,\bar{c}$$

Paso 1º : $f = \overline{\overline{a\,b + (a+b)\,\bar{c}}}$

Paso 2º : $f = \overline{\overline{\overline{\overline{a\,b}} + \overline{\overline{(a+b)\,\bar{c}}}}}$

Paso 3º : $f = \overline{\overline{\overline{\bar{a} + \bar{b}} + \overline{\overline{(a+b)} + c}}}$



ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES

UVa