

Algèbre linéaire : Éléments propres

La difficulté des exercices est indiquée par le nombre d'étoile(s) : facile (★), moyen (★★) et difficile (★★★).

Cette indication n'a rien d'absolu : ne vous découragez pas pour quelques petites étoiles !

Pour toute question ou remarque, n'hésitez pas à m'écrire à l'adresse mhacini.pro@gmail.com

Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: "I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvelous machine." – Michael Atiyah

Petites questions (★)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que 0 est valeur propre de f^n . Montrer que 0 est valeur propre de f .
2. Dans cette question, on suppose E de dimension finie. Montrer que

$$0 \notin \text{Sp}(f) \iff f \text{ surjectif}$$

3. Dans cette question, on suppose que f est un automorphisme. Déterminer les valeurs propres de f^{-1} en fonction des valeurs propres de u .

Invariance du spectre par changement de base (★)

Soit $A, P \in M_n(\mathbb{R})$ avec P inversible. On note $B = PAP^{-1}$. Montrer que

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B).$$

Caractérisation des homothéties (★★)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E . On suppose que tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de f .

Montrer que f est une homothétie vectorielle :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

Spectre clair (★)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

Soient F, G des sous espaces vectoriels de E tels que $F \oplus G = E$. On note p le projecteur sur F parallèlement à G .

Déterminer les valeurs propres de p et les vecteurs propres associés.

Spectre obscur (★★★)

Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers \mathbb{R} admettant une limite finie en $+\infty$. Soit T l'endomorphisme de E qui à $f \in E$ associe $T(f)$ défini par

$$\forall x \in [0; +\infty[, T(f)(x) = f(x + 1).$$

Déterminer les valeurs propres de T et les vecteurs propres associés.