Modelado y reconocimiento de rostros

Alejandro Barrio Mateos

Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

20 de diciembre de 2023

Objetivos del trabajo

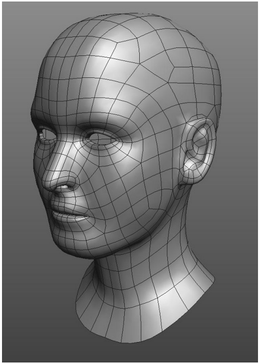
- Presentar las estrategias *top-down* y *bottom-up*.
- Modelar la cara humana como una unión de subvariedades en función de su curvatura.
- Estudiar la evolución del modelo creado a través de flujos, los cuales permiten también analizar gestos.
- Indagar en las estrategias basadas en los datos, ejemplificado con el método eigenfaces.

Tabla de contenidos

Tabla de contenidos

La cara como unión de subvariedades

- Se adopta un modelo basado en apariencias, sin considerar la estructura subyacente de huesos y músculos.
- La cara se modela inicialmente como una superficie conexa sin agujeros.



Espacio tangente

$$T_pM = \{[c]_p \mid \text{c es una curva tangente en p}\}$$

Fibrado normal

Dada una inmersión $f : S \to \mathbb{R}^3$ de una superficie S, el espacio normal en cada punto es $(T_p\mathbb{R}^3 \,|_S)/(T_pS)$. El pegado mediante cartas locales de todos ellos proporciona el espacio total del fibrado normal $\mathcal{N}_f$.

Campos vectoriales

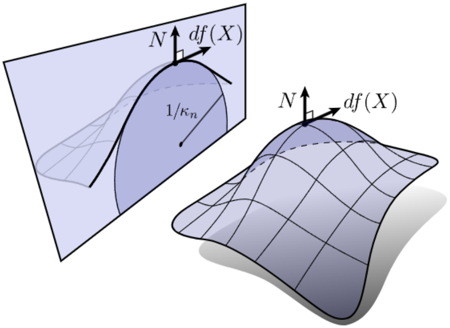
Un **campo vectorial** sobre M es una sección local del fibrado tangente. El conjunto de campos vectoriales en M de clase C^k se denota $\mathcal{X}^k(M)$.

[1] Abraham, Marsden y Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications*. 1988.

Referencias móviles en una superficie

Aplicación de Gauss

$$N : U \to \mathbb{S}^2 \ / \ N(p) = \frac{r_u \times r_v}{||r_u \times r_v||}$$



Enfoque algebraico

Derivada direccional o de Lie

$$\mathcal{L}_X f \equiv X[f] = df \cdot X = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i \in \mathcal{X}^{k-2}(M)$$

Endomorfismo de Weingarten

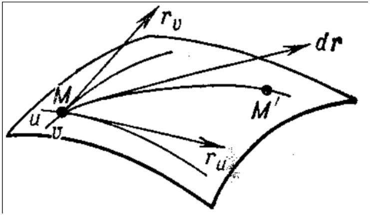
La diferencial del mapa de Gauss $dN : T_pS \to T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ induce el endomorfismo de Weingarten L: $T_pS \to T_pS$.

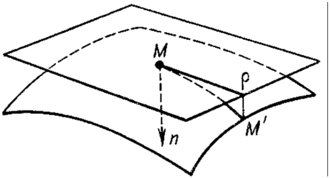
[2] Manfredo P. do Carmo. Geometría diferencial de curvas y superficies. 1990.

Formas fundamentales

k-ésima forma fundamental

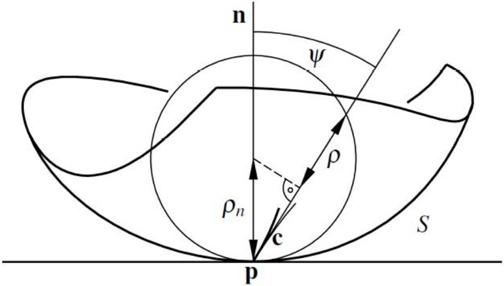
Dada una superficie S y $X, Y \in T_pS$, definimos la k-**ésima forma fundamental** como $\langle L^{k-1}X, Y \rangle$; $k \in \mathbb{N}$.





Proposición de Meusnier

Todas las curvas de una superficie que pasan por un mismo punto y tienen la misma tangente en él, tienen la misma curvatura normal en dicho punto y los círculos osculantes forman una esfera (**esfera de Meusnier**).



Curvaturas

Denotando por K a la matriz de la diferencial de la aplicación de Gauss d_pN, sus invariantes algebraicos quedan determinados por sus autovalores κ_1 y κ_2, suponiendo $\kappa_1 \geq \kappa_2$.

- **Curvatura media**: $H \equiv \kappa_m = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(K) = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$
- **Curvatura de Gauss**: $\mathbf{K} \equiv \kappa_t = |K| = \kappa_1\kappa_2$

Esto permite dar una clasificación de los diversos puntos de la superficie en función del signo de la curvatura gaussiana, si se anula alguna curvatura principal o en caso de valores extremos de éstas:

- Elíptico
- Umbílico
- Hiperbólico
- Plano
- Parabólico
- Cresta

Teorema Egregium de Gauss

La curvatura de Gauss de una superficie regular es invariante por isometrías locales.

Ecuaciones de compatibilidad

$$EK = (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2,$$

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2,$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2.$$

Tabla de contenidos

Evolución de superficies

Para el análisis de gestos, estudiaremos la evolución a lo largo del tiempo de una familia de superficies representadas de manera explícita (forma de Monge); $z = f(x, y)$.

$$S_t = \{(x, y, z) \ | \ z = F(x, y, t)\}$$

Su deformación a lo largo de la dirección normal plantea el problema de valores iniciales:

$$F_t(x, y, t) = \beta \cdot \sqrt{1 + F_x^2 + F_y^2}$$

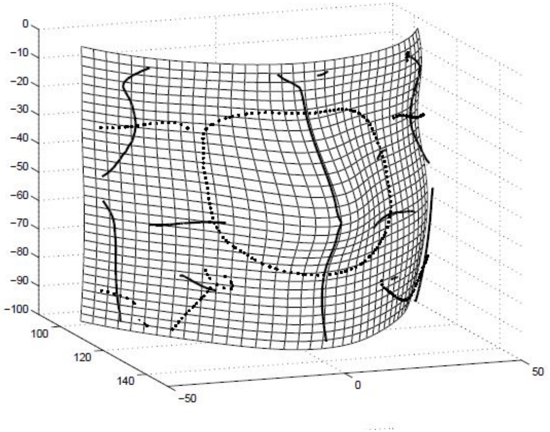
$$F(x, y, 0) = f(x, y)$$

La solución de éste, para un t pequeño, puede aproximarse por el flujo:

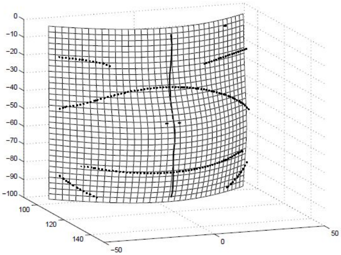
$$F(x, y, t) = f(x, y) + \beta \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot t + O(t)$$

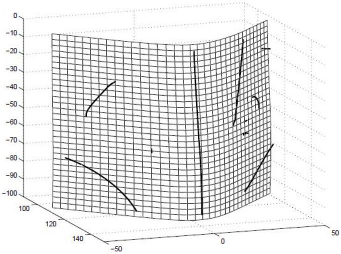
[3] Lu, Cao y Mumford. *Surface Evolution under Curvature Flows*. 2002.

Malla cuadrangular sobre el escaneo del rostro



Flujos de curvatura principales sobre la cara





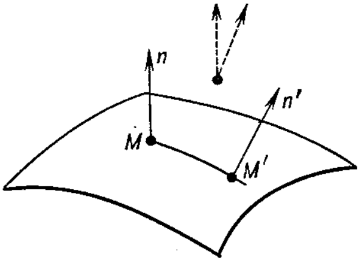
La cara tras pasar por los flujos K_1 (izq.) y K_2 (dcha.) en $t = 1000$.

Tabla de contenidos

Energía de Willmore

Energía de Willmore

$$\mathcal{W}(S) = \int_S (H^2 - \mathbf{K})\, dA = \frac{1}{4} \int_S (\kappa_1 - \kappa_2)^2\, dA$$



[4] Jose Antonio Lorencio Abril. Superficies de Willmore en el espacio euclídeo. 2022.

Funcional de energía de Willmore

Teorema de Gauss para aplicaciones esféricas

$$|\omega(D)| := \int_S \mathbf{K}\, dA = \iint_{\mathbb{S}^2} d\sigma$$

Funcional de energía de Willmore

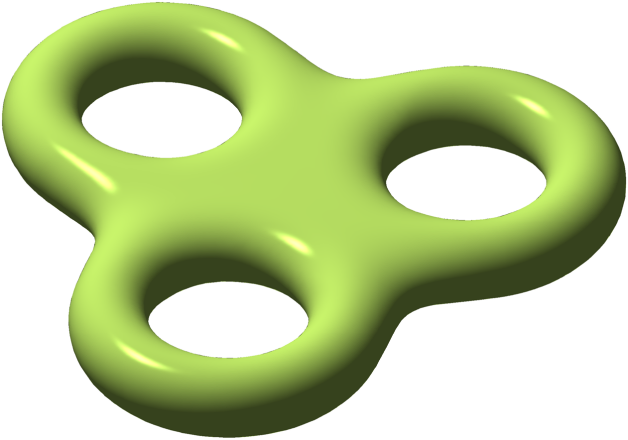
$$\mathcal{W}(S) = \int_S H^2\, dA$$

Una superficie de Willmore es un punto crítico del funcional

$$\mathcal{W} : SCO(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R},$$

donde $SCO(\mathbb{R}^3)$ es el conjunto de superficies compactas y orientables.

Aplicación al modelado de la cara



Cara como superficies de Willmore

Invarianza conforme del funcional de Willmore

Sea $S \in SCO(\mathbb{R}^3)$ y Φ una aplicación conforme e inyectiva. Entonces,

$$S' = \Phi(S) \in SCO(\mathbb{R}^3) \text{ y } \mathcal{W}(S) = \mathcal{W}(S').$$

Ecuación de Euler-Lagrange para las superficies de Willmore

$$\Delta H + 2H(H^2 - 2\mathbf{K}) = 0$$

Flujos geométricos

- **Flujo óptico en secuencias de vídeo**: Extracción de hechos significativos a partir de valores extremos de la función intensidad,

$$I : R \times [0, D] \to [0, 255]$$

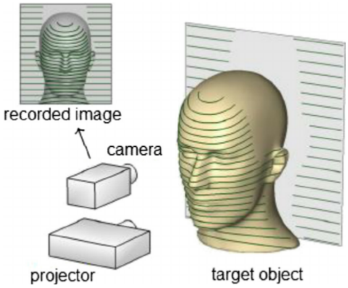
en *frames* específicos. Para ello, ésta se supone constante en instantes próximos y se estudia el flujo óptico asociado:

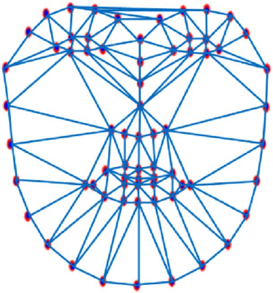
$$\int_{\Omega} \nabla_t I = 0$$

- **Flujos de volumen**: Análisis de la evolución de superficies en movimiento como variedades tridimensionales.

Tabla de contenidos

Captura de datos





Métodos de reconocimiento facial

- **Representación holística**: Análisis del rostro como un elemento único, preservando la interrelación entre las partes.
- **Extracción de hechos significativos**: Descomponer la cara en regiones de interés para su análisis individual.

A causa del gran volumen de datos a manejar, es necesario aplicar técnicas de reducción de dimensionalidad como **Análisis de Componentes Principales** (**PCA**).

[5] Turk y Pentland. *Eigenfaces for Recognition*. 1991.

Eigenfaces

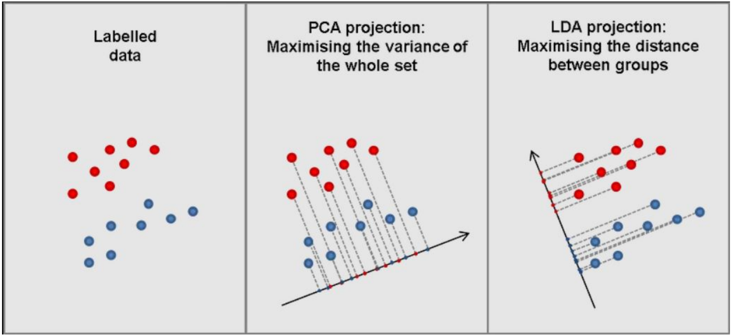
1. Obtener el conjunto de imágenes de entrenamiento.
2. Calcular y sustraer la imagen promedio.
3. Calcular autovalores y autovectores de la matriz de covarianza.
4. Escoger las k componentes principales según un umbral $\epsilon < \frac{\sum_{i=1}^{k} s_i^2}{\sum_{i=1}^{n} s_i^2}$.

Dataset de Olivetti

Eigenfaces del dataset de Olivetti

LDA

Análisis Discriminante Lineal (**LDA**) es una técnica de *clustering* para la clasificación de datos en clases mediante la creación de hiperplanos.



Fisherfaces

(a)

(b)

Tabla de contenidos

Conclusiones

- El modelado superficial del rostro como una variedad resulta un enfoque apropiado.
- La cara se puede segmentar en regiones de curvatura constante.
- Los flujos de curvatura permiten simplificar las singularidades de la superficie y modelar gestos.
- Otras alternativas para el seguimiento de gestos son flujos como el de la energía de Willmore.
- Las estrategias *bottom-up* permiten complementar y expandir dichos modelos teóricos.

Trabajo futuro

- Incorporar geometría subyacente de músculos y esqueleto al modelo basado en apariencias.
- Realizar una simulación de gestos faciales usando mapas de curvaturas y sus relaciones en términos del funcional de energía de Willmore.
- Desarrollar la retroalimentación entre estrategias *top-down* y *bottom-up*.
- Entrenar y validar modelos de Inteligencia Artificial para el reconocimiento, seguimiento y simulación de gestos faciales.

Turno de preguntas