Algèbre bilinéaire / Vecteurs aléatoires.

La difficulté des exercices est inquée par le nombre d'étoile(s) : facile (★), moyen (★ ★) et difficile (★ ★ ★).
Cette indication n'a rien d'absolu : ne vous découragez pas pour quelques petites étoiles !
Pour toute question ou remarque, n'hésitez pas à m'écrire à l'adresse mhacini.pro@gmail.com

L'algèbre linéaire constitue un des trois grands blocs du programme d'ECG, avec l'analyse et les probabilités. Dans le cadre de la prépa, elle peut paraître abstraite et remplie de calculs à rallonge, notations, théorèmes et concepts abscons.

Cependant, cette théorie à émergée de l'idée simple d'étuder les systèmes linéaires sous l'angle de la **géométrie**, ce qui a débouché sur l'axiomatisation des espaces vectoriels comme concept général fondateur. Il ne faut donc jamais perdre de vue notre amie géométrie, car son omniprésence sera le phare de notre voyage dans une nuit abstraite.

A cet effet, je recommande ardamment l'excellente série de vidéos Essence of Linear Algebra de la chaîne 3blue1brown (en anglais sous titré français). Le chapitre 9 (Produit scalaire et Dualité) explique en particulier la notion fondamentale de l'introduction à l'algèbre bilinéaire au programme d'ECG.

Je suis persuadé que quelques heures de méditation sur cette présentation de l'algèbre linéaire au cours de l'année vous sera infiniment plus utile qu'un enchaînement machinal d'exercices. En effet, leur réalité évidente sous-jacente vous resterait pour toujours invisible avec des yeux calculatoires.

Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: "I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvelous machine. – Michael Atiyah

---

Produits scalaires, normes et angles (★)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et X, Y deux vecteurs non nuls de E. On définit l'angle orienté $\theta \in [0,\pi]$ entre X et Y par $\theta = \arccos\left(\frac{\langle X,Y\rangle}{\|X\|\|Y\|}\right)$.

1. a. Justifier que θ est bien défini, puis que $\langle X, Y\rangle = \|X\|\|Y\|\cos(\theta)$.
2. On définit le projeté orthogonal de X parallèlement à Y par

$$p_Y(X) = \|X\|\cos(\theta)Y = \langle X, Y\rangle e_Y, \quad \text{avec } e_Y = \frac{Y}{\|Y\|}.$$

   Vérifier la cohérence géométrique de cette définition pour $E = \mathbb{R}^2$.
3. a. Montrer que $\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2\|X\|\|Y\|\cos(\theta)$.
   b. En déduire le théorème de Pythagore.

Perturbation d'une famille orthonormée (★★)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthonormée de E et $x_1, \ldots, x_n \in E$ des vecteurs pour lesquels $\|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2 < 1$. Montrer que la famille $(e_1 + x_1, \ldots, e_n + x_n)$ est libre.

Un choix judicieux (★★)

Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et l'application Φ suivante :

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R}_n[X]^2 &\to \mathbb{R}\\ (P,Q) &\mapsto \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)\end{aligned}$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}_n[X], \Phi)$ est un espace vectoriel euclidien.
2. Orthonormaliser la famille libre $\{1, X\}$ pour ce produit scalaire.
3. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer l'orthogonal de $H_k(X) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} (X-i)$.
4. En déduire une BON de $(\mathbb{R}_n[X], \Phi)$.

Mauvais tireur (★)

Théo fait du tir à l'arc sur une cible circulaire de rayon 1. On suppose que Théo est suffisamment maladroit pour que le point d'impact M de coordonnées (X, Y) soit uniformément distribué sur la cible. On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Quelle est la densité du couple (X, Y) ?
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Minimum (★★)

Un sac contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue dans ce sac n tirages uniformes d'une boule avec remise et on note Z_n le plus petit numéro obtenu. Déterminer la loi de Z_n.

Marche aléatoire (★★)

Soit $p \in]0,1[$. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, et telles que $P(X_1 = -1) = 1 - p$ et $P(X_1 = 1) = p$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $Y_n = aX_n + b$ suive une loi de Bernoulli de paramètre p.
2. En utilisant la question précédente, déterminer la loi de S_n et calculer son espérance.
3. **Application** : un ivrogne sort du bar, et chaque seconde avance d'un mètre vers la droite avec probabilité p, ou d'un mètre vers la gauche avec probabilité $1 - p$.
   En moyenne, où se trouve-t-il après 10 secondes ?