M. Hacini
Semaine 9

Probabilités discrètes

La difficulté des exercices est inquée par le nombre d'étoile(s) : facile (★), moyen (★ ★) et difficile (★ ★ ★).
Cette indication n'a rien d'absolu : ne vous découragez pas pour quelques petites étoiles !
Pour toute question ou remarque, n'hésitez pas à m'écrire à l'adresse mhacini.pro@gmail.com

Rappelons-nous qu'autrefois, et à une époque qui n'est pas encore bien reculée, une pluie ou une sécheresse extrême, une comète traînant après elle une queue fort étendue, les éclipses, les aurores boréales et généralement tous les phénomènes extraordinaires étaient regardés comme autant de signes de la colère céleste. On invoquait le ciel pour détourner leur funeste influence. [En réalité,] la courbe décrite par une simple molécule d'air ou de vapeurs, est réglée d'une manière aussi certaine, que les orbites planétaires : il n'y a de differences entre elles, que celle qu'y met notre ignorance. La probabilité est relative en partie à cette ignorance, en partie à nos connaissances.

– Pierre Simon de Laplace

Conditionnement (★)

On dispose de $(n+1)$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$, chaque urne U_k contenant $(k+1)$ boules numérotées de 0 à k. On tire une première boule dans l'urne U_n, dont le numéro indique dans quelle urne on tirera une seconde boule. On note K le numéro de la première boule tirée, X le numéro de la deuxième.

A l'aide d'un conditionnement approprié, déterminer $E(X)$.

L'infinité des coups de midi (★★)

Un candidat à un jeu télévisé doit répondre successivement à un nombre non exhaustif de questions indépendantes indexées sur $\mathbb{N}^*$. Il est éliminé dès qu'il donne une réponse incorrecte à l'une des questions posées et on note X la variable aléatoire qui est égale au numéro de la dernière réponse correcte donnée par le candidat. Si le candidat ne répond pas correctement dès la première question, alors on pose $X = 0$.

Cas 1 : On suppose que la probabilité de répondre correctement à la question numérotée n est égale exactement à $\frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a. Déterminer la loi associée à la variable aléatoire X.
   b. Déterminer l'espérance et la variance de X.

   Indication: On pourra considérer les variables aléatoires $Y = X + 1$ et $Z = X^2 - 1$.

Cas 2 : On suppose que la probabilité de répondre correctement à la question numérotée n est égale exactement à $\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

1. a. Déterminer la loi associée à la variable aléatoire X.
   b. Déterminer l'espérance de X.

2. Comparer les deux cas, puis conclure.

Formule du produit d'Euler (★★★)

Pour tout $s > 1$, on pose :

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^s}$$

Lors d'une épreuve de lancer de javelot, on suppose que la probabilité que le lanceur obtienne le *score* m, c'est-à-dire qu'après le lancer du javelot, celui-ci se situe à une distance entre $m-1$ et m (exprimée en mètre) est donnée par :

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \ \ p_m = \frac{\lambda}{m^s}\ , \ \ \text{avec } s > 1$$

On note L_m cet évenement.

1. Justifier que la fonction ζ est bien définie pour tout $s > 1$.
2. Déterminer la valeur du réel λ en fonction de s, de sorte que $(p_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ définisse une loi de probabilité.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement « le score du lanceur est divisible par n ».
   a. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ P(A_n) = \frac{1}{n^s}$$
   b. On note P l'ensemble des nombres premiers. Etablir que $(A_p)_{p\in P}$ est une famille d'évènements indépendants.
4. En déduire que :
   $$\forall s > 1 \ \ \frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in P}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$
5. BONUS : Donner une idée informelle de preuve de l'égalité finale sans utiliser de probabilités.