

## Révisions d'Analyse

La difficulté des exercices est indiquée par le nombre d'étoile(s) : facile (★), moyen (★★) et difficile (★★★). Cette indication n'a rien d'absolu : ne vous découragez pas pour quelques petites étoiles !

### Exercice 1 - Rentrée (★)

Soit  $p \in \mathbb{N}$  fixé. Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{n^p}{2^n}$ .

### Exercice 2 - Arches périodiques (★★)

L'objectif est d'obtenir un équivalent simple de  $\int_0^x |\sin(t)| dt$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

1. a. Montrer que la fonction  $t \mapsto |\sin(t)|$  est  $\pi$ -périodique.

b. En déduire, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la valeur de  $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt$ .

c. Soit  $x \in \mathbb{R}$ , et soit  $k \in \mathbb{N}$  l'unique réel tel que  $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ . Montrer que:

$$\int_0^x |\sin(t)| dt = 2k + \int_{k\pi}^x |\sin(t)| dt.$$

2. Déduire de la question précédente que

$$\int_0^x |\sin t| dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} x.$$

### Exercice 3 - Comparaison série intégrale (★★)

#### Partie 1 : Étude théorique

On considère une fonction  $f$  continue, décroissante et strictement positive sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ . On pose pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$u_n = \int_1^n f(t)dt \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n f(k).$$

- Montrer que la suite  $(w_n)_{n \geq 1}$  définie par  $w_n = v_n - u_n$  est décroissante et à termes positifs.
- Dans cette question, on suppose que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t)dt$  est divergente.
  - Justifier l'inégalité  $u_n > 0$  pour tout entier  $n \geq 2$ .
  - A l'aide de la suite  $w_n$ , montrer que  $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , c'est à dire:

$$\sum_{k=1}^n f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^n f(t)dt.$$

- Dans cette question, on suppose que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t)dt$  converge.
  - Que peut-on dire de la série de terme général  $f(k)$  ?
  - On définit, pour tout entier  $n$ , le reste  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ .

Montrer que si  $\frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)dt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , on a  $\frac{R_n}{\int_n^{+\infty} f(t)dt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , c'est à dire:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

#### Partie 2 : Applications

- Donner un équivalent de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- a. A l'aide de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  définie par  $g(x) = \arctan(x) + \frac{1}{x}$ , montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\arctan(n) + \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$$

- Donner un équivalent de  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## Exercice Bonus (ESPCT 2017) - Chemins autoévitant (★★★)

### Partie 1 : Lemme de Fekete

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle vérifiant pour tous  $n, m$  entiers naturels non nuls,

$$u_{m+n} \leq u_n + u_m.$$

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \min_{k \in [1, n]} \left( \frac{u_k}{k} \right)$ .

1. Montrer que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  admet une limite  $\ell$  dans  $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ .
2. Montrer que pour tous  $n, m$  entiers naturels non nuls, on a  $u_{mn} \leq mu_n$ .
3. On suppose dans cette question que  $\ell$  ne vaut pas  $-\infty$ . Soit  $\varepsilon > 0$ .
  - a. Montrer qu'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{u_m}{m} \leq \ell + \varepsilon$ .
  - b. En utilisant la division euclidienne de  $n$  par  $m$ , montrer que la suite  $\left( \frac{u_n}{n} \right)_{n \geq 1}$  converge vers  $\ell$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Partie 2 : Connectivité du réseau carré

1. Dans cette partie, on appelle **chemin sans croisement de longueur  $n$**  toute suite  $M_0, M_1, \dots, M_n$  de points du plan à coordonnées entières vérifiant :
  - i)  $M_0 = O$  (origine du plan)
  - ii) pour tout  $i \in [0, n-1]$ , la distance entre  $M_i$  et  $M_{i+1}$  est égale à 1.
  - iii) pour tout  $i \neq j$ , on a  $M_i \neq M_j$ .On note  $N_n$  le nombre de chemins sans croisement de longueur  $n$ .
  - a. Montrer que  $N_n \leq 4^n$ .
  - b. Montrer que pour tous  $n, m$  entiers naturels non nuls,  $N_{m+n} \leq N_n N_m$ .
  - c. Quelle relation vérifie la suite  $u_n = \ln(N_n)$  ?
  - d. En déduire que la suite  $\left( N_n^{\frac{1}{n}} \right)_{n \geq 1}$  converge.