

Algèbre Linéaire et Probabilités discrètes

La difficulté des exercices est inquée par le nombre d'étoile(s) : facile (\star), moyen ($\star \star$) et difficile ($\star \star \star$).

Cette indication n'a rien d'absolu : ne vous découragez pas pour quelques petites étoiles !

Pour toute question ou remarque, n'hésitez pas à m'écrire à l'adresse mhacini.pro@gmail.com

Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: "I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvelous machine. – Michael Atiyah

Exercice 1 : Changement de base (\star)

Soient $b = (i, j)$ et $B = (I, J)$ deux bases d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2 et P la matrice de passage de b à B . Pour $x \in E$, notons

$$v = \text{Mat}_b(x) \quad \text{et} \quad V = \text{Mat}_B(x).$$

1. Retrouver la relation entre v et V .
2. Soient $f \in L(E)$ et

$$m = \text{Mat}_b(f) \quad \text{et} \quad M = \text{Mat}_B(f).$$

Retrouver la relation entre m et M .

3. On suppose que M est diagonale. En déduire une méthode rapide de calcul de m^n .

Exercice 2 : Construction de sous-espaces vectoriels (\star)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$. Montrer que :

$$F \cap G \neq \{0\}.$$

Exercice 3 : Projections et sommes directes (\star)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et E_1, E_2, \dots, E_n des sous espaces vectoriels de E tels que $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$. On note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$.

1. Montrer que si $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0_E$.
2. Montrer que $p_1 + \dots + p_n = \text{Id}_E$.

Exercice 4 : Caractérisation des homothéties (★)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $f(x)$ forment une famille liée.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1. Montrer que la matrice de f dans B est diagonale.
2. En calculant $f(e_1 + \dots + e_n)$, conclure que f est une homothétie vectorielle, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$.

Exercice 5 : Calcul de rang (★)

Déterminer, suivant la valeur du réel a , le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : Matrice aléatoire (HEC 2007) (★★)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 7 : Dérivation (★★)

Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère l'application dérivation $D : f \mapsto f'$.

1. Montrer que D est un endomorphisme surjectif mais non injectif de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. a. Montrer qu'il existe un endomorphisme u de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $D \circ u = \text{Id}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.
b. Justifier qu'il n'existe pas d'endomorphisme v de E tel que $v \circ D = \text{Id}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.
3. On considère E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension 4 engendré par les fonctions

$$c_0 : x \mapsto \cos(x), \quad c_1 : x \mapsto x \cos(x), \quad c_2 : x \mapsto \sin(x), \quad \text{et} \quad c_3 : x \mapsto x \sin(x).$$

- a. Montrer que E est stable par D , c'est à dire que pour f dans E , $D(f)$ est aussi dans E .
- b. i. Donner la matrice M de D dans la base $\mathcal{B} = (c_0, c_1, s_0, s_1)$
ii. Déterminer les fonctions de E vérifiant la relation (P) sur \mathbb{R} :

$$(P) : y'' + 2y' + y = x \cos(x).$$