Algèbre linéaire : Réduction

La difficulté des exercices est inquée par le nombre d'étoile(s) : facile (★), moyen (★ ★) et difficile (★ ★ ★).
Cette indication n'a rien d'absolu : ne vous découragez pas pour quelques petites étoiles !
Pour toute question ou remarque, n'hésitez pas à m'écrire à l'adresse mhacini.pro@gmail.com

Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: "I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvelous machine. – Michael Atiyah

---

Racines carrées (★★)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer les endomorphismes v de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v^2 = u$.

1. a. Déterminer le rang de M et calculer $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. En déduire les éléments propres de u.
   b. Montrer que u est diagonalisable et déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.
2. Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v^2 = u$.
   a. Montrer que $v \circ u = u \circ v$. En déduire que les sous-espaces propres de u sont stables par v.
   b. Montrer que la matrice N de v dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.
   En déduire les quatre seules matrices possibles pour N.
3. Montrer qu'il existe exactement quatre endomorphismes v de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v^2 = u$ et déterminer leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Nilpotence (★★)

Soit $n \geq 2$ et A une matrice nilpotente d'indice $p > 1$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer que $p \leq n$.
2. a. Montrer que 0 est valeur propre de A.
   b. En déduire par deux méthodes que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
3. A est elle diagonalisable ?

Pas à pas (★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spectre obscur (★★★)

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$. Soit T l'endomorphisme de E qui à $f \in E$ associe $T(f)$ défini par

$$\forall x \in [0; +\infty[, T(f)(x) = f(x+1).$$

Déterminer les valeurs propres de T et les vecteurs propres associés.