

# Matte 2 oblig

Hermann Nordstrand Fiksen  
Malin Bergsholm Berg

April 2025

## 1 Introduksjon

Vi har en venn som er veldig flink til å spille piano. Når han spiller, sendes det ut komplekse lydbølger som består av en rekke forskjellige frekvenser og overtoner – et perfekt eksempel på et signal som kan analyseres med Fourierteori.

Fourieranalyse er et viktig verktøy for å forstå og dekomponere slik signaler. Ved hjelp av sinus og cosinusfunksjoner kan vi beskrive selv komplekse lydbølger som en sum av enkle, periodiske komponenter. Fouriertransformen tar inn et tidsvarierende signal, og omgjør det til et frekvensvarierende signal -slik at man kan analysere hvor mye det finnes av ulike frekvenser i signalet. Fouriertransformasjonen kan skrives som i likning 1. Siden vi bruker digitale lydfiler som består av diskrete signaler er transformasjonen som brukes i praksis mer lignende likning 2, men prinsippene blir helt lik.

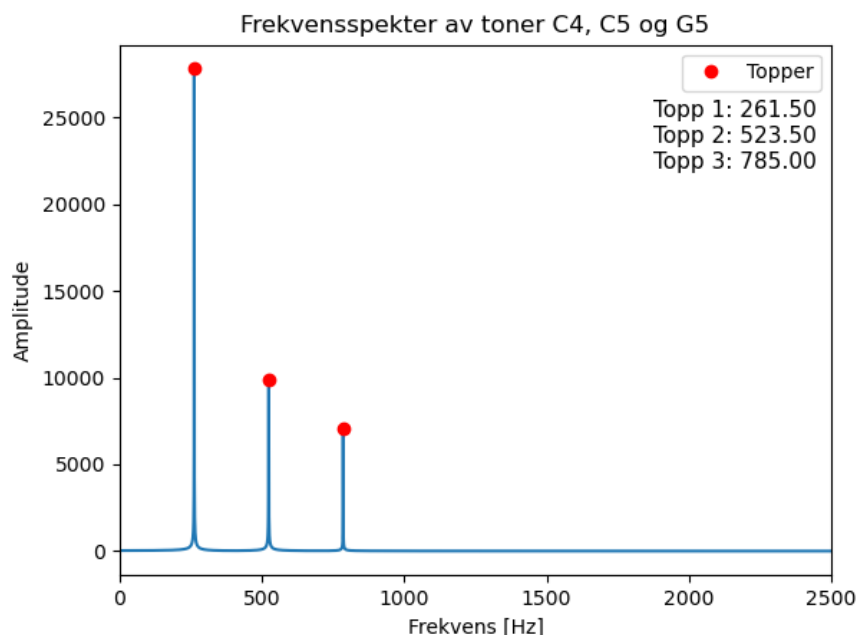
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-2\pi i f t} dt \quad (1)$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-2\pi i k n / N} \quad (2)$$

Grunnen til at signalet blir omformet til å være frekvensavhengig er selvfølgelig på grunn av at  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ , som betyr at inne i integralet i figur 1 blir to bølger ganget sammen for alle frekvensene vi ønsker å sjekke ut. Dersom frekvensene er lik vil bølgetoppene legges oppå hverandre (og akkumuleres), slik at integralet gir et stort tall for denne frekvensverdien. Dersom bølgene ikke er lik, og vi integrerer over lang tid vil de kansellere hverandre ut -og dermed betyr at denne frekvensen ikke er tilstede i signalet.

## 2 Hoveddel

### 2.1 Enkelt eksempel



Figur 1: Frekvensspekter for syntetisk lyd (C4, C5 og G5)

Vi fikk ChatGPT til å produsere et syntetisk lyd for å vise prinsippet. Alle barn i barnehagen ved at tonene C4, C5 og G5 har frekvenser på henholdsvis 261.63 Hz, 523.25 Hz og 783.99 Hz, og lydsignalet fra Chat skulle inneholde disse tonene (med C4 som grunntone og C5/G5 som overtoner). Hvis vi leser av toppene vi fikk i analysen i Figur 1 er de ganske tilsvarende teorien: 261.5 Hz, 523.5 Hz og 785.0 Hz. Vi ser også at siden C5 og G5 er overtoner blir amplituden på disse frekvensene lavere.

Vi har altså tatt et lydsignal som er (i dette tilfellet veldig lite) komplekst, omgjort signalet til en sum av sinuser og cosinuser og dermed kunne lage og lese av frekvensene (og amplitudene) som signalet består av!

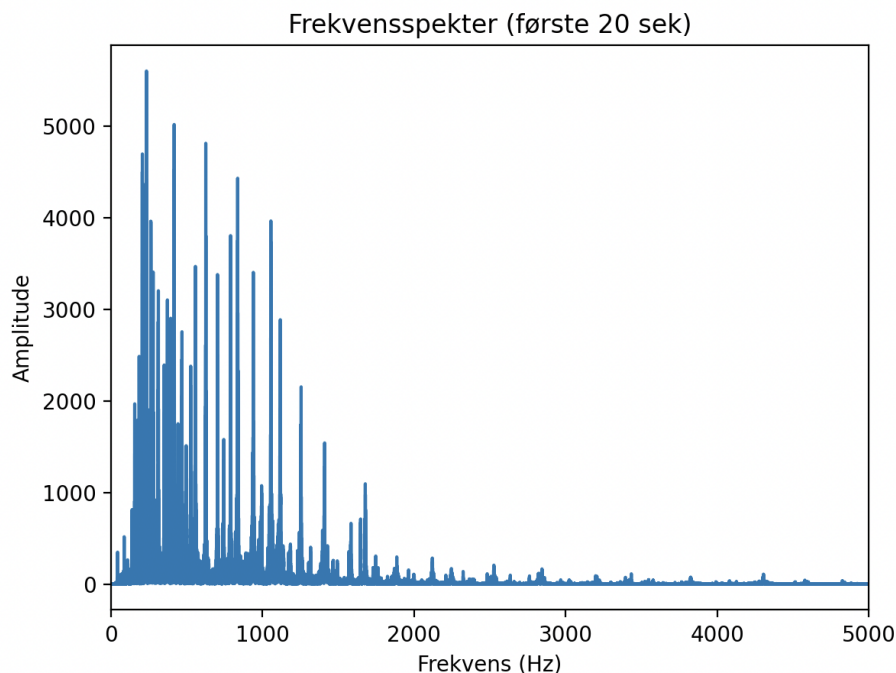
### 2.2 Eksempel med pinao stykke

Vi fikk vennen vår til å ta et lydopptak av seg selv mens han spilte piano, slik at vi kunne bruke det som grunnlag for analyse i denne oppgaven. Med litt hjelp fra ChatGPT – og et par hjelpsomme indere på YouTube – fikk vi skrevet

en Python-kode som kjørte en Fast Fourier Transform (FFT) på lydfilen, og visualiserte resultatet i et frekvensspekter (se figur 2).

I figuren viser x-aksen frekvenskomponenter (i Hz), mens y-aksen viser styrken (amplituden) til hver av disse frekvensene. Vi ser at musikkstykket i hovedsak består av lave frekvenser under 1000 Hz, noe som er typisk for akkorder og basstoner i piano. Hver topp i grafen tilsvarer en frekvens som er tilstede i lydsignalet, og de hyppige toppene under 1 kHz tyder på at mange overtoner er involvert – altså at lyden ikke er en ren sinus, men satt sammen av flere frekvenser.

Dette støtter ideen fra Fourierteorien om at ethvert signal kan representeres som en sum av sinuser, der amplituden til hver sinus forteller hvor mye den bidrar til det totale signalet. At de høyeste toppene ligger i lavfrekvensområdet tyder på at disse er de mest dominerende i lydklippet.



Figur 2: Frekvensanalyse av de første 20 sekundene av et piano stykke

### 3 Avslutning

Som fremtidige Kyb'ere ser det ut som vi skal være veldig glad for at Fourier-transformering allerede er oppfunnet. Brukes i signalbehandling, signalanalyse, støyfiltrering, sjekk av systemrespons på ulike frekvenser, bildeanalyse og medi-

sinsk kybernetikk, the list goes on. Når jeg leser denne oppramsingen kunne vi kanskje funnet viktigere eksempler enn frekvensanalyse av pianospilling, men så er vi nå fortsatt bare ingeniør-valper med støttehjul, ipad-generasjonen fra helvete og ute av stand til kritisk tenking uten hjelp av et bunnsolid kunstig nevralt nettverk. Legger forresten ved lydfila til vår gode venn pianospilleren. God påske!