M. Hacini

Algèbre linéaire : Élements propres

La difficulté des exercices est inquée par le nombre d'étoile(s) : facile (★), moyen (★ ★) et difficile (★ ★ ★).
Cette indication n'a rien d'absolu : ne vous découragez pas pour quelques petites étoiles !
Pour toute question ou remarque, n'hésitez pas à m'écrire à l'adresse mhacini.pro@gmail.com
Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: "I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvelous machine. – Michael Atiyah

---

Petites questions (★)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que 0 est valeur propre de f^n. Montrer que 0 est valeur propre de f.
2. Dans cette question, on suppose E de dimension finie. Montrer que
$$0 \notin \mathrm{Sp}(f) \iff f \text{ surjectif}$$
3. Dans cette question, on suppose que f est un automorphisme. Déterminer les valeurs propres de f^{-1} en fonction des valeurs propres de u.

Invariance du spectre par changement de base (★)

Soit $A, P \in M_n(\mathbb{R})$ avec P inversible. On note $B = PAP^{-1}$. Montrer que
$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B).$$

Caractérisation des homothéties (★★)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On suppose que tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de f.

Montrer que f est une homothétie vectorielle :
$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

Spectre clair (★)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient F, G des sous espaces vectoriels de E tels que $F \oplus G = E$. On note p le projecteur sur F parallèlement à G.

1. Montrer par deux méthodes différentes que $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$.
2. Vérifier quelles valeurs de $\{0, 1\}$ sont effectivement valeurs propres de p et déterminer les vecteurs propres associées.

Spectre obscur (★★★)

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$. Soit T l'endomorphisme de E qui à $f \in E$ associe $T(f)$ défini par

$$\forall x \in [0; +\infty[, T(f)(x) = f(x+1).$$

Déterminer les valeurs propres de T et les vecteurs propres associés.

Polynôme minimal (★★)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Soit Q un polynôme tel que $Q(f) = 0$ et de degré minimal parmi les polynômes non nuls tels que $P(f) = 0$. Montrer que toute racine de Q est valeur propre de f.