Algèbre linéaire : Réduction

La difficulté des exercices est inquée par le nombre d'étoile(s) : facile (★), moyen (★ ★) et difficile (★ ★ ★).
Cette indication n'a rien d'absolu : ne vous découragez pas pour quelques petites étoiles !
Pour toute question ou remarque, n'hésitez pas à m'écrire à l'adresse mhacini.pro@gmail.com

Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: "I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvelous machine. – Michael Atiyah

---

Racines carrées (★★)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer les endomorphismes v de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v^2 = u$.

1. a. Déterminer le rang de M et calculer $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. En déduire les éléments propres de u.

   b. Montrer que u est diagonalisable et déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.

2. Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v^2 = u$.

   a. Montrer que $v \circ u = u \circ v$. En déduire que les sous-espaces propres de u sont stables par v.

   b. Montrer que la matrice N de v dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.
   En déduire les quatre seules matrices possibles pour N.

3. Montrer qu'il existe exactement quatre endomorphismes v de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v^2 = u$ et déterminer leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Correction :

1. a. Observons les colonnes de la matrice M. On remarque que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, donc les colonnes sont liées. Comme C_1 et C_3 ne sont pas colinéaires, le rang de M est exactement 2. Puisque la matrice n'est pas inversible, 0 est valeur propre avec un sous espace propre de dimension 1. Le vecteur $e_1' = (1, 1, 1)$ vérifie $Me_1' = 0$ (car $C_1 + C_2 + C_3 = 0$), il forme donc une base de E_0.

   Calculons l'image du vecteur proposé :

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 \\ -4+3+2 \\ -4+2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   On en déduit que $e_2' = (1, 1, 2)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

La trace de la matrice est la somme des valeurs propres. On a $\mathrm{Tr}(M) = 5$. Soit λ_3 la troisième valeur propre. On a $0 + 1 + \lambda_3 = 5$, donc $\lambda_3 = 4$.
Finalement, $\mathrm{Sp}(u) = \{0, 1, 4\}$.

b. L'endomorphisme u admet trois valeurs propres distinctes en dimension 3, il est donc diagonalisable. Cherchons un vecteur propre pour $\lambda_3 = 4$.

$$\begin{cases} -4x - y + z = 0 \\ -4x - y + z = 0 \\ -4x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4x + y \\ -2x + y - z = 0 \end{cases}.$$

En remplaçant z dans la seconde équation : $-2x + y - (4x + y) = -6x = 0$, donc $x = 0$. Il vient $z = y$. Le vecteur $e_3' = (0, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à 4. La famille $\mathcal{B} = (e_1', e_2', e_3') = ((1, 1, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1))$ constitue une base de vecteurs propres. Dans cette base, la matrice de u est $D = \mathrm{diag}(0, 1, 4)$.

2. a. On a $v^2 = u$. Comme v commute avec v^2 (toute puissance d'un endomorphisme commute avec lui-même), on a $v \circ u = v \circ v^2 = v^3 = v^2 \circ v = u \circ v$. Comme u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v (à remontrer).

   b. Les valeurs propres de u étant simples, les sous-espaces propres associés sont des droites vectorielles engendrées par les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Pour chaque $k \in \{1, 2, 3\}$, la droite $\mathbb{R}e_k'$ est stable par v, donc $v(e_k')$ est colinéaire à e_k'. Il existe donc des scalaires $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ tels que $v(e_k') = \delta_k e_k'$. La matrice N de v dans la base $\mathcal{B}$ est donc la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$.

   La relation $v^2 = u$ se traduit matriciellement dans la base $\mathcal{B}$ par $N^2 = D$. On a donc $\delta_1^2 = 0$, $\delta_2^2 = 1$, $\delta_3^2 = 4$. D'où $\delta_1 = 0$, $\delta_2 \in \{-1, 1\}$ et $\delta_3 \in \{-2, 2\}$. Il y a $1 \times 2 \times 2 = 4$ matrices possibles pour N :

$$\mathrm{diag}(0, 1, 2), \mathrm{diag}(0, 1, -2), \mathrm{diag}(0, -1, 2), \mathrm{diag}(0, -1, -2).$$

3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inversons ce système pour trouver P^{-1}. Soit $X = PY$ avec $X = (x, y, z)$ et $Y = (a, b, c)$.

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = a + b + c \\ z = a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = y - x \\ b = (z - a - c) = z - a - (y - x) \ldots \text{ plus rapide : } (3) - (2) \Rightarrow b = z - y. \\ a = x - b = x - z + y \end{cases}$$

On obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Les matrices solutions dans la base canonique sont données par $V = PNP^{-1}$. Considérons la forme générale $N = \mathrm{diag}(0, \varepsilon_1, 2\varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

$$PN = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 \\ 0 & 2\varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
V &= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 \\ 0 & 2\varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_1 & \varepsilon_1 \\ -2\varepsilon_2 & -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 & \varepsilon_1 \\ -2\varepsilon_2 & -2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 & 2\varepsilon_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En substituant les quatre couples $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ possibles, on obtient exactement quatre endomorphismes solutions dont les matrices sont :

- Pour $(1, 1)$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- Pour $(-1, 1)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$
- Pour $(1, -1)$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
- Pour $(-1, -1)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Nilpotence (★★)

Soit $n \geq 2$ et A une matrice nilpotente d'indice $p > 1$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer que $p \leq n$.
2. a. Montrer que 0 est valeur propre de A.
   b. En déduire par deux méthodes que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
3. A est elle diagonalisable ?

Correction :

1. Soit X un vecteur tel que $A^{p-1}X \neq 0$. Un tel vecteur existe car $A^{p-1} \neq 0$. Considérons la famille $\mathcal{F} = \left(X, AX, A^2X, \ldots, A^{p-1}X\right)$. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}$ des scalaires tels que
$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k A^k X = 0.$$
   Appliquons A^{p-1} à cette égalité. Pour tout $k \geq 1$, $A^{p-1}A^kX = A^{p+k-1}X = 0$ car $p + k - 1 \geq p$ et $A^p = 0$. Il ne reste donc que $\lambda_0 A^{p-1}X = 0$. Comme $A^{p-1}X \neq 0$, on a $\lambda_0 = 0$. On réitère le processus en appliquant A^{p-2}, ce qui donne $\lambda_1 = 0$, et ainsi de suite jusqu'à $\lambda_{p-1} = 0$. La famille $\mathcal{F}$ est donc libre de cardinal p, donc $p \leq n$.

   Remarque: Cette question est très classique et à savoir refaire rapidement.

2. a. Si 0 n'est pas valeur propre de A alors A est inversible, donc A^p l'est également. Or, $A^p = 0$ n'est évidemment pas inversible. Contradiction.

   b. **Méthode 1 : Recherche directe**
   Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Il existe un vecteur propre $x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x$. Par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k x = \lambda^k x$. Pour $k = p$, on a $A^p x = 0$, donc $\lambda^p x = 0$. Comme $x \neq 0$, on en déduit $\lambda^p = 0$, donc $\lambda = 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$. Par double inclusion, $\mathrm{Sp}(A) = 0$.

   c. **Méthode 2 : Polynôme annulateur**
   Le polynôme X^p annule A, et 0 est sa seule racine. D'après le cours, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$. Par double inclusion, $\mathrm{Sp}(A) = 0$.

3. Aucune matrice nilpotente non nulle n'est diagonalisable. En effet,supposons A diagonalisable. Comme $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, A est semblable à la matrice diagonale nulle, donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P0_nP^{-1} = 0$. Or, par hypothèse, l'indice de nilpotence est $p > 1$, donc $A \neq 0$. Absurde.

Pas à pas (★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction :

La matrice A commute avec A^n, donc $AA^n = A^nA$.

$$AA^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$
$$A^nA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

L'égalité implique le système suivant :

$$\begin{cases} a = a + c \\ a + b = b + d \\ c = c \\ c + d = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases}$$

La matrice A est donc triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux égaux. Elle s'écrit sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

On peut décomposer A comme somme d'une homothétie et d'une matrice nilpotente :

$$A = aI_2 + B \quad \text{avec } B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $B^k = 0$ pour tout $k \geq 2$. Comme aI_2 et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (aI_2 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aI_2)^{n-k} B^k = \binom{n}{0} a^n I_2 + \binom{n}{1} a^{n-1} B.$$

On obtient donc :

$$A^n = a^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + na^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Autre méthode : Avec un raisonnement géométrique, on peut directement conjecturer cette forme des puissances de A, et confirmer cela par récurrence.

Par identification avec la matrice donnée $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient le système :

$$\begin{cases} a^n = 1 \\ na^{n-1}b = 1 \end{cases}$$

La parité de n implique plus ou moins de solutions.

Si n est impair :
L'équation $a^n = 1$ admet une unique solution réelle $a = 1$. Le système devient $1 \cdot b \cdot n = 1$, d'où $b = \frac{1}{n}$. On obtient une unique solution :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si n est pair :
L'équation $a^n = 1$ admet deux solutions réelles : $a = 1$ et $a = -1$.
• Pour $a = 1$, on retrouve la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
• Pour $a = -1$, l'équation devient $n(-1)^{n-1}b = 1$. Comme n est pair, $n - 1$ est impair, donc $-nb = 1$, soit $b = -\frac{1}{n}$. Cela donne la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{n} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -A_1$.

Spectre obscur (★★★)

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$. Soit T l'endomorphisme de E qui à $f \in E$ associe $T(f)$ défini par

$$\forall x \in [0; +\infty[, T(f)(x) = f(x+1).$$

Déterminer les valeurs propres de T et les vecteurs propres associés.

Correction :

Soient λ un réel et f une fonction élément de E. Si $T(f) = \lambda f$ alors

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x+1) = \lambda f(x).$$

En passant cette relation à la limite quand $x \to +\infty$, on obtient

$$\ell = \lambda \ell$$

en notant ℓ la limite de f en $+\infty$.

Cas 1 : $\ell \neq 0$.
Nécessairement $\lambda = 1$ et

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x+1) = f(x).$$

Puisque f est périodique et admet une limite finie en $+\infty$, elle est constante (à reprouver). Inversement, toute fonction constante non nulle est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Cas 2 : $\ell = 0$.
Si λ est valeur propre alors en introduisant f vecteur propre associé, il existe $x_0 \in [0; +\infty[$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et la relation $T(f) = \lambda f$ donne par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_0 + n) = \lambda^n f(x_0).$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient $|\lambda| < 1$.

Inversement, supposons $|\lambda| < 1$. Si $T(f) = \lambda f$ alors

$$f(1) = \lambda f(0) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1[, f(x+n) = \lambda^n f(x).$$

La fonction f est donc entièrement déterminée par sa restriction continue sur $[0; 1]$ vérifiant $f(1) = \lambda f(0)$.

Inversement, si $\varphi : [0; 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[0; 1]$ vérifiant $\varphi(1) = \lambda\varphi(0)$, alors la fonction f définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1[, f(x+n) = \lambda^n \varphi(x)$$

est continue (on vérifie la continuité en $k \in \mathbb{N}^*$ par continuité à droite et à gauche), tend vers 0 en $+\infty$ et vérifie $T(f) = \lambda f$.

Puisqu'il est possible de construire une fonction non nulle de la sorte, le scalaire $\lambda \in]-1;1[$ est valeur propre et les vecteurs propres associés sont les fonctions non nulles de la forme précédente.