

Réduction / Variables à densité

La difficulté des exercices est inquée par le nombre d'étoile(s) : facile (\star), moyen ($\star \star$) et difficile ($\star \star \star$).

Cette indication n'a rien d'absolu : ne vous découragez pas pour quelques petites étoiles !

Pour toute question ou remarque, n'hésitez pas à m'écrire à l'adresse mhacini.pro@gmail.com

Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: "I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvelous machine. – Michael Atiyah

Matrice aléatoire ($\star \star$)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 4)$. On pose $M = \begin{pmatrix} 2X & 1 \\ -4 & X \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que M admette deux valeurs propres distinctes.

Correction :

Un réel λ est valeur propre de M si et seulement si $\det(M - \lambda I_2) = 0$, soit si et seulement si

$$(2X - \lambda)(X - \lambda) + 4 = 0 \iff \lambda^2 - 3X\lambda + 2X^2 + 4 = 0.$$

Cette équation possède deux racines distinctes si et seulement si son discriminant est strictement positif, c'est-à-dire si et seulement si $X^2 - 16 > 0$. C'est le cas si et seulement si $X > 4$ ou $X < -4$. Autrement dit, l'événement « M possède deux valeurs propres distinctes » est l'événement $[X > 4] \cup [X < -4]$. Par incompatibilité de $[X > 4]$ et $[X < -4]$, la probabilité cherchée est donc $P(X > 4) + P(X < -4)$. Mais X suivant une loi $\mathcal{N}(0, 4)$, $\frac{X}{2}$ suit une loi normale centrée réduite, de sorte que

$$P(X > 4) = P\left(\frac{X}{2} > 2\right) = 1 - P\left(\frac{X}{2} \leq 2\right) = 1 - \Phi(2).$$

De même, $P(X < -4) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$. Et donc la probabilité que M possède deux valeurs propres distinctes est $2 - 2\Phi(2) \approx 0.045$.

Racines carrées (★★)

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer les endomorphismes v de \mathbb{R}^3 vérifiant $v^2 = u$.

1. a. Déterminer le rang de M et calculer $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. En déduire les éléments propres de u .
 - b. Montrer que u est diagonalisable et déterminer une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de u est diagonale.
2. Soit v un endomorphisme de \mathbb{R}^3 vérifiant $v^2 = u$.
 - a. Montrer que $v \circ u = u \circ v$. En déduire que les sous-espaces propres de u sont stables par v .
 - b. Montrer que la matrice N de v dans la base \mathcal{B} est diagonale.
En déduire les quatre seules matrices possibles pour N .
3. Montrer qu'il existe exactement quatre endomorphismes v de \mathbb{R}^3 vérifiant $v^2 = u$ et déterminer leurs matrices dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Correction :

1. a. Observons les colonnes de la matrice M . On remarque que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, donc les colonnes sont liées. Comme C_1 et C_3 ne sont pas colinéaires, le rang de M est exactement 2. Puisque la matrice n'est pas inversible, 0 est valeur propre avec un sous espace propre de dimension 1. Le vecteur $e'_1 = (1, 1, 1)$ vérifie $Me'_1 = 0$ (car $C_1 + C_2 + C_3 = 0$), il forme donc une base de E_0 .

Calculons l'image du vecteur proposé :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 \\ -4+3+2 \\ -4+2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $e'_2 = (1, 1, 2)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

La trace de la matrice est la somme des valeurs propres. On a $\text{Tr}(M) = 5$. Soit λ_3 la troisième valeur propre. On a $0 + 1 + \lambda_3 = 5$, donc $\lambda_3 = 4$.

Finalement, $\text{Sp}(u) = \{0, 1, 4\}$.

- b. L'endomorphisme u admet trois valeurs propres distinctes en dimension 3, il est donc diagonalisable. Cherchons un vecteur propre pour $\lambda_3 = 4$.

$$\begin{cases} -4x - y + z = 0 \\ -4x - y + z = 0 \\ -4x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4x + y \\ -2x + y - z = 0 \end{cases}.$$

En remplaçant z dans la seconde équation : $-2x + y - (4x + y) = -6x = 0$, donc $x = 0$. Il vient $z = y$. Le vecteur $e'_3 = (0, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à 4. La famille $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2, e'_3) = ((1, 1, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1))$ constitue une base de vecteurs propres. Dans cette base, la matrice de u est $D = \text{diag}(0, 1, 4)$.

2. a. On a $v^2 = u$. Comme v commute avec v^2 (toute puissance d'un endomorphisme commute avec lui-même), on a $v \circ u = v \circ v^2 = v^3 = v^2 \circ v = u \circ v$. Comme u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v (à remontrer).
- b. Les valeurs propres de u étant simples, les sous-espaces propres associés sont des droites vectorielles engendrées par les vecteurs de la base \mathcal{B} . Pour chaque $k \in \{1, 2, 3\}$, la droite $\mathbb{R}e'_k$ est stable par v , donc $v(e'_k)$ est colinéaire à e'_k . Il existe donc des scalaires $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ tels que $v(e'_k) = \delta_k e'_k$. La matrice N de v dans la base \mathcal{B} est donc la matrice diagonale $\text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$.

La relation $v^2 = u$ se traduit matriciellement dans la base \mathcal{B} par $N^2 = D$. On a donc $\delta_1^2 = 0$, $\delta_2^2 = 1$, $\delta_3^2 = 4$. D'où $\delta_1 = 0$, $\delta_2 \in \{-1, 1\}$ et $\delta_3 \in \{-2, 2\}$. Il y a $1 \times 2 \times 2 = 4$ matrices possibles pour N :

$$\text{diag}(0, 1, 2), \text{diag}(0, 1, -2), \text{diag}(0, -1, 2), \text{diag}(0, -1, -2).$$

3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inversons ce système pour trouver P^{-1} . Soit $X = PY$ avec $X = (x, y, z)$ et $Y = (a, b, c)$.

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = a + b + c \\ z = a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = y - x \\ b = (z - a - c) = z - a - (y - x) \dots \text{plus rapide : } (3) - (2) \Rightarrow b = z - y. \\ a = x - b = x - z + y \end{cases}$$

$$\text{On obtient } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices solutions dans la base canonique sont données par $V = PNP^{-1}$. Considérons la forme générale $N = \text{diag}(0, \varepsilon_1, 2\varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

$$PN = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 \\ 0 & 2\varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} V &= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 \\ 0 & 2\varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_1 & \varepsilon_1 \\ -2\varepsilon_2 & -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 & \varepsilon_1 \\ -2\varepsilon_2 & -2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 & 2\varepsilon_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En substituant les quatre couples $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ possibles, on obtient exactement quatre endomorphismes solutions dont les matrices sont :

- Pour $(1, 1)$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Pour $(1, -1)$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

- Pour $(-1, 1)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

- Pour $(-1, -1)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Nilpotence (★★)

Soit $n \geq 2$ et A une matrice nilpotente d'indice $p > 1$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer que $p \leq n$.
2. a. Montrer que 0 est valeur propre de A .
b. En déduire par deux méthodes que $\text{Sp}(A) = \{0\}$.
3. A est elle diagonalisable ?

Correction :

1. Soit X un vecteur tel que $A^{p-1}X \neq 0$. Un tel vecteur existe car $A^{p-1} \neq 0$. Considérons la famille $\mathcal{F} = (X, AX, A^2X, \dots, A^{p-1}X)$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ des scalaires tels que

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k A^k X = 0.$$

Appliquons A^{p-1} à cette égalité. Pour tout $k \geq 1$, $A^{p-1}A^k X = A^{p+k-1}X = 0$ car $p+k-1 \geq p$ et $A^p = 0$. Il ne reste donc que $\lambda_0 A^{p-1}X = 0$. Comme $A^{p-1}X \neq 0$, on a $\lambda_0 = 0$. On réitère le processus en appliquant A^{p-2} , ce qui donne $\lambda_1 = 0$, et ainsi de suite jusqu'à $\lambda_{p-1} = 0$. La famille \mathcal{F} est donc libre de cardinal p , donc $p \leq n$.

Remarque: Cette question est très classique et à savoir refaire rapidement.

2. a. Si 0 n'est pas valeur propre de A alors A est inversible, donc A^p l'est également. Or, $A^p = 0$ n'est évidemment pas inversible. Contradiction.

b. Méthode 1 : Recherche directe

Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Il existe un vecteur propre $x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x$. Par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k x = \lambda^k x$. Pour $k = p$, on a $A^p x = 0$, donc $\lambda^p x = 0$. Comme $x \neq 0$, on en déduit $\lambda^p = 0$, donc $\lambda = 0$. Ainsi, $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$. Par double inclusion, $\text{Sp}(A) = 0$.

c. Méthode 2 : Polynôme annulateur

Le polynôme X^p annule A , et 0 est sa seule racine. D'après le cours, $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$. Par double inclusion, $\text{Sp}(A) = 0$.

3. Aucune matrice nilpotente non nulle n'est diagonalisable. En effet, supposons A diagonalisable. Comme $\text{Sp}(A) = \{0\}$, A est semblable à la matrice diagonale nulle, donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P0_nP^{-1} = 0$. Or, par hypothèse, l'indice de nilpotence est $p > 1$, donc $A \neq 0$. Absurde.

Pas à pas (★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction :

La matrice A commute avec A^n , donc $AA^n = A^nA$.

$$\begin{aligned} AA^n &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \\ A^nA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'égalité implique le système suivant :

$$\begin{cases} a = a + c \\ a + b = b + d \\ c = c \\ c + d = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases}$$

La matrice A est donc triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux égaux. Elle s'écrit sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

On peut décomposer A comme somme d'une homothétie et d'une matrice nilpotente :

$$A = aI_2 + B \quad \text{avec } B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $B^k = 0$ pour tout $k \geq 2$. Comme aI_2 et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (aI_2 + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (aI_2)^{n-k} B^k = \binom{n}{0} a^n I_2 + \binom{n}{1} a^{n-1} B.$$

On obtient donc :

$$A^n = a^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + na^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Autre méthode : Avec un raisonnement géométrique, on peut directement conjecturer cette forme des puissances de A, et confirmer cela par récurrence.

Par identification avec la matrice donnée $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient le système :

$$\begin{cases} a^n = 1 \\ na^{n-1}b = 1 \end{cases}$$

La parité de n implique plus ou moins de solutions.

Si n est impair :

L'équation $a^n = 1$ admet une unique solution réelle $a = 1$. Le système devient $1 \cdot b \cdot n = 1$, d'où $b = \frac{1}{n}$. On obtient une unique solution :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si n est pair :

L'équation $a^n = 1$ admet deux solutions réelles : $a = 1$ et $a = -1$.

- Pour $a = 1$, on retrouve la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Pour $a = -1$, l'équation devient $n(-1)^{n-1}b = 1$. Comme n est pair, $n-1$ est impair, donc $-nb = 1$, soit $b = -\frac{1}{n}$. Cela donne la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{n} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -A_1$.