Révisions d'Analyse

La difficulté des exercices est inquée par le nombre d'étoile(s) : facile (★), moyen (★ ★) et difficile (★ ★ ★). Cette indication n'a rien d'absolu : ne vous découragez pas pour quelques petites étoiles !

Exercice 1 - Rentrée (★)

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{n^p}{2^n}$.

Exercice 2 - Arches périodiques (★★)

L'objectif est d'obtenir un équivalent simple de $\displaystyle\int_0^x |\sin(t)|dt$ lorsque $x \to +\infty$.

1. a. Montrer que la fonction $t \mapsto |\sin(t)|$ est π-périodique.

   b. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|dt$.

   c. Soit $x \in \mathbb{R}$, et soit $k \in \mathbb{N}$ l'unique réel tel que $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$. Montrer que:

$$\int_0^x |\sin(t)|dt = 2k + \int_{k\pi}^x |\sin(t)|dt.$$

2. Déduire de la question précédente que

$$\int_0^x |\sin t\,|\,dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}x.$$

Exercice 3 - Comparaison série intégrale (★★)

Partie 1 : Étude théorique

On considère une fonction f continue, décroissante et strictement positive sur l'intervalle $[1;+\infty[$. On pose pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = \int_1^n f(t)dt \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ définie par $w_n = v_n - u_n$ est décroissante et à termes positifs.

2. Dans cette question, on suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

   a. Justifier l'inégalité $u_n > 0$ pour tout entier $n \geq 2$.

   b. A l'aide de la suite w_n, montrer que $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, c'est à dire:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n f(t)dt.$$

3. Dans cette question, on suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.

   a. Que peut-on dire de la série de terme général $f(k)$?

   b. On définit, pour tout entier n, le reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.

   Montrer que si $\dfrac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)dt} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\dfrac{R_n}{\int_n^{+\infty} f(t)dt} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, c'est à dire:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

Partie 2 : Applications

1. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. a. A l'aide de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ définie par $g(x) = \arctan(x) + \frac{1}{x}$, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\arctan(n) + \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$$

   b. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice Bonus (ESPCT 2017) - Chemins autoévitants (★★★)

Partie 1 : Lemme de Fekete

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle vérifiant pour tous n, m entiers naturels non nuls,

$$u_{m+n} \leq u_n + u_m.$$

On pose, pour tout $n \in N^*$, $v_n = \min\limits_{k\in[1,n]} \left(\frac{u_k}{k}\right)$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ admet une limite ℓ dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tous n, m entiers naturels non nuls, on a $u_{mn} \leq m u_n$.
3. On suppose dans cette question que ℓ ne vaut pas $-\infty$. Soit $\varepsilon > 0$.
   a. Montrer qu'il existe $m \in N$ tel que $\frac{u_m}{m} \leq \ell + \varepsilon$.
   b. En utilisant la division euclidienne de n par m, montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie 2 : Connectivité du réseau carré

1. Dans cette partie, on appelle **chemin sans croisement de longueur *n*** toute suite $M_0, M_1, \ldots, M_n$ de points du plan à coordonnées entières vérifiant :

   i) $M_0 = O$ (origine du plan)

   ii) pour tout $i \in [0, n-1]$, la distance entre M_i et M_{i+1} est égale à 1.

   iii) pour tout $i \neq j$, on a $M_i \neq M_j$.

   On note N_n le nombre de chemins sans croisement de longueur n.

   a. Montrer que $N_n \leq 4^n$.

   b. Montrer que pour tous n, m entiers naturels non nuls, $N_{m+n} \leq N_n N_m$.

   c. Quelle relation vérifie la suite $u_n = \ln(N_n)$?

   d. En déduire que la suite $\left(N_n^{\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge.