Produit scalaire, Espaces Euclidiens

La difficulté des exercices est inquée par le nombre d'étoile(s) : facile (★), moyen (★ ★) et difficile (★ ★ ★).
Cette indication n'a rien d'absolu : ne vous découragez pas pour quelques petites étoiles !
Pour toute question ou remarque, n'hésitez pas à m'écrire à l'adresse mhacini.pro@gmail.com

Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: "I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvelous machine. – Michael Atiyah

Produits scalaires, normes et angles (★)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et X, Y deux vecteurs non nuls de E. On définit l'angle orienté $\theta \in [0, \pi]$ entre X et Y par $\theta = \arccos\left(\frac{\langle X,Y\rangle}{\|X\|\|Y\|}\right)$.

1. a. Justifier que θ est bien défini, puis que $\langle X, Y\rangle = \|X\|\|Y\|\cos(\theta)$.
2. On définit le projeté orthogonal de X parallèlement à Y par

$$p_Y(X) = \|X\|\cos(\theta)Y = \langle X, Y\rangle e_Y, \quad \text{avec } e_Y = \frac{Y}{\|Y\|}.$$

   Vérifier la cohérence géométrique de cette définition pour $E = \mathbb{R}^2$.
3. a. Montrer que $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2\|X\|\|Y\|\cos(\theta)$.
   b. En déduire le théorème de Pythagore.

Perturbation d'une famille orthonormée (★★)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthonormée de E et $x_1, \ldots, x_n \in E$ des vecteurs pour lesquels $\|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2 < 1$. Montrer que la famille $(e_1 + x_1, \ldots, e_n + x_n)$ est libre.

Un choix judicieux (★★)

Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et l'application Φ suivante :

$$\Phi : \mathbb{R}_n[X]^2 \to \mathbb{R}$$
$$(P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}_n[X], \Phi)$ est un espace vectoriel euclidien.
2. Orthonormaliser la famille libre $\{1, X\}$ pour ce produit scalaire.
3. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer l'orthogonal de $H_k(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(X - i)$.
4. En déduire une BON de $(\mathbb{R}_n[X], \Phi)$.

Familles presque orthorgonales (ESCP) (★★★)

Soit $\mu \geq 1$, et soit E un espace euclidien de produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E est dite μ-presque orthogonale si :

- pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|u_i\| = 1$
- pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \left\|\sum_{i=1}^n x_i u_i\right\|^2 \leq \mu \sum_{i=1}^n x_i^2$.

1. Montrer qu'une famille μ-presque orthogonale est libre.
2. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est 1-presque orthogonale si et seulement si elle est orthonormée.
3. Soit f un endomorphisme de E.
   a) Montrer qu'il existe un réel k tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|$.
   b) Montrer que si f est un automorphisme de E, alors il existe un réel $\lambda \geq 1$ tel que $\forall x \in E, \frac{1}{\lambda}\|x\| \leq \|f(x)\| \leq \lambda\|x\|$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre de vecteurs unitaires de E. Montrer l'existence d'un réel $\mu \geq 1$ tel que $(u_1, \ldots, u_n)$ soit μ-presque orthogonale.