

Algèbre bilinéaire / Vecteurs aléatoires.

La difficulté des exercices est inquée par le nombre d'étoile(s) : facile (\star), moyen ($\star \star$) et difficile ($\star \star \star$).

Cette indication n'a rien d'absolu : ne vous découragez pas pour quelques petites étoiles !

Pour toute question ou remarque, n'hésitez pas à m'écrire à l'adresse mhacini.pro@gmail.com

Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: "I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvelous machine. – Michael Atiyah

Produits scalaires, normes et angles (\star)

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et X, Y deux vecteurs non nuls de E . On définit l'angle orienté $\theta \in [0, \pi]$ entre X et Y par $\theta = \arccos\left(\frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\|\|Y\|}\right)$.

1. a. Justifier que θ est bien défini, puis que $\langle X, Y \rangle = \|X\|\|Y\|\cos(\theta)$.
2. On définit le projeté orthogonal de X parallèlement à Y par

$$p_Y(X) = \|X\|\cos(\theta)Y = \langle X, Y \rangle e_Y, \quad \text{avec } e_Y = \frac{Y}{\|Y\|}.$$

Vérifier la cohérence géométrique de cette définition pour $E = \mathbb{R}^2$.

3. a. Montrer que $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2\|X\|\|Y\|\cos(\theta)$.
- b. En déduire le théorème de Pythagore.

Perturbation d'une famille orthonormée ($\star \star$)

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, (e_1, \dots, e_n) une famille orthonormée de E et $x_1, \dots, x_n \in E$ des vecteurs pour lesquels $\|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2 < 1$. Montrer que la famille $(e_1 + x_1, \dots, e_n + x_n)$ est libre.

Un choix judicieux ($\star \star$)

Considérons le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et l'application Φ suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_n[X]^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto \sum_{i=0}^n P(i)Q(i) \end{aligned}$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}_n[X], \Phi)$ est un espace vectoriel euclidien.
2. Orthonormaliser la famille libre $\{1, X\}$ pour ce produit scalaire.
3. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer l'orthogonal de $H_k(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (X - i)$.
4. En déduire une BON de $(\mathbb{R}_n[X], \Phi)$.

Mauvais tireur (★)

Théo fait du tir à l'arc sur une cible circulaire de rayon 1. On suppose que Théo est suffisamment maladroit pour que le point d'impact M de coordonnées (X, Y) soit uniformément distribué sur la cible. On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Quelle est la densité du couple (X, Y) ?
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y .
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Mauvaise file (★★)

Trois personnes entrent simultanément dans une poste ne comportant que deux guichets. On note X_i le temps passé par la i -ème personne au guichet. Les variables X_i sont supposées mutuellement indépendantes et suivant toutes trois la loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable correspondant au temps que doit attendre la troisième personne pour qu'un guichet se libère, notée Y .
2. En déduire que Y admet une densité, et déterminer l'une de ses densités.
3. Déterminer une densité de la variable aléatoire correspondant au temps total que la troisième personne passe dans le bureau de poste, notée Z .
4. En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

Minimum (★★)

Un sac contient N boules numérotées de 1 à N . On effectue dans ce sac n tirages uniformes d'une boule avec remise et on note Z_n le plus petit numéro obtenu. Déterminer la loi de Z_n .

Marche aléatoire (★★)

Soit $p \in]0, 1[$. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, et telles que $P(X_1 = -1) = 1 - p$ et $P(X_1 = 1) = p$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $Y_n = aX_n + b$ suive une loi de Bernoulli de paramètre p .
2. En utilisant la question précédente, déterminer la loi de S_n et calculer son espérance.
3. **Application** : un ivrogne sort du bar, et chaque seconde avance d'un mètre vers la droite avec probabilité p , ou d'un mètre vers la gauche avec probabilité $1 - p$.
En moyenne, où se trouve-t-il après 10 secondes ?