

## Réduction / Variables à densité

La difficulté des exercices est indiquée par le nombre d'étoile(s) : facile (★), moyen (★★) et difficile (★★★).

Cette indication n'a rien d'absolu : ne vous découragez pas pour quelques petites étoiles !

Pour toute question ou remarque, n'hésitez pas à m'écrire à l'adresse [mhacini.pro@gmail.com](mailto:mhacini.pro@gmail.com)

*Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: "I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvelous machine." – Michael Atiyah*

### Matrice aléatoire (★★)

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, 4)$ . On pose  $M = \begin{pmatrix} 2X & 1 \\ -4 & X \end{pmatrix}$ . Déterminer la probabilité que  $M$  admette deux valeurs propres distinctes.

#### Correction :

Un réel  $\lambda$  est valeur propre de  $M$  si et seulement si  $\det(M - \lambda I_2) = 0$ , soit si et seulement si

$$(2X - \lambda)(X - \lambda) + 4 = 0 \iff \lambda^2 - 3X\lambda + 2X^2 + 4 = 0.$$

Cette équation possède deux racines distinctes si et seulement si son discriminant est strictement positif, c'est-à-dire si et seulement si  $X^2 - 16 > 0$ . C'est le cas si et seulement si  $X > 4$  ou  $X < -4$ . Autrement dit, l'événement «  $M$  possède deux valeurs propres distinctes » est l'événement  $[X > 4] \cup [X < -4]$ . Par incompatibilité de  $[X > 4]$  et  $[X < -4]$ , la probabilité cherchée est donc  $P(X > 4) + P(X < -4)$ . Mais  $X$  suivant une loi  $\mathcal{N}(0, 4)$ ,  $\frac{X}{2}$  suit une loi normale centrée réduite, de sorte que

$$P(X > 4) = P\left(\frac{X}{2} > 2\right) = 1 - P\left(\frac{X}{2} \leq 2\right) = 1 - \Phi(2).$$

De même,  $P(X < -4) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$ . Et donc la probabilité que  $M$  possède deux valeurs propres distinctes est  $2 - 2\Phi(2) \approx 0.045$ .

## Racines carrées (★★)

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer les endomorphismes  $v$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $v^2 = u$ .

1. a. Déterminer le rang de  $M$  et calculer  $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . En déduire les éléments propres de  $u$ .  
b. Montrer que  $u$  est diagonalisable et déterminer une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.
2. Soit  $v$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $v^2 = u$ .  
a. Montrer que  $v \circ u = u \circ v$ . En déduire que les sous-espaces propres de  $u$  sont stables par  $v$ .  
b. Montrer que la matrice  $N$  de  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$  est diagonale.  
En déduire les quatre seules matrices possibles pour  $N$ .
3. Montrer qu'il existe exactement quatre endomorphismes  $v$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $v^2 = u$  et déterminer leurs matrices dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

### Correction :

1. a. Observons les colonnes de la matrice  $M$ . On remarque que  $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ , donc les colonnes sont liées. Comme  $C_1$  et  $C_3$  ne sont pas colinéaires, le rang de  $M$  est exactement 2. Puisque la matrice n'est pas inversible, 0 est valeur propre avec un sous-espace propre de dimension 1. Le vecteur  $e'_1 = (1, 1, 1)$  vérifie  $Me'_1 = 0$  (car  $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ ), il forme donc une base de  $E_0$ .

Calculons l'image du vecteur proposé :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2 \\ -4 + 3 + 2 \\ -4 + 2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que  $e'_2 = (1, 1, 2)$  est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

La trace de la matrice est la somme des valeurs propres. On a  $\text{Tr}(M) = 5$ . Soit  $\lambda_3$  la troisième valeur propre. On a  $0 + 1 + \lambda_3 = 5$ , donc  $\lambda_3 = 4$ .

Finalement,  $\text{Sp}(u) = \{0, 1, 4\}$ .

- b. L'endomorphisme  $u$  admet trois valeurs propres distinctes en dimension 3, il est donc diagonalisable. Cherchons un vecteur propre pour  $\lambda_3 = 4$ .

$$\begin{cases} -4x - y + z = 0 \\ -4x - y + z = 0 \\ -4x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4x + y \\ -2x + y - z = 0 \end{cases}$$

En remplaçant  $z$  dans la seconde équation :  $-2x + y - (4x + y) = -6x = 0$ , donc  $x = 0$ . Il vient  $z = y$ . Le vecteur  $e'_3 = (0, 1, 1)$  est un vecteur propre associé à 4. La famille  $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2, e'_3) = ((1, 1, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1))$  constitue une base de vecteurs propres. Dans cette base, la matrice de  $u$  est  $D = \text{diag}(0, 1, 4)$ .

2. a. On a  $v^2 = u$ . Comme  $v$  commute avec  $v^2$  (toute puissance d'un endomorphisme commute avec lui-même), on a  $v \circ u = v \circ v^2 = v^3 = v^2 \circ v = u \circ v$ . Comme  $u$  et  $v$  commutent, les sous-espaces propres de  $u$  sont stables par  $v$  (à remonter).
- b. Les valeurs propres de  $u$  étant simples, les sous-espaces propres associés sont des droites vectorielles engendrées par les vecteurs de la base  $\mathcal{B}$ . Pour chaque  $k \in \{1, 2, 3\}$ , la droite  $\mathbb{R}e'_k$  est stable par  $v$ , donc  $v(e'_k)$  est colinéaire à  $e'_k$ . Il existe donc des scalaires  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  tels que  $v(e'_k) = \delta_k e'_k$ . La matrice  $N$  de  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$  est donc la matrice diagonale  $\text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ .

La relation  $v^2 = u$  se traduit matriciellement dans la base  $\mathcal{B}$  par  $N^2 = D$ . On a donc  $\delta_1^2 = 0$ ,  $\delta_2^2 = 1$ ,  $\delta_3^2 = 4$ . D'où  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 \in \{-1, 1\}$  et  $\delta_3 \in \{-2, 2\}$ . Il y a  $1 \times 2 \times 2 = 4$  matrices possibles pour  $N$  :

$$\text{diag}(0, 1, 2), \text{diag}(0, 1, -2), \text{diag}(0, -1, 2), \text{diag}(0, -1, -2).$$

3. Soit  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{B}$ .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Invertissons ce système pour trouver  $P^{-1}$ . Soit  $X = PY$  avec  $X = (x, y, z)$  et  $Y = (a, b, c)$ .

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = a + b + c \\ z = a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = y - x \\ b = (z - a - c) = z - a - (y - x) \dots \text{plus rapide : } (3) - (2) \Rightarrow b = z - y \\ a = x - b = x - z + y \end{cases}$$

On obtient  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Les matrices solutions dans la base canonique sont données par  $V = PNP^{-1}$ . Considérons la forme générale  $N = \text{diag}(0, \varepsilon_1, 2\varepsilon_2)$  avec  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ .

$$PN = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 \\ 0 & 2\varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} V &= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 \\ 0 & 2\varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_1 & \varepsilon_1 \\ -2\varepsilon_2 & -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 & \varepsilon_1 \\ -2\varepsilon_2 & -2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 & 2\varepsilon_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En substituant les quatre couples  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  possibles, on obtient exactement quatre endomorphismes solutions dont les matrices sont :

- Pour  $(1, 1) : \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Pour  $(-1, 1) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

- Pour  $(1, -1) : \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

- Pour  $(-1, -1) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

## Nilpotence (★★)

Soit  $n \geq 2$  et  $A$  une matrice nilpotente d'indice  $p > 1$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , c'est à dire que  $A^p = 0$  et  $A^{p-1} \neq 0$ .

1. Montrer que  $p \leq n$ .
2. a. Montrer que 0 est valeur propre de  $A$ .  
b. En déduire par deux méthodes que  $\text{Sp}(A) = \{0\}$ .
3.  $A$  est elle diagonalisable ?

### Correction :

1. Soit  $X$  un vecteur tel que  $A^{p-1}X \neq 0$ . Un tel vecteur existe car  $A^{p-1} \neq 0$ . Considérons la famille  $\mathcal{F} = (X, AX, A^2X, \dots, A^{p-1}X)$ . Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$  des scalaires tels que

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k A^k X = 0.$$

Appliquons  $A^{p-1}$  à cette égalité. Pour tout  $k \geq 1$ ,  $A^{p-1}A^kX = A^{p+k-1}X = 0$  car  $p+k-1 \geq p$  et  $A^p = 0$ . Il ne reste donc que  $\lambda_0 A^{p-1}X = 0$ . Comme  $A^{p-1}X \neq 0$ , on a  $\lambda_0 = 0$ . On réitère le processus en appliquant  $A^{p-2}$ , ce qui donne  $\lambda_1 = 0$ , et ainsi de suite jusqu'à  $\lambda_{p-1} = 0$ . La famille  $\mathcal{F}$  est donc libre de cardinal  $p$ , donc  $p \leq n$ .

**Remarque:** Cette question est très classique et à savoir refaire rapidement.

2. a. Si 0 n'est pas valeur propre de  $A$  alors  $A$  est inversible, donc  $A^p$  l'est également. Or,  $A^p = 0$  n'est évidemment pas inversible. Contradiction.
- b. **Méthode 1 : Recherche directe**  
Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ . Il existe un vecteur propre  $x \neq 0$  tel que  $Ax = \lambda x$ . Par récurrence immédiate, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k x = \lambda^k x$ . Pour  $k = p$ , on a  $A^p x = 0$ , donc  $\lambda^p x = 0$ . Comme  $x \neq 0$ , on en déduit  $\lambda^p = 0$ , donc  $\lambda = 0$ . Ainsi,  $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$ . Par double inclusion,  $\text{Sp}(A) = \{0\}$ .
- c. **Méthode 2 : Polynôme annulateur**  
Le polynôme  $X^p$  annule  $A$ , et 0 est sa seule racine. D'après le cours,  $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$ . Par double inclusion,  $\text{Sp}(A) = \{0\}$ .
3. Aucune matrice nilpotente non nulle n'est diagonalisable. En effet, supposons  $A$  diagonalisable. Comme  $\text{Sp}(A) = \{0\}$ ,  $A$  est semblable à la matrice diagonale nulle, donc il existe  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  tel que  $A = P 0_n P^{-1} = 0$ . Or, par hypothèse, l'indice de nilpotence est  $p > 1$ , donc  $A \neq 0$ . Absurde.

### Pas à pas (★★★)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer toutes les matrices  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### Correction :

La matrice  $A$  commute avec  $A^n$ , donc  $AA^n = A^nA$ .

$$\begin{aligned} AA^n &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \\ A^nA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'égalité implique le système suivant :

$$\begin{cases} a = a + c \\ a + b = b + d \\ c = c \\ c + d = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases}$$

La matrice  $A$  est donc triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux égaux. Elle s'écrit sous la forme  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ .

On peut décomposer  $A$  comme somme d'une homothétie et d'une matrice nilpotente :

$$A = aI_2 + B \quad \text{avec } B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que  $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , donc  $B^k = 0$  pour tout  $k \geq 2$ . Comme  $aI_2$  et  $B$  commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (aI_2 + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (aI_2)^{n-k} B^k = \binom{n}{0} a^n I_2 + \binom{n}{1} a^{n-1} B.$$

On obtient donc :

$$A^n = a^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + na^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

**Autre méthode :** Avec un raisonnement géométrique, on peut directement conjecturer cette forme des puissances de  $A$ , et confirmer cela par récurrence.

Par identification avec la matrice donnée  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on obtient le système :

$$\begin{cases} a^n = 1 \\ na^{n-1}b = 1 \end{cases}$$

La parité de  $n$  implique plus ou moins de solutions.

**Si  $n$  est impair :**

L'équation  $a^n = 1$  admet une unique solution réelle  $a = 1$ . Le système devient  $1 \cdot b \cdot n = 1$ , d'où  $b = \frac{1}{n}$ . On obtient une unique solution :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Si  $n$  est pair :**

L'équation  $a^n = 1$  admet deux solutions réelles :  $a = 1$  et  $a = -1$ .

- Pour  $a = 1$ , on retrouve la matrice  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- Pour  $a = -1$ , l'équation devient  $n(-1)^{n-1}b = 1$ . Comme  $n$  est pair,  $n - 1$  est impair, donc  $-nb = 1$ , soit  $b = -\frac{1}{n}$ . Cela donne la matrice  $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{n} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -A_1$ .